Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.А. Андрианов

ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ ТЕНЗОРОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
1998

УДК 514.743

Андрианов Ю.А. **Основы алгебры тензоров**. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998. 28 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Линейная алгебра» направления бакалаврской подготовки 510100 «Математика».

Рассмотрены основные понятия алгебры тензоров, операции над тензорами, примеры тензоров. Главное внимание уделено связям тензоров с другими понятиями алгебры.

Предназначено для студентов младших курсов физико-механического факультета, изучающих дисциплину «Линейная алгебра» в рамках бакалаврской подготовки.

Табл. – . Ил. 1. Библиогр.: 9 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного технического университета.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение тензоров входит в программу по математике, разработанную для студентов-физиков Санкт-Петербургского государственного технического университета. При этом основные понятия алгебры тензоров используются в различных физических дисциплинах, начиная со второго семестра.

Тензорная алгебра – это последняя глава курса линейной алгебры, читаемого студентам-физикам, так как важнейшими примерами тензоров служат векторы, линейные и нелинейные функции, а также операторы, определённые на векторном пространстве. Однако из-за малого количества часов, отводимого на линейную алгебру, преподаватель часто не успевает уделить достаточного внимания этой важной теме. При этом возникает потребность в учебном пособии, максимально приближенном к остальным разделам читаемого курса.

Настоящая работа предназначена для первокурсников и представляет собой расширенный вариант лекций на тему «тензоры». Изложение подробное и замкнутое. Мы приводим нужные сведения из линейной алгебры и теории евклидовых пространств. Студенты могут использовать эти лекции для самостоятельного ознакомления с предметом.

Пособие содержит также задачи для контроля усвоения материала. В конце помещён список литературы для дальнейшего углублённого изучения свойств тензоров.

§1. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ИНДЕКСЫ. СОГЛАШЕНИЕ О СУММИРОВАНИИ

1°. Сводка используемых в дальнейшем результатов из линейной алгебры

Всюду в дальнейшем будем обозначать буквой V заданное векторное пространство размерности n над полем K; $v_1, \dots, v_n$ – базис V, и $v'_1, \dots, v'_n$ – некоторый другой базис V.

Каждый из векторов $v'_1, \dots, v'_n$ можно единственным образом разложить по базису $v_1, \dots, v_n$:

$$\begin{aligned} v'_1 &= c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \dots + c_{1n}v_n, \\ v'_2 &= c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \dots + c_{2n}v_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v'_n &= c_{n1}v_1 + c_{n2}v_2 + \dots + c_{nn}v_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Из коэффициентов полученных разложений составим матрицу

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица C называется *матрицей перехода* от базиса $v_1, \dots, v_n$ к базису $v'_1, \dots, v'_n$. Матрица C – невырожденная. Заметим, что j-й столбец ($j = 1, 2, \dots, n$) матрицы C составлен из коэффициентов разложения вектора v'_j по базису $v_1, \dots, v_n$.

Напомним правило, по которому изменяются коэффициенты разложения по базису произвольного вектора $x \in V$ при переходе к другому базису.

Пусть $x = \xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n \in V$. Разложим вектор x по базису $v'_1, \dots, v'_n$. Тогда имеем, используя формулы (1):

$$x = \xi'_1 v'_1 + \dots + \xi'_1 v'_1 = \xi'_1 (c_{11} v_1 + \dots + c_{1n} v_n) + \dots + \xi'_n (c_{n1} v_1 + \dots + c_{nn} v_n) =$$
$$= (c_{11} \xi'_1 + \dots + c_{n1} \xi'_n) v_1 + \dots + (c_{1n} \xi'_1 + \dots + c_{nn} \xi'_n) v_n.$$

Учитывая единственность разложения по базису, получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_{11} \xi'_1 + \dots + c_{n1} \xi'_n, \\ &\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ \xi_n &= c_{1n} \xi'_1 + \dots + c_{nn} \xi'_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Напомним также, что множество всех линейных отображений пространства V в поле K (такие отображения называются *линейными функциями*) обозначается V^*. Если $f, g \in V^*$, то определены сумма $(f + g) \in V^*$ и произведение $(\lambda f) \in V^*$ согласно следующим правилам:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in V,$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in V.$$

Множество V^* с введёнными на нём таким образом операциями суммы и умножения на элементы из поля K является векторным пространством. Оно называется пространством, *сопряжённым* с V. Базисом этого векторного пространства V^* являются, как легко проверить, функции $f_1, \dots, f_n$, которые задаются своими значениями на базисных элементах $v_1, \dots, v_n$ пространства V следующим образом:

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, \dots, n).$$

Говорят, что $f_1, \dots, f_n$ образуют *дуальный базис* к базису $v_1, \dots, v_n$. Таким образом, функция f_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, применённая к произвольному элементу $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + \lambda_n v_n$, принимает значение λ_i.

Если произвольная линейная функция $f \in V^*$ принимает на базисных векторах $v_1, \dots, v_n$ значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то есть $\lambda_i = f(v_i)$, $i = 1, \dots, n$, то

$$f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n. \tag{3}$$

Наконец, приведём некоторые факты из теории евклидовых пространств. Скалярное произведение, определённое на V, обозначается $(\,,\,)$. Будем считать известным, что в евклидовом пространстве всегда существует ортонормированный базис. Важным для дальнейшего является понятие матрицы Грама $G(x_1, x_2, \dots, x_m)$ системы векторов $x_1, x_2, \dots, x_m \in V$. По определению полагают

$$G(x_1, x_2, \dots x_m) = \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_m, x_1) & (x_m, x_2) & \dots & (x_m, x_m) \end{pmatrix}.$$

Свойства матрицы Грама.

1) V – евклидово пространство, $v_1, \dots, v_n$ – базис V. $G = G(v_1, \dots, v_n)$ – матрица Грама векторов $v_1, \dots, v_n$. Тогда $\det G \neq 0$.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \dots e_n$ – какой-либо ортонормированный базис V. Тогда

$$v_1 = \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \dots + \alpha_{1n} e_n,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$v_n = \alpha_{n1} e_1 + \alpha_{n2} e_2 + \dots + \alpha_{nn} e_n.$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что A – невырожденная матрица, то есть $\det A \neq 0$. Тогда

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 + \dots + \alpha_{1n}^2 & \alpha_{11}\alpha_{21} + \dots + \alpha_{1n}\alpha_{2n} & \dots & \alpha_{11}\alpha_{n1} + \dots + \alpha_{1n}\alpha_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}\alpha_{11} + \dots + \alpha_{nn}\alpha_{1n} & \alpha_{n1}\alpha_{21} + \dots + \alpha_{nn}\alpha_{2n} & \dots & \alpha_{n1}^2 + \dots + \alpha_{nn}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = A^T A \quad \Rightarrow \quad \det G = (\det A)^2 \neq 0 . \blacksquare$$

Замечание. На самом деле здесь доказано, что число $g = \det G > 0$.

