На правах рукописи

БЕРКОВСКИЙ Николай Андреевич

модернизация полустатистического метода численного решения интегральных уравнений

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2006

Работа выполнена на кафедре общей физики Института Международных Образовательных Программ Государственного образовательного учреждения Высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет»

Научный руководитель: доктор технических наук,
профессор Д.Г. Арсеньев

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор А.К. Беляев
кандидат физико-математических наук, А.А. Марданов

Ведущая организация – Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург.

Защита диссертации состоится ______________ 200_____года в ______ часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 ГОУ ВПО «СПбГПУ» по адресу: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29, корп. 1, ауд.____

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ГОУ ВПО «СПбГПУ».

Автореферат разослан ___________________ 200_____года

Ученый секретарь диссертационного совета Д. 212.229.13
доктор биологических наук, профессор А.В. Зинковский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность.

Интегральные уравнения встречаются в различных областях фундаментальной науки и многочисленных приложениях (теории упругости, аэро- и гидродинамике, теории теплопроводности, электростатике, биомеханике, теории управления, теории массового обслуживания, экономике, медицине и др.) В прикладных задачах переход к решению интегральных уравнений вместо решения дифференциальных уравнений зачастую позволяет получать менее трудоемкие численные методы решения, требующие значительно меньше усилий при постановке на машину. Так, в свое время при решении задач теории упругости альтернативой методу конечных элементов явился метод граничных интегральных уравнений, который позволил вычислителям упростить процесс подготовки задач для расчета на ЭВМ, в частности, избавиться от необходимости разбивать на элементы весь объем рассчитываемого тела. То же самое относится и к некоторым задачам теплопроводности и гидродинамики. Эти обстоятельства, а также теоретическая значимость интегральных уравнений (например, с их помощью доказаны теоремы существования для краевых задач математической физики) вызвали большую работу по разработке численных методов решения интегральных уравнений. Численные методы решения интегральных уравнений можно условно разделить на две категории: детерминированные и статистические. Под детерминированными можно понимать методы решения интегральных уравнений, не использующие генерацию случайных чисел, а под статистическими–методы, использующие ее. Ввиду того, что статистические методы основаны на законе больших чисел, от них, на первый взгляд, неправомерно ожидать высокой скорости сходимости, так как выборочные средние сходятся к генеральному среднему со скоростью, обратно пропорциональной корню квадратному из размера выборки. Процедуры интегрирования, лежащие в основе детерминированных методов (например, квадратурные формулы) имеют, вообще говоря, более высокую скорость сходимости, особенно при большой гладкости подынтегральной функции. Однако, детерминированным методам присущи следующие недостатки: а)большая трудоемкость, особенно в многомерном случае, и б)некоторая негибкость: сетка интегрирования или координатные функции задаются вычислителем заранее и уже не могут быть изменены в зависимости от информации, которую доставляют приближенные решения, получаемые данным методом на определенном шаге вычислительной процедуры. От этих двух недостатков свободны статистические (адаптивно-стохастические) методы, которые сравнительно мало освещены в математической литературе. Привлекательность этих методов в том, что, меняя плотность распределения узлов случайной сетки интегрирования в зависимости от свойств приближенного решения, полученного на определенной стадии вычислительного процесса, можно автоматически оптимизировать сетку интегрирования. Кроме того, переход ко многим измерениям, в отличие от детерминированных методов, при адаптивно-стохастическом подходе не затруднен. В настоящее время адаптивно–стохастические методы решения интегральных уравнений изучены значительно меньше, чем детерминированные. Следовательно, представляется актуальным исследование этих методов как в чисто математическом направлении (доказательство теорем сходимости), так и в прикладном аспекте (модернизация и приложения к практическим задачам). Данная диссертация посвящена всестороннему исследованию и совершенствованию одного из адаптивно-стохастических методов решения интегральных уравнений, именно, полустатистическому методу, разработанному в основном в 80-90 годах прошлого века учеными СПбГТУ Д.Г. Арсеньевым, В.М.Ивановым, О.Ю.Кульчицким, М.Л. Кореневским и успешно примененному к задачам теории упругости и теории вибропроводности.

Цель работы.

