

Федеральное агентство по образованию

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Б.А.Мартынов

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КУРСОВЫМ РАБОТАМ

Под редакцией К.В.Гузенко

Санкт-Петербург
Фундаментальная библиотека СПбГУ
Отдел электронных публикаций
2007

Представлены типовые варианты заданий к курсовым работам по дисциплине «Теория колебаний» и даны рекомендации по выполнению отдельных разделов, оказывающихся по большей части самыми сложными для студентов.

Требования общего характера:

форма титульного листа,

наличие текста задания и схемы,

обязательные наименования разделов, параграфов, пунктов, графических иллюстраций (рисунков) и т.д., -

в основном те же, что для курсовых работ по другим дисциплинам.

Приводимые ниже примеры оформления результатов не являются исчерпывающе полными, носят выборочный характер и не содержат значительную часть тех численных значений, аналитических выражений и графиков, самостоятельное получение которых доступно студентам, освоившим основы математического анализа и овладевшим начальными навыками применения вычислительных методов и программирования.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Туннельно-диодный генератор релаксационных колебаний.....	3
2. Одночастотный режим в туннельно-диодном генераторе.....	10
3. Колебательный контур с нелинейной индуктивностью.....	11
4. Двухконтурный генератор.....	13
5. LC-генератор на двухполюснике с N-образной ВАХ.....	19

ПРИЛОЖЕНИЕ

К расчету спектров при помощи быстрого преобразования Фурье [1, 11].....	21
--	----

ЛИТЕРАТУРА.....	26
-----------------	----

1. Туннельно-диодный генератор релаксационных колебаний

ЗАДАНИЕ - 1

В изображенной на рис.1 схеме используется туннельный диод (ТД), для зависимости тока которого ($i_{ТД}$) от напряжения на зажимах выбрана аппроксимация функцией

$$F(u) = I \frac{u}{U_v} \left(\frac{u}{U_v} - 1 \right)^4, \quad (1)$$

где $I = 24,5 \text{ мА}$, $U_v = 0,5 \text{ В}$.

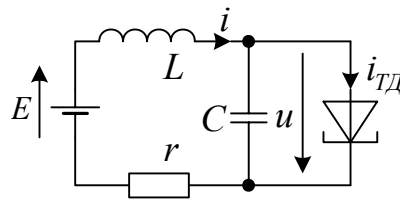


Рис.1. Схема генератора на туннельном диоде

Параметры пассивных элементов схемы: $r = 90 \text{ Ом}$, $L = 25 \text{ мГн}$, $C = 4 \text{ нФ}$. Значения электродвижущей силы E источника питания определяются формулируемыми ниже требованиями.

з-1-1. Выведите аналитическое выражение для дифференциальной крутизны S вольтамперной характеристики (ВАХ) ТД. Для интервала $0 < u < 1,5U_v$ постройте график зависимости S от напряжения u .

Используя выражения для функций $F(u)$, $S(u)$ и первой производной $S'(u)$, найдите

-численные значения U_p, I_p координат точки локального максимума («пика») ВАХ ТД;

-абсциссу U_b точки перегиба падающего участка ВАХ ТД и соответствующее этой точке значение дифференциальной крутизны;

-абсциссу U_d точки, имеющей ординату I_p и расположенной на той ветви ВАХ ТД, для которой $u > U_v$.

з-1-2. Выбрав в качестве динамических переменных напряжение u и ток i , составьте для схемы, представленной на рис.1, систему дифференциальных уравнений. При помощи этой системы

-найдите соотношения для равновесных решений и получите условие устойчивости состояния равновесия схемы;

-определите, какому значению постоянной ЭДС E (обозначаемому далее как E_b) отвечают равновесные значения напряжения u и тока i , совпадающие со значениями координат точки перегиба ВАХ ТД; вычислите нижнюю (E_a) и верхнюю (E_u) границы интервала значений ЭДС E , внутри которого состояния равновесия схемы неустойчивы;

-приведите обоснование (посредством перехода к дифференциальным уравнениям для нормированных величин) принадлежности рассматриваемого генератора к классу релаксационных систем.

з-1-3. Выведите приближенные аналитические выражения в виде квадратур (в форме определенных интегралов) для длительности импульса напряжения T_u и длительности паузы T_a . При помощи этих выражений

-найдите для $E = E_b$ значения T_u , T_a и периода повторения импульсов $T = T_u + T_a$;

-полагая, что $E_a < E < E_u$, постройте зависимости T_u , T_a и периода T от ЭДС E ;

-найдите, при какой ЭДС источника длительности T_u и T_a совпадают.

з-1-4. При помощи численного интегрирования системы дифференциальных уравнений

- постройте для $E = E_b$ фрагмент фазового портрета динамической системы, содержащий предельный цикл, и зависимости напряжения u и тока i от времени, по диаграммам $u(t)$ и $i(t)$ оцените значения T_u , T_a , T и сравните их с результатами, полученными при помощи квадратур;

- постройте зависимости u и i от времени для $E = 0,5(E_u + E_b)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ - 1

р-1-1. Аналитические выражения для дифференциальной крутизны $S(u)$ и ее первой производной $S'(u)$

$$F^{(k)}(u) = \frac{4!}{(5-k)!} \frac{I}{(U_v)^k} \left(5 \frac{u}{U_v} - k \right) \left(\frac{u}{U_v} - 1 \right)^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5; \quad (2)$$

$$S(u) = F'(u) = \frac{I}{U_v} \left(5 \frac{u}{U_v} - 1 \right) \left(\frac{u}{U_v} - 1 \right)^3, \quad S'(u) = F^{(2)}(u) = \frac{4I}{U_v^2} \left(5 \frac{u}{U_v} - 2 \right) \left(\frac{u}{U_v} - 1 \right)^2.$$

р-1-1-1. Численные значения координат точки локального максимума вольтамперной характеристики ТД:

$$U_p = 0,2U_v = 0,1 \text{ В}, \quad I_p = F(U_p) \approx 2 \text{ мА}.$$

p-1-1-2. Значения напряжения и дифференциальной крутизны в точке перегиба ВАХ ТД:

$$U_b = 0,4U_v = 0,2 \text{ В}, \quad S(U_b) \approx -10,6 \text{ мСм.}$$

p-1-1-3. Нахождение абсциссы U_d точки, имеющей ординату I_p и расположенной на ветви ВАХ, для которой $u > U_v$ (Mathcad file)

$U_v := 0.5 \text{ В}$	Произвольное начальное условие: $u := 1.1 \cdot U_v$
$I := 24.5 \text{ мА}$	Функция, аппроксимирующая ВАХ ТД: $F(u) := I \cdot \frac{u}{U_v} \cdot \left(\frac{u}{U_v} - 1 \right)^4$
$U_p := 0.2 \cdot U_v$	$I_p := F(U_p)$
Given	Нелинейное уравнение: $F(u) = I_p$
Ограничение: $u > U_v$	$U_d := \text{Find}(u)$ $U_d = 0.74233 \text{ В}$

p-1-2. Дифференциальные уравнения генератора на туннельном диоде

Как следует из 1-го закона Кирхгофа, при выбранных на рис.1 условных положительных направлениях сумма тока, протекающего через емкость C , и тока туннельного диода равняется току i через последовательное соединение остальных элементов схемы:

$$C \frac{du}{dt} + F(u) = i. \quad (3)$$

В соответствии со 2-м законом Кирхгофа сумма напряжений на индуктивности L , сопротивлении r и емкости C равна ЭДС E :

$$L \frac{di}{dt} + ri + u = E. \quad (4)$$

p-1-2-1. Соотношения для равновесных решений системы (3, 4). Условие устойчивости состояний равновесия

В состоянии равновесия (согласно его определению [3, 8])

$$u = u_0 = \text{const}(t), \quad i = i_0 = \text{const}(t).$$

Тогда из (3, 4) следует, что

$$F(u_0) = i_0, \quad ri_0 + u_0 = E,$$

откуда, в частности, вытекает уравнение

$$rF(u_0) + u_0 = E, \quad (5)$$

имеющее по меньшей мере одно решение.

