На правах рукописи

ХРЯЩЕВ Сергей Михайлович

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ С РЕГУЛЯРНЫМ И ХАОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
Диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2006

РАБОТА ВЫПОЛНЕНА НА КАФЕДРЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ"

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, А.Е Барабанов
доктор физико-математических наук, А.Н. Чурилов
доктор технических наук, профессор С.Ф. Бурдаков

Ведущая организация — Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург.

Защита диссертации состоится ______________ 2006 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 ГОУ ВПО "СПбГПУ" по адресу: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29, корп. 1, ауд. ____

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ГОУ ВПО "СПбГПУ".

Автореферат разослан ____________________ 2006 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.229.13,
доктор биологических наук, профессор А.В. Зинковский

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из методов изучения реальных систем управления является построение и исследование их математических моделей. С математической точки зрения речь идет об исследовании свойств различных классов систем управления. Важной частью этих исследований является определение степени управляемости систем. Проблема управляемости имеет длинную историю и продолжает оставаться одной из самых актуальных проблем теории управления. Точкой отсчета современного периода развития теории можно считать появление работ Калмана в шестидесятых годах прошлого века, в которых были получены условия управляемости класса линейных систем. Несколько позднее стал исследоваться класс билинейных систем. Линейные и билинейные системы являются простейшими моделями локального описания систем управления. А именно, линейная система является моделью системы управления в окрестности точки общего положения, билинейная система является моделью системы управления в окрестности точки покоя.

Практически одновременно с исследованием управляемости линейных систем стали разрабатываться методы для исследования управляемости различных классов нелинейных систем. Значительные успехи в исследовании задач управляемости были достигнуты благодаря применению геометрических и алгебраических методов исследования управляемости. Описание результатов, полученных применением дифференциально-геометрических и теоретико-групповых методов, можно найти в ряде обзоров, в частности в обзорах Андреева Ю.Н. (1982), Аграчева А.А., Вахрамеева С.А., Гамкрелидзе Р.В (1983), Вахрамеева С.А. и Сарычева А.В. (1985). Некоторые новые результаты отражены в книге Аграчева А.А и Сачкова Ю.Л. (2005). Среди многочисленных работ этого направления, имеющих отношение к теме диссертации, отметим некоторые работы следующих авторов: Кучеры И. (1966), Брокета Р.В. (1972), Суссмана Х. (1972-1978), Петрова Н.Н. (1977-1985), Лепе Н.Л. (1984), Емельянова С.В. и др. (1986), Сачкова Ю.Л. (1991).

Однако, разграничение систем по признаку линейности или нелинейности часто является поверхностным и не раскрывает особенностей этих систем. Более адекватным представляется деление систем на классы по характеру поведения их траекторий. Другими словами, следует разделять системы на классы по степени их регулярности или хаотичности.

Широкое распространение систем с хаотическим поведением стимулировало в последние годы их весьма интенсивное исследование. Современное состояние теории управления этими классами систем можно найти в обзорах Андриевского Б.Р. и Фрадкова А.Л. (2003, 2004).

Опыт исследования систем показывает, что во многих случаях невозможно управлять системами с регулярным и хаотическим поведением одними и теми же способами. Например, для многих систем с регулярным поведением успешно применяется метод регулярного синтеза управлений Болтянского В.Г. (1964), однако в некоторых случаях этот метод является неэффективным. Для систем с хаотическим поведением является типичным для управления использовать существование всюду плотных траекторий и локальных управлений вдоль этих траекторий. Для примера укажем на так называемый OGY-метод (Ott E., Grebodi C., Yorke J., 1990), модификации которого были использованы в многих работах. Из других подходов можно отметить работы, использующие методы обратной связи (Piragas K., 1992 и другие).

Суммируя сказанное выше, можно сделать вывод, что не существует универсального метода исследования управляемости произвольных динамических систем. Многие задачи, связанные с природой управляемости, остаются нерешенными. Ряд новых задач требует специальных методов построения управлений. Эти обстоятельства делают актуальным исследование различных классов систем управления, осуществленное в настоящей работе.

Цель работы. В работе осуществляется построение математических моделей, адекватно описывающих классы систем управления с регулярным и хаотическим поведением, оценивание характеристик управляемости систем и построение управлений этими системами.

Методы исследования. Для исследования систем управления применяются различные математические методы, в частности, методы геометрии (топологические и дифференциально-геометрические методы), методы теории динамических систем, методы теории вероятностей, методы символической динамики.

Научная новизна. Все утверждения и математические решения являются новыми и принадлежат автору.

Практическая значимость работы. Основные результаты работы носят теоретический характер, однако, ее результаты могут быть использованы при проектировании конкретных классов систем управления. А именно, изученные модели могут рассматриваться в качестве базовых при исследовании сложных систем.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах.

4-я конференция по дифференциальным уравнениям и их применениям (КДУ 4), Русе, Болгария, 1989. 7-я Чехословацкая конференция по дифференциальным уравнениям и их приложениям (Equadiff 7), Прага, Чехословакия, 1989. 3-я европейская конференция по управлению (ECC3), Рим, Италия, 1995. 4-й международный семинар Устойчивость и колебания нелинейных систем управлению, Москва, Россия, 1996. 3-я международная конференция по движению и вибрационному контролю (MOVIC 96), Чиба, Япония, 1996. 1-я международная конференция Дифференциальные уравнения и их применения. С.-Петербург, Россия, 1996. 9-конференция по дифференциальным уравнениям и приложениям (EquaDiff9). Брно, Чехия, 1997. Международная конференция по управлению колебаниями и хаосом (COC97). С.-Петербург, Россия, 1997. 15-й международный конгресс по научным вычислениям, моделированию и прикладной математике (IMACS). Берлин, Германия, 1997. 2-я международная конференция Дифференциальные уравнения и их применения. С.-Петербург, Россия, 1998. 13-международный симпозиум по математической теории сетей и систем (MTNS-98). Падуя, Италия, 1998. 5-я европейская конференция по управлению (ECC5), Карлсруе, Германия, 1999. 6-й Санкт-Петербургский симпозиум по теории адаптивных систем, С.-Петербург, Россия, 1999. Международная конференция по управлению колебаниями и хаосом (COC2000). С.-Петербург, Россия, 2000. С.-Петербургский городской семинар по теории управления, 2002. 5-й международный семинар Средства математического моделирования (MathTools03). С.-Петербург, Россия, 2003. 1-я международная конференция физика и управление (PhysCon03). С.-Петербург, Россия, 2003. 5-я Европейская конференция по механике и нелинейной динамике (Enoc05). Брюссель, Бельгия, 2005. 2-я международная конференция физика и управление (PhysCon05). С.-Петербург, Россия, 2005.

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 20 научных статьях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 160 наименований. Общий объем работы составляет 312 страниц.

Содержание работы

Введение

В работе рассмотрено несколько классов систем управления с различными типами поведения. В первой части работы исследуются системы с регулярным поведением, во второй части — с хаотическим поведением. В первом случае основное внимание уделено классу линейных по состояниям систем, во втором случае — классу гиперболических систем.

Укажем на одну особенность метода управления, использованного в данной работе: управляющие воздействия разделяются на основные (базовые) и вспомогательные (корректирующие). В качестве множества допустимых основных управлений обычно берется множество кусочно-постоянных управлений, а качестве множества вспомогательных управлений — множество кусочно-непрерывных управлений малой интенсивности. Основные (базовые) управления доставляют псевдотраектории системы и обеспечивают "почти управляемость" системы в пространстве состояний. Таким образом, основные управления имеют глобальный характер. Вспомогательные (корректирующие) управления позволяют замыкать найденные псевдотраектории и получать настоящие траектории движения. Эти управления имеют локальный характер. Отметим, что такое разделение управлений на основные и корректирующие имеется во многих реальных системах управления.

В настоящей работе выявлено, что управляемость системы проявляется в возможности возвращений ее в начальные состояния. Свойством возвращаемости могут обладать системы как с регулярным, так и хаотическим поведением. Для систем с регулярным поведением основной задачей является выяснение существования достаточного множества базовых управлений, обеспечивающих возвращение системы в исходные состояния, а также нахождение этого множества. Для систем с хаотическим поведением в качестве базового управления берется такое постоянное значение управляющего параметра, при котором существуют всюду плотные траектории в пространстве состояний, обладающие возвратными свойствами. Основной задачей для таких систем является оценивание времени управления в зависимости от характеристик систем управления.