В ходе предшествовавшей написанию диссертации научной работы выяснилось, что при численном решении некоторых прикладных и тестовых вычислительных задач полустатистический метод, применяемый согласно схеме, описанной в первоисточниках, недостаточно эффективен. Кроме того, была слабо развита теоретическая база метода, сходимость в основных источниках доказывалась при чрезмерно жестких предположениях. В этой ситуации логически определились следующие основные цели диссертационной работы:

1) Модернизация полустатистического метода с целью повышения эффективности его применения к прикладным задачам. Разработка теоретических основ модернизации.
2) Строгое доказательство теорем сходимости для полустатистического метода.
3) Успешное применение полученных модификаций полустатистического метода к задачам, представляющим трудность для первоначальной («классической») схемы метода.
4) Выявление класса задач, для которых полустатистический метод будет являться более эффективным, чем его детерминированные аналоги.

Во всех четырех направлениях в диссертации сделано существенное движение вперед, кроме того, рассмотрены некоторые смежные математические вопросы, возникшие по ходу исследовательской работы.

Научная новизна.

На основе обширной вычислительной практики и теоретических исследований предложена модернизированная, в сравнении с первоначальными источниками, схема полустатистического метода. Вычислительными экспериментами подтверждена эффективность модернизации. Разработана теоретическая база модернизации, доказаны соответствующие теоремы.

Полустатистический метод применен к задачам математической физики, к которым он ранее не применялся (задача об обтекании плоской решетки газотурбинных профилей, стационарная задача теплопроводности). Выполнено сравнение с точными решениями или детерминированными аналогами, проанализированы адаптивные возможности метода, предложены новые формулы для оптимизации сетки интегрирования и построения приближенных решений.

Строго доказана сходимость полустатистического метода в пространстве непрерывных функций.

На основе вычислительной практики выдвинута гипотеза о классе задач, для которых адаптивно-стохастические методы, возможно, более эффективны, чем детерминированные.

Пересмотрены и уточнены математические вопросы, связанные с выводом интегральных уравнений для задачи обтекания гидродинамических решеток.

Практическая значимость работы

Полученные в работе результаты могут служить, с одной стороны, прикладным целям, именно, они могут быть полезны в задачах, решение которых приводит к необходимости численного решения интегральных уравнений, с другой стороны, теоретическую часть работы можно использовать для дальнейшего теоретического осмысления, развития и совершенствования адаптивно-стохастических методов интегрирования.

Защищаемые положения

Основными результатами работы, выносимыми на защиту, являются следующие:

1) Проведено теоретическое исследование сходимости полустатистического метода в пространстве непрерывных функций. Доказаны леммы и теоремы о сходимости полустатистического метода в пространстве непрерывных функций. Доказательство сходимости представляет собой синтез идей функционального анализа и теоретико-вероятностных рассуждений. Все результаты по сходимости метода в пространстве непрерывных функций получены впервые.

2) На основе теоретических исследований проведена модернизация метода, заключающаяся в развитии первоначальной схемы, доказаны соответствующие теоремы. Теоретически прояснен вопрос об источниках погрешности полустатистического метода (смещение и вариация) и о том, когда модернизированная версия метода должна быть эффективнее «классической» схемы. Модернизация, а также формулировка и доказательства связанных с ней теорем осуществлены впервые.

3) Вычислительными экспериментами подтверждена эффективность модернизации, найдены задачи, для которых с помощью модернизированного метода можно получить решения требуемой точности, а по первоначальной схеме–нельзя, в силу ограниченных возможностей современной вычислительной техники. На конкретных вычислительных примерах показана роль основных теоретических положений модернизации. По результатам обширных численных экспериментов выделен класс задач, в применении к которым полустатистический метод является более эффективным, чем детерминированные.

4) Рассмотрен новый, альтернативный основным источникам, подход к вопросу оптимизации метода. Численными экспериментами подтверждена эффективность этого подхода.

5) Осуществлено применение модернизированного полустатистического метода к задачам математической физики, на которых метод еще не апробировался (задача обтекания плоской решетки газотурбинных профилей и первая краевая стационарная задача теплопроводности). В случае задачи обтекания решетки обсчитывались реальные профиля, данные по которым взяты из расчетно-конструкторской практики. Везде проведено сравнение результатов с точными решениями или решениями, полученными при помощи детерминированных методов. При численном решении задачи теплопроводности предложена эффективная формула

для расчета температуры, хорошо работающая как вблизи, так и вдали от границы тела. Строго доказаны непрерывные свойства ядра в задаче обтекания решетки.

6) В процессе применения метода к задаче обтекания плоской решетки газотурбинных профилей строго исследована так называемая «обобщенная интегральная формула Коши», используемая в литературе, посвященной обтеканию гидродинамических решеток, но ни в каком из известных автору источников не доказанная строго. Рассмотрены математические вопросы, связанные с этой формулой, не поднимавшиеся, по-видимому, до настоящего диссертационного исследования.