2) V – евклидово пространство, $v_1, \dots, v_n$ и $v_1', \dots, v_n'$ – два базиса V, и C – матрица перехода от первого базиса ко второму. Обозначим $G = G(v_1, \dots, v_n)$ и $G' = G(v_1', \dots, v_n')$ матрицы Грама этих базисов. Тогда $G' = C^T GC$.

Доказательство. Пусть $(x, y) = X^T GY$, где X, Y – столбцы координат элементов x и y соответственно в базисе $v_1, \dots, v_n$. Пусть X', Y' – столбцы координат элементов x и y соответственно в базисе $v_1', \dots, v_n'$. Тогда $X = CX'$, $Y = CY'$, и

$$(x, y) = X^T GY = (CX')^T G(CY') = X'^T \underbrace{C^T GC} Y' = X'^T G'Y',$$

откуда $G' = C^T GC$. $\blacksquare$

Замечание. Другие свойства матрицы Грама сформулированы в задачах.

2°. Верхние и нижние индексы. Ковекторы и векторы

Важным для дальнейшего является установление правила, по которому изменяются элементы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, определяющие $f \in V^*$ в формуле (3), при переходе к другому базису $v_1', \dots, v_n'$ пространства V. Установим это правило.

Имеем

$$\lambda_i' = f(v_i') = f(c_{i1}v_1 + \dots + c_{in}v_n) =$$
$$= c_{i1}f(v_1) + \dots + c_{in}f(v_n) = c_{i1}\lambda_1 + \dots + c_{in}\lambda_n .$$

Выпишем подробно полученные соотношения.

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= c_{11}\lambda_1 + \dots + c_{1n}\lambda_n, \\ & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \lambda_n' &= c_{n1}\lambda_1 + \dots + c_{nn}\lambda_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Сравним теперь формулы (1) и (4). Видим, что набор элементов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ преобразуется при переходе к другому базису по тем же формулам, по которым преобразуются базисные векторы $v_1, \dots, v_n$. Это обстоятельство выражают следующими словами: набор чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ изменяется при переходе к другому базису *ковариантным образом*. Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ называются поэтому *ковариантными координатами* линейной функции f. Желая подчеркнуть ковариантный характер изменения координат $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ функции f при переходе к другому базису, саму функцию f называют *ковектором*.

Заметим теперь (см. (2)), что если x – произвольный вектор пространства V, то коэффициенты его разложения по базису $v_1, \ldots, v_n$ изменяются при переходе к другому базису по совсем другим формулам, нежели формула (4). Поэтому, чтобы учесть это отличие коэффициентов разложения (3) ковектора по дуальному базису, принято коэффициенты разложения вектора по базису нумеровать верхними индексами:

$$x = \xi^1 v_1 + \ldots + \xi^n v_n.$$

В этом случае коэффициенты $\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^n$ называются *контравариантными координатами* вектора $x \in V$.

Запишем формулы (2) в новых обозначениях:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= c_{11}\xi^{1'} + \ldots + c_{n1}\xi^{n'}, \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \xi^n &= c_{1n}\xi^{1'} + \ldots + c_{nn}\xi^{n'}. \end{aligned} \tag{5}$$

Формулы (5) показывают, что контравариантные координаты вектора в с т а р о м базисе выражаются через контравариантные координаты этого вектора в н о в о м базисе с помощью элементов матрицы перехода C. Заметим, что в случае ковариантных координат ковектора всё было наоборот (см. (4)).

Наконец, обратимся к элементам матрицы перехода $C = \left(c_{ij}\right)$. Мы уже отмечали в 1°, что j-й столбец ($j = 1, 2, \ldots, n$) матрицы C составлен из коэффициентов разложения вектора v'_j по базису $v_1, \ldots, v_n$. Значит, элементы j-го столбца ($j = 1, 2, \ldots, n$) являются контравариантными координатами вектора v'_j и должны нумероваться верхними индексами. При внимательном рассмотрении элементов i-й строки матрицы перехода C ($i = 1, 2, \ldots, n$) можно заметить, что они встречаются в разложениях (1) только как коэффициенты при одном и том же базисном векторе с этим номером i, то есть при v_i. Поэтому элементы i-й строки матрицы C можно рассматривать как значения линейной функции (ковектора), ковариантными координатами которой служат сами элементы этой строки (см. 1°). Следовательно, элементы каждой строки надо нумеровать нижними индексами. Окончательно получаем новую запись элементов матрицы перехода:

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \ldots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \ldots & c_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1^n & c_2^n & \ldots & c_n^n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В дальнейшем мы всегда будем использовать верхние и нижние индексы для нумерации элементов матрицы перехода C. Например, запишем формулы

(4), (5) в этих новых обозначениях. Для ковариантных координат формулы (4) принимают следующий вид:

$$\lambda'_1 = c_1^1\lambda_1 + c_1^2\lambda_2 + \ldots + c_1^n\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} c_1^i\lambda_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7)$$
$$\lambda'_n = c_n^1\lambda_1 + c_n^2\lambda_2 + \ldots + c_n^n\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} c_n^i\lambda_i.$$

Формула (5) для преобразования контравариантных координат в новых обозначениях имеет вид:

$$\xi^1 = c_1^1\xi^{1'} + c_2^1\xi^{2'} + \ldots + c_n^1\xi^{n'} = \sum_{i=1}^{n} c_i^1\xi^{i'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (8)$$
$$\xi^n = c_1^n\xi^{1'} + c_2^n\xi^{2'} + \ldots + c_n^n\xi^{n'} = \sum_{i=1}^{n} c_i^n\xi^{i'},$$

или, короче,

$$\xi^j = \sum_{i=1}^{n} c_i^j\xi^{i'}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

3°. Заметим теперь, что правые части формул (7) и (8) (то есть выражения $\sum_{i=1}^{n} c_j^i\lambda_i$ и $\sum_{i=1}^{n} c_i^j\xi^{i'}$) имеют одинаковую структуру. Именно, в обоих случаях суммирование производится по индексу, пробегающему значения от 1 до n и, кроме того, индекс суммирования встречается дважды в каждом слагаемом: один раз – наверху, а другой раз – внизу.

Поэтому для сокращения записи условимся не писать значок суммирования $\sum_{i=1}^{n}$ в тех случаях, когда во всех слагаемых индекс суммирования встречается дважды в каждом слагаемом: один раз наверху, а другой раз – внизу. При таком соглашении формулы (7) и (8) принимают следующий компактный вид:

$$\lambda'_j = c_j^i\lambda_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (7')$$

$$\xi^j = c_i^j\xi^{i'} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (8')$$

Обобщим сформулированное соглашение об опускании значка суммы. Дело в том, что в задачах, появляющихся на практике, встречаются величины, занумерованные несколькими верхними индексами и несколькими нижними индексами. При этом все индексы обозначаются разными буквами, и каждый индекс, независимо от других, пробегает значения от 1 до n. Например, a^{ij}_{klm} или b^{ij}_k. Условимся теперь, что если в выражении, содержащем верхние и нижние индексы, один или несколько верхних индексов совпадает с нижними индексами, то это означает, что производится суммирование по всем совпадающим индексам, причем каждый из совпадающих индексов независимо пробегает от 1 до n. Например,

$$a^{ij}_{kim} = \sum_{i=1}^{n} a^{ij}_{kim},$$

$$a^{ij}_{klm} b^{kl}_{n} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a^{ij}_{klm} b^{kl}_{n}.$$

Сформулированное соглашение называется *соглашением о суммировании* или *правилом Эйнштейна*.

