**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА РАДИОФИЗИКИ

Л.А.Бабенко

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Конспект лекций. Часть II

2006

Содержание

Теорема единственности для задач электродинамики.

Система основных уравнений Максвелла является полной, т.е. электромагнитное поле в каждой точке пространства и в каждый момент времени однозначно определяется этой системой, если только для момента $t=t_0$ заданы начальные значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ во всех точках пространства. Однако определить напряженность во всем бесконечном пространстве невозможно, т.к. наблюдению доступна лишь его ограниченная часть. Поэтому теорема единственности становится необходимой, если ограничиться некоторым конечным объемом пространства и дополнить условия, определяющие решение уравнений Максвелла, граничными условиями на границах раздела этого объема.

В качестве первичной причины существования электромагнитного поля естественно видеть превращение неэлектромагнитной энергии в энергию поля. Поэтому будем исследовать решения при заданных источниках, т.е. такие, которые должны представлять вынужденные поля.

Теорема единственности утверждает, что электромагнитное поле в любой момент времени $t>t_0$ в любой точке объема V, ограниченного поверхностью S, определяется уравнениями Максвелла однозначно, если в каждой точке объема V заданы начальные значения векторов $\vec{E}(\vec{r},t_0)=\vec{E}_0$, $\vec{H}(\vec{r},t_0)=\vec{H}_0$ и если известны граничные значения проекций, касательных к S, одного из векторов $\vec{E}$ или $\vec{H}$ в точках поверхности S для любого момента времени $t>t_0$.

Для доказательства теоремы предположим, что для области V, содержащей источники поля $\vec{j}^{\,S}$, существуют два решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие одинаковым начальным и граничным условиям. Обозначим поля, соответствующие этим решениям, через $\vec{E}_1,\vec{H}_1$ и $\vec{E}_2,\vec{H}_2$. Очевидно, что разность указанных решений $\vec{E}'=\vec{E}_1-\vec{E}_2$, $\vec{H}'=\vec{H}_1-\vec{H}_2$ удовлетворяет уравнениям Максвелла, не содержащим источники, а также нулевым начальным и граничным условиям

$$\vec{E}'(\vec{r},t_0)=0,\quad \vec{H}'(\vec{r},t_0)=0,\quad \vec{E}'\times\vec{n}_0\Big|_S=0,\quad \vec{H}'\times\vec{n}_0\Big|_S=0$$

Применим к полю $\vec{E}',\vec{H}'$ теорему Пойнтинга:

$$\int\limits_V \sigma E'^2 dv + \oint\limits_S \vec{E}' \times \vec{H}' \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt}\int\limits_V \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E'^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H'^2}{2} \right) dv = 0$$

Так как $d\vec{s} = \vec{n}_0 ds$, то, учитывая граничные условия для полей $\vec{E}', \vec{H}'$, получаем, что интеграл по поверхности S равен нулю. Очевидно, что интеграл $\int\limits_V \sigma E'^2 dv$ всегда больше или равен нулю. Следовательно, уравнение баланса энергии будет удовлетворено лишь в том случае, когда функция

$$W(t) = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\varepsilon_0 \varepsilon E'^2 + \mu_0 \mu H'^2 \right) dv$$

монотонно убывает во времени (только при этом предположении $\frac{\partial W}{\partial t} \leq 0$). Но при $t=t_0$ энергия поля $W(t_0) = 0$. Так как энергия электромагнитного поля не может принимать отрицательные значения, то уравнение баланса будет справедливо лишь при условии, что функция $W(t) = 0$ для любого $t \geq t_0$. Последнее возможно, если $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ равны нулю в каждой точке области V при $t \geq t_0$. Следовательно, $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$, $\vec{H}_1 = \vec{H}_2 = \vec{H}$, что доказывает единственность решения.

Исследованная задача о нахождении поля внутри объема V называется внутренней задачей электродинамики. Все рассуждения можно повторить и для внешней задачи, когда вынужденное поле существует в бесконечном пространстве вне некоторой области V'. Теперь V – область, ограниченная изнутри поверхностью S, а из вне – поверхностью сферы бесконечно большого радиуса S_r. В этом случае теорема Пойнтинга для поля $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ запишется в виде

$$\int\limits_V \sigma E'^2 dv + \oint\limits_S \vec{E}' \times \vec{H}' \cdot d\vec{s} + \oint\limits_{S_r} \vec{E}' \times \vec{H}' \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt}\int\limits_V \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E'^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H'^2}{2} \right) dv = 0.$$

Проведенные выше рассуждения полностью применимы и к последнему равенству при условии, что $\oint\limits_{S_r} \vec{E}' \times \vec{H}' \cdot \vec{n}_0 ds \to 0$ при $r \to \infty$.

Но, если с момента возникновения поля прошел конечный промежуток времени, можно утверждать, что поверхность S_r лежит вне той области, которую заняло поле к моменту $t > t_0$, распространяясь в пространстве с конечной скоростью. В этом случае последнее условие, безусловно, удовлетворяется.

Итак, рассмотрен вопрос о необходимых и достаточных условиях для единственности решения уравнений Максвелла в общем случае произвольной зависимости векторов $\vec{E}$, $\vec{H}$ от времени. В эти условия входят как условия на границе, так и начальные условия, требующие задания поля во всем пространстве для момента $t = 0$. Однако необходимость в задании начальных значений поля отпадает, если речь идет о решении для так называемого установившегося режима, когда составляющие поля меняются со временем по периодическому закону.

Электродинамические потенциалы.
Волновое уравнение.

Рассмотрим некоторые методы подхода к решению прямых задач электродинамики. В этих задачах требуется найти векторы электромагнитного поля по заданным источникам.

Прежде всего, получим уравнения для каждого из векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ по отдельности. Умножим все члены первого уравнения Максвелла на ε_r^{-1}, а второе – на μ_r^{-1} и применим к векторам операцию rot (т.е. $\nabla\times\vec{g}$):

$$\nabla\times\left(\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\vec{H}\right)=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{E}\right)+\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\vec{j},$$

$$\nabla\times\left(\mu_r^{-1}\nabla\times\vec{E}\right)=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}\right)$$

Заменим $\nabla\times\vec{E}$ и $\nabla\times\vec{H}$ в правых частях уравнений выражениями, вытекающими из первых двух уравнений Максвелла. В результате получим

$$\nabla\times\left(\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\vec{H}\right)+\frac{\mu_r}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\vec{j},$$

$$\nabla\times\left(\mu_r^{-1}\nabla\times\vec{E}\right)+\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t},$$

где обозначено $\varepsilon_o \mu_o = c^{-2}$. Правые части этих уравнений в общем случае нельзя рассматривать как известные. Для идеального диэлектрика, когда $\sigma = 0$, $\vec{j} = \vec{j}^{S}$ и правые части определяются заданными источниками. Если среда однородна ($\varepsilon_r = \text{const}$, $\mu_r = \text{const}$), уравнения могу быть записаны в виде

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{j}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \nabla \rho + \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Здесь использовано тождество $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$

и учтено также, что $\nabla \cdot \vec{H} = 0, \nabla \cdot \vec{E} = \rho / (\varepsilon_0 \varepsilon_r)$. Если $\vec{j} = \vec{j}^{S}$, то $\rho = \rho^{S}$, причем эти величины связаны законом сохранения заряда.

Таким образом, для каждого из векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ получено уравнение второго порядка. Уравнения с левыми частями такого вида называются уравнениями Даламбера. Уравнения позволяют найти векторы электромагнитного поля по заданным источникам. Однако из-за сложности правых частей эти уравнения оказываются неудобными для решения задачи. Обычно их используют в тех случаях, когда в рассматриваемой области нет сторонних источников, т.е. когда они являются однородными. Такие уравнения называются волновыми.

В общем случае решение задачи существенно упрощается, если предварительно определить некоторые вспомогательные функции, которые принято называть электродинамическими потенциалами. Их можно ввести различным образом в зависимости от специфических особенностей анализируемой задачи, однако, принцип их построения один и тот же.

Уже был введен векторный потенциал $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{A}$- векторный потенциал. При известном векторе $\vec{A}$ вектор $\vec{B}$ определяется однозначно. Вектор $\vec{A}$ определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Вектор напряженности магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \nabla \times \vec{A}.$$

Подстановка этого выражения $\vec{H}$ во второе уравнение Максвелла приводит к равенству $\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$. Векторная функция, стоящая в скобках, является потенциальной. Приравняв эту функцию величине $-\nabla\varphi$, получаем

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Таким образом, векторы, характеризующие электромагнитное поле, выражаются через две функции: векторный потенциал $\vec{A}$ и скалярный потенциал φ. Остается найти уравнения, которым они удовлетворяют.

Заменим в первом уравнении Максвелла напряженности поля их выражениями через потенциалы. Для однородной среды получаем

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu_0\mu\vec{j}$$

Заменим первое слагаемое при помощи векторного тождества $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$, введем оператор Лапласа. Это дает

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{\varepsilon_r\mu_r}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla\left(\frac{\varepsilon_r\mu_r}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A}\right) - \mu_0\mu_r\vec{j}$$

Упростим это уравнение. Уже отмечалось, что вектор $\vec{A}$ определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Следовательно, можно потребовать, чтобы вектор удовлетворял добавочному условию. Потребуем, чтобы $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\varepsilon_r\mu_r}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$. Это уравнение называют условием калибровки (или калибровкой Лоренца). При этом для потенциала $\vec{A}$ получаем векторное уравнение Даламбера

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{\varepsilon_r\mu_r}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mu_r\vec{j}$$

Аналогичное уравнение получаем для скалярного потенциала φ. Подставив в третье уравнение Максвелла выражение вектора $\vec{E}$ через потенциалы и, используя условие калибровки, приходим к уравнению

$$\nabla^2\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

Таким образом, векторный и скалярный потенциалы, как и векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$, удовлетворяют неоднородным уравнениям Даламбера. Однако правые части уравнений для потенциалов имеют более простой вид. Скалярный потенциал φ зависит лишь от распределения зарядов, а векторный потенциал $\vec{A}$ - от распределения токов проводимости.

Простейшее решение волнового уравнения.
Плоские волны.

Предположим, что в рассматриваемой области пространства сторонние силы не действуют. Если при этом найдено физически осмысленное решение уравнений поля, то оно выражает *свободное* электромагнитное поле, т.е. поле, не обязанное своим происхождением процессу преобразования какого либо вида энергии в электромагнитную. В отсутствии сторонних источников любая декартова компонента векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Рассмотрим его решение, зависящее только от одной координаты z и времени t. Для $u = u\,(z,t)$ справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad \text{или} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right) u(z,t) = 0,$$

в котором оператор Даламбера записан в виде произведения двух сомножителей. Введем новые переменные $\xi == z - vt;\ \eta = z + vt$, так, что обратное преобразование даст $z = \dfrac{\xi+\eta}{2}$, $t = \dfrac{\eta-\xi}{2v}$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2v}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2v}\frac{\partial}{\partial t}$$

В результате волновое уравнение в новых переменных принимает вид $\dfrac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial\xi\,\partial\eta}=0.$

Проинтегрируем уравнение по переменной ξ: $\dfrac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}=F(\eta)$. Интегрируя еще раз по переменной η, находим $u(\xi,\eta)=g(\eta)+h(\xi)$. Здесь $\dfrac{\partial g(\eta)}{\partial\eta}=F(\eta)$, $h(\xi)$ играет роль постоянной интегрирования по η, которая может зависеть от второй переменной как от параметра. Вид функций g и h не определяется из решения уравнения, а устанавливается путем задания начальных условий.

Возвратившись к исходным переменным, получим $u(z,t)=g(z+vt)+h(z-vt)$,

т.е. решение уравнения представляет собой наложение двух возмущений, каждое из которых распространяется вдоль z в сторону возрастания или убывания z со скоростью v

$$u(z,t)=u^{+}(t-z/v)+u^{-}(t+z/v),$$

$u^{\pm}$ - произвольные дважды дифференцируемые функции.

Это математическое описание некоторого волнового процесса. При распространении волны среда вовлекается в физический процесс, в результате чего происходит передача энергии в пространстве. Пусть физический процесс в точке $M(\vec r_1)$ характеризует функция $u(\vec r_1,t)=f(t)$. В другой точке $P(\vec r_2)$ процесс не наблюдается, т.е. $u = 0$, пока он не передан средой. Потом $u(\vec r_2,t)=f_1(t)$. В простейшем случае в точке P обнаружится лишь запаздывание, т.е. $f_1(t)=f(t-\tau)$, где τ - время прохождения пути $|\vec r_2-\vec r_1|=l$ со скоростью v.

Если изменения в пространстве происходят только в направлении z, то процесс характеризуется волной $u(z,t)=f(t-z/v)$. При $z = 0$ $u(0,t)=f(t)$, при $z = l$ $u(l,t)=f(t-l/v)=u(0,t-l/v)$ - временная зависимость, отличающаяся только сдвигом. Рассмотренный волновой процесс – бегущая плоская однородная волна в среде, которая ее не деформирует (в любой точке плоскости z=const процесс описывается этой функций). Считая v положительной величиной, для волны, движущейся в направлении, противоположном z, надо заменить аргумент

$u(z,t) = f\,(t + z/v)$. Итак, общее решение волнового уравнения можно представить в виде наложения прямой и обратной волн.