Апробация работы

По результатам проведенных исследований сделаны доклады на семинарах кафедр математики и общей физики ИМОП СПбГПУ. Работа обсуждена на совместном научном семинаре кафедры «Механика и процессы управления» (ФМФ) и кафедр общей физики, математики и информатики ИМОП под председательством заслуженного деятеля науки РФ проф. В.А. Пальмова.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 7 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Диссертация содержит 129 страниц и 45 рисунков. Список литературы содержит 50 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении обоснован выбор темы диссертации, ее актуальность и значимость, проведен краткий обзор литературы по численным методам решения интегральных уравнений. Кратко описана структура диссертации.

В первой главе изложена первоначальная, не модернизированная схема полустатистического метода и доказана вероятностная сходимость этой схемы в пространстве функций непрерывных на компакте, принадлежащем R^N.

Полустатистическим методом можно решать интегральные уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_S K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \qquad (1)$$

где S –гладкая $(m-1)$ -мерная поверхность в R^m, $x \in S$, $y \in S$, $\lambda \in R$,

K –ядро уравнения, f –известная функция, φ –неизвестная функция.

Коротко рассмотрим схему его применения в случае непрерывного ядра.

а) При помощи генератора случайных чисел на поверхности S создается N независимых случайных точек (векторов) x_1, x_2, …..x_N с произвольной плотностью распределения $p(x)$ («случайная сетка интегрирования»).

б)Эти точки по очереди подставляются в (1), получается N уравнений вида

$$\varphi(x_i) - \lambda \int_S K(x_i, y)\varphi(y)dy = f(x_i), \qquad (i = \overline{1, N}) \tag{2}$$

в) Интегралы в (2) заменяются суммами методом Монте-Карло по случайной выборке x_1, x_2, …..x_N и возникает система линейных алгебраических уравнений

$$\varphi_i - \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{K(x_i, x_j)}{p(x_j)} \varphi_j = f(x_i). \qquad (i = \overline{1, N}) \tag{3}$$

Здесь $\{\varphi_i\}$ $(i = \overline{1, N})$ – вектор неизвестных системы (3). Решив (3), φ_i принимают за приближенные значения $\varphi(x_i)$ соответственно. Приближенное значение $\varphi(x)$ $\forall x \in S$ определяется «обратным ходом» по правилу

$$\varphi^N(x) = f(x) + \frac{\lambda}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{K(x, x_i)}{p(x_i)} \varphi_i \, . \tag{4}$$

Верхний индекс у функции $\varphi^N(x)$ указывает на то, что это приближенное решение, полученное на выборке размером N. Чем больше N, тем точнее приближаются интегралы конечными суммами по методу Монте-Карло, следовательно, мы вправе рассчитывать на то, что, увеличивая N, мы сможем сделать погрешность приближений φ_i из (3) и $\varphi(x)$ из (4) столь малой, сколь потребует точность расчета. Чтобы доказать вероятностную сходимость метода в непрерывной норме, следует показать, что при неограниченном увеличении N практически достоверно матрица системы (3) будет обратима, а приближенное значение $\varphi^N(x)$ из (4) будет отличаться от точного значения $\varphi(x)$ по абсолютной величине бесконечно мало. Оказывается, что доказательство этого факта равносильно доказательству разрешимости функционального уравнения в пространстве непрерывных функций. Далее доказывается разрешимость указанного функционального уравнения, формулируются теоремы и следствия, в которых содержатся основные утверждения о сходимости метода. Полученные теоремы используются при теоретическом обосновании модернизации метода.

Доказательство представляет последовательность из 4 лемм. Теорема сходимости имеет следующий вид:

Теорема

▼ Пусть $\varphi^*(x)$–точное решение уравнения (1) .

Тогда $\forall\varepsilon > 0$ $\forall\sigma > 0$ $\exists N^*: \forall N > N^*$ с вероятностью большей, чем $(1-\sigma)$, система уравнений (3) будет разрешима, и для приближенного решения $\varphi^N(x)$, построенного по формуле (4), будет выполняться неравенство $\left\|\varphi^N - \varphi^*\right\| < \varepsilon$; или $\max_{x\in D}\left|\varphi^N(x) - \varphi^*(x)\right| < \varepsilon$.▼

Следствие

▼ $\forall\sigma > 0$ $\exists N^*: \forall N > N^*$ с вероятностью большей, чем $(1-\sigma)$, система уравнений (3) будет разрешима, а первые матричные нормы обратных матриц в системах (3) (согласованные с кубической нормой в R^N) будут ограничены равномерно по N.▼

Методика доказательства сходимости в какой-то степени является стандартным применением линейного функционального анализа к вычислительной математике, однако, вероятностная природа полустатистического метода внесла коррективы в ход доказательства.

