

На правах рукописи

СМИРНОВ Денис Борисович

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ СМАЗКИ  
НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА**

Специальность: 05.13.18 – математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2008

Работа выполнена на кафедре “Прикладная математика” Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Санкт-Петербургский государственный политехнический университет”.

Научный руководитель: доктор технических наук,  
профессор  
Григорьев Борис Семенович

Официальные оппоненты: доктор технических наук,  
старший научный сотрудник  
Агишев Геннадий Гергардович

доктор технических наук,  
профессор  
Болдырев Юрий Яковлевич

Ведущая организация: Федеральное государственное  
унитарное предприятие  
ЦНИИ “Электроприбор”

Защита диссертации состоится “24” декабря 2008г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 в ГОУ ВПО “Санкт-Петербургский государственный политехнический университет” по адресу: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29, корп. 1, ауд. 41.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ГОУ ВПО “Санкт-Петербургский государственный политехнический университет”.

Автореферат разослан “20” ноября 2008г.

Ученый секретарь диссертационного  
совета Д 212.229.13, д.т.н,  
профессор

Б.С. Григорьев

**Актуальность темы.** Одним из перспективных направлений современного машиностроения является использование газовой смазки в различных опорных и уплотнительных узлах машин и приборов. Это связано с тем, что малая вязкость газа позволяет создавать как устройства, работающие с высокими частотами вращения, так и направляющие станков и приборов, работающие при малых скоростях скольжения практически без трения. Подшипники с газовой смазкой, не теряя своих эксплуатационных качеств, могут работать в условиях повышенной радиации, в широком диапазоне температур и давлений окружающей среды.

Численное моделирование в теории газовой смазки играет важную роль. Это обусловлено тем, что эксперимент в данной области крайне затруднен и дорогостоящ по причине сверхтонких (порядка нескольких микрон) зазоров между поверхностями трения, а подчас и опасен, так как может привести к разрушению изделия. Поэтому при проектировании опорных узлов, работающих на газовой смазке, на первый план выходит математическое моделирование и численный эксперимент.

Хотя имеется достаточно много работ по численному моделированию задач газовой смазки, в этой области до сих пор остается множество открытых вопросов. Это связано с тем, что при численном решении уравнений газовой смазки возникают определенные сложности. Эти сложности вытекают из нелинейности уравнений и граничных условий, наличия разрывных и сильно осциллирующих коэффициентов, существенного преобладания конвективных слагаемых. В качестве конкретных примеров можно привести подшипники с наддувом и самоподдерживающиеся подшипники с чрезвычайно тонкой микроструктурой профилирования рабочих поверхностей. В первом случае для корректного решения задачи обычными методами требуется сильное сгущение сетки в районе отверстия наддува, во втором – построение мелкой сетки, учитывающей микроструктуру профилирования. Поэтому при численном моделировании источники наддува обычно заменяют точечными, а в задачах со сложной микроструктурой геометрии прибегают к построению усредненных (асимптотических) решений. Однако замена отверстия наддува точечным источником приводит к некорректным результатам, а асимптотические решения не всегда достаточно точно описывают поведение реальных устройств. В связи с этим остается открытым вопрос о построении численных алгоритмов, устраняющих недостатки ранее используемых методов, и о применении их для исследования и конструирования опор на газовой смазке.

**Цель работы.** Разработка и реализация алгоритмов численного решения уравнения Рейнольдса для расчета полей давлений в газовых подшипниках раз-

личных типов в широком диапазоне эксплуатационных параметров. Демонстрация эффективности и надежности разработанных методов для исследования и проектирования конкретных опорных и уплотнительных узлов машин и приборов, использующих газовую смазку.

**Методика исследований.** Для решения задач газовой смазки применялись современные численные методы и математический аппарат.

**Научная новизна.** Предложена новая консервативная разностная схема для решения задач газовой смазки с наддувом. Разработаны ее модификации для источников наддува разных типов (простая диафрагма, кольцевая диафрагма, микроканавки).

В линейном приближении численно рассчитаны поля давлений в упорном подшипнике нового типа – с профилем, нанесенным на обеих рабочих поверхностях. Построено асимптотическое (при бесконечно большом числе канавок) приближение уравнения Рейнольдса для таких подшипников<sup>1</sup>.