Определим взаимную ориентацию векторов $\vec{E}, \vec{H}$ в плоской волне. Для векторного потенциала $\vec{A}$ справедливо волновое уравнение. Для описания поля в отсутствии зарядов можно выбрать такую калибровку потенциалов, при которой $\varphi = 0$ тождественно, а также $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. При этом, полагая $\vec{A} = \vec{A}(z,t)$, получаем $\dfrac{\partial A_z}{\partial z} = 0$.

Поскольку z входит в аргумент $\vec{A}$ в линейных комбинациях $(z \pm vt)$, последнее равенство дает A_z = const (z,t). Следовательно

$$E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t} = 0, H_z = \frac{1}{\mu_0 \mu_r}\left(\nabla \times \vec{A}\right)_z = 0\,.$$

Проекции напряженностей поля на направление распространения отсутствуют – плоские электромагнитные волны поперечны.

Далее предположим, что волна бежит в одну сторону $\vec{A}(z,t) = \vec{A}(z - vt)$. При этом

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}, \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r}\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r}\left(-\vec{x}_0 \frac{\partial A_y}{\partial z} + \vec{y}_0 \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu_0 \mu_r}\vec{z}_0 \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\mu_0 \mu}}\vec{z}_0 \times \vec{E}$$

В плоской волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно ортогональны и ортогональны направлению распространения.

Сферические волны.

При наличии сферической симметрии решение волнового уравнения можно получить в виде сферических волн. Предположим, что поле создается точечным зарядом, расположенным в начале координат. Величина этого заряда меняется со временем $q = q\ (t)$. В любой точке, кроме начала координат, потенциал φ удовлетворяет однородному уравнению Даламбера. Вне области, занятой источником, волновое уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

Если искать решение в виде $\varphi(r,\ t)=\psi(r,\ t)/\ r$, то новая функция $\psi(r,\ t)$ будет удовлетворять уравнению $\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{v}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$, решение которого уже известно.

Оно имеет вид $\psi(r,t)=\psi^{+}(t-r/v)+\psi^{-}(t+r/v)$.

Таким образом $\varphi(r,t)=\frac{\psi^{+}(t-r/v)}{r}+\frac{\psi^{-}(t+r/v)}{r}$.

Первое слагаемое описывает расходящуюся сферическую волну, распространяющуюся из начала координат со скоростью v. Ее амплитуда убывает, как r^{-1}, в силу того, что заданный поток энергии распределяется на все большую площадь. Второе слагаемое описывает волну, испущенную на бесконечности и сходящуюся к центру. Функции, описывающие волновые процессы, всегда содержат множители вида $f(t\ \pm\ r/v)$, характер зависимости которых от расстояния вдоль направления распространения волны в фиксированный момент времени повторяет характер их зависимости от времени в фиксированной точке пространства.

Если источник сосредоточен в конечной области, то сходящаяся сферическая волна может возникнуть только в результате отражения расходящейся сферической волны. В однородном пространстве отраженной волны быть не может. Поэтому надо считать $\psi^{-}(t+r/v)=0$. При этом потенциал точечного заряда

$$\varphi(r,t)=\frac{\psi^{+}(t-r/v)}{r}.$$

Очевидно, значение потенциала φ должно быть связано с интенсивностью источников поля. Последнее выражение должно быть справедливо при любом законе изменения функции $q\ (t)$. В статическом случае, если поле создается точечным неподвижным зарядом постоянной величины $q=\mathrm{const}(t)$, расположенным в начале координат, потенциал $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$.

Если заряд сосредоточен в малом элементе объема dv с плотностью ρ, то формулу следует переписать $\varphi = \dfrac{\rho dv}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$, где R – расстояние от элемента dv до точки наблюдения.

Можно записать выражение для потенциала, создаваемого произвольным распределением зарядов в объеме V. В соответствии с принципом суперпозиции

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_V \frac{\rho}{R}dv.$$

Если источник меняется во времени $q = q\,(t)$, естественно предположить

$$\psi^+(t - r/v) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} q(t - r/v). \text{ Тогда } \varphi = \frac{q(t - r/v)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

При этом скалярный потенциал, обусловленный произвольным распределением зарядов в объеме

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_V \frac{\rho(r', t - R/v)}{R}dv', \quad R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

x',y', z'- декартовы координаты элемента *dv*, *x, y, z* – координаты точки наблюдения. Это частное решение неоднородного уравнения Даламбера.

Аналогичное решение можно записать и для уравнения для векторного потенциала

$$\vec{A} = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(r', t - R/v)}{R}dv'$$

Таким образом, для вычисления потенциалов φ и $\vec{A}$ в произвольной точке пространства в момент времени t нужно брать значения токов и зарядов в каждом элементе *dv'* в более ранний момент *t'= t – R / v*, определяемый расстоянием R от элемента *dv'* до точки наблюдения, т.е. влияние источников электромагнитного поля сказывается не мгновенно. Требуется время $\Delta t = R/v$, за которое электромагнитные колебания, вызванные зарядами и токами в элементе *dv'*, успевают распространиться от *dv'* до точки наблюдения. Такие φ и $\vec{A}$ называют *запаздывающими потенциалами*.

Гармонические колебания. Уравнения электродинамики в комплексной форме.

Реальные электромагнитные процессы можно представить либо в виде суммы дискретных гармонических колебаний, либо в виде непрерывного спектра гармонических колебаний.

Если некоторая величина $u(t)$ изменяется во времени по закону $u(t)= U_m\cos(\omega t + \varphi)$, происходит гармоническое колебание. U_m – амплитуда, ω- круговая частота, $\omega t + \varphi$ - полная фаза колебания, φ - начальная фаза, $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$, T – период колебания. При этом поля называются монохроматическими.

Анализ гармонических процессов упрощается при использовании метода комплексных амплитуд: вместо функции u вводят в рассмотрение комплексное представление физической величины $u = \mathrm{Re}\,(U_m \exp(i\omega t + \varphi)) = \mathrm{Re}\,(\dot{U}_m \exp(i\omega t))$

Комплексная амплитуда $\dot{U}_m = U_m e^{i\varphi}$ - несет информацию об амплитуде и начальной фазе.

Заменим векторы поля комплексными представлениями:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t + \varphi_E);\ \vec{E} = \mathrm{Re}\,\dot{\vec{E}};\ \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m \exp(i\omega t).$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t + \varphi_H);\ \vec{H} = \mathrm{Re}\,\dot{\vec{H}};\ \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_m \exp(i\omega t)$$

Тогда первые уравнения Максвелла будут выглядеть следующим образом

$$rot\ \dot{\vec{H}}_m = i\omega\ \dot{\vec{D}}_m + \dot{\vec{j}}_m$$

$$rot\ \dot{\vec{E}}_m = - i\omega\ \dot{\vec{B}}_m$$

Уравнения относительно комплексных амплитуд утратили зависимость от времени. Уравнения с дивергенциями – прямые следствия полученной записи.

Преобразуем правую часть первого уравнения, учитывая материальное уравнение

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} + \vec{j}^{\,cm}:\quad i\omega\ \dot{\vec{D}}_m + \dot{\vec{j}}_m = i\omega\varepsilon_0\,(\varepsilon_r - i\sigma/(\omega\varepsilon_0))\,\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m^{\,cm} = i\omega\varepsilon_0\,\dot{\varepsilon}\,\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m^{\,cm}$$

Здесь обозначено $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_r - i\sigma/(\omega\varepsilon_0)$ – комплексная диэлектрическая проницаемость. Мы получаем уравнения относительно напряженностей поля, которые образуют полную систему уравнений для гармонических во времени процессов.

$$rot\ \dot{\vec{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}\ \dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m{}^{cm}$$

$$rot\ \dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu_0\dot{\mu}\ \dot{\vec{H}}_m$$

В рамках метода комплексных амплитуд любой из параметров уравнений Максвелла надо рассматривать на комплексной плоскости. Это приводит к расширению физического содержания некоторых понятий. Таковы, в первую очередь, проницаемости ε и μ $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - i\,\varepsilon''$, $\dot{\mu} = \mu' - i\,\mu''$

Вводят обозначения $\mathrm{tg}\,\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$, $\mathrm{tg}\,\delta^{M} = \mu''/\mu'$, δ - угол электрических потерь, δ^{M} – угол магнитных потерь. Теперь выражения для проницаемостей можно записать $\dot{\varepsilon} = \varepsilon'(1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta)$, $\dot{\mu} = \mu'(1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta^{M})$. При этом введенный ранее критерий классификации сред можно переписать $\sigma / (\omega\varepsilon_0\varepsilon_r) = \mathrm{tg}\,\delta$. Если $\mathrm{tg}\,\delta >> 1$, среду рассматривают как проводник, для диэлектриков $\mathrm{tg}\,\delta << 1$.

Запишем в комплексной форме уравнения и соотношения, включающие электродинамические потенциалы.

$$\dot{\vec{H}}_m = (\mu_0\dot{\mu})^{-1} rot\dot{\vec{A}}_m\ ; \quad \dot{\vec{E}}_m = -grad\dot{\varphi}_m - i\omega\dot{\vec{A}}_m\ ;$$

$$\nabla^2\dot{\vec{A}}_m + (\omega/c)^2\dot{\varepsilon}\dot{\mu}\dot{\vec{A}}_m = -\mu_0\dot{\mu}\dot{\vec{j}}_m{}^{cm}\ ; \qquad \nabla^2\dot{\varphi}_m + (\omega/c)^2\dot{\varepsilon}\dot{\mu}\dot{\varphi}_m = -i(\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon})^{-1} div\dot{\vec{j}}_m{}^{cm}$$

Последние два – неоднородные уравнения Гельмгольца.

Условие калибровки принимает вид $i\left(\omega\dot{\varepsilon}\dot{\mu}/c^2\right)\dot{\varphi}_m + div\dot{\vec{A}}_m = 0$

Таким образом, для расчета электромагнитного поля достаточно решить одно векторное и одно скалярное уравнение для потенциалов и с помощью приведенных соотношений определить электромагнитное поле. Найденные решения необходимо проверить на соответствие условию калибровки.

Перестановочная двойственность уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла в комплексной форме относительно напряженностей поля имеют вид $rot\dot{\vec{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m{}^{cm}$, $rot\dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu_0\dot{\mu}\dot{\vec{H}}_m$

В отсутствии сторонних источников ($j^{\text{ст}} = 0$) сделаем замену

$\varepsilon_0\dot{\varepsilon} \Leftrightarrow \mu_0\dot{\mu}$; $\dot{\vec{E}}_m \to -\dot{\vec{H}}_m$; $\dot{\vec{H}}_m \to \dot{\vec{E}}_m$.

При этом система уравнений сохранится, уравнения лишь поменяются местами. В электродинамике существуют задачи, в которых $\vec{E}$ и $\vec{H}$ меняются ролями. Если одна из таких «парных» задач решена, то решение второй может быть получено применением принципа двойственности, т.е. путем указанных замен в готовых формулах. При наличии источников можно дополнить соотношения для замен следующим $\dot{\vec{j}}_m^{\,ст} \to -\dot{\vec{j}}_m^{\,м}$.

При этом получаем модифицированную систему уравнений

$$rot\dot{\vec{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}\dot{\vec{E}}_m; \quad rot\dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu_0\dot{\mu}\dot{\vec{H}}_m - \dot{\vec{j}}_m^{\,м}$$

Здесь $\dot{\vec{j}}_m^{\,м}$ - (магнитный аналог $\dot{\vec{j}}_m^{\,ст}$) - комплексная амплитуда вектора плотности магнитного тока. В природе магнитные заряды отсутствуют, не может быть и магнитных токов. Но такие величины можно вводить формально.

Гармонические волны.

Говоря о гармонических колебаниях, воспользуемся методом комплексных амплитуд. Будем рассматривать зависимость от времени exp ($i\omega t + \varphi$). Тогда при вычислении производных $\partial^2/\partial t^2$ появится множитель ($-\omega^2$) и волновое уравнение переходит в однородное уравнение Гельмгольца $\nabla^2\dot{u}_m + k^2\dot{u}_m = 0$

$k = \omega/v$ – волновое число, v – фазовая скорость.

Для одномерного процесса, зависящего от координаты z , $\dfrac{d^2\dot{u}_m}{dz^2} + k^2\dot{u}_m = 0$

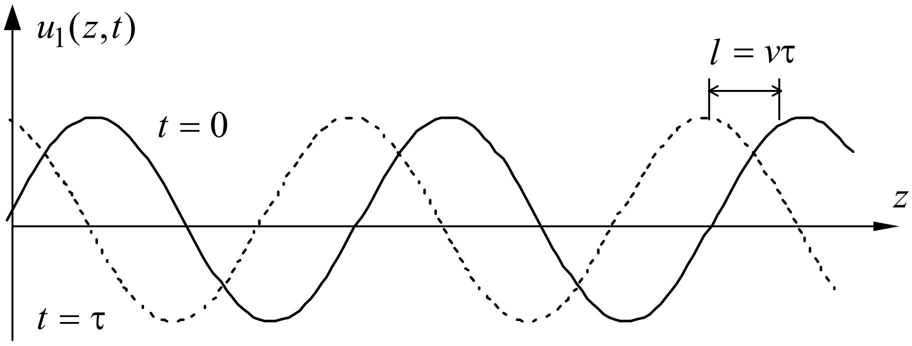
Общее решение этого уравнения $\dot{u}_m(z) = \dot{u}_{m0}^{+}e^{-ikz} + \dot{u}_{m0}^{-}e^{+ikz}$

$\dot{u}_{m0}^{+}$, $\dot{u}_{m0}^{-}$ - произвольные комплексные константы.