Для того чтобы равновесное решение u_0, i_0 могло реализоваться, необходима его устойчивость по отношению к малым возмущениям, условия которой обычно получают при помощи процедуры линеаризации. Полагая $u = u_0 + \xi$, где ξ – малое возмущение, и выполняя в (3) приближенную замену нелинейной функции $F(u + \xi)$ суммой $F(u_0) + S_0\xi$, в которой $S_0 = S(u_0)$, нетрудно, учитывая (5), перейти от системы (3, 4) к следующему линейному уравнению:

$$a_2 \frac{d^2\xi}{dt^2} + a_1 \frac{d\xi}{dt} + a_0\xi = 0, \quad (6)$$

где $a_2 = LC$, $a_1 = S_0L + rC$, $a_0 = 1 + rS_0$.

Если вещественные части обоих корней характеристического полинома линейного дифференциального уравнения (6) отрицательны, то решения этого уравнения с течением времени стремятся к нулю, что в соответствии с теорией [3, 7, 8] означает устойчивость состояния равновесия. При положительном коэффициенте a_2 так будет тогда и только тогда, когда два других коэффициента тоже положительны.

Наименьшее значение a_0 равно в данном случае $1 + rS(U_b) \approx 0,046$, т.е. больше нуля, так что условие устойчивости сводится к одному неравенству $a_1 > 0$, которое может быть представлено в форме:

$$S_0 > -r(C/L).$$

р-1-2-2. Нахождение численного значения ЭДС источника питания, при которой состояние равновесия соответствует точке перегиба ВАХ ТД, и границ интервала (E_a, E_u) , в котором состояния равновесия неустойчивы

$$E_b = U_b + rF(U_b) \approx 0,314 \text{ В}, \quad E_a \approx 0,281 \text{ В}, \quad E_u \approx 0,479 \text{ В}.$$

Перед вычислением E_a и E_u предварительно отыскиваются решения нелинейного уравнения $S(u) = -r(C/L)$, например, с помощью функции Find.

р-1-2-3. Обоснование принадлежности рассматриваемого генератора к классу релаксационных систем

Введением вместо напряжения u , тока i , ЭДС E и сопротивления r безразмерных (нормированных) величин $x = u/U_v$, $y = i/I_p$, $\varepsilon = E/U_v$ и $h = rI_p/U_v$ система дифференциальных уравнений (3, 4) преобразуется к виду:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{I_p}{CU_v} [y - f(x)], \quad \frac{dy}{dt} = \frac{U_v}{LI_p} (\varepsilon - x - hy), \quad (7)$$

где $f(x) = \frac{F(xU_v)}{I_p}$ - нормированная вольтамперная характеристика (штрихпунктирная линия на рис.2).

Деление второго из уравнений (7) на первое приводит к дифференциальному уравнению фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = \mu \frac{\varepsilon - x - hy}{y - f(x)}, \quad (8)$$

где $\mu = \frac{C}{L} \left(\frac{U_v}{I_p} \right)^2 \approx 0,0099$.

Из-за малости μ из соотношения (8) следует, что касательные к фазовым траекториям практически горизонтальны всюду за исключением ближайшей окрестности нормированной ВАХ (рис.2).

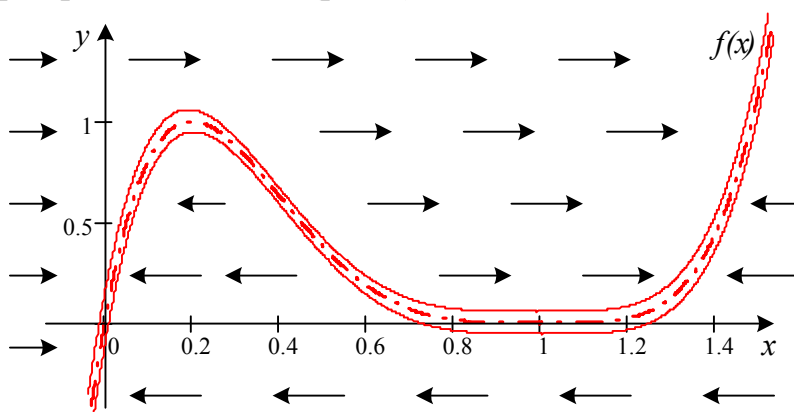


Рис.2. Направления движения изображающих точек по участкам фазовых траекторий, лежащим за пределами ближайшей окрестности нормированной ВАХ ТД

Отмеченное обстоятельство дает возможность установить, каковы при малом μ основные особенности замкнутой фазовой траектории, отвечающей установившемуся режиму автоколебаний. (Эта траектория – аттрактор, именуемый устойчивым предельным циклом). Рассуждения, подобные тем, что используются при анализе осцилляторов Ван дер Поля [8] и Рэлея [7], позволяют прийти к выводу, что в случае $\mu \ll 1$ предельный цикл генератора может считаться состоящим из 4-х характерных участков. Два из них идут вдоль вольтамперной характеристики ТД на весьма малом удалении от нее, причем в качестве границ одного участка можно в первом приближении выбрать точки $(0,0)$ и (U_p, I_p) , а в качестве границ другого – точки (U_d, I_p) и $(U_v, 0)$. (Здесь предполагается построение на используемой в последующем на рис.3 фазовой плоскости с координатами в виде ненормированных напряжения u и тока i). В принятом приближении можно также утверждать, что остающиеся два участка предельного цикла представляются горизонтальными отрезками прямых, один из которых соединяет точку (U_p, I_p) с точкой (U_d, I_p) , а другой – точку $(U_v, 0)$ с началом координат.

Необходимо при этом иметь в виду, что, как можно видеть из (8), ВАХ ТД пересекается фазовыми траекториями строго по вертикали во всех точках кроме особых [8]. Поэтому, если исключить окрестности таких точек из рас-

смотрения, то вблизи от ВАХ направление фазовой траектории всегда отличается от горизонтального. Чем меньше параметр μ по сравнению с единицей, тем уже область, где такое отличие следует учитывать.

Различным участкам предельного цикла отвечает разный характер изменения напряжения u во времени. Как вытекает из уравнения (3), в ближайшей окрестности ВАХ, где $|i - F(u)|$ принимает сравнительно малые значения, изменения u протекают намного медленнее, чем на участках цикла, которые проходят на заметном удалении от ВАХ и где движение изображающей точки (и соответствующее изменение напряжения u) может при малых μ считаться практически скачкообразным. В первом приближении речь может идти о скачке вверх от $u = U_p$ до $u = U_d$ при сохраняющемся неизменным токе $i = I_p$ и скачке вниз от $u = U_v$ до $u = 0$ при $i \approx 0$. Таким образом, при $\mu \ll 1$ зависимость напряжения u от времени в установившемся режиме существенно отличается от синусоидальной, что может служить признаком принадлежности рассматриваемой системы к классу релаксационных.