Во второй главе, наиболее объемной, речь идет о модернизации полустатистического метода и приводятся результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие эффективность модернизации. Основная проблема, связанная с применением полустатистического метода, заключается в невозможности неограниченного увеличения числа узлов случайной сетки интегрирования. С целью преодоления этой проблемы в «классической» версии полустатистического метода разработан адаптивный алгоритм, осуществляющий приближенный выбор оптимальной плотности распределения узлов случайной сетки интегрирования. При оптимальном выборе плотности распределения узлов интегрирования можно достичь требуемой точности при генерации меньшего числа узлов случайной сетки интегрирования, чем при генерации произвольной случайной сетки. Однако, по ходу вычислительной практики, выяснилось, что, даже при использовании адаптивного алгоритма, в ряде задач не удается достичь удовлетворительной точности вычислений с помощью первоначальной схемы полустатистического метода.

Идея модернизации состоит в следующем. При фиксированных N и $x \in S$ рассмотрим случайную величину $\varphi^N(x)$ из соотношения (4). Допустим, $\varphi^N(x)$ имеет математическое ожидание и дисперсию. Тогда, усредняя L реализаций случайной величины $\varphi^N(x)$, мы получим приближенное значение математического ожидания $M\{\varphi^N(x)\}$. Чем больше значение L, тем точнее приближение. Погрешность полустатистического метода $\left|\varphi^N(x) - \varphi^*(x)\right|$ можно разложить на две составляющие: первая составляющая–смещение статистической оценки $\varphi^N(x)$ относительно точного значения $\varphi^*(x)$, вторая составляющая–абсолютное отклонение отдельной реализации $\varphi^N(x)$ от $M\{\varphi^N(x)\}$, которое, в среднем, тем больше, чем больше дисперсия $\varphi^N(x)$. Но, если от оценки $\varphi^N(x)$ перейти к оценке

$$\varphi^{L,N}(x) := \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}\{\varphi^N(x)\}_k \tag{5}$$

где $\{\varphi^N(x)\}_k$ –реализация $\varphi^N(x)$, полученная при k-ой генерации N случайных точек (всего L реализаций) , то математическое ожидание новой оценки останется равным $M\{\varphi^N(x)\}$, а дисперсия уменьшится в L раз, согласно закону больших чисел. Наряду с дисперсией при увеличении L буде стремиться к нулю вторая составляющая погрешности $\left|\varphi^N(x) - \varphi^*(x)\right|$, при этом программная реализация вычислительного процесса не встречает никаких затруднений, так как число узлов случайной сетки не увеличивается. Требуется лишь циклически повторять одну и ту же вычислительную операцию при фиксированном числе N. После проведения достаточно большого количества итераций погрешность $\left|\varphi^N(x) - \varphi^*(x)\right|$ будет практически равна первой составляющей $\left|M\{\varphi^N(x)\} - \varphi^*(x)\right|$. Отметим, что в вычислительной практике довольно часто встречалась ситуация, когда «классический» полустатистический метод давал неудовлетворительные результаты именно по причине большой дисперсии оценки $\varphi^N(x)$, а не по причине большого смещения $\varphi^N(x)$. В таких ситуациях модернизация, бесспорно, эффективна. Однако, математическое ожидание и дисперсия $\varphi^N(x)$ могут не существовать, и тогда усреднения по формуле (5) не ведут к цели. Это препятствие преодолевается при помощи перехода от случайных величин $\varphi^N(x)$ к условным случайным величинам $\varphi^N(x)\,|\,B$, где B –условие, заключающееся в том, что первая матричная норма обратной матрицы системы (3) находится в некотором допустимом диапазоне. Верхнюю границу этого диапазона следует определять статистически по реализациям обратной матрицы системы (3), полученным на первых итерациях метода. В итоге вместо оценки $\varphi^{L,N}(x)$ имеем статистическую оценку точного решения

$$\varphi^{L,N}(x)\,|\,B := \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}\left\{\varphi^N(x)\,|\,B\right\}_k \tag{6}$$

Для оценки (6) в непрерывном случае доказывается существование математического ожидания и дисперсии, кроме того, доказывается, что при неограниченном увеличении N смещение оценки (6) относительно точного значения $\varphi^*(x)$ стремится к нулю. Доказательства сходимости модернизированной схемы оформлены в виде леммы и трех теорем. Далее предлагается отличный от приведенного в первоисточниках механизм адаптивного алгоритма выбора плотности распределения случайной сетки интегрирования, приведено теоретическое обоснование этого алгоритма и указываются случаи, в которых он наверняка повышает качество вычислений.