В последней части работы даны методы построения управлений, обеспечивающих перевод системы в заданные состояния.

Глава 1. Основные понятия и определения

Эта глава носит вспомогательный характер. В ней описываются рассматриваемые объекты и ими порожденные структуры, а также вводятся используемые в основном тексте понятия и определения. В главе приводится общая схема исследования управляемости систем, которая сводится к следующему. На предварительном этапе исследования у системы управления находят ее инвариантные множества и устанавливают связи между ними. На следующих этапах исследуют управляемость системы в окрестности каждого инвариантного множества, где система может иметь регулярное или хаотическое поведение. Эти случаи исследуются соответственно в первой и во второй главах работы.

Глава 2. Управление линейными по состояниям системами

Важным классом систем с регулярным поведением является класс линейных по состояниям систем. Системы этого класса получаются линеаризацией исходных систем в окрестности их точек покоя или предельных циклов. Такие системы широко применяются для описания различных физических процессов.

Основное внимание в этой главе уделено исследованию управляемости линейных по состояниям системам вида $\dot{x} = A(u)x$ с различными классами матричных семейств $A(u), u \in U$, а также исследованию управляемости проекций этих систем на некоторые подмножества пространства состояний, т.е. исследованию управляемости по части переменных. Для систем этих классов получены, в частности, достаточные условия проективной (сферической) и радиальной управляемости. Эти условия сформулированы в терминах спектрального типа матричного семейства $A(u), u \in U$. Доказательства условий управляемости получены с помощью предложенного в работе метода встречных последовательностей многообразий. Этот метод основан на том, что система управления индуцирует в пространстве состояний некоторую клеточную структуру. Таким образом, предложенный метод можно рассматривать как родственный методу регулярного синтеза Болтянского В.Г. В работе показано, что для линейных по состоянию систем существование встречных последовательностей многообразий обеспечивается тривиальностью спектрального типа матричного семейства $A(u), u \in U$ или условиями зацепляемости проективных компонент семейства (см. далее).

В этой главе выяснено, что многие свойства проекций линейных систем, которые являются нелинейными по состояниям подсистемами, имеют место для нелинейных систем более общего вида. Поэтому для их исследования могут использоваться методы, применявшиеся для проекций линейных систем.

2.1. Линейные по состоянию системы управления

Рассматриваются линейные по состояниям $x \in R^n \backslash \{0\}$ системы управления вида

$$\dot{x} = A(u)x, \quad u \in U, \tag{1}$$

где матричное семейство $A(.) \in C^1(U)$, U – некоторое подмножество числовой оси R^1. Для матричной функции $A(u)$ справедливо представление

$$A(u) = A(u_0) + A'(u_0)(u - u_0) + o(u - u_0),$$

где u_0 — некоторое значение параметра u. Это выделенное значение u_0 управляющего параметра будем называть базовым управлением, а величину $\Delta u_0 = u - u_0$ — локальное управлением, где $|\Delta u_0| \leq \overline{u}$, $\overline{u}$ — некоторое малое число. Для системы (1) с непрерывно изменяющимся управляющим параметром рассмотрена задача о ее сведении к системе с дискретным набором базовых управляющих параметров, т.е. к динамической полисистеме.

Системы с конечным набором базовых управлений

Пусть $u_1, \ldots, u_l$ — некоторый набор базовых управлений из множества U. Рассмотрим полисистему управления вида

$$\dot{x} = (A(u_i) + B(u_i)\Delta u_i)x, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{2}$$

Здесь $B(u_i) = A'(u_i)$, $i = 1, \ldots, l$, l — количество используемых базовых управлений, Δu_i — локальные управления, такие что $|\Delta u_i| \leq \overline{u}$, где $\overline{u}$ — интенсивность локальных управлений. Класс допустимых управлений следующий. На каждом временном промежутке управление полисистемой (2) заключается в выборе базового управления u_i, т.е. в выборе пары матриц $A(u_i)$, $B(u_i)$, и в выборе значений локальных управлений Δu_i. Предполагается, что на этом временном промежутке значение параметра u_i не меняется, а величина Δu_i является непрерывной функцией времени. Если обеспечена управляемость системы (2), то обеспечена и управляемость системы (1).

Рассмотрим случай $l = n-1$. Обозначим $A_{n-i} = A(u_i)$, $B_{n-i} = A'(u_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Пусть для каждой матрицы $A_i, i = 1, \ldots, n-1$ ее собственные числа занумерованы в порядке возрастания их вещественных частей:

$$\operatorname{Re}\lambda_i^1 \leq \ldots \leq \operatorname{Re}\lambda_i^n, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Предположения о свойствах системы управления

Предположение A1.

1. Все собственные числа матрицы A_{n-i}, $i = 1, \ldots, n-1$ являются простыми, причем имеется одна комплексно-сопряженная пара λ_{n-i}^{n-i}, λ_{n-i}^{n-i+1}, а остальные собственные числа вещественные.

2. Выполнены следующие условия

$$\begin{gathered}\lambda_{n-1}^{n-2} < \operatorname{Re}\lambda_{n-1}^{n-1} = \operatorname{Re}\lambda_{n-1}^{n},\\ \lambda_{n-2}^{n-3} < \operatorname{Re}\lambda_{n-2}^{n-2} = \operatorname{Re}\lambda_{n-2}^{n-1} < \lambda_{n-2}^{n},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_2^1 < \operatorname{Re}\lambda_2^2 = \operatorname{Re}\lambda_2^3 < \lambda_2^4,\\ \operatorname{Re}\lambda_1^1 = \operatorname{Re}\lambda_1^2 < \lambda_1^3.\end{gathered} \tag{4}$$

Предположение A2. *При каждом i система управления (2) локально управляема вдоль траекторий, идущих по собственным направлениям матриц A_i, $i = 1, \ldots, n-1$.*

2.2. Проективные и радиальные подсистемы

Для пространства состояний системы (1) определяется разложение его в прямое произведение вида $R^n \setminus \{0\} = RP^{n-1} \times R^1_+$, где RP^{n-1} – вещественное проективное пространство, R^1_+ – положительная полупрямая (луч). Для матрицы системы имеется блочное представление

$$A(u) = \begin{pmatrix} \hat{A}(u) & \overline{a}(u) \\ \tilde{a}^*(u) & \alpha(u) \end{pmatrix},$$

где $\hat{A}(u)$ – матрица порядка $n-1$, $\alpha(u)$ – число, $\overline{a}(u)$, $\tilde{a}^*(u)$ – соответственно столбец и строка длины $n-1$. Тогда уравнение (1) запишется в виде системы двух уравнений

$$\dot{\xi} = \hat{A}(u)\xi + \overline{a}(u) - (\tilde{a}^*(u)\xi + \alpha(u))\xi, \quad \xi \in RP^{n-1}, \tag{5}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{1+|\xi|^2}\left[\xi^*(\hat{A}(u)\xi + \overline{a}(u)) + (\tilde{a}^*(u)\xi + \alpha(u))\right] r, \quad r \in R^1_+. \tag{6}$$

Условие проективной управляемости

Теорема 1 *Пусть выполнены предположения* A1, A2 *о свойствах семейства матриц* $A(u), u \in U$. *Тогда проекция системы* (1) *в проективное пространство* RP^{n-1}, *т.е. система* (5), *управляема в этом пространстве.*

Аналогичное утверждение справедливо для проекции системы (1) на сферу S^{n-1}.

Условие радиальной управляемости

Обозначим $A^s(u) = \frac{1}{2}(A(u) + A^*(u))$.

Теорема 2 *Пусть выполнены следующие условия. Для любых* $\tilde{p} \in R^n \setminus \{0\}$ *существуют значения* $v_1, v_2 \in U$, *такие что*

$$\langle \tilde{p}, A^s(v_1)\tilde{p}\rangle > 0, \quad \langle \tilde{p}, A^s(v_2)\tilde{p}\rangle < 0.$$

Тогда проекция системы (1) *в пространство* R^1_+, *т.е. система* (6), *управляема в этом пространстве.*

2.3. Спектральные типы матричных семейств

Выделяется класс матричных семейств $A(u), u \in U$, для которых существует набор базовых управлений $u_1, \ldots, u_{n-1} \in U$, обеспечивающих справедливость предположений A1.

Для семейства $A(u)$ предполагается выполненным следующее свойство общности положения.