р-1-3. Вывод аналитических выражений для длительности импульса напряжения и длительности паузы

В зависимости напряжения u от времени чередуются медленные и быстрые (практически скачкообразные в случае малого μ) изменения, причем в процессе быстрого изменения u либо $i \approx I_p$ (скачок вверх от $u = U_p$ до $u = U_d$), либо $i \approx 0$ (скачок вниз от $u = U_v$ до $u = 0$).

В областях медленного изменения напряжения u ток через емкость C настолько мал по сравнению с током i и током туннельного диода, что вместо (3) может использоваться приближенное равенство $i \approx F(u)$. С учетом последнего соотношение (4) преобразуется в дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$LS(u) \frac{du}{dt} = E - u - rF(u). \quad (9)$$

Если условиться, что медленное уменьшение напряжения u от U_d до U_v отвечает импульсу напряжения, а медленное увеличение от 0 до U_p - паузе, то из (9) получаются следующие приближенные интегральные представления для длительности импульса:

$$T_u(E) = \int_{U_v}^{U_d} \frac{LS(u) du}{rF(u) + u - E}$$

и длительности паузы:

$$T_a(E) = \int_0^{U_p} \frac{LS(u) du}{E - u - rF(u)}.$$

р-1-4. Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений LC-генератора на туннельном диоде (Mathcad file)

$I := 24.5 \text{ mA}$ $U_V := 0.5 \text{ B}$ $U := -0.01, -0.009.. 0.75$ $F(U) := I \cdot \frac{U}{U_V} \cdot \left(\frac{U}{U_V} - 1 \right)^4$ ВАХ ТД

$r := 0.09 \text{ кОм}$ $L := 25 \text{ мГн}$ $C := 4 \text{ нФ}$ **Параметры пассивных элементов**

$U_b := 0.4 U_V$ $E_b := U_b + r \cdot F(U_b)$

Given $C u'(t) = i(t) - F(u(t))$ Система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$L i'(t) = E_b - u(t) - r \cdot i(t)$

$u(0) = 0$ $i(0) = 0$ Произвольные начальные условия

$\begin{pmatrix} u \\ i \end{pmatrix} := \text{odesolve} \left[\begin{pmatrix} u \\ i \end{pmatrix}, t, 500 \right]$ $t := 0, 1.. 500$ Решение системы ОДУ

Рис. 3. ВАХ ТД и предельный цикл

Рис.4. Решение системы ОДУ

Примечание. Необходимо обратить внимание на согласованность выбора единиц измерения всех величин, содержащихся в уравнениях, включая время t , по которому берутся производные.

2. Одночастотный режим в туннельно-диодном генераторе

ЗАДАНИЕ - 2

Проведите расчет частоты и амплитуды автоколебаний для предполагаемого одночастотным (по напряжению) установившегося режима в представленной на рис.1 туннельно-диодной схеме.

Для зависимости тока ТД от напряжения на его зажимах примите аппроксимацию вида (1).

Параметры пассивных элементов схемы: $r = 15 \text{ Ом}$, $L = 40 \text{ мкГн}$, $C = 10 \text{ нФ}$.

з-2-1. Запишите аналитическое выражение для средней крутизны S_{cp} туннельного диода (ТД), отражающее зависимость S_{cp} как от амплитуды A переменной (гармонической) составляющей напряжения, так и от постоянной составляющей V .

з-2-2. Полагая постоянную составляющую V , принимающей дискретные значения 0,2 В; 0,3 В; 0,35 В; 0,4 В, постройте семейство характеристик $S_{\text{cp}}(A, V)$; укажите, каким значениям V отвечают жесткие характеристики.

з-2-3. Используя функцию $S_{\text{cp}}(A, V)$ и зависимость постоянной составляющей тока ТД от A и V , приведите соотношения для установившегося одночастотного режима автоколебаний.

з-2-4. Найдите частоту автоколебаний.

з-2-5. Постройте зависимость амплитуды автоколебаний от ЭДС E источника питания; укажите, в каком интервале значений E получаются два значения амплитуды установившихся колебаний.

з-2-6. Используя процедуру численного интегрирования дифференциальных уравнений, постройте фазовый портрет динамической системы при значении E , которое соответствует середине интервала, найденного в предыдущем пункте

РЕЗУЛЬТАТЫ - 2

р-2-1. Аналитические выражения для средней крутизны и постоянной составляющей тока туннельного диода

Согласно (1) зависимость тока туннельного диода от напряжения аппроксимирована полиномом 5-ой степени. При $u = V + w$, где V и w - постоянная и переменная составляющие напряжения, зависимость $i_{\text{ТД}}$ от w также выражается полиномом 5-ой степени:

$$i_{\text{ТД}} = \sum_{k=0}^5 a_k(V)w^k .$$

Здесь в общем случае каждый коэффициент $a_k(V)$ - функция постоянной составляющей V , представляющая собой полином, степень которого равняется $5 - k$, что вытекает, в частности, из равенства

$$a_k(V) = \frac{F^{(k)}(V)}{k!},$$

где для стоящей в числителе правой части k -ой производной функции $F(V)$ справедлива формула (2).

Если автоколебательный режим в схеме одночастотный, т.е. в переменной составляющей w содержится только одна гармоника, то средняя крутизна ТД, как функция амплитуды A этой гармоники, выражается биквадратным полиномом [3, 6]:

$$S_{cp}(V, A) = \frac{2}{\pi A_0} \int_0^{\pi} F(V + A \cos \tau) \cos \tau d\tau = \frac{5}{8} a_5(V) A^4 + \frac{3}{4} a_3(V) A^2 + a_1(V).$$

При этом постоянная составляющая тока туннельного диода также представляется биквадратным полиномом:

$$I_0(V, A) = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\pi} F(V + A \cos \tau) d\tau = \frac{3}{8} a_4(V) A^4 + \frac{1}{2} a_2(V) A^2 + F(V).$$

Для нахождения зависимости амплитуды A от ЭДС E используются два уравнения: основное уравнение установившегося режима [6]

$$S_{cp}(V, A) + Y = 0, \quad (10)$$

где Y - комплексная проводимость пассивной части схемы, подключенной к ТД, и отвечающее установившемуся режиму соотношение для постоянных составляющих

$$V + rI_0(V, A) = E. \quad (11)$$

Полагая, что на частоте автоколебаний ω сопротивление $r \ll \omega L$, имеем

$$Y = j\omega C + \frac{1}{j\omega L + r} \approx \frac{r}{\omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

С учетом вещественности средней крутизны из последнего выражения и (10) следует, что

$$\text{Im } Y = \omega C - 1/(\omega L) = 0,$$

т.е. частота автоколебаний $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Тогда $Y = rC/L$, и амплитуды A отыскиваются при заданных V как вещественные положительные корни биквадратного уравнения, к которому сводится (10).