4°. Обратимся ещё раз к формулам (8) и $(8')$, имеющим вид:

$$\xi^1 = c^1_1 \xi^{1'} + c^1_2 \xi^{2'} + \ldots + c^1_n \xi^{n'},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\xi^n = c^n_1 \xi^{1'} + c^n_2 \xi^{2'} + \ldots + c^n_n \xi^{n'},$$

или, короче, $\xi^j = c^j_i \xi^{i'}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Эти формулы выражают контравариантные координаты в старом базисе через контравариантные координаты того же вектора в новом базисе, при этом коэффициентами являются элементы матрицы перехода C. В матричном виде формулы (8) записываются $X = CX'$, где X и X' обозначают столбцы $X = (\xi^1, \ldots, \xi^n)^T$, $X' = (\xi^{1'}, \ldots, \xi^{n'})^T$. Для дальнейшего нам понадобятся формулы, выражающие, наоборот, X' через X. Обозначим $B = (b^i_j)$ матрицу, обратную к матрице C. Здесь верхний индекс – это номер строки, а нижний – номер столбца. Имеем $BC = CB = E$, где E – единичная матрица. Умножая слева обе части равенства $X = CX'$ на матрицу B, получаем $X' = BX$. Перейдём к координатной записи:

$$\begin{aligned} \xi^{1'} &= b^1_1 \xi^1 + \ldots + b^1_n \xi^n, \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \xi^{n'} &= b^n_1 \xi^1 + \ldots + b^n_n \xi^n. \end{aligned} \tag{9}$$

Используя соглашение о суммировании, перепишем формулы (9) в виде

$$\xi^{j'} = b^j_i \xi^i. \tag{9'}$$

Полученные формулы (9) и (9′) выражают правило, по которому меняются контравариантные координаты вектора при переходе к новому базису.

5°. До сих пор мы встречались с ситуацией, когда элементы векторного пространства V имеют контравариантные координаты в основном базисе $v_1, v_2, \dots, v_n$ пространства V, а элементы сопряжённого пространства V^* имеют в дуальном базисе ковариантные координаты. Сейчас мы увидим, как, оставаясь в рамках лишь одного пространства V, сопоставлять элементу этого пространства как контра-, так и ковариантные координаты.

На протяжении этого пункта V – евклидово пространство. Скалярное произведение любых элементов $x, y \in V$ обозначим (x, y).

Теорема 1. Пусть V – евклидово пространство, $v_1, v_2, \dots, v_n$ – базис V. Тогда существует базис $w_1, w_2, \dots, w_n$ пространства V, такой, что

$$(w_i, v_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{10}$$

Доказательство. Запишем искомые векторы $w_1, w_2, \dots, w_n$ в виде разложений по базису $v_1, v_2, \dots, v_n$ с неопределенными коэффициентами α_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$:

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \dots + \alpha_{1n}v_n, \\ w_2 &= \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \dots + \alpha_{2n}v_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_n &= \alpha_{n1}v_1 + \alpha_{n2}v_2 + \dots + \alpha_{nn}v_n. \end{aligned}$$

Докажем, что числа α_{ij} определяются условием (10) единственным образом. Найдём числа α_{ij}, исходя из условия (10).

Умножаем справа скалярно вектор w_i последовательно на векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$, получаем систему

$$\begin{cases} 0 = (w_i, v_1) = \alpha_{i1}(v_1, v_1) + \alpha_{i2}(v_2, v_1) + \dots + \alpha_{in}(v_n, v_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 = (w_i, v_i) = \alpha_{i1}(v_1, v_2) + \alpha_{i2}(v_2, v_2) + \dots + \alpha_{in}(v_n, v_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = (w_i, v_n) = \alpha_{i1}(v_1, v_n) + \alpha_{i2}(v_2, v_n) + \dots + \alpha_{in}(v_n, v_n). \end{cases} \tag{11}$$

По теореме Крамера, числа $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}$ определяются этой системой однозначно и, следовательно, вектор w_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ задан условиями (10) единственным образом.

Проверим, что векторы $w_1, w_2, \dots, w_n$, полученные таким образом из условий (10), линейно независимы. Действительно, равенства (11) показывают, что

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_n) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (v_n, v_1) & (v_n, v_2) & \dots & (v_n, v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы, стоящей справа, равен 1. Определитель матрицы, стоящей слева, равен произведению определителей сомножителей. Отсюда следует, что

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это доказывает линейную независимость векторов $w_1, w_2, \dots, w_n$. Кроме того, $n = \dim V$. Поэтому $w_1, w_2, \dots, w_n$ – базис V.

Теорема доказана. ■

Базис $w_1, w_2, \dots, w_n$ пространства V, удовлетворяющий условию $(w_i, v_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$, называется базисом, *взаимным* с базисом $v_1, \dots, v_n$.

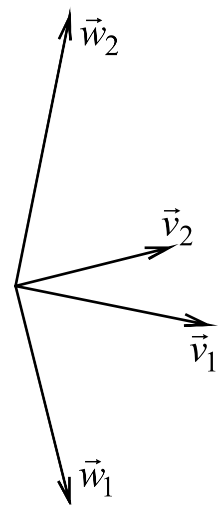

Рис. 1. Взаимный базис на плоскости

Пример. Пусть $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ – два некомпланарных вектора на плоскости. Следовательно, они образуют базис векторов на плоскости. $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ образуют взаимный базис (рис. 1), так как $\vec{w}_1 \perp \vec{v}_2$, $\vec{w}_2 \perp \vec{v}_1$; $(\vec{w}_1, \vec{v}_1) = |\vec{v}_1| \text{пр}_{\vec{v}_1} \vec{w}_1 = 1$, $(\vec{w}_2, \vec{v}_2) = |\vec{v}_2| \text{пр}_{\vec{v}_2} \vec{w}_2 = 1$.

Теорема 2. Пусть $v_1, \dots, v_n$ – базис евклидова пространства V, $w_1, \dots, w_n$ – взаимный базис. Тогда координаты любого элемента пространства V в базисе $w_1, \dots, w_n$ суть ковариантные координаты этого элемента.

Доказательство. Пусть $x \in V$. Наряду с данным базисом $v_1, \dots, v_n$ рассмотрим базис $v_1', \dots, v_n'$, и пусть

$$v_i' = c_i^j v_j,$$

$C = (c_i^j)_{i,j=1}^n$ – матрица перехода. Обозначим через $w_1', \dots, w_n'$ – базис, взаимный к $v_1', \dots, v_n'$. Для доказательства теоремы надо проверить, что если

$$x = \xi_1 w_1 + \dots + \xi_n w_n = \xi_1' w_1' + \dots + \xi_n' w_n', \tag{12}$$

то выполнено

$$\xi'_i = c_i^j \xi_j. \tag{13}$$

Умножая равенство $x = \xi_1 w_1 + \ldots + \xi_n w_n$ справа скалярно на v_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), получим $\xi_i = (x, v_i)$. Аналогично можно получить, что

$$\xi'_i = (x, v'_i) = (x, c_i^1 v_1 + \ldots + c_i^n v_n) =$$
$$= c_i^1 (x, v_1) + \ldots + c_i^n (x, v_n) = c_i^1 \xi_1 + \ldots + c_i^n \xi_n = c_i^j \xi_j.$$

Итак, равенство (13) проверено.