Свойство R1. *При почти всех значениях параметра* $u \in U$, *кроме отдельных изолированных исключительных значений из некоторого множества* $\check{U}$, *матрицы* $A(u)$ *имеют простые собственные числа. При исключительном значении параметра* $\check{u} \in \check{U}$ *матрица* $A(\check{u})$ *может иметь лишь одно собственное число, имеющее алгебраическую кратность два и геометрическую кратность один, а остальные собственные числа этой матрицы простые.*

Среди семейств $A(u), u \in U$ со свойством R1 рассматриваются такие, для которых выполнено следующее свойство.

Свойство R2. *Для каждого неисключительного значения параметра $u \in U \setminus \check{U}$ матрица $A(u)$ имеет не более одной пары комплексно-сопряженных собственных чисел.*

Далее вводится понятие спектрального типа матричного семейства $A(u), u \in U$, в терминах которого формулируются условия существования достаточного набора базовых управлений, для которых выполнено свойство A1. Характеристическое уравнение

$$\det(A(u) - \lambda I) = 0, \quad u \in U$$

определяет на множестве U многозначную комплекснозначную функцию $\lambda(.)$ и многозначную вещественнозначную функцию $\tilde{\lambda}(.) = \operatorname{Re}\lambda(.)$. Количество связных компонент графика многозначной функции $\tilde{\lambda}(.)$ определяет спектральный тип матричного семейства $A(u)$, $u \in U$.

Пусть при каждом значении параметра u собственные числа матрицы $A(u)$ занумерованы по возрастанию, т.е. в форме (3). Вводятся мультииндексы (не зависящие от параметра u):

$$\alpha_i = (q_{i-1} + 1, \ldots, q_i), \quad i = 1, \ldots, k, \quad q_0 = 0, \quad q_k = n. \tag{7}$$

Средние значения собственных чисел по группе индексов определяются по формуле:

$$\lambda_{\alpha_i}(u) = \frac{\lambda_{q_{i-1}+1}(u) + \ldots + \lambda_{q_i}(u)}{q_i - q_{i-1}}. \tag{8}$$

Предполагается, что разбиение собственных чисел на подгруппы вида (7) таково, что величины (8) удовлетворяют следующим условиям.

1. Функции $\lambda_{\alpha_i}(.)$, значения которых определены по формулам (8), являются вещественнозначными и гладкими на множестве U.

2. Число k групп разбиений вида (7) является максимально возможным при выполнении условия 1.

Условия 1 и 2 означают, что при фиксированном значении параметра u комплексно-сопряженные пары матрицы $A(u)$ попадают в одну группу индексов вида (7). Кроме того, функции $\lambda_{\alpha_i}(.)$ содержат минимально возможное число слагаемых, представленных в формуле (8), для сохранения своей вещественности и гладкости на множестве U.

Определение 1 *Упорядоченный набор мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ задает спектральный тип матричного семейства $A(u), u \in U$.*

Определение 2 *Спектральный тип будем называть тривиальным, если набор α содержит только один мультииндекс, т.е. $\alpha = (\alpha_1)$, где $\alpha_1 = (1, 2, \ldots, n)$.*

Теорема 3 *Если спектральный тип матричного семейства $A(u), u \in U$ тривиальный, то существуют значения параметров $u_i, i = 1, \dots, n-1$, что для матриц $A_{n-i} = A(u_i)$ выполнено предположение* A1.

При выполнении предположений теоремы 3 с учетом теоремы 1 следует, что проективная составляющая системы (1), т.е. система (5), управляема.

2.4. Матричные семейства с нетривиальным спектральным типом

Для матричных семейств $A(u), u \in U$ с нетривиальным спектральным типом вводятся следующие понятия.

Разложение пространства состояний

Определяется проектор по мультииндексу:

$$P_{\alpha_i}(u) = P_{q_{i-1}+1}(u) + \dots + P_{q_i}(u). \tag{9}$$

Совокупность этих проекторов задает разложение единицы I (единичный оператор), т.е. для для любого $u \in U$ справедливо равенство

$$I = P_{\alpha_1}(u) + \dots + P_{\alpha_k}(u). \tag{10}$$

Компонента пространства состояний определяется по формуле

$$X_{\alpha_i}(u) = P_{\alpha_i}(u)X, \quad i = 1, \dots, k, \quad u \in U. \tag{11}$$

Разложение пространства состояний имеет вид

$$X = X_{\alpha_1}(u) \oplus \dots \oplus X_{\alpha_k}(u). \tag{12}$$

На множестве U заданы непрерывные отображения вида

$$X_{\alpha_i}(.) : u \to X_{\alpha_i}(u), \quad i = 1, \dots, k.$$

В терминах введенных понятий дается условие зацепляемости.

Условие зацепляемости для систем с нетривиальным спектральным типом.

Для простоты предполагается, что в формуле (12) имеется два слагаемых, т. е. $X = X_{\alpha_1}(u) \oplus X_{\alpha_2}(u)$, где $\alpha_1 = (1, \dots, q_1), \alpha_2 = (q_1 + 1, \dots, n)$. Для проекции $p : R^n \setminus \{0\} \to RP^{n-1}$ определены множества

$$\Xi_{\alpha_i}(u) = p(X_{\alpha_i}(u)), \quad i = 1, 2. \tag{13}$$

Определение 3 *Условие*

$$\Xi_{\alpha_1}(U) \cap \Xi_{\alpha_2}(U) \neq \emptyset \tag{14}$$

будем называть условием зацепляемости проективных компонент $\Xi_{\alpha_1}(U)$, $\Xi_{\alpha_2}(U)$, *являющихся образами отображений* $\Xi_{\alpha_i}(.) : u \to \Xi_{\alpha_i}(u), \quad i = 1, 2.$

Теорема 4 *Предположим, что выполнены следующие условия.*

1. Существуют наборы базовых управлений $u_{\alpha_1} = (u_1, \ldots, u_{q_1})$ *и* $u_{\alpha_2} = (u_{q_1+1}, \ldots, u_n)$, *для каждого из которых относительно собственных чисел матричного семейства* $A(u), u \in U$ *выполнены предположения A1, A2.*

2. Для проективных компонент выполнены условия зацепляемости (14).

Тогда проекция системы (1) в проективное пространство RP^{n-1}, *т.е. система (5), управляема в этом пространстве.*

2.5. Пара управляющих встречных последовательностей многообразий

Здесь описывается одна конструкцию, которая может применяться для управления некоторыми классами систем с регулярным поведением. Существование такой конструкции для системы управления означает ее полную управляемость при используемом в этой работе множестве допустимых управлений (основных и корректирующих). В частности, эта конструкция может применяться для управления проективной составляющей линейной системы, т.е. системой (5).

Пусть в некотором многообразии X, $\dim X = n$ имеется два набора многообразий $\{M^i\}_{i=1}^n$ и $\{N^{n-i+1}\}_{i=1}^n$, таких что для $i = 1, \ldots, n$ $\dim M^i = i$, $\dim N^i = i$, причем $M^n = X$, $N^n = X$. Предположим, что для $j = 1, \ldots, n-1$ и для $i = 1, \ldots, n$ существуют непустые пересечения

$$M^j \cap N^{n-j} = P_j^0, \quad N^{n-i+1} \cap M^i = S_{i-1}^1, \tag{15}$$

где $\dim P_j^0 = 0, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad \dim S_i^1 = 1, \quad i = 0, \ldots, n-1.$

Поставим задачу о переводе начальной точки x_0 в конечную точку x_* в силу некоторой системы управления. Пусть мы располагаем набором постоянных базовых управлений $\{u_1, \ldots, u_n\}$ и парой наборов локальных управлений $\{\Delta u_1', \ldots, \Delta u_n'\}$ и $\{\Delta u_1'', \ldots, \Delta u_n''\}$. Точка x_0 отождествляется с точкой P_0^0, точка x_* отождествляется с точкой P_{n-1}^0.

Пусть выполнено следующее

Предположение M.

1. При постоянном управлении u_i в силу системы управления движения происходят по многообразию N^{n-i+1} или по многообразию M^i.

2. Множество S^1_{i-1} достижимо из множества N^{n-i+1} под действием локальных управлений $\Delta u'_i$, множество M^i достижимо из множества S^1_{i-1} под действием локальных управлений $\Delta u''_i$.