р-2-2. Зависимость стационарной амплитуды напряжения на туннельном диоде от ЭДС источника питания (Mathcad file)

$$I := 24.5 \text{ мА} \quad U_v := 0.5 \text{ В} \quad F(V) := I \cdot \frac{V}{U_v} \left(\frac{V}{U_v} - 1 \right)^4 \quad \text{Функция, аппроксимирующая ВАХ ТД}$$

$$V := 0.1, 0.1001 \dots 0.5$$

$$k := 0 \dots 5 \quad a(V, k) := \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dV^k} F(V) \quad \text{Коэффициенты полинома, выражающего зависимость тока ТД от переменной составляющей напряжения}$$

$r := 0.015 \text{ кОм} \quad L := 0.04 \text{ мГн} \quad C := 10 \text{ нФ}$ Параметры пассивных элементов

$$q(V) := \frac{a(V, 1) + \frac{r \cdot C}{L}}{0.625 \cdot a(V, 5)} \quad p(V) := \frac{3 a(V, 3)}{5 \cdot a(V, 5)} \quad \text{Коэффициенты биквадратного уравнения для амплитуды А}$$

$$A(V, k) := \sqrt{(-1)^k \cdot \sqrt{p(V)^2 - q(V)} - p(V)} \quad \text{Стационарная амплитуда А как функция постоянной составляющей напряжения}$$

$$I_o(V, k) := \frac{3}{8} \cdot a(V, 4) \cdot (A(V, k))^4 + \frac{1}{2} \cdot a(V, 2) \cdot (A(V, k))^2 + F(V) \quad \text{Выражение для постоянной составляющей тока ТД в автоколебательном режиме}$$

$$E(V, k) := V + r \cdot I_o(V, k) \quad \text{Связь между ЭДС Е и постоянными составляющими тока ТД и напряжения на его зажимах}$$

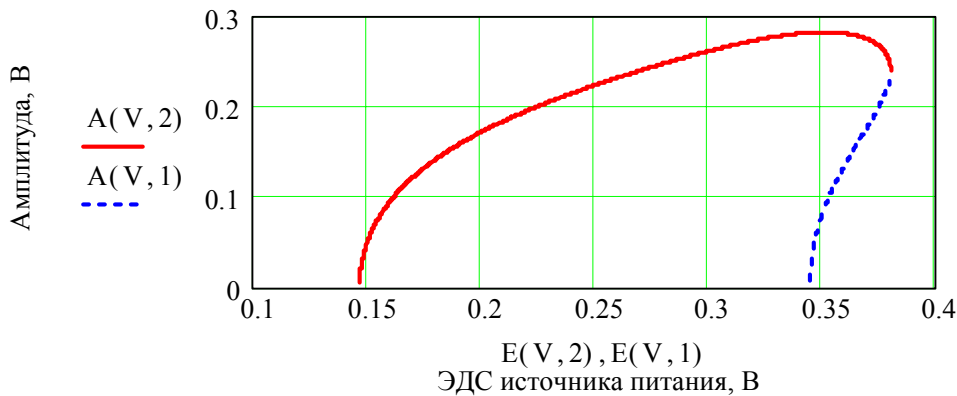


Рис.5. Зависимость амплитуды А от ЭДС Е

3. Колебательный контур с нелинейной индуктивностью

ЗАДАНИЕ - 3

В возбуждаемой источником гармонической ЭДС $e(t)$ схеме (рис.6), содержащей катушку с ферромагнитным сердечником, $R = 60$ кОм, $C = 2$ нФ, для ампер-веберной характеристики нелинейной индуктивности принята аппроксимация кусочно-линейной функцией

$$i(\psi) = \frac{3\psi + |\psi - \psi_0| - |\psi + \psi_0|}{L_0},$$

где ψ – полный магнитный поток (потокосцепление) катушки, $\psi_0 = 50$ мкВб, $L_0 = 0,5$ мГн.

Проанализируйте установившийся режим в этой схеме, предполагая его одночастотным по потокосцеплению ψ .

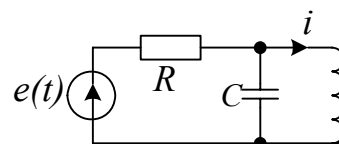


Рис.6. Контур с нелинейной индуктивностью

3-3-1. Постройте ампер-веберную характеристику нелинейной индуктивности.

3-3-2. Найдите зависимость средней индуктивности L_{cp} катушки с сердечником от амплитуды Φ потокосцепления (аналитическое выражение с использованием интеграла для амплитуды первой гармоники тока и график).

3-3-3. Выведите формулу для резонансной кривой, позволяющую учитывать при расчете зависимость L_{cp} от Φ .

3-3-4. Рассчитайте зависимости Φ от частоты f источника, возбуждающего колебания, для значений амплитуды ЭДС, равных 30 В и 55 В (без анализа устойчивости установившегося режима).

3-3-5. Принимая во внимание результаты анализа устойчивости найденных решений, уточните характер зависимостей Φ от f .

3-3-6. Выбрав в качестве динамических переменных напряжение на зажимах катушки и потокосцепление ψ , составьте дифференциальные уравнения схемы. Полагая, что амплитуда ЭДС равняется 55 В, а частота $f = f_0 = 1/(2\pi\sqrt{L_0C})$, получите посредством численного интегрирования дифференциальных уравнений зависимость $\psi(t)$ в установившемся режиме и постройте соответствующую временную диаграмму.

РЕЗУЛЬТАТЫ - 3

р-3-2. Соотношения для расчета средней индуктивности катушки

Установившийся режим в контуре с нелинейной индуктивностью предполагается одночастотным по магнитному потоку, т.е. потокосцепление катушки выражается одной гармонической составляющей:

$$\psi = \Phi \cos(\omega t + \theta).$$

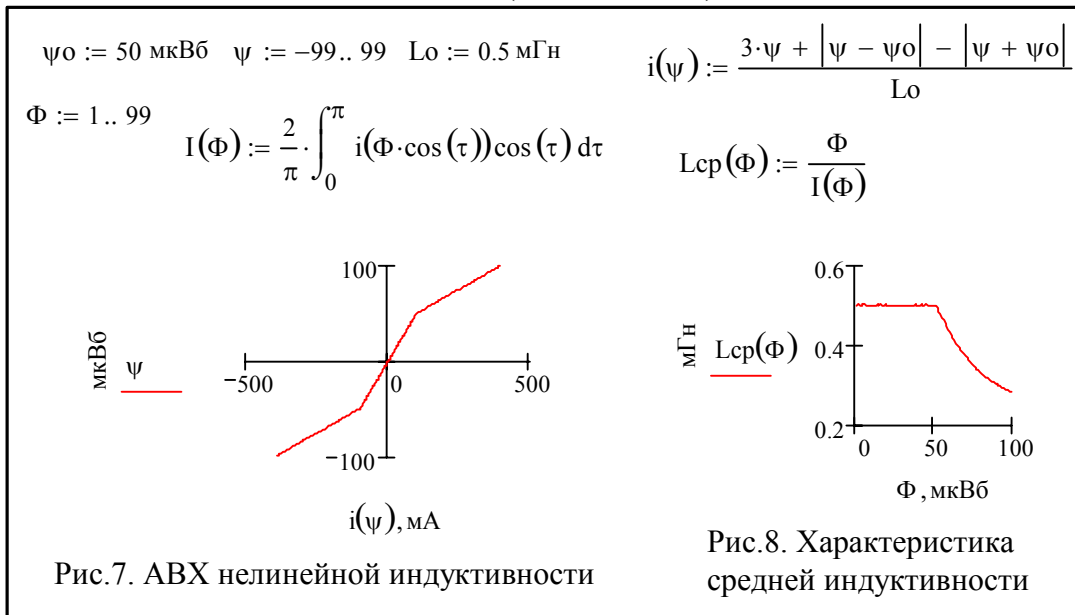
Амплитуда I той из гармоник тока i , частота которой совпадает с частотой изменения потокосцепления ψ , рассчитывается по формуле