Пусть $\dot{u}_{m0}^{+} = u_m^{+}e^{i\varphi}$, $\dot{u}_{m0}^{-} = u_m^{-}e^{i\psi}$

В результате вычисления операции Re $\left[\dot{u}_m(z)e^{i\omega t}\right]$ получаем функцию

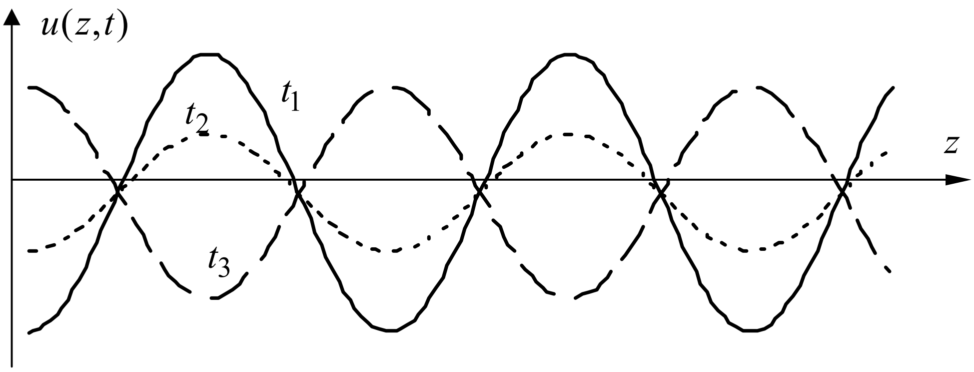
$u\,(z,\ t) = U_m^{+}\cos(\omega t - kz + \varphi) + U_m^{-}\cos(\omega t + kz + \psi)$, которая является решением волнового уравнения. Это – гармонические волны.



$$u_1\,(z,t) = \mathrm{U_m} \cos \left[\, \omega\,(t - z/v\,) + \varphi \,\right]$$

Два мгновенных снимка гармонической волны: косинусоидальное пространственное распределение. Его период – приращение координаты z, при котором фаза меняется на 2 π. Этот период называют длиной волны λ. $k\lambda = 2\pi$, $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$.

Распространение гармонической волны это смещение косинусоиды вдоль оси z со скоростью v. Если две гармонические волны, имеющие одинаковые амплитуды ($\mathrm{U_m}^+ = \mathrm{U_m}^-$) и одинаковые начальные фазы ($\varphi = \psi$), распространяются навстречу, образуется стоячая волна $u\,(z,t) = 2\,\mathrm{U_m}^+ \cos kz \cos(\omega\, t + \varphi\,)$. В каждый момент времени имеем неподвижную косинусоиду, ее нули не смещаются вдоль оси z.



Однородные уравнения ($j_\mathrm{m}^{\text{ст}} = 0$) для комплексных амплитуд векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ выглядят следующим образом

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + \dot{k}^2 \dot{\vec{E}}_m = 0; \qquad \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + \dot{k}^2 \dot{\vec{H}}_m = 0.$$

Очевидно, что скорость распространения волны для электромагнитного процесса $v = c \,/\, \mathrm{Re}\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}$; $v = 1 \,/\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}$ - это скорость распространения плоских однородных электромагнитных волн в идеальном диэлектрике. В вакууме

(ε_r=1, μ_r= 1) $v = c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3\cdot 10^8$ м/с.

Каждое из уравнений эквивалентно трем скалярным относительно декартовых компонент. Решения векторных уравнений складываются из своих проекций.

Рассматривая простейшие поля, зависящие только от декартовой координаты *z*, можно записать решения

$$\dot{\vec{E}}_m(z) = \dot{\vec{E}}_{m0}{}^{+} e^{-ikz} + \dot{\vec{E}}_{m0}{}^{-} e^{+ikz} = \dot{\vec{E}}_m{}^{+}(z) + \dot{\vec{E}}_m{}^{-}(z)$$

$$\dot{\vec{H}}_m(z) = \dot{\vec{H}}_{m0}{}^{+} e^{-ikz} + \dot{\vec{H}}_{m0}{}^{-} e^{+ikz} = \dot{\vec{H}}_m{}^{+}(z) + \dot{\vec{H}}_m{}^{-}(z)$$

$\dot{\vec{E}}_{m0}$, $\dot{\vec{H}}_{mo}$ - неопределенные векторные константы.

Учтем, что векторы $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ связаны уравнениями Максвелла

$$\dot{\vec{E}}_m = (-i/\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}) rot\dot{\vec{H}}_m; \qquad \dot{\vec{H}}_m = (-i/\omega\mu_0\dot{\mu}) rot\dot{\vec{E}}_m$$

Компоненты $\dot{\vec{E}}_m{}^{\pm}$, $\dot{\vec{H}}_m{}^{\pm}$ от координат x и y не зависят. При вычислении операции rot в декартовых координатах учтем, что вычисление производной по z эквивалентно появлению сомножителя ($\mp i\dot{k}$) $\partial/\partial z \Rightarrow \mp i\dot{k}$; $\left(\dot{k} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\dot{\varepsilon}\mu_0\dot{\mu}}\right)$

$$\dot{\vec{E}}_m{}^{\pm} = \frac{-i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 0 & 0 & \mp i\dot{k} \\ \dot{H}_{mx}{}^{\pm} & \dot{H}_{my}{}^{\pm} & \dot{H}_{mz}{}^{\pm} \end{vmatrix} = \pm Z_c \dot{\vec{H}}_m{}^{\pm} \times \vec{z}_0$$

$$\dot{\vec{H}}_m{}^{\pm} = \frac{i}{\omega\mu_0\mu_r}\begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 0 & 0 & \mp i\dot{k} \\ \dot{E}_{mx}{}^{\pm} & \dot{E}_{my}{}^{\pm} & \dot{E}_{mz}{}^{\pm} \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{Z_c}\vec{z}_0 \times \dot{\vec{E}}_m{}^{\pm}$$

$Z_c = \sqrt{\mu_0\dot{\mu}/\varepsilon_0\dot{\varepsilon}} = 120\pi\sqrt{\dot{\mu}/\dot{\varepsilon}}$ - характеристическое сопротивление волны (отношение поперечных к направлению распространения волны составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$)

Следовательно: 1) векторы $\vec{E}^{\pm}$ и $\vec{H}^{\pm}$ не имеют продольных компонент: $E_z{}^{\pm} = 0$, $H_z{}^{\pm} = 0$- это поперечная волна; 2) эти векторы ортогональны, т.е. $\vec{E}^{\pm}\cdot\vec{H}^{\pm} = 0$;

3) отношение скалярных величин $\dot{E}_m{}^{\pm}$ и $\dot{H}_m{}^{\pm}$ равно $\pm Z_c$.

Волны в непоглощающей среде

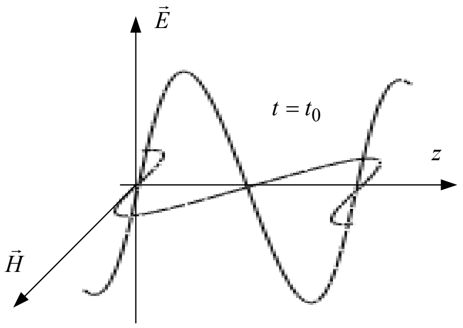
Если проницаемости $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_r$, $\dot{\mu} = \mu_r$ – вещественны, то среда не поглощает энергии электромагнитного поля. В этом случае k и $Z_c = 120\pi\sqrt{\mu_r/\varepsilon_r}$ – вещественные. Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль оси z. $\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_m^{\,+}$, $\dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_m^{\,+}$

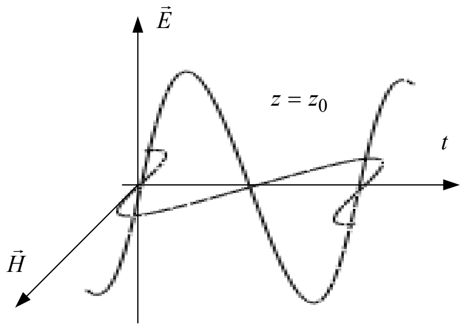
Зафиксируем ориентацию вектора $\vec{E}$ в пространстве, т.е. положим $\dot{\vec{E}}_{m0}^{\,+} = \vec{x}_0 \dot{A} = \vec{x}_0 A e^{i\varphi}$

При этом $\dot{\vec{E}}_m = \vec{x}_0 \dot{A} e^{-ikz}$, $\dot{\vec{H}}_m = \vec{y}_0 \left(\dot{A}/Z_c\right) e^{-ikz}$

Напряженности поля: $\vec{E} = \vec{x}_0 A \cos(\omega t - kz + \varphi)$, $\vec{H} = \vec{y}_0 \left(A/Z_c\right) \cos(\omega t - kz + \varphi)$

Векторы поля изменяются по закону плоской однородной волны, распространяющейся без затухания. Векторы синфазны. Зависимости от времени и от координаты *z* имеют одинаковый характер.





Геометрическое место точек, в которых электромагнитное поле имеет одинаковую фазу ($\omega\ t - kz + \varphi$), называется фронтом волы. В данном случае фронт волны – плоскость z = const. Во всех точках фронта амплитуда волны одинакова (такие волны называются однородными плоскими волнами). Найдем скорость перемещения фронта волны: зафиксируем фазу поля $\omega\ t - kz + \varphi = \text{const}$ и продифференцируем по *t*: $\omega - k\, \mathrm{d}z / \mathrm{d}t = 0 \ \rightarrow\ v_ф = \mathrm{d}z / \mathrm{d}t = \omega / k$ – фазовая скорость

Распространение волны сопровождается переносом энергии. Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$ направлен по оси z; $\vec{\Pi} = \vec{z}_0 (A^2 / Z_c) \cos^2 (\omega t - kz + \varphi)$.

С какой скоростью происходит перенос энергии? $\vec{\Pi} = w \vec{v}_э$, $\vec{v}_э$ – скорость движения энергии, w – плотность энергии волнового поля, $\vec{\Pi}$ – плотность потока энергии.

$$w = 1/2 \, (\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 + \mu_0 \mu_r H^2) = w^м + w^э = \varepsilon_0 \varepsilon_r A^2 \cos^2 (\omega t - kz + \varphi).$$

Следовательно, скорость переноса энергии $\vec{v}_э = \vec{\Pi} / w = \vec{z}_0 c / \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$, т.е. энергия переносится со свойственной данной волне фазовой скоростью $v_ф = \omega / k = c / \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$

Процесс распространения монохроматической волны полностью определяется двумя введенными скоростями.

Реальные сигналы, однако, содержат совокупность гармонических составляющих с разными частотами. Рассмотрим простейший сигнал, содержащий две составляющие с одинаковыми амплитудами и разными частотами ω_1, ω_2 и волновыми числами k_1, k_2.

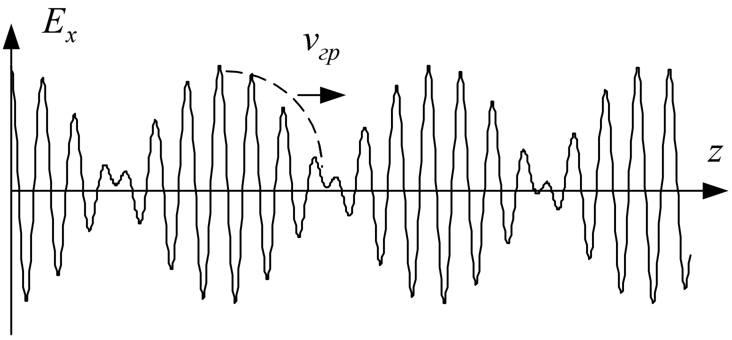
Пусть $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1) / 2 \ll \omega_0$, $\Delta k = (k_2 - k_1)/2 \ll k_0$,

где $\omega_0 = (\omega_2 + \omega_1) / 2$, $k_0 = (k_2 + k_1)/2$.

Мгновенное значение напряженности сигнала $E_x (z,t) = \mathrm{Re}\{A[e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} + e^{i(\omega_1 t - k_1 z)}]\} =$

$= \mathrm{Re}\{2A \cos (\Delta\omega t - \Delta k z) \exp[i (\omega_0 t - k_0 z)]\}$.

Амплитуда сигнала меняется по закону косинуса.