Определение 4 *Два набора множеств $\{M^i\}_{i=1}^n$ и $\{N^j\}_{j=1}^n$, для которых выполнено свойство (15) и предположение M, называются парой управляющих встречных последовательностей многообразий.*

Теорема 5 *Пусть для некоторой системы управления существует последовательность встречных многообразий. Тогда система управляема на множестве X.*

Если матричное семейство имеет тривиальный спектральный тип, то существует пара управляющих встречных последовательностей многообразий.

2.6. Некоторые обобщения и замечания

Описанная выше конструкция управляющих встречных последовательностей многообразий для конкретной системы управления строится по семейству векторных полей, задающих эту систему. Эта конструкция является грубой при соответствующих свойствах векторных полей. В частности, эта конструкция является грубой для линейных систем с тривиальным спектральным типом. Поэтому она может применяться для управления нелинейными системами, допускающими линеаризации. В работе получены условия об управляемости таких систем в окрестности их точки покоя и предельного цикла. Кроме того, эта конструкция может применяться для управления нелинейными системами более общего вида. Способ управления системой заключается в организации движений по элементам встречных последовательностей. В частности, таким способом можно осуществлять управление системами, имеющих в качестве базовых системы Морса-Смейла, т.е. системы, имеющие конечное число точек покоя и предельных циклов (критических элементов). Следует отметить, что при увеличении числа критических элементов (т.е. при уменьшении степени регулярности системы) сложность исследования систем предложенным методом увеличивается. Это дает основание использовать для управления такими системами более подходящие методы, которые излагаются в следующих главах.

2.7. Программные реализации

С помощью средств пакета символьных вычислений MAPLE составлена программа, позволяющая осуществлять проверку управляемости линейных по состоянию систем вида $\dot{x} = A(u)x$.

Глава 3. Управление хаотическими системами

Третья глава посвящена исследованию управляемости динамических систем с хаотическим поведением. Сложное поведение таких систем управления обусловлено нерегулярным поведением базовых систем. При этом базовые системы с нерегулярным поведением могут иметь разные степени хаотичности. Степень хаотичности проявляется, в частности, в характере поведения соседних траекторий. Укажем два характерных класса базовых систем. Базовые системы первого класса обладают следующим свойством: в каждой точке пространства состояний имеется два выделенных направления, причем вдоль одного направления траектории разбегаются, вдоль другого — сбегаются. Отметим, что экспоненциальной скоростью сбегания-разбегания траекторий обладает класс гиперболических систем. Базовые системы второго класса обладают тем свойством, что расстояния между точками соседних траекторий с течением времени остаются постоянными, т.е. траектории таких систем обладают нулевой скоростью сбегания-разбегания. Другими словами, каждая траектория системы является нейтрально устойчивой. Системы указанного класса называются нейтральными. Заметим, что имеются классы систем с промежуточными свойствами.

В этой главе исследуются классы систем управления, базовые системы которых обладают разной степенью хаотичности. Для таких систем может быть использована следующая схема управления. Из начальной точки с помощью локального управления переходим на некоторую базовую всюду плотную траекторию, затем двигаемся по ней достаточно длительное время до некоторой подходящей точки, наконец с помощью локального управления переходим в конечную точку. Так как при наличии локальной управляемости вопрос о глобальной управляемости решен, то на первый план выходит вопрос об оценивании времени управления в зависимости от интенсивности управляющих воздействий и степени хаотичности системы.

Для простоты описания в этой главе будут рассматриваться системы в дискретном времени.

3.1. Описание системы управления

Рассматривается динамическая система управления

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad t = 0, 1, 2\ldots, \tag{16}$$

где $x_t \in X$, $u_t \in U$, X – пространство состояний, U – пространство управлений, $f(x,u)$ — гладкая функция на множестве $X \times U$. Пространство X является компактным многообразием размерности d с метрикой dist, которая задает в многообразии X меры объемов всех порядков $k = 1, \ldots, d$. Мера d-мерного объема обозначается Vol. Пространство U — некоторое подмножество (обычно отрезок) числовой оси R^1.

При некотором значении параметра $u = u^0 \in U$, которое мы будем называть основным (базовым), отображение $f_0(.) = f(., u^0)$ задает базовую динамическую систему

$$x^0_{t+1} = f_0(x^0_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

В некоторой подходящей системе координат вдоль траекторий базовой динамической системы (17) для системы (16) рассмотрим систему в отклонениях. Предположим, что линеаризация системы в отклонениях имеет вид

$$\Delta x_{t+1} = A(x^0_t, u^0_t)\Delta x_t + B(x^0_t, u^0_t)\Delta u_t, \quad t = 0, 1, 2\ldots, \tag{18}$$

где $\Delta x_t \in T_{x^0_t}$ — локальные состояния, $\Delta u_t = u_t - u^0$ — локальные (корректирующие) управления, $T_{x^0_t}$ —касательное пространство в точке $x^0_t \in X$,

$$A(x^0, u^0) = \left.\frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta x}\right|_{\Delta x = 0, \Delta u = 0}, \quad B(x^0, u^0) = \left.\frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta u}\right|_{\Delta x = 0, \Delta u = 0}, \tag{19}$$

$$\Delta f(x^0, u^0, \Delta x, \Delta u) = f(x^0 + \Delta x, u^0 + \Delta u) - f(x^0, u^0).$$

Систему (18) будем называть линейной локальной системой управления. Далее предполагается, что допустимые локальные управления являются ограниченными последовательностями, принимающими значения в множестве $\Delta U = \{\Delta u \,||\Delta u| \le \overline{u}\}$, где $\overline{u}$ — уровень (интенсивность) локальных управлений. Для системы (16) управление в каждый момент времени заключается в выборе пары $(u^0, \Delta u_t)$, при этом $u_t = u^0 + \Delta u_t$. Для простоты обозначений далее полагается, что $u^0 = 0$.

3.2. Свойства локальной динамической системы управления

Условия локальной управляемости системы (16) вдоль траектории, проходящей через точку x_0, могут быть сформулированы с помощью матрицы локальной управляемости

$$C(x^0) = \frac{\partial \Delta F(x^0, \vec{\Delta} u)}{\partial \vec{\Delta} u}|_{\vec{\Delta} u=0}, \tag{20}$$

где $\Delta F(x^0, \vec{\Delta} u) = F(x^0, \vec{\Delta} u) - F_0(x^0)$, $\vec{\Delta} u \in \vec{\Delta} U$ — набор локальных управлений за d-шагов, $F(x, \vec{\Delta} u)$ — d-шаговая суперпозиция функции $f(x, \Delta u)$, $F_0(x)$ — d-шаговая суперпозиция функции $f_0(x)$. Число шагов d называем тактом управления. Матрица $C(x^0)$ может быть выражена через матрицы $A(x^0), B(x^0)$ вида (19). Для произвольной точки $x \in X$ матрица $[C(x)C^*(x)]^{1/2}$ задает эллипсоид $Ell(x)$ в касательном пространстве $T_{F_0(x)}$, который в линейном приближении аппроксимирует множество локальной достижимости из точки x за один такт.

3.3. Основные классы базовых систем

Пусть $f_0 : X \to X$ — отображение, задающее базовую систему (17). Рассматриваются следующие основные классы базовых отображений.

Базовые системы гиперболического типа

Пусть $\Lambda \subset X$ — инвариантное множество для отображения f_0, которое является гиперболическим на множестве Λ. Это означает, что в каждой точке $x \in \Lambda$ имеется разложение касательного пространства

$$T_x = E^+(x) \oplus E^-(x), \tag{21}$$

такое что вдоль направления $E^+(x)$ траектории системы (17) экспоненциально разбегаются, а вдоль $E^-(x)$ направления — экспоненциально сбегаются. Кроме того, выполнены условия инвариантности

$$D^+ f_0(x) : E^+(x) \to E^+(f_0(x)), \quad D^- f_0(x) : E^-(x) \to E^-(f_0(x)), \tag{22}$$

где $D^+ f_0(x), D^- f_0(x)$ – сужения оператора $Df_0(x) = \frac{\partial f_0}{\partial x}$ на соответствующие подпространства $E^+(x)$ и $E^-(x)$. В работе рассматриваются следующие случаи инвариантных множеств.

1. Множество Λ является связным гиперболическим многообразием размерности d, т.е. отображение f_0 является диффеоморфизмом Аносова.

2. Множество Λ является некоторым фрактальным компактным локально максимальным гиперболическим множеством дробной размерности d_F, где $d-1 < d_F < d$.