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} i(\Phi \cos \tau) \cos \tau d\tau.$$

Согласно определению [10] средняя индуктивность катушки равняется отношению амплитуд потокосцепления и тока:

$$L_{cp} = \Phi / I.$$

р-3-1,2. Ампер-веберная характеристика нелинейной индуктивности и зависимость средней индуктивности от амплитуды потокосцепления (Mathcad file)



р-3-3. Вывод формулы для резонансной кривой

Поскольку напряжение на зажимах катушки равно производной по времени от потокосцепления, комплексная амплитуда этого напряжения в установившемся одночастотном режиме может быть представлена как $j\omega\dot{\Psi}$, где $\Psi = \Phi \exp(j\theta)$ - комплексная амплитуда потокосцепления. Тогда справедливо следующее равенство, левая и правая части которого являются выражениями для комплексной амплитуды тока через сопротивление R :

$$\frac{E - j\omega\Psi}{R} = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L_{cp}}\right)j\omega\Psi.$$

Здесь $E = E \exp(j\theta_e)$ - комплексная амплитуда ЭДС источника гармонических колебаний (рис.6).

Умножением на $\frac{L_0}{\Psi}$ приведенное равенство преобразуется к виду:

$$\frac{E \cdot d}{\omega_0 \Psi} = \frac{L_0}{L_{cp}} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{\omega_0} d,$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}$, а $d = \frac{\omega_0 L_0}{R}$.

Приравнявая далее квадраты модулей левой и правой частей преобразованного равенства, нетрудно получить соотношение, связывающее амплитуду потокосцепления Φ и круговую частоту ω . При этом удобно прибегнуть к использованию безразмерных (нормированных) величин:

$$\Omega = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2, \quad x = \frac{\Phi}{\Psi_0}, \quad y = \frac{L_0}{L_{cp}}, \quad z = \frac{E}{\omega_0 \Psi_0}.$$

Тогда искомое соотношение может быть записано в следующей форме:

$$[\Omega - y(x)]^2 + \left(\Omega - \frac{z^2}{x^2}\right)d^2 = 0,$$

т.е. получается квадратное уравнение для Ω .

До тех пор пока $x \leq 1$, т.е. амплитуда Φ не превосходит Ψ_0 , средняя индуктивность $L_{cp} = L_0$, а значит, $y \equiv 1$. В этом случае вытекающая из последнего соотношения зависимость амплитуды напряжения на зажимах катушки от частоты представляется (как и должно быть) уравнением резонансной кривой линейного колебательного контура:

$$\omega\Phi = \frac{E}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}},$$

где $Q = d^{-1}$ - добротность контура.

В общем случае из квадратного уравнения сначала разыскиваются ветви функции $\Omega(x)$, обращение которой дает искомую зависимость $x(\Omega)$:

$$\Omega_{1,2}(x) = -p(x) \pm \sqrt{p^2(x) - y^2(x) + (z/x)^2 d^2},$$

где $p(x) = d^2/2 - y(x)$.

Далее необходимо провести исследование устойчивости полученных решений [10].

р-3-4. Резонансные кривые контура с нелинейной индуктивностью (без учета результатов анализа устойчивости найденных решений) для значений амплитуды ЭДС, равных 30 В (z=0,6) и 55 В (z=1,1) (Mathcad file)

$\psi_0 := 50 \text{ мкВб}$ $R := 30 \text{ кОм}$ $C := 2 \text{ нФ}$ Параметры линейных элементов и функция, аппроксимирующая ампер-веберную характеристику
 $L_0 := 0.5 \text{ мГн}$ $i(\psi) := \frac{3 \cdot \psi + |\psi - \psi_0| - |\psi + \psi_0|}{L_0}$

$d := \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L_0}{C}}$ $I(x) := \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi i(x \cdot \psi_0 \cdot \cos(\tau)) \cos(\tau) d\tau$ Интегральное выражение для амплитуды первой гармоники тока, протекающего через нелинейную индуктивность
 Задание безразмерных (нормированных) величин

$x := 0.13, 0.14.. 1.1$ $y(x) := \frac{L_0 \cdot I(x)}{\psi_0 \cdot x}$
 $z := 0, 0.1.. 1.1$

$p(x) := \frac{d^2}{2} - y(x)$ $q(x, z) := y(x)^2 - \left(\frac{z}{x}\right)^2 \cdot d^2$ Коэффициенты квадратного уравнения для Ω

$r(x, z) := \sqrt{p(x)^2 - q(x, z)}$ $\Omega_1(x, z) := -r(x, z) - p(x)$ $\Omega_2(x, z) := r(x, z) - p(x)$

$x_1 := 0.25, 0.26.. 1.1$ $x_2 := 0.25, 0.26.. 1.1$

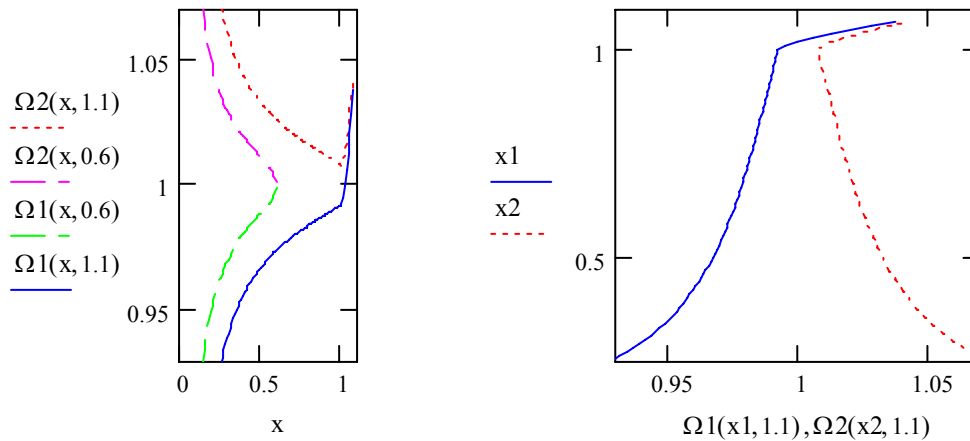


Рис.9. Результаты расчета $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$ для z , равных 0,6 и 1,1 (слева), резонансная кривая при $z=1,1$ (справа); $x=\Phi/\psi_0$, $z=E/(\omega\psi_0)$, $\sqrt{\Omega}=\omega/\omega_0$

4. Двухконтурный генератор

ЗАДАНИЕ - 4

В автоколебательной системе нелинейный активный двухполюсник А включен в один из двух индуктивно связанных контуров, именуемый далее основным, а сопротивление нагрузки r ($0,8r_0 \leq r \leq 2r_0$, где $r_0 = 5 \text{ Ом}$) - в другой (дополнительный) контур (рис.10). Индуктивности обоих контуров выбраны равными 250 мкГн . Взаимная индуктивность $M = 50 \text{ мкГн}$. Емкость $C_2 = 1000 \text{ пФ}$, а C_1 может принимать значения от $0,8C_2$ до $1,25C_2$, чем обеспечивается возможность перестройки основного контура по частоте.