Разработан метод решения уравнения Рейнольдса с преобладающими конвективными членами для расчета самоподдерживающихся профилированных подшипников сложной геометрии при больших числах сжимаемости.

Получено асимптотическое (для бесконечно больших чисел сжимаемости) решение уравнения Рейнольдса с кусочно-непрерывными коэффициентами.

Разработан метод решения сопряженной задачи газовой смазки с преобладающими конвективными членами, возникающей при исследовании устойчивости равновесного положения подшипников.

**Достоверность результатов.** Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением с имеющимися экспериментальными данными, с результатами работ других авторов, с асимптотическими решениями.

**Практическая значимость.** Разработанные в диссертации численные методы и программные средства предназначены для применения в машиностроении и машиноведении. Они позволяют упростить и снизить трудоемкость решения задач, связанных с исследованием и проектированием опорных и уплотнительных узлов на газовой смазке.

Эффективность предложенных методов проверена при решении конкретных задач для используемых на практике конструкций. Рассмотрены как подшипники с наддувом, так и самоподдерживающиеся подшипники. В задачах с наддувом рассматривается гибридный цилиндрический подшипник с двумя рядами устройств наддува, а также – плоская газостатическая направляющая с микроканавкой. Среди самоподдерживающихся подшипников выбраны под-

---

<sup>1</sup> Ранее в другой форме асимптотическое приближение было построено в работе [1]

шипники и уплотнения со спиральными канавками, широко применяемые в приборостроении и газовых уплотнениях валов турбокомпрессорных машин. Рассмотрен случай профилирования спиральными канавками обеих поверхностей.

С помощью предложенных методов удалось решить ряд практических задач, решение которых ранее вызывало серьезные трудности, как из-за нехватки вычислительных мощностей, так и из-за несовершенства применявшихся алгоритмов. Это, прежде всего, численные расчеты подшипников и уплотнений со спиральными канавками при большом числе канавок и/или больших числах сжимаемости.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на II Международном конгрессе по трибологии (Вена, 2001), на конференции “Фундаментальные исследования в технических университетах” (Санкт-Петербург, СПбГПУ, 2007), на семинарах кафедры “Математическое обеспечение высокопроизводительных вычислений” (Санкт-Петербург, СПбГПУ, 2007) и кафедры «Прикладная математика» (Санкт-Петербург, СПбГПУ, 2008).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 8 работ – из них 2 в журнале РАН “Проблемы машиностроения и надежности машин”, входящем в список ВАК.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, списка обозначений, пяти глав, заключения, списка литературы и нескольких приложений. Список литературы включает 105 наименований. В тексте содержится 45 рисунков и 6 таблиц. Общий объем работы составляет 157 страниц.

### Краткое содержание работы

**Во введении** показана актуальность рассматриваемой темы и ее практическая значимость, а также кратко изложена структура диссертации.

**В первой главе** описаны некоторые характерные типы газовых опор, рассматриваемые в работе. Обсуждаются используемые для расчета газовых опор математические модели и их корректность.

Поле давления в газовом слое между смазываемыми поверхностями, одна из которых движется, а другая неподвижна, описывается уравнением Рейнольдса теории газовой смазки, которое в безразмерной записи имеет вид

$$\nabla \cdot (h^3 p \nabla p - \Lambda \mathbf{V} p h) = \sigma \frac{\partial p h}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь  $p$  – давление в смазочном слое; вектор  $\mathbf{V}$  – скорость скольжения подвижной поверхности подшипника относительно неподвижной;  $h$  – функция

толщины смазочного слоя;  $\Lambda = 6\mu V_0 L / (p_a c_o^2)$  – так называемое число сжимаемости, где  $\mu$  – вязкость газа,  $V_0$ ,  $L$ ,  $p_a$ ,  $c_o$  – характерные масштабы скорости, длины подшипника, давления и величины зазора;  $\sigma = 12\mu L^2 / (p_a c_o^2 T)$  – число сдавливания, где  $T$  – масштаб времени.