Теорема доказана. ■

Следствие. Будем нумеровать элементы взаимного базиса верхними индексами: $w^1, w^2, \ldots, w^n$. Тогда разложение любого элемента $x \in V$, учитывая соглашение о суммировании, принимает вид

$$x = \xi_i w^i.$$

Мы учли при этом ковариантный характер координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Подведём итоги. В этом п. 5° мы узнали, что для базиса $v_1, \ldots, v_n$ евклидова пространства V существует единственный взаимный базис $w^1, \ldots, w^n$. Раскладывая произвольный элемент $x \in V$ по базису $v_1, \ldots, v_n$, мы получаем контравариантные координаты $\xi^1, \ldots, \xi^n$ элемента x:

$$x = \xi^1 v_1 + \ldots + \xi^n v_n. \tag{14}$$

Раскладывая тот же элемент $x \in V$ по взаимному базису $w^1, \ldots, w^n$, мы получаем ковариантные координаты $\xi_1, \ldots, \xi_n$ элемента x:

$$x = \xi_1 w^1 + \ldots + \xi_n w^n. \tag{15}$$

Таким образом, каждый элемент $x \in V$ имеет как контравариантные, так и ковариантные координаты. Найдём зависимости между этими координатами. Сначала умножим скалярно равенства (14) и (15) на w^j. Тогда получим:

$$(x, w^j) = \xi^j, \tag{14$'$}$$

$$(x, w^j) = \xi_1 (w^1, w^j) + \ldots + \xi_n (w^n, w^j). \tag{15$'$}$$

Обозначим $g^{ij} = (w^i, w^j)$ – элементы матрицы Грама векторов $w^1, \ldots, w^n$. Приравнивая правые части равенств (14′) и (15′), получим формулу для выражения контравариантных координат через ковариантные:

$$\xi^j = g^{1j} \xi_1 + \ldots + g^{nj} \xi_n = g^{ij} \xi_i. \tag{16}$$

Формулу (16) называют *формулой для поднятия индексов*. Теперь умножим скалярно равенства (14) и (15) на v_j. Тогда получим

$$(x, v_j) = \xi^1 (v_1, v_j) + \ldots + \xi^n (v_n, v_j), \tag{14$''$}$$

$$(x, v_j) = \xi_j. \tag{15''}$$

Обозначим $g_{ij} = (v_i, v_j)$ – элементы матрицы Грама векторов $v_1, \dots, v_n$. Приравнивая правые части равенств (14″) и (15″), получим формулу для выражения ковариантных координат через контравариантные:

$$\xi_j = g_{1j}\xi^1 + \dots + g_{nj}\xi^n = g_{ij}\xi^i. \tag{17}$$

Формулу (17) называют формулой для опускания индексов.

Замечание. Подставляя в равенства (17) выражения для $\xi^1, \dots, \xi^n$ из формул (16), получим, что матрицы (g^{ij}) и (g_{ij}) взаимно обратны.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ТЕНЗОРОВ, ОПЕРАЦИИ НАД ТЕНЗОРАМИ

1°. *Тензор* – это некоторый объект, связанный с векторным пространством V, в котором выбран базис $v_1, \dots, v_n$. При этом предполагается, что в этом базисе тензору соответствует набор чисел $a^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots j_p}$, занумерованный q верхними и p нижними индексами; все индексы различны и независимо друг от друга пробегают значения от 1 до n; таким образом, в наборе всего n^{p+q} чисел. Кроме того, если в пространстве V выбран другой базис $v'_1, \dots, v'_n$, то тому же тензору соответствует, вообще говоря, другой набор чисел $a'^{k_1,\dots,k_q}_{l_1,\dots l_p}$. Наборы чисел $a^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots j_p}$ и $a'^{k_1,\dots,k_q}_{l_1,\dots l_p}$ связаны между собой следующим образом (мы используем соглашение о суммировании):

$$a'^{k_1,\dots,k_q}_{l_1,\dots l_p} = c^{j_1}_{l_1} c^{j_2}_{l_2} \dots c^{j_p}_{l_p} b^{k_1}_{i_1} b^{k_2}_{i_2} \dots b^{k_q}_{i_q} a^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots j_p}, \tag{18}$$

где c^j_l – элементы матрицы перехода C от базиса $v_1, \dots, v_n$ к базису $v'_1, \dots, v'_n$, b^k_i – элементы матрицы $B = C^{-1}$.

Так определенный тензор называется p раз ковариантным и q раз контравариантным тензором. Говорят также, что это тензор типа (p, q). Число $r = p + q$ называют *рангом* тензора.

Замечание 1. Тензор можно получить, исходя из произвольной совокупности n^{p+q} чисел $a^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots j_p}$. Действительно, для этого сопоставим базису $v_1, \dots, v_n$ числа $a^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots j_p}$, а базису $v'_1, \dots, v'_n$ сопоставим числа $a'^{k_1,\dots,k_q}_{l_1,\dots l_p}$, связанные с $a^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots j_p}$ формулами (18).

Примеры тензоров.

1) Пусть в векторном пространстве V задан базис $v_1, \dots, v_n$. Тогда:

а) элемент $x \in V$ является контравариантным тензором ранга 1; действительно, в выбранном базисе вектору x соответствует набор из n чисел $\xi^1, \dots, \xi^n$ – координаты x в этом базисе, и при переходе к другому базису координаты меняются по формулам: $\xi^{j'} = b_i^j \xi^i$ (см. $(9')$);

б) допустим теперь, что V – евклидово пространство; тогда тот же самый элемент $x \in V$ является ковариантным тензором ранга один, так как его координаты $\xi_1, \dots, \xi_n$ в базисе, взаимном с $v_1, \dots, v_n$, изменяются при переходе к другому базису по формулам $\xi_i' = c_i^j \xi_j$ (см. (13)).

в) ковектор f из пространства V^*, сопряжённого к V, является ковариантным тензором ранга один; действительно, координаты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ковектора f в базисе, двойственном к $v_1, \dots, v_n$, изменяются при переходе к другому базису по формулам $\lambda_i' = c_i^j \lambda_j$ (см. $(7')$.

2) Допустим, что φ – линейный оператор, действующий в пространстве V, $\varphi\colon V \to V$. Проверим, что φ – тензор типа $(1,1)$.