Скорость распространения сигнала найдем, зафиксировав некоторую точку на огибающей: $\Delta\omega \, t - \Delta k \, z = \mathrm{const}$. Дифференцируя по t и переходя к пределу при $\Delta\omega \to 0$, определим групповую скорость волны $v_{гр} = d\omega / dk$. Ее можно рассматривать как скорость распространения огибающей сигнала (скорость переноса сигнала), если зависимость фазовой скорости от частоты достаточно мала. В противном случае, частотные составляющие сигнала (полоса частот (ω_0 - $\Delta\omega$, ω_0 + $\Delta\omega$)) имеют существенно различные скорости, что приводит к искажению формы огибающей. В отсутствии потерь групповая скорость $v_{гр}$ совпадает со скоростью переноса энергии. Это утверждение справедливо и в том случае, когда потери малы и слабо зависят от частоты. Однако, если потери велики, скорость $v_{гр}$ отличается от скорости переноса энергии. При этом понятие групповой скорости теряет физический смысл. Определим связь между фазовой и групповой скоростями ($v_ф = \omega / k$):

$v_{гр} = \mathrm{d}\,(v_ф k)/ \mathrm{d}k = v_ф + k\, \mathrm{d}v_ф/ \mathrm{d}k$, или, учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$, $v_{гр} = v_ф - \lambda\, \mathrm{d}v_ф/ \mathrm{d}\lambda$ - формула Релея. Зависимость фазовой скорости от частоты называется дисперсией (это связано с частотно-зависимыми свойствами среды и присущей средам электропроводностью)

Фазовая и групповая скорость могут быть различны не только по значению, но и по знаку. Если направления этих скоростей одинаковы, то дисперсию считают положительной, а если противоположны, то отрицательной. Кроме того, в зависимости от знака производной $v_ф$ различают нормальную ($\mathrm{d}v_ф / \mathrm{d}\lambda > 0$) и аномальную ($\mathrm{d}v_ф / \mathrm{d}\lambda < 0$) дисперсии.

Волны в поглощающей среде.

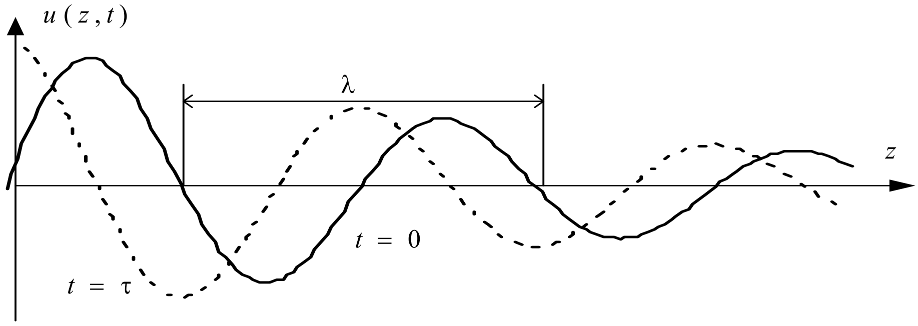
В реальных средах всегда имеют место потери электромагнитной энергии. В среде, где $\sigma \neq 0$, электромагнитное поле вызывает ток проводимости. На поддержание этих токов расходуется часть энергии поля, выделяется тепло. В однородной изотропной среде при наличии потерь поле плоской волны описывается так же, как и для среды без потерь, но параметр k здесь следует считать комплексной величиной: $k = k' - i\,k''$.

Тогда для гармонической волны

$u\,(z,t) = \mathrm{Re}\{U_m \exp[\, i\,(\omega t - kz + \varphi)]\} = U_m \exp(- k''z) \cos(\omega t - k'z + \varphi)$.

Если $k'' > 0$ – это затухающая волна. k'' – коэффициент затухания.

Можно записать $k' = \omega / v = 2\pi / \lambda$ -коэффициент фазы. Фазовую скорость при этом рассматривают как скорость смещения фронта волны с нулевой амплитудой. Длина волны λ уже не является периодом, но определяется по нулям функции.

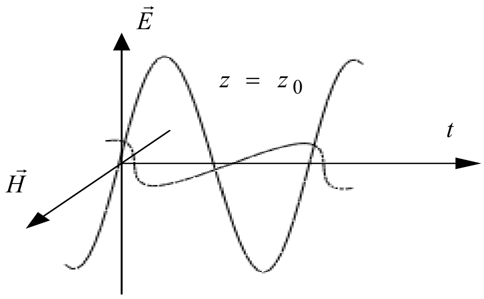


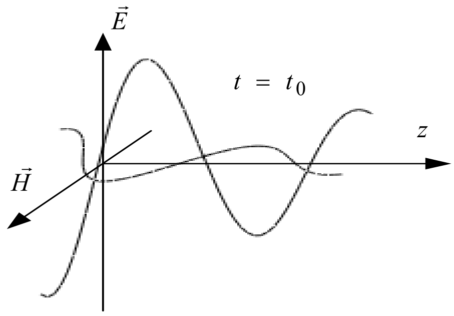
Для затухающей электромагнитной волны $\dot{k} = k' - ik'' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r \mu_r (1 - itg\delta)}$. (Считаем, что $\dot{\mu} = \mu_r$, т.е. ограничиваемся случаем, когда потери в среде обусловлены только ее проводимостью). $Z_c = \frac{\dot{k}}{\omega\dot{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r (1 - itg\delta)}} = |Z_c| e^{i\varphi_z}$;

$$|Z_c| = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\cos\delta}\,; \qquad \varphi_z = 1/2\ arctgtg\delta = \delta/2\,.$$

Затухающая электромагнитная волна $\vec{E} = \vec{x}_0$ A exp (- $k''z$) cos ($\omega t - k'z + \varphi$), $\vec{H} = \vec{y}_0$(A/$|Z_c|$)exp (- $k''z$) cos($\omega t - k'z + \varphi - \varphi_z$) -распространяется вдоль направления z с фазовой скоростью $v = \omega / k'$; характеристическое сопротивление $Z_c = Z_c' + i Z_c''$ = $|Z_c|$ exp (i φ_z), φ_z - фазовый сдвиг между векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ортогональны друг другу и направлению распространения (z), т.е. волна является поперечной. Поверхности равных фаз определяются уравнениями z = const – это плоскости, перпендикулярные оси z. Амплитуды векторов экспоненциально убывают вдоль z как exp(-$k''z$). Поверхности равных амплитуд совпадают с поверхностями равных фаз – такие волны также называются однородными. Между векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ имеется фазовый сдвиг, $\vec{H}$ опаздывает по фазе относительно $\vec{E}$ на угол φ_z.

Картина мгновенных значений векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$





Распространение волны сопровождается переносом энергии. Выражение мгновенного значения вектора Пойнтинга для волны в поглощающей среде $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$

$\vec{\Pi} = \vec{z}_0$ $(A^2 / |Z_c|)$ e xp $(-2k''z) \cos(\omega t - k'z + \varphi) \cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_z) =$

$= \vec{z}_0(A^2 / 2|Z_c|)$ e xp $(-2k''z)\{\cos \varphi_z + \cos[2(\omega t - k'z + \varphi) - \varphi_z]\}$

При усреднении во времени ($\tilde{\tilde{\Pi}} = \mathrm{Re}\,\dot{\tilde{\Pi}}$, $\dot{\tilde{\Pi}} = 1/2\,(\dot{\vec{E}}_m \times \dot{\vec{H}}_m{}^*)$)

$\tilde{\tilde{\Pi}} =$ $\vec{z}_0(A^2/2|Z_c|)\exp(-2k''z)\cos\varphi_z$ - средняя плотность потока энергии экспоненциально убывает вдоль z. Скорость переноса энергии рана $v_ф{}'$. Свойства сред, в которых распространяются электромагнитные волны, всегда являются в той или иной степени частотно-зависимыми. Поэтому должна зависеть от частоты и фазовая скорость электромагнитной волны $v_ф{}' = c / k' = c / \mathrm{Re}\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}$

Даже, если вещественные проницаемости ε_r, μ_r не зависят от частоты, дисперсия должна существовать из-за присущей средам электропроводности ($\sigma \neq 0$) $\rightarrow$ $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_r - i\,\sigma / \omega\varepsilon_0$. Для более сложных волновых процессов (например, в волноводах) дисперсия имеет место независимо от свойств внутренней среды.

Рассмотрим коэффициент затухания и коэффициент фазы для волны в диэлектрике и в проводнике.

$$k = k' - ik'' = |k| \exp[-i(\delta + \delta^м)/2] = K[(1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta)(1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta^м)]^{1/2},$$

где $|k| = (\omega / c)\sqrt{|\dot{\varepsilon}||\dot{\mu}|}$ $K = (\omega / c)(\varepsilon'\mu')^{1/2}$

В большинстве случаев магнитные потери в среде не учитывают ($\mu'' = 0$). При этом $k = K\,(1 - i\,tg\,\delta)^{1/2}$

В диэлектрике $tg\,\delta \ll 1$.

Разложим в ряд $k = K\,[1 - (i/2)\,tg\delta + (1/8)\,tg^2\delta + + (i/16)\,tg^3\delta - \ldots]$

Получаем приближенные формулы $k' \approx K = (\omega / c)\,(\varepsilon'\mu')^{1/2}$, $\quad k'' \approx K/2\ tg\,\delta =$ $= \frac{1}{2}\,(\omega / c)\,(\varepsilon'\mu')^{1/2}\ tg\,\delta$. Коэффициент затухания мал и не зависит от частоты, коэффициент фазы близок к волновому числу при отсутствии потерь. Потери почти не влияют на фазовую скорость $v_ф = \omega / k'$. Дисперсионные свойства среды проявляются незначительно. Характеристическое сопротивление волны в том же приближении $\quad Z_c = Z_{c0}\sqrt{\dfrac{\mu'}{\varepsilon'(1 - itg\delta)}} \approx Z_{c0}\sqrt{\mu'/\varepsilon'}\left(1 + i\,tg\delta/2\right)$. $\quad Z_{c0} = 120\pi = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$.

В проводнике $tg\,\delta \gg 1$.

Пренебрегая единицей, запишем $\qquad k \approx K\sqrt{-itg\delta} = (1-i)K\sqrt{tg\delta/2}$.

$$k' = k'' \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'}\sqrt{tg\delta/2} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r\omega\sigma}{2}}\ ; \qquad \left(tg\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)$$

$$Z_c = Z_{c0}\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'(1 - itg\delta)}} \approx Z_{c0}\sqrt{i\,\frac{\mu'}{\varepsilon' tg\delta}} = (1 + i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu_r}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu_r}{\sigma}}e^{i\pi/4}$$

Сдвиг фаз между векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ составляет 45^0. Величины k', k'' – велики, т.е. велико затухание и мала длина волны $\lambda = 2\pi / k'$. При переходе к идеальному проводнику ($\sigma \to \infty$) k', k'' неограниченно возрастают, следовательно, полное затухание процесса должно происходить на конечном расстоянии. k', k'' не линейно зависят от частоты, следовательно, свойства волны существенно различные на разных частотах. Пространственное распределение поля волны, распространяющейся в проводнике, оказывается резко апериодическим.

Пусть $E_m(z)$ – амплитуда напряженности электрического поля в точке с координатой z. $E_m(z+l)$ – амплитуда в точке $(z + l)$. Отношение $E_m(z) / E_m(z+l) = \exp(k''l)$ –

показывает во сколько раз уменьшается амплитуда волны при прохождении ею расстояния *l*. Затухание измеряется в неперах или в децибеллах:

$\ln\,[E_m(z) / E_m(z+l)] = k''l$ [неп], $20\lg\,[E_m(z) / E_m(z+l)\,] = k''l\, 20\lg e \approx 8{,}69\, k''l$ [дБ].

Расстояние Δ^0, при прохождении которого электромагнитное поле ослабевает в е раз, называют глубиной проникновения поля в среду (толщиной скин-слоя).

$\Delta^0 = 1/\,k'' = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\mu_r\omega\sigma}}$, Δ^0 зависит от частоты.

Поляризация волн.

Плоская волна, распространяющаяся в однородной изотропной среде, является *поперечной*: векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны направлению ее распространения (z) и образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов. Ориентация $\vec{E}$ и $\vec{H}$ относительно осей $x,\ y$ зависит от источника. Пусть вектор $\vec{E}$ имеет одну составляющую E_x. Тогда поле такой плоской волны в среде без потерь определяется формулами

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad \vec{H}_0 = \vec{y}_0 (E_0/\,Z_c) \cos(\omega t - kz + \varphi),$$

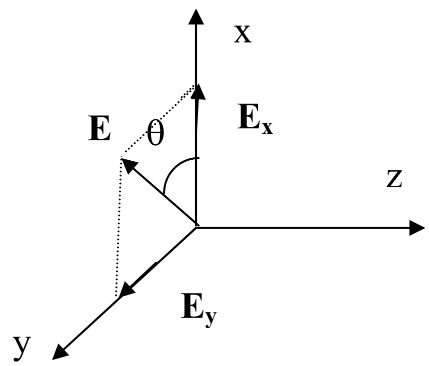
φ - начальная фаза векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, т.е. фаза в точке $z = 0$ при $t = 0$. Направление вектора $\vec{E}$ в течение первой половины периода колебания совпадает с направлением оси x, в течение второй половины – противоположно ей. Таким образом, в фиксированной точке пространства (z = const) конец вектора $\vec{E}$ с течением времени перемещается вдоль отрезка прямой линии, величина вектора $\vec{E}$ изменяется от E_0 до ($-\,E_0$). Это – *линейно поляризованная волна*.