Базовые системы нейтрального типа

Нейтральное отображение f_0 обладает следующим свойством. Для любых $x', x'' \in X$ выполнено условие

$$\mathrm{dist}(x', x'') = \mathrm{dist}(f_0(x'), f_0(x'')). \tag{23}$$

3.4. Характеристики систем управления гиперболического типа

Равномерные характеристики базовых систем

Для получения оценок сверху времени управления вводятся величины

$$\underline{\rho}^+(f_0) = \min_{x\in\Lambda} \ln|\det D^+ f_0(x)|, \quad \underline{\rho}^-(f_0) = \max_{x\in\Lambda}(-\ln|\det D^- f_0(x)|), \tag{24}$$

а для получения оценок снизу времени управления вводятся величины

$$\overline{\rho}^+(f_0) = \max_{x\in\Lambda} \ln|\det D^+ f_0(x)|, \quad \overline{\rho}^-(f_0) = \min_{x\in\Lambda}(-\ln|\det D^- f_0(x)|), \tag{25}$$

где отображения $D^+ f_0(x), D^- f_0(x)$ определены формулой (22).

Характеристики локальной управляемости для гиперболических систем

Для состояния x определим величины $s^+(x)$ и $s^\perp(x)$ соответственно как объемы проекций эллипсоида локальной достижимости $Ell(y) \subset T_y$ где $y = F_0(x)$, в неустойчивое направление $E^+(y)$ и в ортогональное ему направления $E^\perp(y)$. Для оценок сверху времени управления вводятся нижние коэффициенты равномерной локальной управляемости

$$\underline{s}^+ = \min\{s^+(x), x \in X\}, \quad \underline{s}^\perp = \min\{s^\perp(x), x \in X\}. \tag{26}$$

Для оценок сверху времени управления вводятся верхние коэффициенты равномерной локальной управляемости

$$\overline{s}^+ = \max\{s^+(x), x \in X\}, \quad \overline{s}^\perp = \max\{s^\perp(x), x \in X\}. \tag{27}$$

3.5. Способ управления гиперболическими системами

Для управления системами, порожденными гиперболическими базовыми отображениями, используется следующая идея.

1. На первом шаге, используя локальные управления, осуществляется переход из начальной точки на некоторое неустойчивое направление, что гарантируется свойствами локальной управляемости.

2. Вдоль неустойчивых направлений движение осуществляется лишь под действием сил растяжения (без использования локальных управлений).

3. Локальные управления используются, чтобы скомпенсировать сжатие, происходящее вдоль устойчивых направлений.

Под действием так организованной последовательности управлений образуется последовательность множеств достижимости

$$M_1 = F(x_0, \Delta\vec{U}), \quad M_{n+1} = F(M_n, \Delta\vec{U}), n = 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

которые исчерпывают пространство состояний. Полученные ниже оценки времени управления основаны на скорости роста последовательности объемов $v_n = \mathrm{Vol}(M_n)$ множеств достижимости.

3.6. Оценки сверху времени управления для динамических систем управления, порожденных гиперболическими отображениями

В этом и следующем разделах используются равномерные характеристики систем управления.

Теорема 6 *Пусть выполнены следующие условия.*

1. Для базового отображения $f_0 : X \to X$, которое является диффеоморфизмом Аносова, множество его неблуждающих точек $NW(f_0) = X$.

2. Динамическая система управления (16) является полностью равномерно локально управляемой в пространстве состояний X, причем выполнено достаточное условие $\underline{l} = (\underline{s}^+ \underline{s}^\perp)^{\frac{1}{d}} > 0$, где числа $\underline{s}^+, \underline{s}^\perp$ определены формулой (26).

Тогда динамическая система управления управляема из любой начальной точки $x_0 \in X$ в любую точку $x \in X$. Кроме того, имеется следующая асимптотическая при $\overline{u} \to 0$ оценка сверху времени управления (измеренная в тактах)

$$\overline{T}(\overline{u}) = \frac{1}{\underline{\rho}^+(f_0)} \ln\left[\frac{R}{c\overline{u}\underline{l}}\right], \tag{29}$$

где $\overline{u}$ — уровень локальных управлений, $R = V^{1/d}$ — средний линейный размер множества X, $V = \mathrm{Vol}(X)$ — объем множества X, $0 < c \leq 1$ — некоторое число.

Аналогично рассматривается случай, когда пространства состояний имеет дробную размерность. В этом случае оценка времени управления также имеет вид (29) (Теорема 6').

3.7. Оценки снизу времени управления для динамических систем управления, порожденных гиперболическими отображениями

Теорема 7 *Предположим, что выполнены условия теоремы 6.*

Тогда имеется следующая асимптотическая при $\overline{u} \to 0$ оценка снизу времени управления (измеренная в тактах)

$$\underline{T}(\overline{u}) = \frac{1}{\overline{\rho}^{+}(f_0)} \ln\left[\frac{D_1 R}{\overline{u}\overline{l}}\right], \tag{30}$$

где $R = \mathrm{Vol}^{1/d}(X)$,$\overline{l} = (\overline{s}^{+}\overline{s}^{\perp})^{\frac{1}{d}}$, число $D_1 = \left[(e^{\overline{\rho}^{+}d} - 1)^2(1 - e^{-\overline{\rho}^{-}d})e^{-\overline{\rho}^{+}d}\right]^{\frac{1}{d}}$, постоянные $\overline{\rho}^{-}, \overline{\rho}^{+}$ определены формулами (25).

3.8. Оценки сверху времени управления для систем управления, использующие средние характеристики базовых систем

В этом разделе рассматриваются базовые отображения f_0, которые являются диффеоморфизмами Аносова на многообразии X. Предполагается, что отображение f_0 обладает инвариантной мерой μ_0 максимальной знтропии, для плотности которой выполнено условие $\underline{c} \leq \frac{d\mu_0}{d\,\mathrm{vol}}(x) \leq \frac{1}{\underline{c}}$, где $\underline{c} \in (0, 1]$, $x \in X$, $\mathrm{vol} = \frac{1}{V}\mathrm{Vol}$ — нормированная мера объема. Вместо равномерных величин (24) и (25) для функции $\varphi_0^{+}(x) = -\ln|\det D^{+}f_0(x)|$ по f_0-инвариантной мере μ_0 определяется величина

$$\chi^{+}(f_0) := -\int\limits_X \varphi_0^{+}(x)d\mu_0(x), \tag{31}$$

которая называется коэффициентом растяжения в среднем по мере μ в неустойчивом направлении. Следующая теорема дает семейство оценок сверху, зависящее от некоторого параметра δ_1.

Теорема 8 *Пусть выполнены следующие условия.*

1. Базовое отображение $f_0 : X \to X$ является диффеоморфизмом Аносова, для которого множество неблуждающих точек $NW(f_0) = X$.

2. Справедливы следующие условия локальной управляемости:

1) вдоль неустойчивого направления выполнено условие $s^+(x_0) > 0$, где $x_0 \in X$ — некоторая начальная точка, 2) вдоль направлений, ортогональных неустойчивым, выполнено условие $\underline{s}^\perp > 0$, где величина $\underline{s}^\perp$ определена по формуле (27).

Тогда система (16) *управляема из начальной точки x_0 в любую точку $x \in X$. Кроме того, существует число $\delta_1^0 > 0$, что для любого значения параметра $\delta_1 \in (0, \delta_1^0]$ имеется следующая асимптотическая при $\overline{u} \to 0$ оценка сверху времени управления*

$$\tilde{T}(x_0, \overline{u}, \delta_1) = \tilde{n}_0(x_0, \underline{c}\overline{u}, \underline{s}^\perp, \delta_1)d + N_1(x_0, \delta_1), \tag{32}$$

$$\tilde{n}_0(x_0, \underline{c}\overline{u}, \underline{s}^\perp, \delta_1) = \frac{1}{\chi_0^+(f_0)d - \delta_1} \ln\left(\frac{V}{(\underline{c}\overline{u})^d)\underline{s}^\perp s^+(x_0)}\right), \tag{33}$$

где число $\chi_0^+(f_0)$ определено формулой (31) *для меры μ_0, $\overline{u}$ — уровень локальных управлений, $V = \mathrm{Vol}(X)$ — объем многообразия X, постоянная $\underline{c} \in (0, 1]$, натуральное число $N_1(x_0, \delta_1)$характеризует время переходного процесса.*

Асимптотические оценки

С помощью статистических методов (центральная предельная теорема) в работе показано (теорема 8'), что существует оптимальное значение параметра δ_1, подчиненное параметру $\overline{u}$, при котором главная часть оценки вида (32) определяется формулой (33). Сама оценка сверху времени управления из точки x_0 принимает следующую асимптотическую при $\overline{u} \to 0$ форму:

$$\tilde{T}(x_0, \overline{u}) = \frac{1}{\chi^+(f_0)d} \ln\left(\frac{V}{(\underline{c}\overline{u})^d)\underline{s}^\perp s^+(x_0)}\right). \tag{34}$$

В случае равномерных коэффициентов локальной управляемости оценка принимает вид

$$\tilde{T}(x_0, \overline{u}) = \frac{1}{\chi^+(f_0)} \ln\left(\frac{R}{c\overline{u}\underline{l}}\right). \tag{35}$$

Так как $\underline{\rho}^+(f_0) \leq \chi^+(f_0)$, то оценка (35) лучше оценки (29).