Обозначим $A = (a_i^j)$ матрицу оператора φ в базисе $v_1, \dots, v_n$, то есть

$$\varphi(v_1) = a_1^1 v_1 + \ldots + a_1^n v_n,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\varphi(v_n) = a_n^1 v_1 + \ldots + a_n^n v_n.$$

Как известно, при переходе к другому базису матрица линейного оператора φ изменяется и становится равной $A' = (a_i^{j'})$, $A' = C^{-1}AC = BAC$ (здесь C – матрица перехода к другому базису, $B = C^{-1}$). Перемножая три матрицы, стоящие справа, получим

$$a_j^{i'} = b_l^i c_j^k a_k^l.$$

Видим, что φ – тензор, один раз ковариантный и один раз контравариантный.

3) Пусть V – евклидово пространство.

а) Проверим, что скалярное произведение задаёт дважды ковариантный тензор.

Скалярное произведение однозначно определяется своими значениями на базисных векторах $v_1, \dots, v_n$. Обозначим $(v_i, v_j) = g_{ij}$, $G = (g_{ij}) = G(v_1, \dots, v_n)$ – матрица Грама системы векторов $v_1, \dots, v_n$. Таким образом, скалярному произведению мы сопоставили n^2 чисел g_{ij}, записанных в матрицу Грама. Пусть $v'_1, \dots, v'_n$ – другой базис V и C – матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда матрица Грама $G(v'_1, \dots, v'_n) = G' = (g'_{ij})$ векторов $v'_1, \dots, v'_n$ связана с матрицей $G = G(v_1, \dots, v_n)$ равенством $G' = C^T GC$ (свойство 2 матриц Грама). Перемножая три матрицы, стоящие справа, получаем для элементов $g'_{ij} = (v'_i, v'_j)$ матрицы G' следующие выражения:

$$g'_{ij} = c_i^k c_j^l g_{kl}.$$

Эти формулы показывают (см. (18)), что скалярное произведение задаёт дважды ковариантный тензор. Этот тензор называется *метрическим дважды ковариантным тензором*.

б) Обозначим $w^1, \dots, w^n$ – базис, взаимный с базисом $v_1, \dots, v_n$ пространства V (см. п. 5° §1). Скалярное произведение, определённое на V, однозначно задаётся своими значениями на базисе $w^1, \dots, w^n$. Положим $g^{ij} = (w^i, w^j)$, $i, j = 1, \dots, n$. Покажем, что если скалярному произведению поставить в соответствие n^2 чисел $\left\{g^{ij}\right\}$, то тем самым определён дважды контравариантный тензор.

Пусть $\Gamma = (g^{ij})$ – квадратная $n \times n$ матрица, составленная из чисел $g^{ij} = (w^i, w^j)$. Тогда

$$(x, y) = X^T \Gamma Y, \quad \text{где} \quad X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \tag{19}$$

– столбцы координат разложений элементов $x, y \in V$ соответственно по взаимному базису. Пусть $v'_1, \dots, v'_n$ – другой базис V и $w^{1'}, \dots, w^{n'}$ – базис, взаимный к $v'_1, \dots, v'_n$; X' и Y' – столбцы координат разложений x и y соответственно по базису $w^{1'}, \dots, w^{n'}$. Тогда по теореме 2 п. 5° §1 $X' = C^T X$, $Y' = C^T Y$, где C – матрица перехода. Следовательно, $X = BX'$, $Y = BY'$, где $B = (C^T)^{-1}$. Подставим эти выражения для X' и Y' в (19). Тогда получим

$$(x, y) = X^T \Gamma Y = (BX')^T \Gamma (BY) = X'^T B^T \Gamma BY.$$

Поэтому в базисе $w^{1'}, \dots, w^{n'}$ скалярному произведению соответствует матрица Грама $\Gamma' = (g'^{ij}) = B^T \Gamma B$. Отсюда для чисел g'^{ij} получаются формулы $g'^{ij} = b_k^i b_l^j g^{kl}$, которые показывают, что скалярное произведение – это дважды контравариантный тензор. Он называется *метрическим дважды контравариантным тензором*.

С помощью метрического тензора можно перенести привычные для нас геометрические понятия трёхмерного пространства в произвольное евклидово пространство.

Например, из курса аналитической геометрии известно, что объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$; $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$; $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ равен абсолютной величине определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Кроме того, если $\Delta > 0$, то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка векторов, а если $\Delta < 0$, то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – левая тройка. Говорят, что определитель Δ задаёт ориентированный объём.

Обобщая это понятие на произвольное евклидово пространство V, дадим следующее определение.

Определение. *Ориентированным объёмом* параллелепипеда, построенного на векторах $x_1, \dots, x_n$ пространства V, называется число, определённое в данном базисе формулой

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{g}\det(x_1, \dots, x_n),$$

где $g = \det G(x_1, \dots, x_n)$, $\det(x_1, \dots, x_n)$ – определитель матрицы, составленной из координат векторов $x_1, \dots, x_n$.

4) В следующем примере мы рассмотрим ситуацию, встречающуюся в приложениях.

Пусть в некоторой области $\mathbf{G}$ n-мерного вещественного пространства $\mathbf{R}^n$ введены криволинейные координаты $x^1, x^2, \dots, x^n$. Для простоты можно считать $n = 2$ или $n = 3$. Обозначим $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор произвольной точки

$M \in \mathbf{G}$, $\vec{r}(x^1, \dots, x^n) = \begin{pmatrix} r_1(x^1, \dots, x^n) \\ \dots \\ r_n(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix}$. Тогда векторы $\vec{v}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial x^i} \\ \dots \\ \dfrac{\partial r_n}{\partial x^i} \end{pmatrix}$,

$i = 1, \dots, n$, вычисленные в точке M, линейно независимы, вообще говоря. Их можно представлять себе как касательные векторы в точке M к кривым, проходящим через точку M и получающимися, если в выражении $\vec{r}(x^1, \dots, x^n)$ менять только i-ю координату x^i. Векторы $\vec{v}_i$ можно принять за базис всего пространства, однако этот базис будет свой в каждой точке M. При переходе к другой системе криволинейных координат $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ базис $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n$ преобразуется по формулам

$$\vec{v}'_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \vec{v}_j$$

(здесь используется правило дифференцирования сложной функции от нескольких переменных и соглашение о суммировании).

Вопрос, который мы здесь обсудим, заключается в следующем. Пусть вектор $\vec{a}$ переносится в пространстве параллельно самому себе и в каждый момент этого переноса раскладывается по базису, отвечающему положению начала этого вектора и построенному выше. Если базис в каждой точке свой, то координаты вектора $\vec{a}$ будут меняться по мере переноса. Требуется выяснить закон, по которому меняются координаты $\vec{a}$.