Граничные условия к уравнению (1) зависят от конструкции газовых опор. Если на внешней границе смазываемой области задано давление окружающей среды, то здесь ставится граничное условие первого рода. В случае принудительной подачи газа в смазочный слой задается дополнительное условие баланса массового расхода газа на контуре отверстия, которое зависит от конструкции устройства. Так, например, в случае простой или кольцевой диафрагмы условие баланса расхода имеет вид

$$\oint_{\Gamma_d} (h^3 p \nabla p - \Lambda \mathbf{V} p h) \cdot \mathbf{n} d\gamma = -m S(h) \theta \left( \frac{p_d}{p_s} \right), \quad (2)$$

где  $\Gamma_d$  – контур отверстия,  $m$  – коэффициент режима,  $S(h)$  – площадь истечения, зависящая от вида диафрагмы,  $\theta(p)$  – функция истечения (нелинейная), характеризующая связь между перепадом давления на ограничителе и соответствующей величиной расхода,  $p_d / p_s$  – отношение давления на входе в смазочный слой и в камере нагнетания. Это отношение заранее неизвестно, и поэтому правая часть соотношения (2) вносит в задачу дополнительную нелинейность.

Помимо диафрагм в диссертации рассматриваются устройства наддува с микроканавками. В этой системе наддува газ из отверстия по большей части устремляется в микроканавку, которая пересекает отверстие, и только затем попадает непосредственно в смазочный слой (рис. 3). Подобное течение газа описывает следующее условие баланса массового расхода газа

$$\oint_{\Gamma_d} (h^3 p \nabla p - \Lambda \mathbf{V} p h) \cdot \mathbf{n} d\gamma + K_g [\mathbf{l} \cdot p \nabla p] = -m S(h) \theta \left( \frac{p_d}{p_s} \right), \quad (3)$$

где  $K_g$  – безразмерный параметр микроканавки, характеризующий ее глубину,  $\mathbf{l}$  – ортонормированный вектор, задающий направление микроканавки,  $r_d$  – радиус отверстия наддува,  $[\cdot]$  – скачок стоящей в скобках величины в точках пересечения линии канавки и контура отверстия.

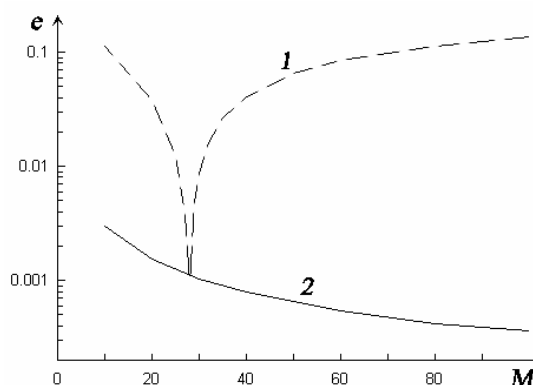
После того как поле давления будет найдено, можно оценить интегральные характеристики подшипника: несущую способность, угол положения, момент сопротивления вращению и др.

**Вторая глава** посвящена решению задач с наддувом. В первой части главы производится обзор существующих численных методов для решения таких задач.

Трудность численного расчета задач с наддувом заключается в малых размерах отверстий наддува по сравнению с областью решения. Отношение диаметра отверстия к характерному линейному размеру таких опор – величина порядка  $10^{-2} - 10^{-3}$ . Поэтому для удовлетворительной аппроксимации задачи требуется сильное измельчение сетки в районе отверстия наддува. Свои сложности вносят нелинейность и нелокальность условий (2) или (3). При большом количестве источников все это может привести к серьезным вычислительным трудностям. Чтобы их избежать, обычно источники аппроксимируются как точечные.

Для проверки качества такой аппроксимации рассматривается модельная задача для кругового подпятника с одним источником наддува. На ее примере показывается некорректность конечно-разностной аппроксимации, в которой отверстие наддува заменяется точечным источником. Эта некорректность проявляется в том, что ошибка численного решения сильно зависит от отношения шага сетки к диаметру отверстия.

На рис. 1 кривая 1 показывает зависимость относительной погрешности численного решения  $e$  от числа узлов разностной сетки  $M$ . Видно, что при увеличении числа узлов ошибка сначала уменьшается, достигая своего наименьшего значения при некотором  $M$ , а затем возрастает. Такое поведение ошибки связано с тем, что расход через сеточный источник, монотонно



**Рис. 1** Зависимость ошибки от количества узлов сетки

уменьшаясь при уменьшении шага разностной сетки, при некотором шаге проходит через истинное значение, что обеспечивает минимум ошибки. Сама величина ошибки при этом может оказаться достаточно большой, однако попытка уточнить решение за счет уменьшения шага снова приводит к отклонению расхода от истинного и возрастанию погрешности.