Плоскость, проходящая через вектор $\vec{E}$ и направление распространения (пл. xoz), называется *плоскостью поляризации.*

В общем случае выражение для вектора $\vec{E}$ плоской волны записывается в виде

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \vec{y}_0 E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_2),$$

где E_{mx}, E_{my} –амплитуды составляющих E_x и E_y соответственно, φ_1 и φ_2 – фазы этих составляющих в точке $z = 0$ при $t = 0$. Такую волну можно рассматривать как суперпозицию двух плоских линейно поляризованных волн с взаимно перпендикулярной ориентацией векторов $\vec{E}$, распространяющихся в одном (вдоль z) направлении.



Характер изменения вектора $\vec{E}$ волны с течением времени в фиксированной точке пространства зависит от соотношения между начальными фазами φ_1 , φ_2 и от амплитуд E_{mx}, E_{my}. В фиксированной точке пространства угол θ определяется соотношением $\mathrm{tg}\,\theta = E_y / E_x = \dfrac{E_{my}\cos(\omega t - kz + \varphi_2)}{E_{mx}\cos(\omega t - kz + \varphi_1)}$

В общем случае угол θ может меняться со временем.

1. Предположим, что $\varphi_1 = \varphi_2$. Тогда $\mathrm{tg}\,\theta = E_{my} / E_{mx} = \mathrm{const}$. Вектор $\vec{E}$ в любой момент времени лежит в плоскости, проходящей через ось z и составляющей угол

$\theta = \mathrm{arctg}\,(E_{my} / E_{mx})$ с плоскостью xoz. С течением времени конец вектора $\vec{E}$ перемещается вдоль отрезка прямой, составляющей с осью x угол θ:

$\theta = (-)^n\,\mathrm{arctg}\,(E_{my} / E_{mx})$. Волна является линейно поляризованной.

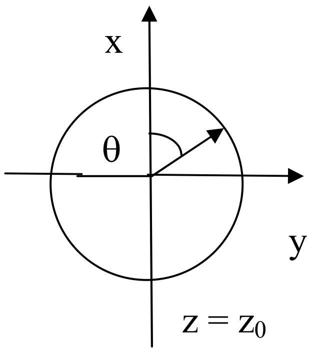
2. Предположим, что равны амплитуды волн $E_{mx} = E_{my}$, а фазы отличаются на $\pi / 2$. Тогда составляющие $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)$, $E_y = E_0 \sin(\omega t - kz + \varphi_1)$,

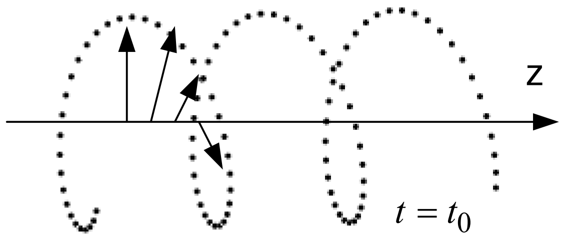
$\mathrm{tg}\,\theta = E_y / E_x = \mathrm{tg}\,(\omega t - kz + \varphi_1) \quad\Rightarrow\quad \theta = \omega t - kz + \varphi_1 + m\pi$, m – целое. Следовательно, в фиксированной точке пространства угол θ увеличивается пропорционально t. Величина модуля вектора $\vec{E}$ при этом остается неизменной.

$|\vec{E}| = [\,E_0^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_1) + E_0^2 \sin^2(\omega t - kz + \varphi_1)\,]^{1/2} = E_0$.

Таким образом, в фиксированной точке пространства вектор $\vec{E}$, оставаясь неизменным по величине, вращается с угловой частотой ω вокруг направления z.

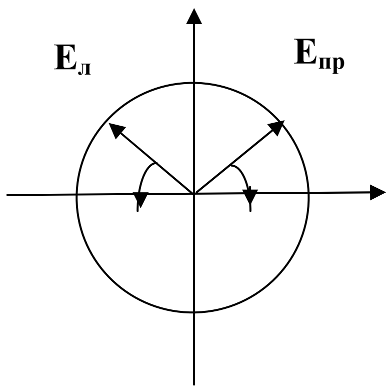
Конец вектора описывает окружность – это *волна круговой поляризации*: $E_{mx} = E_{my}$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \pi/2\ (2n + 1)$, n = 0, 1, 2, … Если вектор $\vec{E}$ вращается по часовой стрелке (если смотреть вдоль направления распространения) ($\varphi_1 - \varphi_2 = \pi / 2$), то это правая круговая поляризация. При вращении вектора против часовой стрелки – левая круговая поляризация. Вектор $\vec{E}$ вращается в направлении от опережающей по фазе составляющей вектора к отстающей.





В момент времени $t = t_0$ геометрическим местом конца вектора $\vec{E}$ является винтовая линия с шагом λ. С течением времени эта винтовая линия перемещается вдоль z со скоростью $v_ф$. Волна круговой поляризации – результат наложения двух волн, поляризованных в ортогональных плоскостях, если их амплитуды равны, а фазы сдвинуты на 90^0.

Волну с линейной поляризацией можно представить как суперпозицию двух волн круговой поляризации, имеющих одинаковые амплитуды и противоположные направления вращения.

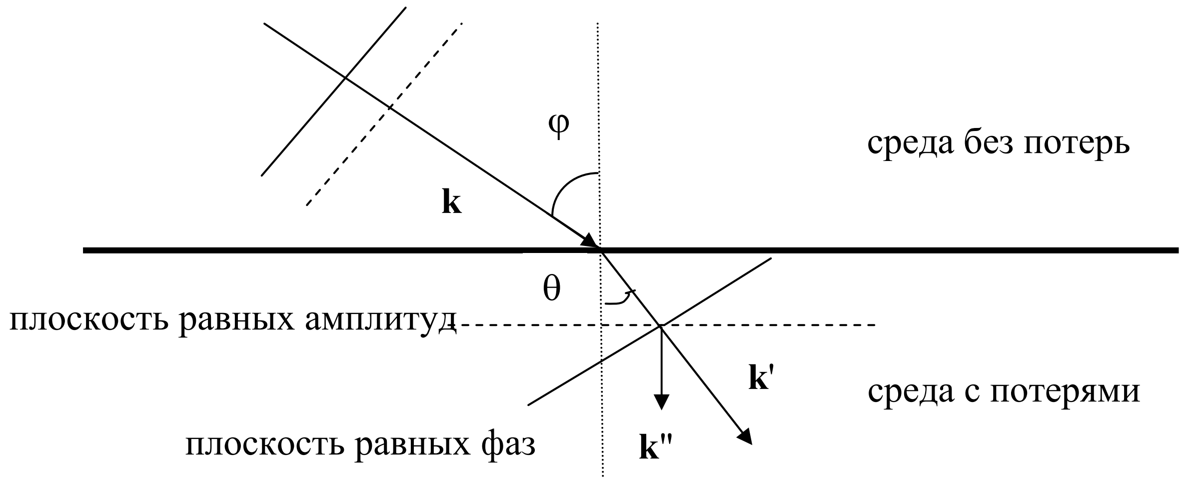


3. В общем случае амплитуда и направление вектора $\vec{E}$ не остаются постоянными. Вектор $\vec{E}$, вращаясь в плоскости z = const, изменяет свою длину так, что его конец описывает эллипс. Это *волна эллиптической поляризации*.

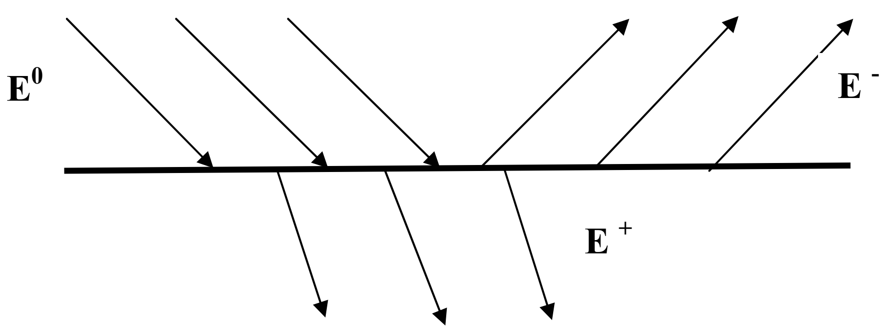
Заметим, что направление вектора $\vec{H}$ меняется в пространстве и во времени также как и направление вектора $\vec{E}$, поскольку пространственный угол между ними составляет 90^0, а фазовые углы равны (в среде без потерь).

Волновые явления на границе двух сред

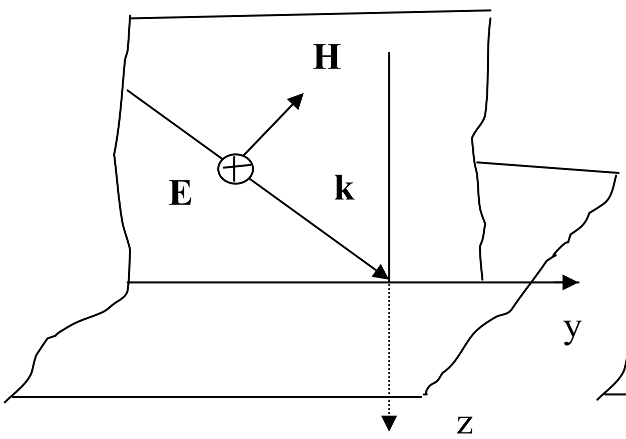
При рассмотрении падения электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред удобно совместить плоскость раздела с одной из координатных плоскостей. Тогда при наклонном падении волны направление распространения не совпадает ни с одной из осей координат. В общем случае направление распространение волны можно охарактеризовать волновым комплексным вектором $\vec{k} = \vec{k}' - i\vec{k}''$. При этом поле падающей волны описывается выражением $\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}$, $\dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}$, где $\vec{r}$ – радиус – вектор, определяющий положение в пространстве исследуемой точки. Вектор $\vec{k}'$ перпендикулярен плоскости равных фаз и определяет направление и скорость перемещения этой плоскости, вектор $\vec{k}''$ перпендикулярен плоскости равных амплитуд и определяет изменение амплитуды. Если векторы $\vec{k}'$ и $\vec{k}''$ параллельны (плоскости равных фаз и равных амплитуд совпадают), то плоская электромагнитная волна называется однородной. В противном случае волна будет неоднородной. Предположим, что плоская однородная волна падает на границу раздела двух сред. Первая среда без потерь, вторая с потерями. Если фазовая скорость во второй среде меньше, чем в первой, то плоскость равных фаз изменит направление (угол, образованный вектором $\vec{k}'$ и нормалью к границе раздела, направленной во вторую среду, уменьшается). Очевидно, что затухание поля определяется расстоянием точки от границы раздела. В этом случае вектор $\vec{k}''$ перпендикулярен границе раздела. Во второй среде с потерями распространяется плоская неоднородная волна.



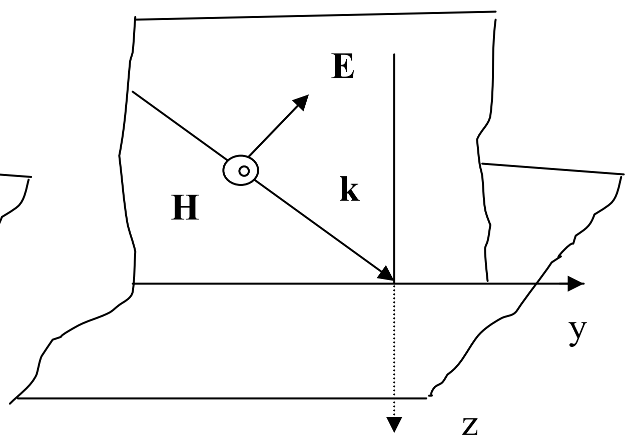
Введем некоторые определения. Пусть две однородные изотропные среды, из которых первая характеризуется параметрами ε_{r1}, μ_{r1}, а вторая ε_{r2}, μ_{r2}, разделены плоской границей. В первой среде под углом φ распространяется плоская однородная волна $\vec{E}^0, \vec{H}^0$. Волна, распространяющаяся от источника, называется *падающей*. Угол φ образован нормалью к плоскости раздела и направлением распространения $\vec{k}$ – это *угол падения*. Плоскость, проведенная через нормаль к поверхности раздела и направление распространения волны, называется *плоскостью падения*. Поле падающей волны вызывает колебания свободных и связанных зарядов, находящихся на поверхности раздела. Эти колебания являются причиной вторичного поля, распространяющегося в первую среду – *отраженной волны* $\vec{E}^-, \vec{H}^-$, и во вторую среду – *прошедшей или преломленной волны* $\vec{E}^+, \vec{H}^+$. Угол φ', образованный направлением распространения отраженной волны и направлением нормали к плоскости раздела, называется *углом отражения*, угол, образованный направлением распространения преломленной волны и нормалью, - *углом преломления* θ.



Вектор $\vec{E}^0$ падающей волны (говорим о линейно поляризованных волнах) перпендикулярен направлению распространения, а по отношению к плоскости падения может быть ориентирован произвольно. Однако, не нарушая общности анализа, можно ограничиться рассмотрением случая горизонтальной и вертикальной поляризации. Все другие случаи можно представить как суперпозицию этих двух. Если вектор $\vec{E}$ параллелен плоскости раздела, то поляризация называется *горизонтальной*. При этом вектор $\vec{H}$ лежит в плоскости падения. Если вектор $\vec{E}$ лежит в плоскости падения, а вектор $\vec{H}$ параллелен плоскости раздела, то поляризация называется *вертикальной*.