Пусть $\vec{a} = a^i \vec{v}_i$. Так как вектор $\vec{a}$ остаётся при движении равным самому себе, то

$$d\vec{a} = (da^i)\vec{v}_i + a^i d\vec{v}_i = \vec{0}. \tag{20}$$

Запишем подробно:

$$d\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x^j} dx^j = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_{i1}}{\partial x^1} \\ \ldots \\ \dfrac{\partial v_{in}}{\partial x^1} \end{pmatrix} dx^1 + \ldots + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_{i1}}{\partial x^n} \\ \ldots \\ \dfrac{\partial v_{in}}{\partial x^n} \end{pmatrix} dx^n.$$

Разложим вектор $\dfrac{\partial \vec{v}_i}{\partial x^j}$ $(i = 1, \ldots, n)$ по базису $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{v}_k. \tag{21}$$

Коэффициенты Γ_{ij}^k называются символами Кристóффеля 2-го рода или коэффициентами связности, так как с их помощью связываются одинаковые векторы в разных точках пространства. Символы Кристоффеля не являются тензорами, так как зависят не только от базиса в этой точке, но и от характера изменения базиса при отходе от неё.

Подставим (21) в (20) и приравняем коэффициенты при базисных векторах. Тогда получим

$$da^k + a^i \Gamma_{ij}^k dx^j = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Полученные равенства дают ответ на поставленный вопрос.

Если, кроме того, $\mathbf{R}^n$ – евклидово пространство, то символы Кристоффеля можно выразить через коэффициенты метрического тензора. Для этого умножим равенство $\dfrac{\partial \vec{v}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{v}_k$ скалярно на $\vec{v}_l$. Получим:

$$\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x^j}, \vec{v}_l \right) = g_{lk} \Gamma_{ij}^k .$$

Это выражение называется символом Кристоффеля 1-го рода и обозначается $\Gamma_{l,ij}$. Таким образом,

$$\Gamma_{l,ij} = g_{lk} \Gamma_{ij}^k .$$

Мы знаем, что матрицы (g_{lk}) и (g^{lk}) взаимно обратны (см. замечание после формулы (17) в конце §1). Поэтому

$$\Gamma_{ij}^k = g^{lk} \Gamma_{l,ij} .$$

Продифференцируем теперь равенство $(\vec{v}_l, \vec{v}_k) = g_{lk}$ по x^m:

$$\left(\frac{\partial \vec{v}_l}{\partial x^m}, \vec{v}_k \right) + \left(\vec{v}_l, \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial x^m} \right) = \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} .$$

Используя (21), получим

$$\Gamma_{lm}^i (\vec{v}_i, \vec{v}_k) + \Gamma_{km}^i (\vec{v}_i, \vec{v}_l) = \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} ,$$

$$\Gamma_{lm}^i g_{ik} + \Gamma_{km}^i g_{il} = \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} ,$$

$$\Gamma_{k,lm} + \Gamma_{l,km} = \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} . \tag{22}$$

Производя здесь два раза циклическую перестановку индексов и учитывая, что всегда $\Gamma_{i,jk} = \Gamma_{i,kj}$, получим вместе с (22) систему из трёх уравнений с тремя неизвестными. Решая её, найдём

$$\Gamma_{l,km} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} \right) .$$

Умножим это равенство на g^{li}, получим

$$\Gamma_{km}^i = \frac{1}{2} g^{li} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} \right) .$$

2°. Основные операции над тензорами

Основными операциями над тензорами являются операции сложения и вычитания тензоров, операция умножения тензора на число, операция умножения тензоров, операция свёртывания тензоров, операция перестановки индексов, операции симметрирования и альтернирования тензоров.

Кроме этих операций, мы определим также операцию поднятия и опускания индексов с помощью метрического тензора в предположении, что V – евклидово пространство.

1) *Сложение и вычитание тензоров* определяются для тензоров одинакового типа.

Определение. Пусть S и T – два тензора типа (p,q), $s_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ и $t_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ – одноименные координаты этих тензоров в базисе $v_1, \dots v_n$.

Суммой $S+T$ (соответственно, *разностью* $S-T$) этих тензоров называется новый тензор, имеющий в базисе $v_1, \dots, v_n$ координаты $s_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} + t_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ (соответственно, $s_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} - t_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$).

Необходимо проверить корректность этого определения. Дело в том, что мы определили координаты суммы и разности тензоров только в одном базисе $v_1, \dots v_n$. Подразумевается, что в других базисах координаты этих тензоров определяются с помощью формул (18) (см. замечание 1 §2). Для доказательства корректности надо проверить, что также и в других базисах координаты суммы (разности) равны сумме (соответственно, разности) координат слагаемых. Для этого, переходя к новому базису $v'_1, \dots, v'_n$, вычислим новые координаты $s'^{k_1 \dots k_q}_{i_1 \dots i_p}$ и $t'^{k_1 \dots k_q}_{i_1 \dots i_p}$ тензоров S и T по формулам (18). Складывая (соответственно, вычитая) их и вынося общий множитель за скобку, убеждаемся, что сумма (разность) определена корректно.

2) *Умножение тензора на число*.

Определение. Пусть A – тензор типа (p,q), $a_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ – его координаты в базисе $v_1, \dots v_n$, λ – произвольное число.

Произведением λA *тензора* A *на число* λ называется тензор, имеющий в базисе $v_1, \dots v_n$ координаты $\lambda a_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$.

Корректность этого определения следует из формул (18).

3) *Умножение тензоров*.

Определение. Пусть U – тензор типа (p,q), имеющий в базисе $v_1, \dots v_n$ координаты $u_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$, а V – тензор типа (r,s), имеющий в этом же базисе координаты $v_{j_1 \dots j_r}^{l_1 \dots l_s}$. Положим $i_{p+1} = j_1, \dots, i_{p+r} = j_r$ и $k_{q+1} = l_1, \dots, k_{q+s} = l_s$.

Произведением $W = U \cdot V$ тензоров U и V называется тензор типа $(p+r, q+s)$, имеющий в этом же базисе координаты

$$w^{k_1\dots k_q k_{q+1}\dots k_{q+s}}_{i_1\dots i_p i_{p+1}\dots i_{p+r}} = u^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_p} \cdot v^{k_{q+1}\dots k_{q+s}}_{i_{p+1}\dots i_{p+r}}.$$

Корректность этого определения следует из формул (18).

4) *Свёртывание тензоров.*

Определение. Пусть A – тензор типа (p,q), причём $p>0$ и $q>0$. У каждой координаты $a^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_p}$ тензора A выделим m-й верхний индекс ($1 \le m \le q$) и n-й нижний индекс ($1 \le n \le p$). Произведём суммирование (свёртывание) координат тензора с одинаковыми выделенными индексами $a^{k_1\dots\alpha\dots k_q}_{i_1\dots\alpha\dots i_p}$ с номерами m и n (мы воспользовались здесь соглашением о суммировании). Можно доказать, что полученные числа $\left\{a^{k_1\dots\alpha\dots k_q}_{i_1\dots\alpha\dots i_p}\right\}$ образуют тензор типа $(p-1,q-1)$.

Пример. Пусть A – тензор типа $(1,1)$, например, линейный оператор, действующий в пространстве V. Пусть в базисе $v_1,\dots,v_n$ тензору A соответствует матрица (a^j_i). Тогда операция свёртывания, применённая к A, даёт тензор типа $(0,0)$, который в базисе $v_1,\dots,v_n$ задаётся одним числом $\alpha = a^i_i = a^1_1 + a^2_2 + \dots + a^n_n$. Ясно, что α – это след матрицы (a^i_j).