3.9. Оценки сверху для среднего времени управления, использующие средние значения коэффициентов локальной управляемости вдоль неустойчивых направлений

В том случае, если в начальной точке коэффициент локальной управляемости $s^+(x_0) = 0$, оценка вида (34) не существует. В этом случае можно рассматривать усредненные по начальным данным оценки времени управления. Рассмотрим множество $X_+^+ = \{x | s^+(x) > 0\}$. Тогда среднее время управления величин вида (34) с начальными данными $x_0 \in X_+^+$ может быть оценено по формуле

$$\mathsf{M}[\tilde{T}(.,\overline{u})] \lesssim \frac{1}{\chi^+(f_0)d} \ln \left(\frac{V}{(c\overline{u})^d [s^+]) \underline{s}^\perp} \right) = \frac{1}{\chi^+(f_0)} \ln \left(\frac{R}{c\overline{u}\underline{\tilde{l}}} \right), \qquad (36)$$

где $\underline{\tilde{l}}$ — средний коэффициент локальный управляемости вычисляется для функции $s^+(.)$ по некоторой инвариантной мере базового отображения f_0.

Если множество X_+^+ не является инвариантным для основного отображения f_0, то траектория, исходящая из точки x_0, через некоторое время $N_3(x_0)$ попадет в это множество. Среднее время первого попадания траектории основного отображения в это множество может быть оценено по формуле

$$\mathsf{M}[N_3(.)] \lesssim \frac{1}{p} \left[\frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{Cp} + 1 \right], \qquad (37)$$

где C, γ — некоторые постоянные, характеризующие статистические свойства процесса (17). Оценки общего среднего времени управления даются следующей теоремой.

Теорема 9 *Среднее время управления при произвольном выборе начальных данных $x_0 \in X$ оценивается величиной $\mathsf{M}[\tilde{T}(.,\overline{u})] + \mathsf{M}[N_3(.)]$,, где величины $\mathsf{M}[\tilde{T}(.,\overline{u})]$ и $\mathsf{M}[N_3(.)]$ определены соответственно формулами (36) и (37).*

3.10. Характеристики систем управления нейтрального типа

В отличие от систем гиперболического типа для систем нейтрального типа со свойством (23) нет выделенных направлений вида (21) в пространстве состояний, вдоль которых действуют силы растяжения или сжатия. Другими словами, системы этого типа могут рассматриваться как вырожденные хаотические системы. Для управления такими системами локальные управляющие воздействия используются вдоль всех направлений пространства состояний.

Характеристики локальной управляемости для нейтральных систем

Обозначим $l_d(x)$ и $l_1(x)$ соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы $[C(x)C^*(x)]^{1/2}$. Условие $l_d(x) > 0$ является достаточным для локальной управляемости системы (16) вдоль траектории системы (17), проходящей через точку x. Определим равномерные на множестве X нижний и верхний коэффициенты локальной управляемости соответственно формулами

$$\underline{l}_d = \min\{l_d(x), x \in X\}, \quad \overline{l}_1 = \max\{l_1(x), x \in X\}. \tag{38}$$

При получении оценок времени управления для систем нейтрального типа существенна лишь скорость изменения во времени $d-1$-мерных объемов s_n границ множеств достижимости вида (28). Мы будем предполагать, что для $d-1$-мерных объемов s_n выполнены следующие условия

$$\underline{a}_{d-1}((n\underline{l}_d\overline{u})^{d-1} \leq s_n \leq \overline{a}_{d-1}((n\overline{l}_1\overline{u})^{d-1}, \quad 1 \leq n \leq \tilde{n}. \tag{39}$$

$$\underline{s} \leq s_n \leq \overline{s}, \quad n > \tilde{n}, \tag{40}$$

где числа $\underline{a}_{d-1}$, $\overline{a}_{d-1}$, $\underline{s}$, $\overline{s}$ зависят от метрики dist пространства состояний X. Величина $\tilde{n}$ зависит от соотношения между величинами $\overline{u}, \underline{l}_d, \overline{l}_1$ и геометрических параметров (размеров) пространства состояний X. Величина $\tilde{n}$ может быть оценена для конкретного пространства состояний. Условия (39), (40) определяют связь между размерами множеств глобальной достижимости за тактов n и локальной достижимости за один такт.

3.11. Оценки времени управления для систем нейтрального типа

Оценка сверху времени управления для систем нейтрального типа

Теорема 10 *Пусть выполнены следующие условия.*

1. Базовое отображение f_0 является отображением нейтрального типа.

2. Справедливо достаточное условие равномерной локальной управляемости $\underline{l}_d > 0$, где величина $\underline{l}_d$ определена первой формулой (38).

3. Существует число $\tilde{n}$, зависящее от величины $\underline{\varepsilon} = \underline{l}_d\overline{u}$, что для последовательности $\{s_n\}$ $d-1$-мерных объемов границ множеств локальной достижимости вида (28) справедливы левые части неравенств (39), (40).

Тогда система может быть переведена из любой начальной точки в любую конечную точку пространства состояний X. Кроме того, имеется асимптотическая при $\overline{u} \to 0$ оценка сверху времени управления (измеренная в тактах)

$$\overline{T}(\overline{u}) = \max\{\overline{n}_0(\underline{l}_d\overline{u}), \overline{n}_1(\underline{l}_d\overline{u})\}, \tag{41}$$

$$\overline{n}_0(\underline{l}_d\overline{u}) = \left(\frac{R}{\underline{l}_d\overline{u}}\right)\overline{K}, \quad \overline{n}_1(\underline{l}_d\overline{u}) = \tilde{n}(\underline{l}_d\overline{u}) + \frac{V}{\underline{s}}\frac{1}{\underline{l}_d\overline{u}}, \tag{42}$$

где $V = \mathrm{Vol}(X)$— объем многообразия X, $R = V^{\frac{1}{d}}$ — средний линейный размер многообразия X, $\overline{K} = \left(\frac{d}{\underline{a}_{d-1}}\right)^{\frac{1}{d}}$.

В работе показано, что для простых геометрических областей пространства состояний оценка сверху времени управления для системы нейтрального типа имеет вид

$$\overline{T}(\overline{u}) = \overline{K}\left(\frac{R}{\underline{l}_d\overline{u}}\right). \tag{43}$$

Оценка снизу времени управления для систем нейтрального типа

Теорема 11 *Предположим, что выполнены условия теоремы* 10 *с заменой условия* 3 *на условие: для объемов границ множеств локальной достижимости справедливы правые части неравенств* (39), (40).

Тогда имеется асимптотическая при $\overline{u} \to 0$ оценка снизу времени управления

$$\underline{T}(\overline{u}) = \underline{K}\left(\frac{1}{\overline{l}_1\overline{u}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{44}$$

где величина $\overline{l}_1$ определена второй формулой (38), параметры $V, \overline{u}$ те же, что в теореме 10, $\underline{K} = \frac{2V}{\overline{s}}$.

3.12. Характеристики слабо хаотических систем управления

Слабо хаотические системы занимают промежуточное положение между обычными хаотическими системами и нехаотическими системами. В качестве этих двух крайних типов выше были рассмотрены гиперболические и нейтральные системы. Слабо хаотическая система определяется как система, зависящая от малого положительного параметра, причем при стремлении этого параметра к нулю степень хаотичности падает. В качестве степени хаотичности обычно рассматривается величина объемного растяжения в неустойчивом направлении.