Горизонтальная (⊥) *поляризация*



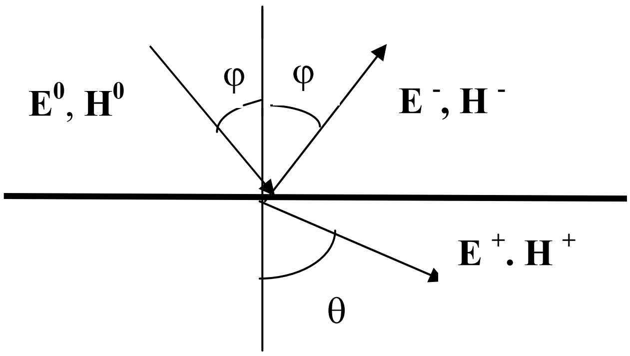
Вертикальная (||) *поляризация*

Итак, необходимо при заданной падающей волне найти комплексные амплитуды и направления распространения двух других волн, при которых тангенциальные компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ остаются непрерывными на границе раздела сред. При отсутствии поверхностного тока касательные составляющие векторов поля $\dot{E}_{m_{1\tau}} = \dot{E}_{m_{2\tau}}$, $\dot{H}_{m_{1\tau}} = \dot{H}_{m_{2\tau}}$, следовательно

$$\dot{E}_{m_\tau}{}^0 + \dot{E}_{m_\tau}{}^- = \dot{E}_{m_\tau}{}^+, \quad \dot{H}_{m_\tau}{}^0 + \dot{H}_{m_\tau}{}^- = \dot{H}_{m_\tau}{}^+.$$

Наклонное падение волны.

Не нарушая общности, можно рассмотреть случай, когда волна падает в плоскости *yoz* (плоскость раздела – *xoy*). При произвольном угле падения фазовый множитель $e^{-i\vec{k}\vec{r}} = e^{-i\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)}$. В рассматриваемой задаче векторы поля $\dot{\vec{E}}_m{}^0 = \dot{\vec{E}}^0 e^{-ik_1\left(y\sin\varphi + z\cos\varphi\right)}$, $\dot{\vec{H}}_m{}^0 = \dot{\vec{H}}^0 e^{-ik_1\left(y\sin\varphi + z\cos\varphi\right)}$, причем $\dot{\vec{E}}^0 = \dot{\vec{H}}^0 \times \vec{k}_1 Z_c$.



Векторы $\dot{\vec{E}}^0$, $\dot{\vec{H}}^0$ в среде без потерь не зависят от координат и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения (вектору $\vec{k}_1$)

Очевидно, что волновые векторы прошедшей и отраженной волн также лежат в плоскости падения *yoz*, иначе поля этих волн зависели бы от координаты *x*, а так как поле падающей волны не зависит от *x*, не выполнялись бы граничные условия.

Обозначим фазовый множитель падающей волны $f_0\,(y,z) = \exp\,[-ik_1(y\sin\varphi + z\cos\varphi)$, фазовый множитель отраженной волны $f_-\,(y,z) = \exp\,[-ik_1(y\sin\varphi' - z\cos\varphi')$, фазовый множитель прошедшей волны $f_+\,(y,z) = \exp\,[-ik_2(y\sin\theta + z\cos\theta)$. Граничные условия ($z = 0$) должны выполняться при любых у. Это возможно только в том случае, если зависимость векторов поля от переменной у во всех трех волнах будет одинаковой. Следовательно, $f_0\,(y,0) = f_-\,(y,0) = f_+\,(y,0)$, т.е. проекции волновых векторов на ось у равны: $k_1\sin\varphi = k_1\sin\varphi' = k_2\sin\theta$. Отсюда следует, что $\varphi = \varphi'$ – угол падения равен углу отражения. Это *первый закон Снелиуса*. $\sin\theta / \sin\varphi = k_1 / k_2 = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}} = \dfrac{n_1}{n_2}$

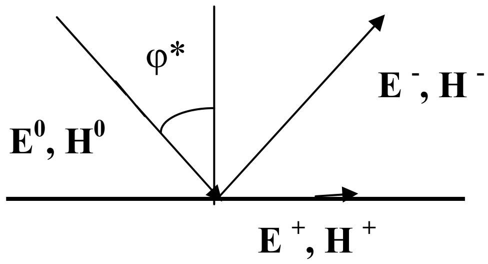
- второй закон Снелиуса.

n_1, n_2–коэффициенты преломления сред. $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}} = c/v_1$, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}} = c/v_2$

v_1, v_2 – фазовые скорости волны в среде. $\sin\theta / \sin\varphi = v_2 / v_1$.

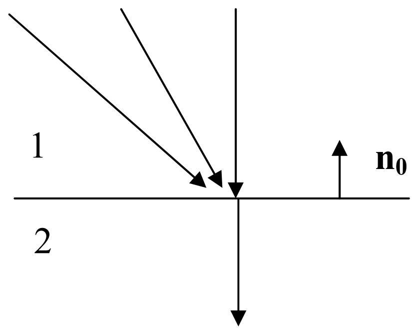
Рассмотрим некоторые следствия.

1). Пусть первая среда оптически долее плотная. $n_1 > n_2$. Тогда $\sin\theta > \sin\varphi$, $\theta > \varphi$. Угол преломления больше угла падения. При некотором угле $\varphi = \varphi^*$ (φ^* - предельный угол внутреннего отражения), оказывается, что $\theta = \pi/2$ - прямой угол. Преломленный луч как бы скользит вдоль границы раздела. $\sin\varphi^* = k_2 / k_1 = n_2 / n_1$. При дальнейшем увеличении угла падения преломленный луч отсутствует.



2). Пусть среда 2 оптически более плотная, причем $n_2 >> n_1$.

Тогда $\sin\theta = (n_1 / n_2)\sin\varphi << 1$, т.е. при любом угле падения φ преломленный луч близок по направлению к внутренней нормали. Следовательно, плоская волна, падающая под любым углом φ на границу раздела, возбуждает во второй среде плоскую волну, распространяющуюся практически вдоль нормали к поверхности раздела.



При этом во второй среде выполняется соотношение $\dot{\vec{E}}_2 = Z_{c2}\vec{n}_0 \times \dot{\vec{H}}_2$

$\vec{n}_0$ – единичная нормаль, внешняя по отношению к плотной среде. Так как волна во второй среде распространяется перпендикулярно границе, то векторы $\vec{E}_2$ и $\vec{H}_2$ параллельны поверхности раздела. На границе раздела сред касательные составляющие векторов поля непрерывны $\dot{\vec{E}}_{\tau 1} = \dot{\vec{E}}_{\tau 2}$, $\dot{\vec{H}}_{\tau 1} = \dot{\vec{H}}_{\tau 2}$

Следовательно, можно написать $\dot{\vec{E}}_{\tau 1} = Z_{c2}\vec{n}_0 \times \dot{\vec{H}}_{\tau' 1}$ на поверхности плотной среды (например, реального проводника). τ' – направление касательной составляющей вектора $\vec{H}$ (касательные составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не совпадают по направлению).

Далее можно записать $\dot{\vec{E}}_{\tau 1} = Z_{c2}\vec{n}_0 \times \dot{\vec{H}}_1$, т.е. заменить вектор $\dot{\vec{H}}_{\tau' 1}$ полным вектором $\dot{\vec{H}}_1$, так как $\vec{n}_0 \times \dot{\vec{H}}_{n1} = 0$ ($\dot{\vec{H}}_1 = \dot{\vec{H}}_{n1} + \dot{\vec{H}}_{\tau 1}$).

Это приближенное граничное условие Леонтовича – Щукина, которое выражает связь между составляющими векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в одной среде. Для хорошо проводящей среды Z_{c2} мало, касательная составляющая $\vec{E}_{1\tau}$ мала, однако, она определяет нормальную к поверхности проводника компоненту вектора $\vec{\Pi}$, т.е. уходящий в металл поток энергии.

Формулы Френеля.

Законы Снелиуса позволяют определить направление распространения отраженной и прошедшей волн. Комплексные амплитуды поля отраженной и прошедшей волн (при заданной падающей волне) должны зависеть от поляризации падающей волны. Используя граничные условия для векторов $\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m$ на поверхности раздела сред, можно получить следующие выражения для коэффициентов отражения и преломления: по определению $R_\perp = \dfrac{\dot{E}_\perp^-}{\dot{E}_\perp^0}$, $T_\perp = \dfrac{\dot{E}_\perp^+}{\dot{E}_\perp^0}$

$R_\perp$ - коэффициент отражения нормально поляризованной волны (горизонтальная поляризация), $T_\perp$ - коэффициент прохождения нормально поляризованной волны.

$$R_\perp = \frac{Z_{c2}\cos\varphi - Z_{c1}\cos\theta}{Z_{c2}\cos\varphi + Z_{c1}\cos\theta}, \quad T_\perp = \frac{2Z_{c2}\cos\varphi}{Z_{c2}\cos\varphi + Z_{c1}\cos\theta} .$$

Заметим, что две задачи (для нормально поляризованной волны и параллельно поляризованной волны) находятся в соотношении, определяемом принципом двойственности. Структуры $\vec{E}$ и $\vec{H}$ полей при переходе от одной задачи к другой как бы меняются ролями. Коэффициент отражения в случае параллельно поляризованной волны (вертикальная поляризация) $R_{||} = \dfrac{\dot{E}_{||}^{\,-}}{\dot{E}_{||}^{\,0}} = \dfrac{\dot{H}_{||}^{\,-}}{\dot{H}_{||}^{\,0}}$, а коэффициент прохождения параллельно поляризованной волны $T_{||} = \dfrac{\dot{E}_{||}^{\,+}}{\dot{E}_{||}^{\,0}} = \dfrac{\dot{H}_{||}^{\,+}}{\dot{H}_{||}^{\,0}} \cdot \dfrac{Z_{c2}}{Z_{c1}}$

$$R_{||} = -\frac{Z_{c2}\cos\theta - Z_{c1}\cos\varphi}{Z_{c2}\cos\theta + Z_{c1}\cos\varphi}\ , \qquad T_{||} = \frac{2Z_{c2}\cos\varphi}{Z_{c2}\cos\theta + Z_{c1}\cos\varphi}$$

Это формулы Френеля.

$Z_{c1,2}$ – характеристические сопротивления волны (волновые сопротивления) в среде 1 и 2. $Z_c = (\mu_0\mu_r / \varepsilon_0\varepsilon_r)^{1/2}$

При определенном угле падения $\varphi_Б$ параллельно поляризованной волны коэффициент отражения $R_{||}$ обращается в 0. $R_{||} = 0 \ \rightarrow Z_{c2}\cos\theta - Z_{c1}\cos\varphi_Б = 0$.

Но $\cos\theta = (1 - \sin^2\theta)^{1/2} = [1 - (\sin\varphi_Б\ (k_1/ k_2))^2]^{1/2}$.

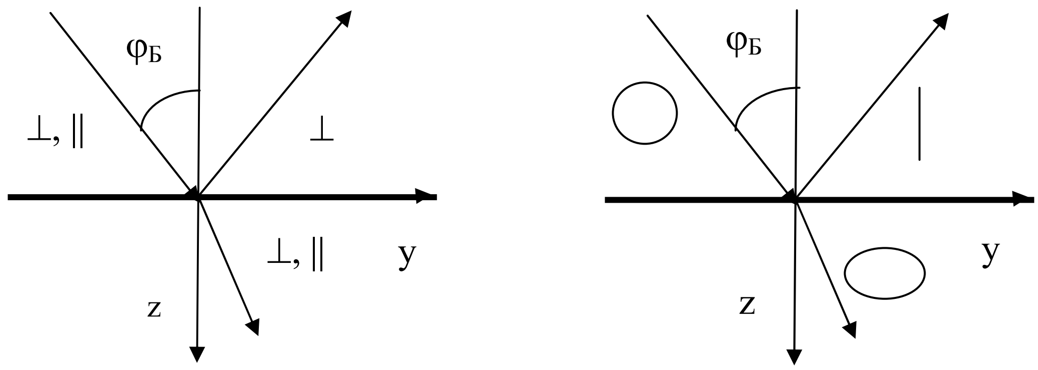
Следовательно, $\sin^2\varphi_Б = (\mu_{r2}/\mu_{r1} - \varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1})(\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1})^{-1}$.

Для $\mu_{r2} = \mu_{r1}$ $\varphi_Б = \mathrm{arctg}(\varepsilon_{r2} / \varepsilon_{r1})^{1/2}$. $\varphi_Б$ – угол Брюстера – угол полного прохождения параллельно поляризованной волны.

Если предположить $R_{\perp} = 0$, то получим $\sin^2\varphi = (\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1} - \mu_{r2}/\mu_{r1})(\mu_{r1}/\mu_{r2} - \mu_{r2}/\mu_{r1})^{-1}$.