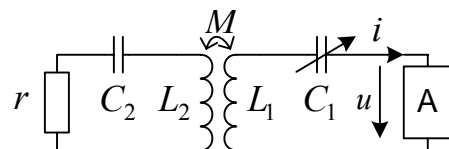


Рис.10. Двухконтурный генератор

Связь между током i двухполюсника А и напряжением u на его зажимах соответствует S-образной вольтамперной характеристике, аппроксимируемой кубическим полиномом:

$$u(i) = h \left(\frac{4}{3} \frac{i^3}{I_0^2} - i \right), \text{ где } h = 8 \text{ Ом}, I_0 = 5 \text{ мА}.$$

Установившийся в системе автоколебательный режим предполагается одночастотным по току ($i = I \cos \omega t$), а реактивное сопротивление дополнительного контура на частоте автоколебаний ω – много большим по модулю сопротивления нагрузки r .

Проанализируйте возможные зависимости частоты автоколебаний и стационарной амплитуды I от $x = \omega_1^2 / \omega_2^2$, где $\omega_1 = 1 / \sqrt{L_1 C_1}$, $\omega_2 = 1 / \sqrt{L_2 C_2}$ парциальные частоты ($\omega_1 = \text{var}$, $\omega_2 = \text{const}$).

3-4-1. Найдите зависимость среднего импеданса (среднего сопротивления) двухполюсника А от амплитуды I (аналитическое выражение и график).

3-4-2. Запишите выражение для импеданса схемы, подключенной к двухполюснику А, (с учетом комплексного сопротивления $Z_{\text{вн}} = R_{\text{вн}} + jX_{\text{вн}}$, вносимого из дополнительного контура в основной).

3-4-3. Составьте уравнение установившегося режима и выведите соотношения, пригодные для отыскания частоты и амплитуды автоколебаний.

3-4-4. Полагая x изменяющимся от 0,8 до 1,25, постройте ветви зависимости $y = \omega^2 / \omega_2^2$ от x , соответствующие «быстрой» и «медленной» частотам связи двухконтурной системы с малыми потерями (фрагмент графика Вина [3])

3-4-5. Для каждой из ветвей графика Вина найдите и постройте зависимости отношения $R_{\text{вн}} / r$ от x .

3-4-6. Для двух разных значений сопротивления нагрузки r : 4 Ом и 10 Ом - постройте зависимости возможных значений амплитуды I (без исследования устойчивости установившегося режима) от x .

РЕЗУЛЬТАТЫ - 4

р-4-1. Аналитическое выражение для зависимости среднего импеданса нелинейного активного двухполюсника от амплитуды тока:

$$R_{cp} = h[(I/I_0)^2 - 1].$$

р-4-. Вывод выражения для импеданса Z схемы, подключенной к двухполюснику А.

Собственные реактивные сопротивления контуров на частоте ω :

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = \frac{\omega_2 L_1}{\sqrt{y}} (y - x), \quad X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = \frac{\omega_2 L_2}{\sqrt{y}} (y - 1),$$

где $y = \omega^2/\omega_2^2$, $x = \omega_1^2/\omega_2^2$ (в данном случае $x = C_2/C_1$, поскольку $L_1 = L_2$).

$$\text{Вносимый импеданс: } Z_{вн} = R_{вн} + jX_{вн} = \frac{(\omega M)^2}{r + jX_2}, \quad R_{вн} = -\frac{r}{X_2} X_{вн},$$

при $r \ll |X_2|$ реактивная компонента вносимого импеданса $X_{вн} \approx -\frac{(\omega M)^2}{X_2}$.

К двухполюснику А подключен импеданс $Z = R_{вн} + j(X_{вн} + X_1)$.

р-4-3. Уравнение установившегося режима:

$Z + R_{cp} = 0$, что равносильно двум уравнениям $X_{вн} + X_1 = 0$, $R_{вн} + R_{cp} = 0$, которые используются для отыскания частоты и амплитуды автоколебаний.

р-4-4. Соотношение, вытекающее из уравнения $X_{вн} + X_1 = 0$:

$$X_1 X_2 = \omega^2 M^2, \quad \text{или } (y - x)(y - 1) = k^2 y^2,$$

где $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ - коэффициент связи между контурами.

Решения уравнения для y , одно из которых больше как x , так и единицы, а другое - меньше x и единицы, приводят к зависимостям $y_1(x)$ и $y_2(x)$, отвечающим графику Вина [3, 9].

В расчетах можно также использовать формулу $x(y, k) = y + \frac{k^2 y^2}{1 - y}$.

р-4-5. Зависимость $R_{вн}/r$ от отношения емкостей

$$\frac{R_{вн}}{r} = -\frac{X_{вн}}{X_2} = \frac{X_1}{X_2}. \quad \text{При } L_1 = L_2 \quad \frac{R_{вн}}{r} = \frac{y(x) - x}{y(x) - 1}.$$

р-4-6. Вывод расчетной формулы для стационарной амплитуды автоколебаний из соотношения $R_{вн} + R_{cp} = 0$.

Формула $I = I_0 \sqrt{1 - \frac{R_{вн}}{h}}$ дает отличные от нуля значения стационарной

амплитуды при $R_{вн}$, не превышающих h . Следует также иметь в виду, что неустойчивость решения для автоколебательного режима с какой-либо амплитудой препятствует реализации соответствующего значения.

5. LC-генератор на двухполюснике с N-образной ВАХ

ЗАДАНИЕ - 5

Автоколебательная система образована параллельным соединением индуктивности L , емкости C и нелинейного активного двухполюсника A с вольт-амперной характеристикой, аппроксимируемой кусочно-линейной функцией:

$$i_N(u) = S(u + |V - u| - |V + u|), \quad (1)$$

где $S, V > 0$, u – напряжение, являющееся общим для всех 3-х элементов.

Путем соответствующего выбора нормировочных множителей для этого напряжения и тока, протекающего через индуктивность, дифференциальным уравнениям системы можно придать следующий вид:

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon(|1 + x| - |1 - x| - x) - y, \quad \frac{dy}{d\tau} = x, \quad (2)$$

где параметр $\varepsilon = S\sqrt{L/C}$, а $\tau = t/\sqrt{LC}$ – безразмерное время.

3-5-1. Для установившегося режима автоколебаний, используя процедуры численного интегрирования дифференциальных уравнений и быстрого преобразования Фурье (см. Приложение), получите спектрограммы и временные диаграммы нормированных напряжения x и тока y в случаях $\varepsilon = 5$ и $\varepsilon = 0,1$.

3-5-2. Какому из двух значений параметра ε отвечает одночастотный режим?

3-5-3. Основываясь на системе дифференциальных уравнений и полагая (в первом приближении), что для одночастотного режима $x = a \cos \tau$, найдите при помощи метода гармонического баланса стационарное значение нормированной амплитуды a и сравните его с полученным в п. 3-5-1.

3-5-4. Докажите, что при $\varepsilon \gg 1$ безразмерный период установившихся (релаксационных) колебаний в рассматриваемой системе может определяться с помощью приближенного выражения $2\varepsilon \ln 3$.

3-5-5. Для $\varepsilon = 5$ сравните оценку периода, получаемую по приведенной формуле, со значением периода автоколебаний, вычисляемым по основной частоте спектра, а также со значением, вытекающим из временных диаграмм.