Пусть некоторая система управления задана уравнением

$$y_{n+1} = g(y_n, u, v), \quad y_n \in Y, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{45}$$

где y_n — состояние системы в момент времени n, u — параметр, управляющий состояниями системы, v — неотрицательный числовой параметр, управляющий хаосом. Особенности нашего метода исследования заключаются в предположении, что для системы (45) существует накрывающая система

$$x_{n+1} = G(x_n, u, v), \quad x_n \in X, \quad n = 1, 2, \dots \tag{46}$$

Говорят, что отображение G накрывает отображение g, если $g(., u, v) \circ p = p \circ G(., u, v)$, где $p : X \to Y$ — проекция. Для накрывающей системы объемы множеств достижимости вычисляются проще, чем соответствующие объемы для исходной системы. Все дальнейшие рассуждения проводятся для накрывающей системы, относительно которой сделаны следующие предположения.

Предположение G_{uv}. *1). Функция $G(x, u, v)$ является гладкой по параметрам x, u, v. 2). Базовое отображение $\hat{G}(., v) = G(., 0, v)$ является нейтральным для $v = 0$ и гиперболическим для $v > 0$, причем характеристики гиперболичности (21), (22) не зависят от параметра v.*

Предположение V_{xv}. *Для любого x_0 проекция $p(W^u(x_0))$ неустойчивого многообразия $W^u(x_0)$ отображения $\hat{G}(., v) : X \to X$ в точке $x_0 \in X$ является всюду плотной в пространстве состояний $Y = p(X)$ системы (45).*

Предположение L_v. *Для любого $v > 0$ значения нижних коэффициентов локальной управляемости удовлетворяют условию*

$$\underline{l}(v) = [\underline{s}^+(v)\underline{s}^\perp(v)]^{1/d} > 0, \tag{47}$$

где величины $\underline{s}^+(v), \underline{s}^\perp(v)$ определены формулами типа (26).

Оценки сверху времени управления для слабо хаотических систем

Теорема 12 *Пусть выполнены предположения G_{uv}, V_{xv}, L_v. Тогда имеется следующая асимптотическая при $\overline{u} \to 0$ оценка сверху времени управ-*

ления

$$\overline{T}_v(\overline{u}) = \frac{1}{\underline{\rho}^+(v)} \ln\left[\frac{R}{\underline{l}(v)\overline{u}}\right], \tag{48}$$

где $R = (V)^{1/d}$, величина V задает объемный размер пространства состояний Y, $\overline{u}$ — уровень локальных управлений, величина $\underline{\rho}^+(v)$ определена формулой типа (24) и имеет представление $\underline{\rho}^+(v) = v\underline{\rho}_1^+ + o(v)$, $\underline{\rho}_1^+ > 0$ — некоторая постоянная.

3.13. Распределение ресурсов управления

Из сравнения формул (35) и (43) видно, что оценка времени управления системой с гиперболической (хаотической) базовой составляющей лучше, чем оценка времени управления системой с нейтральной (нехаотической) базовой составляющей. В связи с этим для системы управления с нейтральной базовой составляющей возникает задача об улучшении ее характеристик. Рассмотрим семейство систем вида (45), имеющее накрывающее семейство вида (46), где в качестве возмущающего параметра выступает пара неотрицательных величин (v, w). Относительно этих систем предполагается, что невозмущенная система (46) является системой нейтрального типа, а возмущенная система — системой гиперболического типа. Предположим, что ресурсы управления z распределяются в соответствии с формулой $z = u + v + w$, где u — доля ресурсов на управление состояниями, v — доля ресурсов на создание хаоса, w — доля ресурсов на улучшение свойств локальной управляемости. Рассматриваются следующие виды возмущений $v = u^\alpha$, $w = u^\beta$ с некоторыми положительными параметрами α, β и решается задача о выборе параметров с целью минимизации времени управления. Сделаны следующие выводы.

1. Если невозмущенная система (45) локально управляема, то создание хаоса не уменьшает времени управления.

2. Если невозмущенная система (45) локально неуправляема по линейному приближению, но для величин вида (47) выполнено условие $\underline{l}(v, w) \sim \underline{l}_1'v + \underline{l}_1''w$, где $\underline{l}_1' + \underline{l}_1'' > 0$, то в этом случае схема управления следующая. Ресурсы управления нецелесообразно тратить на улучшение свойств локальной управляемости, т.е. значение параметра β следует выбирать очень большим, а ресурсы управления следует тратить на создание хаоса, т.е. значение параметра α следует выбирать очень малым. Исходная нейтральная система при этом становится слабо хаотичной. Асимптотическая при

$\overline{u} \to 0$ оценка времени управления с соответствии с формулой (48) принимает вид

$$\overline{T}(\overline{u}) = \frac{1}{u^{\alpha}\underline{\rho}_1^+} \ln\left[\frac{R}{\underline{l}'\overline{u}^{\alpha+1}}\right]. \tag{49}$$

3.14. Оценки сверху времени управления для нестационарных систем

Рассматривается еще один класс слабо хаотических систем. Хаотичность систем этого класса уменьшается с течением времени, поэтому системы этого класса описываются нестационарными уравнениями вида

$$y_{n+1} = g(y_n, u_n, v_n), \quad y_n \in Y, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{50}$$

где y_n — состояние системы в момент времени n, $u_n \in U$ — значение параметра, управляющего состояниями системы, v_n — значение параметра, характеризующего степень вырождения системы управления.

Теорема 13 *Пусть для системы (50) выполнены следующие условия.*

1. Существует накрывающая система, которая задается функцией G, удовлетворяющей предположениям G_{uv_n}, V_{xv_n} и L_{v_n}.

2. Нижний коэффициент разбегания $\underline{\rho}^+(n) = \inf_{x\in X} \ln|\det D^+\hat{G}(x, v_n)|$ семейства базовых отображений удовлетворяет неравенству

$$\frac{\underline{C}^+}{n^{\gamma}} \le \underline{\rho}^+(n), \quad 0 < \gamma < 1, \quad n > N.$$

Тогда имеется следующая асимптотическая при $\overline{u} \to 0$ оценка сверху времени управления

$$\overline{T}(\overline{u}) = \left[\frac{1-\gamma}{\underline{C}^+} \ln\frac{R}{\underline{l}\overline{u}}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}, \tag{51}$$

где $R = (V)^{1/d}$, величина V задает объемный размер пространства состояний Y, $\overline{u}$ — уровень значений допустимых локальных управлений, величина $\underline{l}_d$ определена формулой (38).

В работе рассмотрены также оценки для других типов нестационарных слабо хаотичных систем.

Глава 4. Методы символической динамики и локального управления

Четвертая глава посвящена вопросам построения управлений для динамических систем. В этой главе на основе методов символической динамики и методов локального управления указан конструктивный способ нахождения управляемой траектории, вдоль которой система может быть переведена из заданного начального состояния x_* в желаемое конечное состояние x^* под действием последовательности допустимых управлений.

Применение метода символической динамики заключается в следующем. Пространство состояний разбивается на ячейки $D_1, D_2, \dots$ определенного (возможно переменного) размера. Максимальный размер ячеек ограничен некоторым числом ε. Ячейки отождествляются с вершинами некоторого ориентированного графа G. Дуги графа задаются в соответствии с уравнением для базовых траекторий вида (17) следующим образом. Граф имеет дугу $D_i \to D_j$, если $F_0(D_i) \cap D_j \neq \emptyset$, где $F_0 = f_0^d$, f_0 – базовое отображение. Символическая динамическая система задается множеством своих символических траекторий, каждая из которых — это некоторый путь на графе вида

$$D_* = D_{i_0} \to D_{i_1} \to \dots \to D_{i_n} = D^*. \tag{52}$$

Этому пути соответствует некоторая псевдотраектория базовой системы (17) вида

$$x_* = x_0^0 \to x_1^0 \to \dots \to x_n^0 = x^*, \tag{53}$$

где $x_i^0 \in D_{i_0}$, величина невязки $|x_{i+1}^0 - F_0(x_i^0)| < \varepsilon$. Настоящая траектория системы (16) получается замыканием псевдотраектории с помощью локальных управлений. Условия реализации этой схемы управления дает следующая теорема.

Теорема 14 *Предположим, что для системы управления (16), базовое отображение которой f_0 является диффеоморфизмом, выполнены следующие условия.*

1. Существует путь вида (52) на графе G, которому соответствует псевдотраектория вида (53), ведущая из точки x_* в точку x^*.