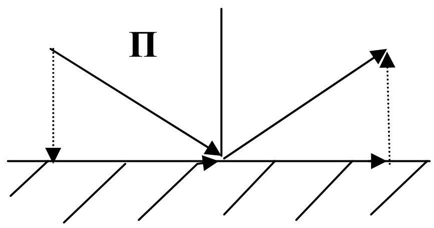
Следовательно, для немагнитных диэлектриков ($\mu_{r1} = \mu_{r2}$) для перпендикулярно поляризованной волны полное прохождение не наблюдается при любых углах падения (такого угла не существует).

Если на поверхность раздела под углом Брюстера падает волна, имеющая составляющие с горизонтальной и вертикальной поляризацией, то отраженная волна содержит только составляющую с горизонтальной поляризацией, так как составляющая с вертикальной поляризацией полностью проходит через границу раздела сред. Плоскую волну круговой или эллиптической поляризации можно представить в виде суперпозиции двух линейно поляризованных волн, в частности волн с горизонтальной и вертикальной поляризациями. Следовательно, волны круговой и эллиптической поляризации будут отражаться при любых углах падения, однако, соотношение между амплитудами волн с горизонтальной и вертикальной поляризациями в отраженных и преломленных волнах будет иным, чем в падающей волне. Это приводит к изменению поляризации отраженной и прошедшей волн. В частности, если плоская волна с круговой поляризацией падает под углом Брюстера для одной из двух образующих ее линейно поляризованных волн, то отраженная вола оказывается линейно поляризованной, а преломленная – эллиптически поляризованной волной.



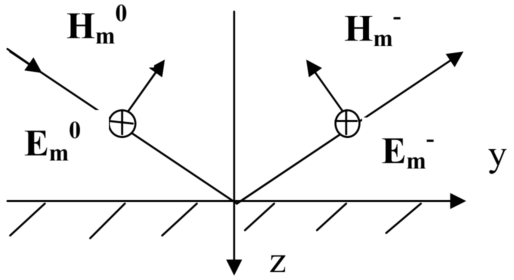
Волны вдоль идеально проводящей плоскости

Если плоская однородная волна при наклонном падении на границу раздела сред полностью отражается, то отраженная волна несет такую же энергию, как и падающая. Если разложить вектор Пойнтинга падающей и отраженной волн на нормальные и тангенциальные границе компоненты, нормальные компоненты взаимно уничтожатся, а тангенциальные сложатся, следовательно, поток энергии переносится вдоль границы, формируется особый волновой процесс.



Пусть вторая среда – идеальный проводник ($\sigma_2 \to \infty$, $Z_{c2} = 0$). Рассмотрим падение на границу *нормально поляризованной волны*. В этом случае из формул Френеля следует, что $R_\perp = -1$, $T_\perp = 0$. Запишем комплексную амплитуду вектора $\vec{E}$ падающей волны $\dot{\vec{E}}_m^0 = \vec{x}_0\, \dot{A}\, \exp[-ik(y\sin\varphi + z\cos\varphi)]$. (Поскольку поле существует только в одной среде, единицу в индексе не указываем).

Для отраженной волны $\dot{\vec{E}}_m^- = \vec{x}_0\, R_\perp\, \dot{A}\, \exp[-ik(y\sin\varphi - z\cos\varphi)]$



Следовательно, в верхнем полупространстве ($z < 0$) поле, представляющее собой наложение падающей и отраженной волн, описывается соотношениями

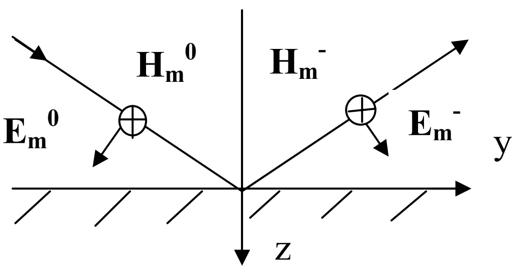
$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{x}_0 (-i2)\, \dot{A} \sin(kz\cos\varphi) \exp(-iky\sin\varphi)$$

$$\dot{\vec{H}}_m = 2\, (\dot{A} / Z_c)\, [\vec{y}_0 \cos\varphi \cos(kz\cos\varphi) + \vec{z}_0\, i \sin\varphi \sin(kz\cos\varphi)] \exp(-iky\sin\varphi).$$

Для волны *с параллельной поляризацией* запишем поле, как наложение падающей и отраженной волн, учитывая, что в рассматриваемом случае $R_{||}=1$, $T_{||} = 0$

$$\dot{\vec{E}}_m = -i\, 2\, \dot{A}\, [\vec{y}_0 \cos\varphi \sin(kz\cos\varphi) - \vec{z}_0\, i \sin\varphi \cos(kz\cos\varphi)] \exp(-iky\sin\varphi),$$

$$\dot{\vec{H}}_m = -\, \vec{x}_0 (2\, \dot{A} / Z_c) \cos(kz\cos\varphi) \exp(-iky\sin\varphi)$$

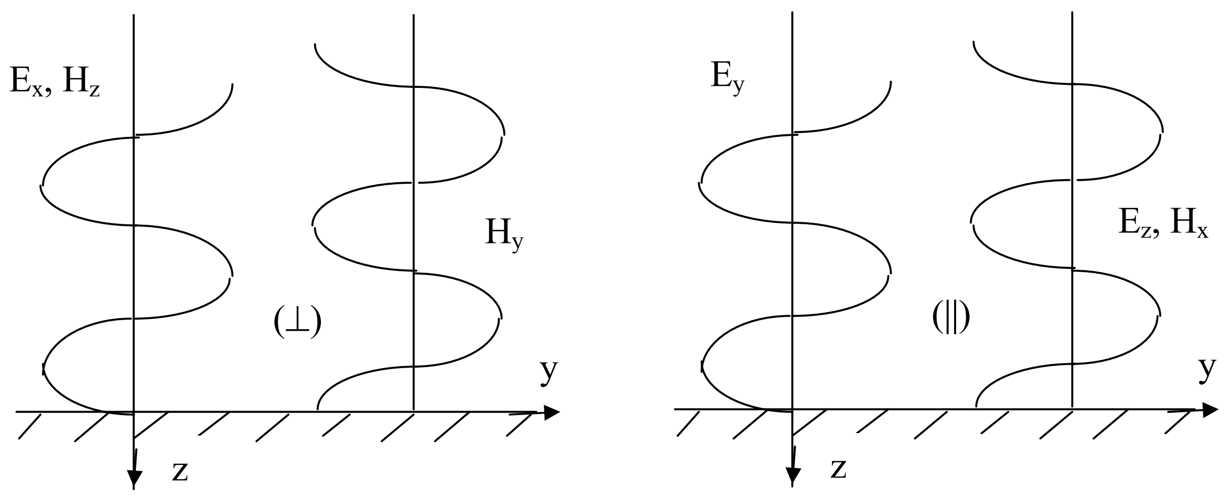


Итак, в обоих случаях поле в верхнем полупространстве имеет характер волны, распространяющейся в направлении y (множитель $\exp(-iky\sin\varphi)$), а в плоскости фронта $y = \text{const}$ распределение поля есть стоячая волна (множители $\sin(kz\cos\varphi)$, $\cos(kz\cos\varphi)$ по оси z). В целом это плоские неоднородные волны, распространяющиеся вдоль границы. Неоднородные волны имеют поперечные и продольные (относительно направления распространения) составляющие векторов поля. В случае падения нормально поляризованной волны вектор магнитного поля имеет продольную компоненту H_y. Такие волны называют *H* – волнами, или *TE* – волнами (поперечно-электрическими). В случае падения параллельно поляризованной волны вектор суммарного электрического поля имеет продольную компоненту. Это *E* - , или *TM* – волны (поперечные магнитные).

Электромагнитный процесс характеризуется волновыми числами $\Gamma = k \sin \varphi$, $\chi = k \cos \varphi$, связанными соотношением $\Gamma^2 + \chi^2 = k^2$. Γ – продольное волновое число, или постоянная распространения (по оси *y*), χ - поперечное волновое число (по оси *z*). При вещественном *k* $\Gamma = \omega / v_ф = 2\pi / \Lambda$, $v_ф$ – фазовая скорость волны, Λ - пространственный период (длина волны). Запишем $\chi = 2\pi / \Lambda_\perp$, введя обозначение $\Lambda_\perp$ для периода стоячей волны в плоскости фронта.

Фазовые скорости неоднородных волн выше фазовой скорости однородной волны *v* в той же среде. Говорят, что это быстрые волны. Действительно, поскольку $0 < \varphi < 90^0$, то при вещественном *k* $\Gamma = \omega / v_ф = k \sin \varphi < k = \omega / v$; следовательно $v_ф > v$.

На рисунках представлено распределение компонент векторов поля в плоскости фронта рассматриваемых неоднородных волн.



На расстояниях $z = -\,n\,\Lambda_\perp/2$ от границы раздела лежат плоскости, на которых выполняется условие $E_\tau = 0$ ($\sin(kz\cos\varphi) = 0 \rightarrow kz\cos\varphi = n\pi$, $z = n\pi / (k\cos\varphi)$, но $k\cos\varphi = \chi \rightarrow z = n\pi/\chi$, $\chi = 2\pi / \Lambda_{\perp,,}$). Следовательно, их можно заменить идеально проводящими плоскостями без нарушения структуры поля. Кроме того, для случая падающей нормально поляризованной волны можно ввести идеально проводящие плоскости, параллельные плоскости *zoy*, на любых расстояниях, так как вектор $\vec{E}$ не имеет для них касательных составляющих, вектор $\vec{H}$ параллелен этим плоскостям.

Плоский полый волновод.

Если введена дополнительная идеально проводящая плоскость, то между ней и первоначальной границей $z = 0$ образуется энергетически изолированный слой, внутри которого может существовать прежняя *E* - или *H* - волна. Это простейший полый волновод. Предположим, что расстояние между двумя рассматриваемыми плоскостями зафиксировано и равно *d*. Тогда $\chi = \chi_n = n\pi / d$, где n = (0), 1, 2,…
(n = 0 имеет смысл только в случае падения параллельно поляризованной волны). Это означает, что в таком волноводе могут распространяться *E* - и *H* - волны, для которых поперечное волновое число $\chi = \chi_n$. Это разные типы волн.

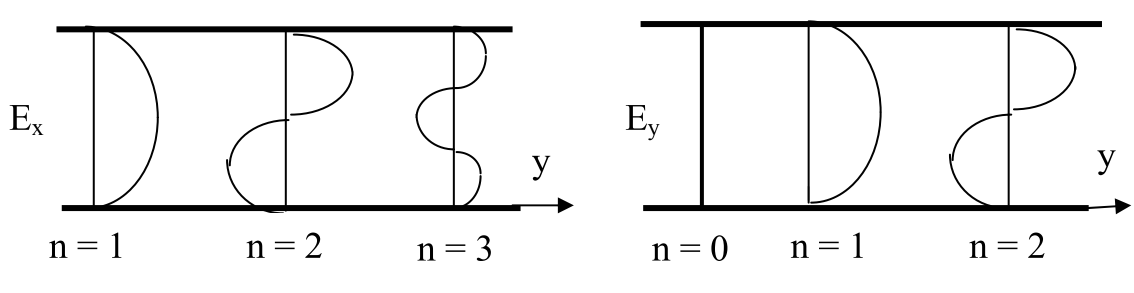
Но $\Gamma^2 + \chi^2 = k^2$, значит продольное волновое число

$\Gamma = \Gamma_n = [k^2 - (n\pi / d)^2]^{1/2} = k\,[1 - (\omega_{кр} / \omega)^2]^{1/2}$, где обозначено $\omega_{кр} = [c\,(\varepsilon_r \mu_r)^{-1/2}\, n\pi / d]$ – критическая частота.

Возвращаясь к выражениям для мгновенных значений полей, при вещественных ε_r, μ_r получим множитель $\mathrm{Re}\,[\exp(-i\Gamma y)\exp(i\omega t)] = \cos(\omega t - \Gamma y)$ – если $\omega > \omega_{кр}$, либо $\mathrm{Re}[\ldots] = = \exp(|\Gamma| y)\cos \omega t$ – если $\omega < \omega_{кр}$, следовательно волновой процесс возможен только для частот $\omega > \omega_{кр}$ (быстрые волны).

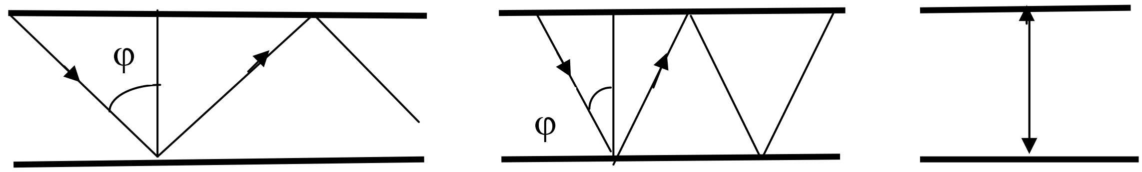
На рисунках показано распределение компонент E_x (E_y) в плоскости фронта направляемой волны при нормальной (параллельной) поляризации падающей волны для разных n.

Нормально поляризованная волна Параллельно поляризованная волна



Чем меньше n, тем ниже критическая частота $\omega_{кр}$. При $n = 0 \rightarrow \omega_{кр} = 0$, в этом единственном случае в плоском полом волноводе распространяется плоская однородная волна, лишенная продольной компоненты поля.