РЕЗУЛЬТАТЫ – 5

p-5-1. Нахождение спектрограмм и временных диаграмм напряжения и тока через индуктивность (Mathcad file)

$T := \frac{\pi}{8}$ Задание шага по оси безразмерного времени $n := 2^{11}$ Число шагов

$m := 0.. \frac{n}{2} - 1$ $\Omega_m := \frac{2 \cdot m \cdot \pi}{n \cdot T}$ Нормированные круговые частоты спектра

$\varepsilon := 5$ Задание параметра $z := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Вектор произвольно выбранных начальных значений напряжения и тока

$D(\tau, z) := \begin{bmatrix} \varepsilon \cdot \left(|1 + z_0| - |1 - z_0| - z_0 \right) - z_1 \\ z_0 \end{bmatrix}$ Система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$Z := \text{rkfixed}(z, 0, n \cdot T, n, D)$ $k := 0.. n - 1$ Решение системы ОДУ

$x_k := Z_{k,1}$ $\xi := 2 \cdot \text{FFT}(x)$ Векторы комплексных амплитуд нормированных напряжения (x) и тока (y)

$y_k := Z_{k,2}$ $\eta := 2 \cdot \text{FFT}(y)$

$k := n - 67.. n - 1$ $\tau_k := Z_{k,0} - 777$ Сужение временного интервала (с изменением начала отсчета)

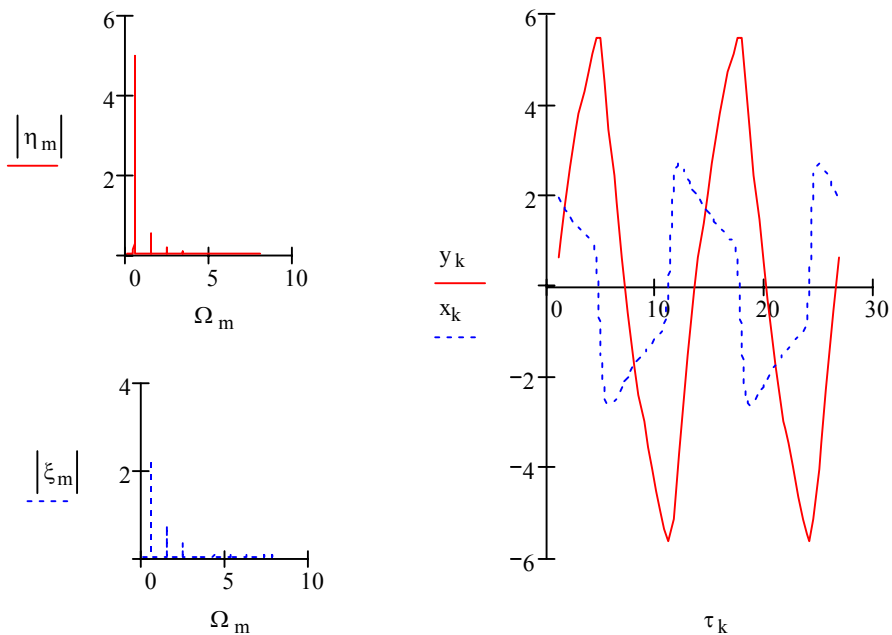


Рис.11. Амплитудные спектры и временные диаграммы нормированных тока через индуктивность и напряжения

ПРИЛОЖЕНИЕ

К расчету спектров при помощи быстрого преобразования Фурье [1, 11]

п.1. Прямое и обратное преобразования Фурье

Функция

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt,$$

получаемая из $x(t)$ посредством прямого преобразования Фурье, называется Фурье-трансформантой, или Фурье-образом, функции $x(t)$.

Переход от $X(f)$ к $x(t)$ может быть реализован путем обратного преобразования Фурье:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df.$$

Из-за предъявляемого к $x(t)$ и $X(f)$ требования абсолютной интегрируемости

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)| df < \infty,$$

либо вводимого вместо него условия интегрируемости квадрата модуля, $x(t)$ и $X(f)$ не могут быть периодическими функциями и не должны сводиться к отличным от нуля постоянным величинам. Эти ограничения снимаются, если допустить, что под $x(t)$ и $X(f)$ могут пониматься не только обычные, но также и некоторые обобщенные функции (см. приводимые ниже примеры).

п.-1-1. Прямоугольный импульс

Прямое преобразование Фурье функции

$$p(t, \tau) = \begin{cases} 1/\tau, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t < 0, t > \tau \end{cases}$$

дает Фурье-трансформанту (Фурье-образ)

$$P(f, \tau) = \exp(-j\pi f\tau) \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}.$$

Для положительных τ_i , стремящихся с увеличением индекса i к нулю, рассматриваемая при $i = 1, 2, \dots$ последовательность функций $p(t, \tau_i)$ может трактоваться как известный функционал (обобщенная функция) $\delta(t)$, носящий название «дельта-функция»[4].

Устремляя τ к нулю, получим для Фурье-образа равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} P(f, \tau) = 1,$$

которое согласуется с известным свойством δ -функции, получившим название «фильтрующей способности» и представляемым интегральным соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a - b)\varphi(a) da = \varphi(b).$$

п.-1-2. Примеры с дельта-функциями, заданными на оси t и на оси f

Выберем в качестве исходной функцию

$$d_k(t) = \delta(t - kT).$$

Прямое преобразование Фурье с учетом фильтрующей способности δ -функции дает для $d_k(t)$ Фурье-трансформанту

$$D_k(f) = \exp(-j2\pi f k T),$$

которая при $k \neq 0$ оказывается периодической функцией с равным $1/|kT|$ периодом по f ; если же $k = 0$, то $D_0(f) = P(f, 0) = 1$.

Рассмотрим далее вариант, когда дельта-функцией представляется Фурье-образ:

$$E_m(f) = \delta\left(f - \frac{m}{T}\right).$$

С помощью обратного преобразования Фурье, принимая во внимание фильтрующую способность δ -функции, приходим к следующему выражению:

$$e_m(t) = \exp(j2\pi \frac{m}{T} t).$$

При $m \neq 0$ получается функция периода $|T/m|$.

п.2. Ряд Фурье, которым могут быть представлены периодическая функция, имеющая период T , и функция, обращающаяся в нуль за пределами интервала длиной T

$$z(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \zeta_m \exp(j2\pi \frac{m}{T} t), \quad \zeta_m = \frac{2}{T} \int_0^T z(t) \exp(-j2\pi \frac{m}{T} t) dt.$$

При вещественных $z(t)$ изменение знака индекса m равносильно для ζ_m операции комплексного сопряжения ($\zeta_{-m} = \zeta_m^*$), в силу чего ζ_1, ζ_2, \dots являются в этом случае комплексными амплитудами соответственно 1-й, 2-й, ... гармоник. Если $z(t) = 0$ для $t < 0$ и $t > T$, то коэффициенты ряда выражаются через значения

Фурье-трансформанты: $\zeta_m = \frac{2}{T} Z\left(\frac{m}{T}\right).$

п.-3. Ряд Фурье и Фурье-трансформанта периодической последовательности прямоугольных импульсов, имеющих высоту T/τ (см. п.-1-1 и п.-1-2)

$$y(t, \tau) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - kT, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta_m(\tau) \exp(j2\pi \frac{m}{T} t), \quad \eta_m(\tau) = 2P\left(\frac{m}{T}, \tau\right),$$

$$Y(f, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta_m(\tau) E_m(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P\left(\frac{m}{T}, \tau\right) \delta\left(f - \frac{m}{T}\right).$$