Предлагаются два способа статистической оценки дисперсии приближенных решений, построенных по формуле (6). По статистическим оценкам дисперсии следует осуществлять контроль точности вычислений, то есть, если эти оценки достаточно малы, то дальнейшие вычисления при фиксированном N не имеют смысла, вторая составляющая погрешности $\left|\varphi^{L,N}(x)\,|\,B - \varphi^*(x)\right|$ минимизирована. К сожалению, для оценки первой составляющей погрешности $\left|M\left\{\varphi^{L,N}(x)\,|\,B\right\} - \varphi^*(x)\right|$ в общей ситуации ничего нельзя предложить, кроме приемов, аналогичным применяемым в детерминированных методах, и основным способом минимизации смещения остается увеличение узлов случайной сетки интегрирования. Приведены соответствующие рекомендации. В ряде случаев можно варьировать условие B исключения «лишних» реализаций $\varphi^N(x)$ из усредняющей суммы (6), этот прием может уменьшить смещение оценки $\varphi^{L,N}(x)\,|\,B$.

В конце второй главы расположен большой параграф, посвященный результатам численных экспериментов, в начале которого подробно изложено, какие цели преследовал каждый отдельный численный эксперимент. Сравниваются результаты, полученные по «классической» и модернизированной схеме полустатистического метода и делается вывод об эффективности модернизации. Изучается степень важности основных компонент модернизации, проводится проверка того, насколько развитая теория соответствует результатам вычислительных экспериментов. Анализируется эффективность работы адаптивного алгоритма, оптимизирующего случайную сетку интегрирования. Один из тестовых численных экспериментов демонстрирует ситуацию, в которой модернизированный полустатистический метод является более эффективным, чем метод механических квадратур, по итогам этого эксперимента выдвигается гипотеза о классе задач, наиболее «подходящих» для решения адаптивно–стохастическими методами. На примере задачи об обтекании плоской решетки газотурбинных профилей показывается необходимость введения условных статистических оценок (6) (случай разрывного ядра), еще одним численным экспериментом проиллюстрирована эффективность введения критерия «отсева» при непрерывных условиях. Результаты снабжены большим количеством подробных графиков и рисунков.

В третьей главе изложено применение модернизированного полустатистического метода к задаче обтекания плоской решетки газотурбинных профилей.

Рассмотрим плоскую решетку профилей с шагом t, на которую под заданным углом входа β_1 натекает потенциальный поток идеальной жидкости. Этот поток вытекает из решетки под заданным углом выхода β_2 . Требуется найти абсолютную величину нормированной скорости потока на обводе профилей.

Известно, что эту скорость можно найти из интегрального уравнения,

$$w(s)+\oint_L\left(K(s,l)-\frac{1}{L}\right)\cdot w(l)dl=b\left(s\right), \qquad (7)$$

где $w\left(s\right)$–нормированная скорость потока,

$$K\left(s,l\right)=\frac{1}{t}\cdot\frac{\dfrac{\partial x}{\partial s}\cdot\sin\left(\dfrac{2\pi}{t}\cdot\left(y\left(s\right)-y\left(l\right)\right)\right)-\dfrac{\partial y}{\partial s}\sinh\left(\dfrac{2\pi}{t}\cdot\left(x\left(s\right)-x\left(l\right)\right)\right)}{\cos\left(\dfrac{2\pi}{t}\cdot\left(y\left(s\right)-y\left(l\right)\right)\right)-\cosh\left(\dfrac{2\pi}{t}\cdot\left(x\left(s\right)-x\left(l\right)\right)\right)},$$

$$b(s) = -2 \cdot \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \left(\cot(\beta_1) + \cot(\beta_2)\right) + \frac{t}{L}.$$

Здесь L – длина контура, $x(s)$, $y(s)$ – натуральная параметризация.