Продольное волновое число Г было введено, как $\Gamma = k \sin\varphi = k\,(1 - \cos^2\varphi)^{1/2}$, где φ - угол падения плоской однородной волны на границу раздела сред. Сопоставляя выражения для Г, можно записать $\cos\varphi = \omega_{кр} / \omega$. При данной частоте ω каждая неоднородная направляемая волна (фиксированное n) образуется при падении однородной плоской волны под определенным углом φ.



При углах φ, близких к 90^0, однородные волны, отражающиеся многократно от плоскостей, распространяются «полого». Это возможно при высоких частотах $\omega \gg \omega_{кр}$. С понижением частоты увеличивается cos φ, угол φ уменьшается, а при $\omega = \omega_{кр}$ он обращается в 0. При этом исходная волна распространяется по нормали к плоскостям, формируется поперечная стоячая волна, передача энергии вдоль волновода прекращается. При дальнейшем понижении частоты cosφ > 0, поле теряет волновой характер, становится затухающим.

Волны вдоль плоской границы диэлектриков.

Диаграмма потоков энергии, которая обсуждалась при рассмотрении падения плоской однородной волны на границу идеального проводника, относится и к случаю полного отражения плоской однородной волны от границы с оптически менее плотной диэлектрической средой. Ранее был определен угол полного внутреннего отражения φ* ($\sin\varphi^* = k_2 / k_1$). При $\varphi > \varphi^*$ независимо от поляризации волна полностью отражается. Действительно, в этом случае $\sin\theta > 1$, а $\cos\theta = ia$ – чисто мнимая величина. Следовательно, формулы Френеля для коэффициентов отражения для двух рассмотренных поляризаций падающей волны можно записать в виде $R_{\perp,||} = (A - iB) / (A + iB)$, где A и B – вещественные при отсутствии поглощения. Следовательно, $R_{\perp,||} = |R_{\perp,||}| \exp(i\varphi_{\perp,||}) = \exp(i\varphi_{\perp,||})$, т.е. модули коэффициента отражения равны 1.

Выражения комплексных векторов поля для случаев волн нормальной и параллельной поляризаций при полном отражении от границы диэлектриков имеют тот же характер, что и в случае отражения от идеально проводящей плоскости. Поле в первой среде – плоская неоднородная волна, распространяющаяся в направлении y. В плоскости фронта y = const распределение поля имеет вид стоячей волны, которая несколько смещена по оси z , так что при $z = 0$ уже не выполняется условие $E_\tau = 0$. В частности, для нормально поляризованной волны

$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{x}_0 2\dot{A} \cos(k_1 z \cos\varphi + \psi_\perp/2) \exp[-i(k_1 y \sin\varphi - \psi_\perp/2)]; \quad (z < 0)$$

Поле в первой среде можно охарактеризовать волновыми числами Γ и χ_1 :

$$\Gamma = k_1 \sin\varphi, \quad \chi_1 = k_1 \cos\varphi, \quad \Gamma^2 + \chi_1^2 = k_1^2.$$

Электромагнитный процесс во второй среде – это продолжение неоднородной волны. Продольные зависимости полей в обеих средах одинаковые. В противном случае не было бы выполнено условие непрерывности тангенциальных компонент на границе раздела. Это позволяет записать для второй среды

$$\Gamma = k_2 \sin\theta, \quad \chi_2 = k_2 \cos\theta, \quad \Gamma^2 + \chi_2^2 = k_2^2.$$

Распределение поля в плоскости фронта y = const описывается функцией

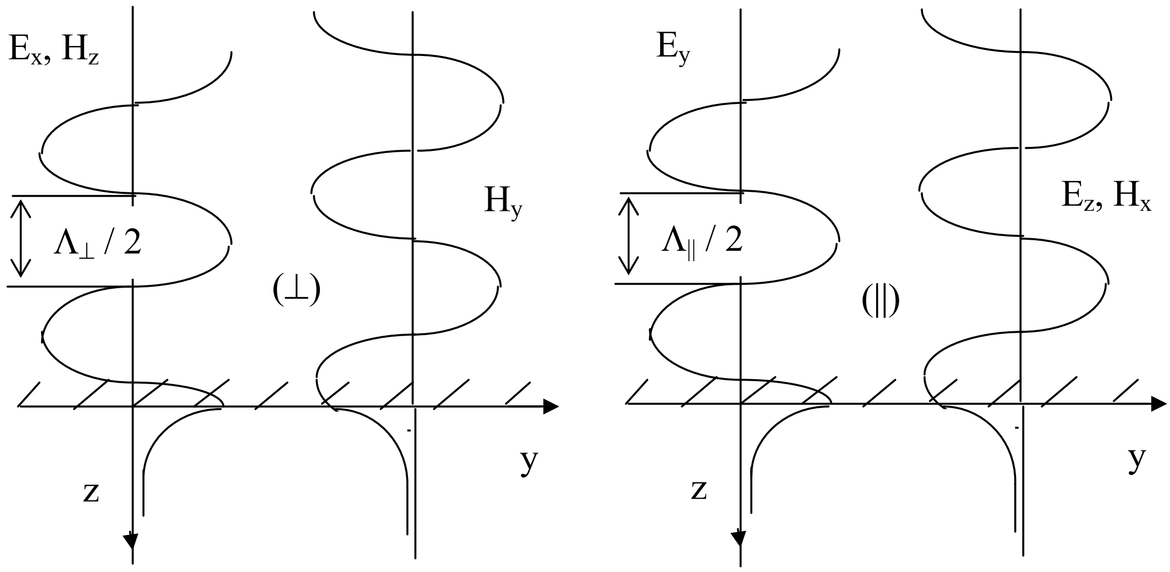
$$F(z) = \exp(-ik_2 z \cos\theta) = \exp(-i\chi_2 z).$$

Но, $\cos\theta$ - мнимая величина, запишем $\cos\theta = -i\text{a} = -i|\cos\theta|$, тогда

$$F(z) = \exp(-\beta z), \quad \beta = k_2 |\cos\theta|.$$

Следовательно, во второй среде ($z > 0$) поле экспоненциально убывает от границы раздела. Здесь процесс имеет характер поверхностной волны.

На рисунках показано распределение компонент векторов поля в плоскости фронта неоднородной волны в обеих средах при двух поляризациях (E - и H - волны). Стоячая волна в первой среде (множители $^{\sin}_{\cos}(k_1 z \cos\varphi + \psi_{\perp,||}/2)$) переходит в поверхностную волну во второй среде (множитель $\exp(-i\Gamma y) \exp(-\beta z)$).



Фазовая скорость рассматриваемой неоднородной волны $v_ф = \omega / \Gamma$. Продольное волновое число $\Gamma \le k_1$, так как $\Gamma = k_1 \sin\varphi$, а угол $(0 \le \varphi \le 90^0)$. Но $\Gamma \ge k_2$, поскольку $\Gamma = k_2 \sin\theta$, а $\sin\theta \ge 1$. Значит $k_2 \le \Gamma \le k_1 \rightarrow v_1 \le v_ф \le v_2$. ($v_1$, v_2 – скорость однородной плоской волны в среде 1, 2). Итак, фазовая скорость неоднородной волны, распространяющейся вдоль границы раздела сред (при полном отражении), выше фазовой скорости однородной волны в первой среде ($v_1 = c / (\varepsilon_r \mu_r)^{1/2}$), но ниже v_2 во второй среде. Здесь волна является поверхностной и медленной ($v_ф \le v_2$).

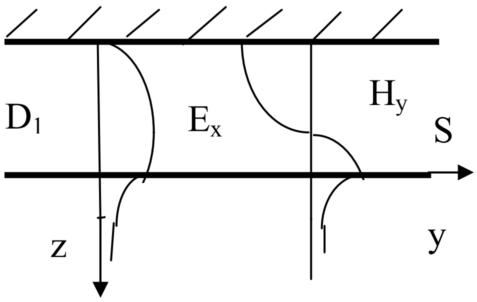
Введем понятие поверхностного импеданса Z_S, который определяется соотношением касательных составляющих $\dot{\vec{E}}_{m\tau}$ и $\dot{\vec{H}}_{m\tau}$ на границе раздела сред

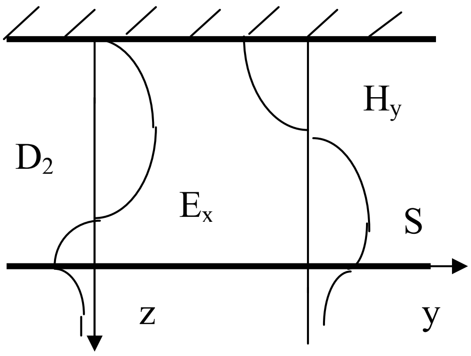
$\dot{\vec{E}}_{m\tau} = Z_S \dot{\vec{H}}_{m\tau} \times \vec{z}'_0$, где $\vec{z}'_0 = -\vec{z}_0$ - орт внутренней нормали для первой среды.

Получаем следующие выражения $Z_S = - Z_{c2} / \cos\theta$ - для H – волн, $Z_S = - Z_{c2} \cos\theta$ - для E – волн. Принимая во внимание, что $\cos\theta = - i \,|\cos\theta|$, можно утверждать, что поверхностный импеданс имеет емкостной характер для H - волн и индуктивный – для E – волн. Наличие такого поверхностного импеданса (поддерживаемого электромагнитным процессом в первой среде), можно рассматривать как условие существования поверхностной волны во второй среде.

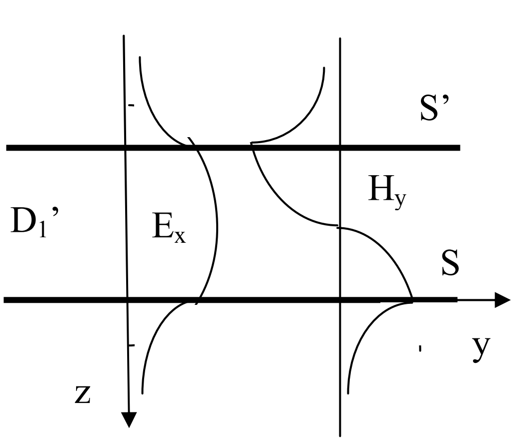
Плоский диэлектрический волновод.

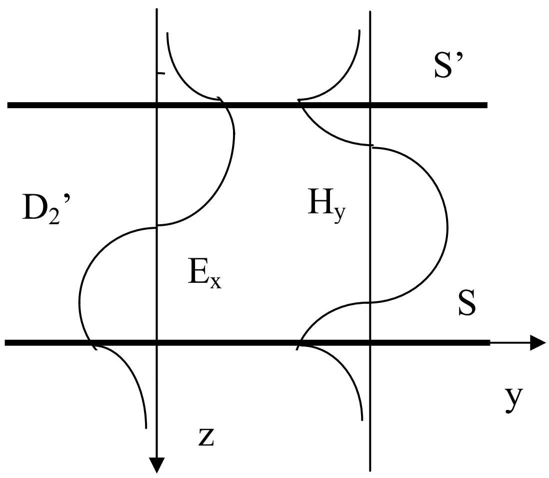
В случае полностью отражающей границы диэлектриков существуют плоскости, на которых $E_\tau = 0$. Каждую такую плоскость можно заменить идеально проводящей границей, при этом в выделенном диэлектрическом слое сохранится рассмотренная неоднородная волна. Очевидно, что слой диэлектрика фиксированной толщины D, ограниченный с одной стороны идеально проводящей плоскостью, способен направлять различные волновые процессы. Необходимое условие существования волн в слое, экранированном при z = - D, E_x (- D) = 0 – для H – волн, E_y (- D) = 0 для E – волн.





При полном отражении от границы диэлектриков S тангенциальные компоненты E_τ и H_τ связаны соотношением через поверхностный импеданс Z $_S$. В силу симметрии поля такое же соотношение между тангенциальными компонентами имеет место на определенных плоскостях D’ в диэлектрике. Поэтому часть структуры, которая лежит за такой плоскостью, можно отбросить, заменив полупространством со свойствами, как при $z > 0$.





При этом внутри диэлектрического слоя на обеих его границах выполняются условия полного внутреннего отражения для однородной волны. Каждая из этих границ является импедансной поверхностью, «поддерживающей» вне слоя поверхностную волну. Плоский диэлектрический слой играет роль волновода – структуры, направляющей волновой процесс. Можно получить выражение для критической частоты для диэлектрического волновода. $\omega_{кр}{}^{(n)} = \dfrac{n\pi}{d} \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1} - \varepsilon_{r2}\mu_{r2}}}$

Рассмотренный идеальный диэлектрический волновод в виде бесконечного слоя представляет собой хорошее приближение к некоторым пленочным волноводам, используемым в интегральной оптике.

Итак, поле в плоском волноводе можно рассматривать как суперпозицию плоских электромагнитных волн, распространяющихся под углом к стенкам волновода. Такой метод анализа позволяет наглядно представить процесс распространения волны в волноводе и получить правильные количественные результаты. Однако, описанным методом невозможно пользоваться в том случае, когда волновод имеет сложную форму поверхности или заполнен неоднородной средой.