п.-4. Фурье-трансформанта периодической последовательности δ -функций (с нормирующим множителем T)

Устремляя к нулю длительность импульса τ в выражениях, приведенных в п.-3, получим две периодические последовательности δ -функций: $y^{(d)}(t)$ и $Y^{(d)}(f)$, которые оказываются связанными парой преобразований Фурье.

$$y^{(d)}(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad Y^{(d)}(f) = Y(f, 0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right).$$

п.-5. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) – Фурье-трансформанта множества значений $x_k = x(t_k)$ функции $x(t)$ при $t_k = kT$

Применим операцию прямого преобразования Фурье к вспомогательной (в общем случае непериодической) функции

$$x^{(d)}(t) = x(t)y^{(d)}(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - kT).$$

Учитывая результат для первого примера, рассмотренного в п.-1-2, получим

$$X^{(d)}(f) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \exp(-j2\pi fkT).$$

п.-6. Преобразование свертки, выражающей Фурье-трансформанту вспомогательной функции $x^{(d)}(t)$, в функцию периода $1/T$

$$X^{(d)}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f - \nu)Y^{(d)}(\nu)d\nu = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{m}{T}\right).$$

Возможное в общем случае наложение друг на друга отдельных слагаемых последней суммы не происходит, если $X(f) = 0$ для $|f| \geq f_B > 0$ и при этом

$f_B \leq F_N$, где $F_N = \frac{1}{2T}$ – частота Найквиста.

п.-7. ДПФ как сумма конечного числа членов ряда ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) при отсчетах Фурье-трансформанты в дискретных точках $f_s = \frac{s}{nT}$

$$X_s = T \sum_{k=0}^{n-1} x_k \exp(-j2\pi sk/n) = T \sum_{k=0}^{n-1} x_k \exp(-j2\pi \frac{n+s}{n} k) = X_{n+s}.$$

Благодаря равенству $X_{n+s} = X_s$, согласующемуся с периодическим характером зависимости $X^{(d)}$ от f , можно ограничиться нахождением X_s в n точках ($s = 0, 1, 2, \dots, n - 1$), т.е. в частотном интервале, ширина которого оценивается для $n \gg 1$ как $1/T$.

п.-8. Дискретное преобразование Фурье в матричной (векторной) форме
 Введем в рассмотрение матрицы-столбцы (векторы)

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{квадратную матрицу } \hat{M} = [M_{ql}]_{n,n}$$

и эрмитово-сопряженную этой матрице квадратную матрицу $\hat{M}^+ = [M_{ql}^+]_{n,n}$,

где $M_{ql} = \exp(-j2\pi(q-1)(l-1)/n)$, $q, l = 1, 2, \dots, n$; $M_{ql}^+ = M_{lq}^*$.

Нетрудно прийти к выводу, что произведение $\frac{1}{n} \hat{M}^+ \hat{M}$, обозначаемое далее как

$\hat{I} = [I_{ql}]_{n,n}$ представляет собой единичную матрицу. В самом деле

$$I_{ql} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n M_{qp}^+ M_{pl} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n M_{pq}^* M_{pl} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \exp(j2\pi(p-1)(q-l)/n),$$

откуда непосредственно следует, что $I_{qq} = 1$.

Если воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии, то

$$I_{ql} = \frac{\exp(j2\pi(q-l)) - 1}{n \exp(j2\pi(q-l)/n) - n}, \quad \text{где } |q-l| < n, \text{ ибо } q \text{ и } l \text{ - натуральные числа,}$$

не превышающие n . Тогда при $q \neq l$, как легко убедиться, $I_{ql} = 0$.

С учетом введенных обозначений матричную форму ДПФ можно записать в виде соотношения

$$\hat{X} = T \hat{M} \hat{x},$$

из которого после умножения на $\frac{\hat{M}^+}{nT}$ получается матричное равенство

$$\hat{x} = \frac{1}{nT} \hat{M}^+ \hat{X},$$

равносильное системе скалярных соотношений

$$x_k = \frac{1}{nT} \sum_{s=0}^{n-1} X_s \exp(j2\pi ks/n).$$

При $n = 2^{r-1}$ для отыскания \hat{X} может использоваться алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), основанный на представлении матрицы \hat{M} произведением r матриц и последовательном вычислении произведений матрицы на вектор, что требует существенно меньшего числа операций, чем прямое нахождение $\hat{M} \hat{x}$.

п.-9. Дискретное преобразование Фурье при вещественных x_k

При $\text{Im}x_k = 0$ для всех k , переходя в выражении для X_{n+s} от s к $(-s)$, имеем

$$X_{n-s} = T \sum_{k=0}^{n-1} x_k \exp(j2\pi sk/n) = X_s^*$$

что позволяет вдвое сократить число отыскиваемых элементов вектора \hat{X} и

считать коэффициент $\xi_s = \frac{2X_s}{nT}$ при $s = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$ комплексной амплитудой

гармонической компоненты, изменяющейся с частотой $f_s = \frac{s}{nT}$.

п.-10. Выражение коэффициентов ξ_s через одну из стандартных форм БПФ

Условимся считать коэффициенты

$$\xi_s = \frac{2}{nT} X_s = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \exp(-j2\pi sk/n)$$

элементами вектора

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \end{pmatrix}.$$

В приложениях Mathcad [2] одна из так называемых альтернативных функций быстрого преобразования Фурье (Fast Fourier Transform) выражается как

$$\text{FFT}(\hat{x}) = \frac{1}{n} \hat{M}\hat{x}.$$

Тогда введенный выше вектор $\hat{\xi} = 2 \text{FFT}(\hat{x})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахо А., Хопкрофт Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979. – 536 с.
2. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. Mathcad 8 PRO в математике, в физике и Internet. М.:Нолидж, 2000. – 512 с.
3. Конторович М.И. Нелинейные колебания в радиотехнике. М.: Сов.радио. 1973. – 320 с.
4. Конторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. М.: Сов. радио, 1975. – 320 с.
5. Мартынов Б.А. Спектральный и временной подходы к описанию электрических колебаний. Л : ЛПИ, 1977.. –68 с.
6. Мартынов Б.А. Теория колебаний. Автоколебательные системы резонансного типа.СПб : СПбГПУ, 2003. - 66 с. <ftp.unilib.neva.ru/dl/501.pdf> - 318 Kb
7. Мартынов Б.А. Теория колебаний. Задачи к практическим занятиям.. СПб : СПбГПУ, 2006. – 60 с <ftp.unilib.neva.ru/dl/1351.pdf>
8. Мартынов Б.А. Теория колебаний. Математические модели динамических систем. СПб : СПбГПУ, 2002. - 63 с <ftp.unilib.neva.ru/dl/333.pdf> - 526 Kb
9. Мартынов Б.А. Теория колебаний. Приближенные методы анализа нелинейных систем. СПб : СПбГПУ, 2004. - 60 с <ftp.unilib.neva.ru/dl/1067.pdf> - 1,93 Mb
10. Мартынов Б.А., Молотков В.И. Резонансные явления в электрических цепях с нелинейными элементами. Л-д. ЛПИ. 1981. – 68 с.
11. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. М.: Мир, 1982. –428 с.