К уравнению (7) применяется полустатистический метод, выписаны основные соотношения метода применительно к данной задаче. Изложено описание контура лопатки кубическими сплайнами. Вычислительные эксперименты проводились на двух различных лопаточных профилях, данные по которым были взяты из расчетно-конструкторской практики, а также на тестовых профилях для лучшего уяснения зависимости сходимости полустатистического метода от геометрии решетки. Подтвердились интуитивные соображения о том, что сильно вытянутые контуры хуже поддаются расчетам, чем более скругленные.

Результаты представлены в виде графиков и рисунков. Проанализирована работа адаптивного алгоритма, оптимизирующего случайную сетку интегрирования. В конце главы помещена теоретическая часть, где исследуются математические вопросы, связанные с обобщением хорошо известной формулы Коши из комплексного анализа на случай бесконечной периодической решетки профилей. В последнем параграфе главы доказывается непрерывность ядра интегрального уравнения (7) в точках, не являющихся точками стыка звеньев сплайна.

Четвертая глава посвящена применению модернизированного полустатистического метода к внутренней задаче Дирихле в трехмерном пространстве. Хрестоматийным физическим проявлением этой задачи является стационарное уравнение теплопроводности (первая краевая задача). Внутренняя задача Дирихле в ограниченной области $V \in R^3$ состоит в нахождении такой функции $U(x)$, которая в V удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta U(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 U}{\left(\partial x^i\right)^2} = 0, \tag{8}$$

а на границе S –граничному условию:

$$U|_S = g(x), \tag{9}$$

Известно, что функцию $U(x)$, удовлетворяющую (8) и (9), можно представить в виде интеграла от параметра (потенциал двойного слоя):

$$U(x) = \int_S \varphi(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} dy, \tag{10}$$

и что функция φ, стоящая под знаком интеграла, находится из интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \frac{1}{2\pi}\int_S \varphi(y)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|x-y|}\,dy = -\frac{1}{2\pi}g(x), \tag{11}$$

Уравнение (11) можно решить полустатистическим методом, затем, по найденной $\varphi(x)$ из (10), найти приближенное значение $U(x)\,\forall x \in V$. В соответствии с общей схемой метода проведена регуляризация интегрального уравнения, соответствующего данной задаче, приведены тестовые вычислительные примеры. Предложена новая относительно первоисточников формула для расчета температуры, которая эффективна как вдалеке, так и вблизи границы рассматриваемой трехмерной области. В одном из тестовых примеров проведено сравнение с точным решением, другой тестовый пример исследует эффективность адаптивного алгоритма, оптимизирующего случайную сетку интегрирования и апеллирует к физическим свойствам точного решения.

В заключении кратко перечислены основные результаты работы, выносимые на защиту.

Список работ, опубликованных по теме диссертации.

1. **Арсеньев, Д.Г. Применение полустатистического метода к решению внутренней задачи Дирихле в трехмерном пространстве** / Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Берковский Н.А. // Научно-технические ведомости СПбГТУ.- 2004. - № 4 (38). - С. 52-59.

2. **Арсеньев, Д.Г. Исследование сходимости полустатистического метода в пространстве непрерывных функций на компакте** / Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Берковский Н.А. // Труды СПбГТУ. Сер. Вычислительная математика и механика. № 498.- СПб. - С. 17–29.

3**. Арсеньев, Д.Г. Модернизация полустатистического метода** / Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Берковский Н.А. // Труды СПбГТУ. Сер. Вычислительная математика и механика. № 498.- СПб. - С. 29–57.

4**. Арсеньев, Д.Г. Применение полустатистического метода к задаче обтекания плоской решетки профилей** / Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Берковский Н.А. // Труды СПбГТУ. Сер. Вычислительная математика и механика. № 498.- СПб. – С. 57–73.

5. **Арсеньев, Д.Г. Решение задачи потенциального обтекания решетки газотурбинных профилей полустатистическим методом** / Арсеньев Д.Г., Берковский Н.А. // Материалы Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов 29 ноября-4 декабря 2004 года. Часть 9.- С. 73 -75.

6. **Берковский, Н.А. Модификация обобщенной формулы Коши для обтекания решетки профилей /** Берковский Н.А. // Материалы Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов 28 ноября-3 декабря 2005 года. Часть 9. - С.54-55.

7. **Arsenjev, D.G. Applying semi-statistic Method to the problem of Streamline over a flat grid of profiles.** / Arsenjev D.G., Ivanov V.M., Berkovsky N.A. // Simulation 2005 Proceedings of the 5th St.Petersburg Workshop on Simulation. St.-Petersburg VVM com. Ltd. 2005. - p.156–201.