Замечание. Термин «свёртывание тензоров» иногда употребляют в следующем смысле. Пусть A и B – два тензора, причём у одного из них имеется по крайней мене один верхний индекс j, а у другого – один нижний индекс i. Свёртывание тензоров A и B по индексам i и j – это свёртывание произведения $A \cdot B$ по индексам i и j.

5) *Перестановка индексов.*

Эта операция заключается в том, что индексы координат тензора подвергаются одной и той же перестановке. Проверьте самостоятельно, что в результате получается тензор.

6) *Симметрирование и альтернирование.*

Определение. Пусть A – тензор типа (p,q), $a^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_p}$ – координаты A в базисе $v_1,\dots v_n$. Переставим у каждой координаты нижние индексы с номерами m и n и затем построим тензор $A_{(m,n)}$ с координатами

$$\frac{1}{2}\left(a^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_m\dots i_n\dots i_p} + a^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_n\dots i_m\dots i_p}\right)$$

и тензор $A_{[m,n]}$ с координатами

$$\frac{1}{2}\left(a^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_m\dots i_n\dots i_p} - a^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_n\dots i_m\dots i_p}\right).$$

Операция построения тензора $A_{(m,n)}$ (соответственно $A_{[m,n]}$) называется операцией *симметрирования* (соответственно *альтернирования*) тензора A по нижним индексам с номерами m и n.

Аналогично определяются операции симметрирования и альтернирования по верхним индексам.

Операцию симметрирования (альтернирования) можно применять не только к выделенной паре нижних или верхних индексов, но также к любому набору нижних или верхних индексов. Например, тензор, полученный из A симметрированием (соответственно, альтернированием) по всем нижним индексам, имеет своими координатами числа $\frac{1}{p!}\sum_{(i_1,\dots,i_p)} a_{i_1\dots i_p}^{k_1\dots k_q}$ (соответственно, $\frac{1}{p!}\sum_{(i_1,\dots,i_p)} (-1)^{\mathrm{inv}(i_1,\dots,i_p)} a_{i_1\dots i_p}^{k_1\dots k_q}$, где суммирование распространяется на все-возможные перестановки $(i_1,\dots,i_p)$ нижних индексов.

Тензор называется *симметрическим*, если его компоненты не меняются при всех подстановках номеров нижних и верхних индексов.

Тензор называется *кососимметрическим*, если две его компоненты, получающиеся одна из другой переменой местами двух индексов, отличаются только знаком.

7) *Поднятие и опускание индексов.*

Пусть V – евклидово пространство, $v_1,\dots,v_n$ – его базис, и A – тензор типа (p,q), имеющий в базисе $v_1,\dots,v_n$ координаты $a_{i_1\dots i_p}^{k_1\dots k_q}$. Покажем, каким образом проводится операция *поднятия нижнего индекса* i_n, $1\le n\le p$.

Обозначим G – метрический дважды контравариантный тензор с координатами g^{ij} (см. пример 3б). Свернём тензоры G и A по нижнему индексу i_n и верхнему индексу, например, j. Тогда получим новый тензор с координатами

$$g^{i\alpha}a_{i_1\dots\alpha\dots i_p}^{k_1\dots k_q}=a_{i_1\dots\hat{i}_n\dots i_p}^{i_n k_1\dots k_q},$$

где i обозначен i_n, а $\hat{i}_n$ означает, что пропущен индекс с номером n.

Для *опускания верхнего индекса* нужно свернуть дважды ковариантный тензор $G=\left\{g_{ij}\right\}$ (см. пример 3а) с тензором A по какому-нибудь из нижних индексов G (например, j) и верхнему индексу k_m. В результате получим новый тензор с координатами

$$g_{ik_m}a_{i_1\dots\alpha\dots i_p}^{k_1\dots k_m\dots k_q}=a_{k_m i_1\dots i_p}^{k_1\dots\hat{k}_m\dots k_q},$$

где i обозначен через k_m.

Пример 1. Переход от контравариантных координат вектора к его ковариантным координатам по формулам (17) – это пример опускания индекса у тензора типа $(0,1)$.

Пример 2. Переход от ковариантных координат вектора к его контравариантным координатам по формулам (16) даёт пример поднятия индекса у тензора типа $(1,0)$.

3°. Тензорное произведение векторных пространств

Пусть V_1 и V_2 – два векторных пространства над полем k. Определим новое векторное пространство V_3 над полем k, которое назовём *тензорным произведением* пространств V_1 и V_2 и обозначим $V_3 = V_1 \otimes V_2$.

Для этого рассмотрим абелеву группу A, элементами которой являются всевозможные конечные суммы упорядоченных пар (v,w), где $v \in V_1$, $w \in V_2$. Обозначим через B подгруппу группы A, состоящую из всевозможных конечных сумм элементов вида

$$(v+v',w)-(v,w)-(v',w); \quad (v,w+w')-(v,w)-(v,w'), \tag{23}$$

$$(\alpha v,w)-(v,\alpha w). \tag{24}$$

Определение. *Тензорным произведением* $V_3 = V_1 \otimes V_2$ пространств V_1 и V_2 называется факторгруппа A/B.

Элемент $(v,w) \bmod B \in A/B$ обозначается $v \otimes w$. Тогда вычисления над этими элементами подчиняются следующим формальным правилам:

$$(v+v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w, \quad v \otimes (w+w') = v \otimes w + v \otimes w', \tag{25}$$

$$(\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w). \tag{26}$$

Определим умножение элемента $v_1 \otimes v_2 \in V_3$ на элемент $\alpha \in K$ по формуле

$$\alpha(v_1 \otimes v_2) = (\alpha v_1) \otimes v_2 = v_1 \otimes (\alpha v_2). \tag{27}$$

Можно легко проверить, что $V_3 = V_1 \otimes V_2$ стало векторным пространством над K.

Теорема 3. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – базис V_1, $w_1, w_2, \ldots, w_m$ – базис V_2. Тогда элементы

$$v_i \otimes w_j \quad (i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m) \tag{28}$$

образуют базис векторного пространства V_3. Таким образом, если $\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$, то $\dim V_1 \otimes V_2 = mn$.

Доказательство. $\forall v \in V_1\ \exists!\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ такие, что

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

$\forall w \in V_2\ \exists!\, \beta_1, \ldots, \beta_m$ такие, что

$$w = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m.$$

Поэтому элемент

$$v \otimes w = \left(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n\right) \otimes \left(\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m\right) =$$
$$= \alpha_1 \beta_1 \cdot (v_1 \otimes w_1) + \ldots + \alpha_n \beta_m (v_n \otimes w_m)$$

Мы использовали при этом формулы (25), (26), (27).

Итак, любой элемент вида $v \otimes w$ есть линейная комбинация элементов (28) с коэффициентами из K. Произвольный элемент из V_3 представляет собой конечную сумму элементов вида $v \otimes w$, и, следовательно, он тоже равен линейной комбинации элементов (28). Таким образом, элементы (28) – это система образующих V_3.