2. Справедливо следующее условие согласования характеристик символической и исходной динамических систем

$$\varepsilon(x_0^0)(j_0+1) \le l_d(x_0^0)\overline{u}, \quad \varepsilon(x_i^0) \le l_d(x_i^0)\overline{u}, \quad i = 1, \dots, n-2, \tag{54}$$

где $j_0 = \max_{x\in D(x_0^0)}\{\max[|j_1(x)|,\dots,|j_k(x)|]\}$, *величины* $j_1(x),\dots,j_k(x)$ – *собственные числа матрицы Якоби* $J(x)$ *отображения* F_0 *в точке* x, *которые по абсолютной величине больше единицы,* $l_d(x)$ – *наименьшее собственное число матрицы* $[C(x)C^*(x)]^{1/2}$, *матрица* $C(x)$ *определена формулой (20),* $\overline{u}$ – *уровень локальных управлений,* $\varepsilon(x_i^0)$ – *размер ячейки* D_{i_0}, *содержащей точку* x_i^0.

Тогда существует настоящая траектория системы (16), идущая из точки x_* *в точку* x^* *вида*

$$x_* = x_0^0 \xrightarrow{\vec{u}_0} x_1^0 \xrightarrow{\vec{u}_1} \dots \xrightarrow{\vec{u}_{n-2}} x_{n-1}^0 \xrightarrow{\vec{u}^0} x_n^0 = x^*. \qquad (55)$$

В формуле (55) $\vec{u}_k = \vec{u}^0 + \Delta\vec{u}_k$ – *управление на такте с номером* k, $k = 0,\dots,n-1$, *где* $\vec{u}^0 = (u^0,\dots,u^0)$ – *вектор длины* d *базовых постоянных управлений,* $\Delta\vec{u}_k = \Delta\vec{u}_k^0(1+O(h_{k+1}))$ – *вектор длины* d *локальных управлений, причем его главная часть* $\Delta\vec{u}_k^0$ *определяется по формуле*

$$\Delta\vec{u}_k^0 = \left[C(x_k^0)\right]^{-1} h_{k+1}, \quad k = 0,\dots,n-2, \qquad (56)$$

где $h_{k+1} = x_{k+1}^0 - F_0(x_k^0)$ — *невязка,* x_k^0 — *точки* ε*-траектории вида (53).*

При исследовании конкретных систем для нахождения пути на графе, связывающего ячейки, содержащие начальную и конечную точки, могут применяться специальные пакеты программ. В частности, в исследовавшихся примерах использовалась программа ASI4DS С. Ю. Кобякова. Для определения локальных управлений $\Delta\vec{u}_k^0$ в формуле (56) использовались стандартные программы для решения систем линейных алгебраических уравнений. Для формирования матриц $C(x_k^0)$ использовались средства пакета символьных вычислений MAPLE.

В заключении дана общая сводка полученных результатов. В работе приведено значительное число примеров и иллюстраций.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Для линейных по состояниям систем управления вида $\dot{x} = A(u)x$ получены следующие результаты об управляемости по части переменных:

   а) достаточные условия проективной управляемости линейных полисистем и к ним сводящимся линейных систем (теорема 1);

   б) достаточные условия радиальной управляемости линейных систем (теорема 2);

   в) достаточные условия проективной управляемости линейных систем с тривиальным спектральным типом (теорема 3);

г) достаточные условия проективной управляемости линейных систем с нетривиальным спектральным типом и свойством зацепляемости (теорема 4).

2. Для управления динамическими системами достаточного общего вида предложен метод встречных последовательностей многообразий. Доказана управляемость системы, для которой существует такая последовательность многообразий (теорема 5). Дано применение этого метода для управления линейными по состояниям системами.

3. Для систем, допускающих линеаризации, получены достаточные условия их управляемости по части переменных в окрестности точки покоя и в окрестности замкнутой траектории.

4. Для хаотических систем получены оценки сверху и снизу времени управления при различных предположениях о степени хаотичности систем. Исследованы следующие классы систем:

   а) равномерно гиперболические системы (теоремы 6, 6', 7);

   б) гиперболические в среднем системы (теоремы 8, 8', 9);

   в) нейтральные системы (теоремы 10, 11);

   г) слабо хаотичные системы (теорема 12);

   д) нестационарные слабо хаотичные системы (теорема 13).

5. Поставлена и решена задача о распределении ресурсов для управления состояниями системы, для создания хаоса и для улучшения свойств локальной управляемости.

6. На основе методов символической динамики и локального управления дан способ нахождения траектории, вдоль которой система может быть переведена из заданного начального состояния в желаемое конечное состояние, и дан способ нахождения последовательности управлений, осуществляющих движение по этой траектории (теорема 14).

Публикации автора по теме диссертации

1. Фомин В.Н., Хрящев С.М. Об одной задаче адаптивного управления линейным объектом в условиях случайных помех//Автоматика и телемеханика. 1976.- № 10.- с.102-110.

2. Хрящев С.М. О состоятельности оценок матрицы коэффициентов линейных систем в условиях коррелированных помех//Автоматика и телемеханика. 1982.- № 8.- с. 68-76.

3. Хрящев С.М. Спектральный метод исследования управляемости динамических систем вблизи инвариантных множеств//Автоматика и телемеханика. 1998.- № 3.- с. 29-42.

4. Хрящев С.М. О зависимости управляемости от аналитических свойств матрицы системы//Труды 6-го С.-Петербургского симпозиума по теории адаптивных систем. С.-Петербург, 1999.- Т. 2.- с. 187-190.

5. Хрящев С.М. Об управляемости линейных по состоянию динамических систем//Автоматика и телемеханика. 2000.- № 10.- с. 59-71.

6. Хрящев С.М. Оценки времени управления в системах с хаотическим поведением. Ч. I//Автоматика и телемеханика. 2004.- № 10.- с. 51-67.

7. Хрящев С.М. Оценки времени управления в системах с хаотическим поведением. Ч. II//Автоматика и телемеханика. 2004.- № 11.- с. 102-113.

8. Хрящев С.М. Оценки времени управления для нестационарных систем, порожденных квазилинейными гиперболическими отображениями//Электронный журнал Дифференциальные уравнения и процессы управления, www.neva.ru/journal, 2004.- № 4.- с. 77-115.

9. Хрящев С.М. Применение статистических методов для оценивания времени управления детерминированными системами.// Электронный журнал Дифференциальные уравнения и процессы управления www.neva.ru/journal/ 2006.- № 1.- с. 1-35.

10. Хрящев С.М., Осипенко Г.С. Исследование управляемости динамических систем методами символической динамики//Электронный журнал Дифференциальные уравнения и процессы управления. www.stu.neva.ru/ 1997.- № 1.- с. 79-90.

11. Khryashchev S.M. Spectral conditions of spherical controllability linear with respect to the state dynamical systems//Proc. of 3rd European Control Conference. Roma, 1995.- V.4.- part 2.- p. 3454-3455.

12. Khryashchev S.M. On controllability conditions for dynamical systems with the looping property//Proc. of the 3rd International Conference on Motion and Vibration Control. Chiba, 1996.- V.2.- p. 399-402.

13. Khryashchev S.M. On controllability of linear with respect to state dynamical systems//Enlarged abstracts of the 9th conference on differential equations and their applications. Brno, 1997.- p. 237-238.

14. Khryashchev S.M. On stochastic properties of linear with respect to state control systems//Proc. of the international Conference on Control of Oscilations and Chaos. St. Petersburg, 1997.- V.1.- p. 179-180.

15. Khryashchev S.M. Method of bifurcation diagram for research of controllability//Proc. of the 15th Wordl Concress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics. Berlin, 1998.- p. 267-272.

16. Osipenko G.S, Khryashchev S.M. Controllability and applied symbolic dynamics//Proc. of the 13th international symposium on mathematical theory of networks and systems. Padova, 1998.- p. 349-352.

17. Khryashchev S.M. A method of bifurcation graph for research of controllability//Proc. of 5th European Control Conference. Karlsruhe, 1999.

18. Khryashchev S.M. A method for research of controllability//Proc. of the international Conference on Control of Oscilations and Chaos. St. Petersburg, 2000.- V.1.- p. 156-157.

19. Khryashchev S.M. Estimation of transport times for chaotic dynamical control systems//Proc. of International Conference Physics and Control. St. Petersburg, 2003.- p. 528-533.

20. Khryashchev S.M. Estimation of transport times for chaotic dynamical control systems//Proc. of International Conference Physics and Control. St. Petersburg, 2005.- p. 28-33.