Докажем, что элементы (28) линейно независимы. Пусть $\sum\limits_{i,j} \alpha_{ij}(v_i \otimes w_j) = 0$ в V_3. Тогда, используя формулы (25), (26), (27), получим

$$0 = \sum_{i,j} \alpha_{ij}(v_i \otimes w_j) = \sum_{i,j} (\alpha_{ij} v_i) \otimes w_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} (\alpha_{1j} v_1 + \ldots + \alpha_{nj} v_n) \otimes w_j = \sum_{j=1}^{m} \overline{v}_j \otimes w_j ,$$

где обозначено $\overline{v}_j = \alpha_{1j} v_1 + \ldots + \alpha_{nj} v_n$. Следовательно, элемент $\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{v}_j \otimes w_j$ группы A принадлежит порождённой (23), (24) подгруппе B. Поэтому $\overline{v}_j = 0$ $\forall j = 1, \ldots, m$, следовательно, $\alpha_{ij} = 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$.

Теорема доказана. ■

Замечания.

1) Тензорное произведение трёх и более векторных пространств определяется индуктивно:

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_n \overset{\text{def}}{=} (V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n .$$

2) Векторные пространства $V_1 \otimes V_2$ и $V_2 \otimes V_1$ изоморфны. Действительно, из теоремы 3 следует, что каждое из них по отдельности изоморфно векторному пространству столбцов длины mn с коэффициентами из K.

Рассмотрим тензорное произведение q экземпляров векторного пространства V и p экземпляров сопряжённого пространства V^*:

$$\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{q \text{ экз.}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{p \text{ экз.}} . \tag{29}$$

Тогда p раз ковариантный и q раз контравариантный тензор, определённый в начале §2, формулами (18) – это в точности элемент векторного пространства (29). Действительно, в каждом из q экземпляров пространства V возьмём в качестве базиса векторы $v_1, \ldots, v_n$; в каждом из p экземпляров пространства V^*

возьмём дуальный базис $f^1, \dots, f^n$ к $v_1, \dots, v_n$. Сопоставим теперь набору $a_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ из n^{p+q} чисел элемент (мы пользуемся соглашением о суммировании)

$$a_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} v_{k_1} \otimes \dots \otimes v_{k_q} \otimes f^{i_1} \otimes \dots \otimes f^{i_p}$$

пространства (29). Из формул (7′) и (9′) преобразования координат в пространствах V и V^* следует, что коэффициенты при базисных векторах пространства (29) изменяются по формулам (18).

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Доказать, что ковариантный тензор, являющийся одновременно симметрическим и кососимметрическим, – нулевой.
2. Если выражение $u_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$ определяет скаляр при произвольном выборе контравариантного вектора v^α, то $u_{\alpha\beta} + u_{\beta\alpha}$ суть составляющие ковариантного симметрического тензора.
3. Если тензор $A_{\alpha\beta\gamma}$ симметричен относительно индексов α, β и, кроме того, удовлетворяет соотношению
$$A_{\alpha\beta\gamma} v^\alpha v^\beta v^\gamma = 0$$
при любом выборе вектора v^α, то
$$A_{\alpha\beta\gamma} + A_{\beta\gamma\alpha} + A_{\gamma\alpha\beta} = 0.$$
4. Если равенство $u_\alpha^\beta v_\beta = \sigma v_\alpha$ справедливо для любого ковариантного вектора v_α, то тензор u_α^β имеет вид $u_\alpha^\beta = \sigma \delta_\alpha^\beta$, где
$$\delta_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{bmatrix}.$$
5. Доказать, что определитель матрицы Грама $G(x_1, \dots, x_m)$ равен нулю тогда и только тогда, когда векторы $x_1, \dots, x_n$ линейно зависимы.
6. Доказать, что $\det G(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) = \det G(x_1, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_m)$ при $i \neq j$.
7. Даны симметрический дважды ковариантный тензор a_{ij} и кососимметрический дважды контравариантный тензор b^{ij}. Найти их полную свёртку $a_{ij} b^{ij}$.
Ответ: 0.
8. Дважды ковариантный симметрический тензор имеет в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства $\mathbf{R}^3$ компоненты a_{ij}, записанные в виде матрицы A. Найти новый ортонормированный базис, в котором

компоненты тензора, стоящие вне главной диагонали, равны нулю (такое преобразование тензора называется *приведением к главным осям*):

а) $A = \begin{pmatrix} -6 & -3\sqrt{3} & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, в) $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Необходимо повернуть дважды ковариантный тензор

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

вокруг оси x_3 так, чтобы компонента a_{22} стала равной нулю. Найти два возможных угла поворота, меньших 90°.
Ответ: $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{19} - 3\right)$, $\alpha_2 = -\operatorname{arctg}\left(\sqrt{19} + 3\right)$.

10. Трёхмерное евклидово пространство определено метрическим тензором с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Найти длины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью $\dfrac{x^1}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^3}{5} = 1$.
Ответ: 2; $3\sqrt{10}$; $5\sqrt{6}$.

11. Метрика трёхмерного евклидова пространства задана метрическим тензором g_{ij} с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти площадь S треугольника с вершинами $A(1,0,1)$, $B(2,1,1)$, $C(3,1,2)$ и высоту h, опущенную из C на AB, если координаты и тензор даны в одном и том же базисе.
Указание. Использовать понятие ориентированного объёма.
Ответ: $S = \dfrac{3}{2}$, $h = 1$.

12. Найти свёртку $g_{ij}g^{ij}$ метрических тензоров n-мерного евклидова пространства.
Ответ: n.

13. В базисе e_1, e_2, e_3 трёхмерного действительного пространства дан ковариантный метрический тензор g_{ij} с матрицей $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

а) Проверить, что пространство евклидово.

б) Найти матрицу G_1 контравариантного метрического тензора.

Ответ: $G_1 = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

14. На векторном пространстве $V_1 = \mathbf{R}^2$ задана билинейная функция $f_1(x, y) = x^T A_1 y$, где $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. На векторном пространстве $V_2 = \mathbf{R}^2$ задана билинейная форма $f_2(u, v) = u^T A_2 v$, где $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

а) Доказать, что V_i ($i = 1, 2$) изометрично псевдоевклидовой плоскости.

б) Построить изометрию φ: $V_1 \to V_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
2. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения. М.: Наука, 1985.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1978.
4. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
5. Мышкис А.Д. Математика для втузов. Специальные курсы. М.: Наука, 1971.
6. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965.
7. Широков П.А. Тензорное исчисление. ОНТИ, 1934.
8. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. ИЛ, 1960.
9. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1978.

ОГЛАВЛЕНИЕ

АНДРИАНОВ Юрий Александрович

ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ ТЕНЗОРОВ

Учебное пособие

Редактор
Технический редактор
Корректор
Свод. темплан 1998 г.

Лицензия ЛР №020593 от 07.08.97

Подписано в печать Формат 60×84/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. Уч.-изд. л. Тираж
Заказ С

Санкт-Петербургский государственный технический университет.
Издательство СПбГТУ.
Адрес университета и издательства: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая 29.