Для устранения отмеченного недостатка была использована методика, предложенная в работах по численному моделированию эксплуатации нефтяных скважин. Соответствующий подход заключается в ведении дополнительных (фиктивных) сеточных источников в соседние с источником наддува узлы.

Мощность фиктивных источников подбирается из условия равенства численного расхода через источник наддува точному значению, которое аналитически находится для модельной задачи. В результате строится консервативная разностная схема, обеспечивающая баланс массового расхода в сеточной области. Корректность этого подхода демонстрирует кривая 2 (рис. 1), показывающая относительную погрешность соответствующего численного решения. Как видно, погрешность монотонно убывает с уменьшением шага сетки.

Однако метод с введением фиктивных источников применим только для задач без вращения  $\Lambda = 0$ . Поэтому для расчета гибридных подшипников в работе предлагается другой метод. Он заключается в непосредственной коррекции расхода на каждом шаге итерационного процесса по нелинейности в (2) с привлечением результатов решения модельной задачи.

Для того чтобы показать практическую эффективность предложенных методов решались задачи расчета цилиндрического подшипника с наддувом и направляющих опор с микроканавками.

Рассматриваемый цилиндрический подшипник с наддувом представляет собой вал, вращающийся во втулке, в которой симметрично относительно центральной плоскости расположены два ряда отверстий наддува. Данный тип подшипников широко применяется в узлах различных машин и приборов, использующих газовую смазку. В некоторых конструкциях вращение вала может отсутствовать или скорость вращения невелика. В таких случаях основной вклад в создание смазочного слоя вносит принудительная подача газа через устройства наддува. Поэтому при численном моделировании подобных подшипников особенно важно построить схему, корректно вычисляющую массовый расход газа через отверстия наддува.

Для расчета газостатического режима работы цилиндрического подшипника (отсутствие вращения вала) использовался конечно-разностный метод с коррекцией расхода посредством введения фиктивных источников. На рис. 2 приведено сравнение численных расчетов несущей способности  $W$  с экспериментальными данными в зависимости от эксцентриситета вала. Кривая 1 демонстрирует результаты численных расчетов по предложенной схеме с фиктивными источниками, кривая 2 – по обычному методу (без коррекции расхода), звездочками отмечены экспериментальные данные

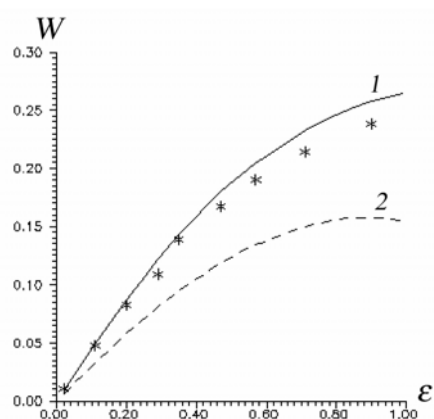


Рис. 2 Зависимость несущей способности от эксцентриситета



(Каннигем, Флеминг, Андерсон). Видно, что результаты расчетов по предложенному методу достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными. Также было показано, что расход, вычисленный по обычному конечно-разностному методу, сильно зависит от шага сетки, в то время как в методе с коррекцией он практически постоянен.

В случае вращающегося вала, в отличие от статического режима, в уравнении Рейнольдса появляется конвективное слагаемое. В связи с этой особенностью для аппроксимации задачи рассматривался второй метод коррекции расхода (без введения фиктивных источников). Как и в предыдущем случае, численные результаты хорошо совпали с экспериментальными данными, а величина суммарного расхода газа получилась практически независимой от шага сетки.

В качестве еще одного вида газовых опор с наддувом рассматривалась направляющая с микроканавкой, ориентированной вдоль оси  $Ox$  (рис. 3). Отличие этой задачи от предыдущих заключается в том, что газ из отверстия наддува по большей части устремляется сначала в микроканавку и только затем в смазочный слой. Микроканавка при этом играет роль распределенного источника, не вносящего сингулярности в решение. А поэтому коррекция нужна только для части расхода, определяемой первым слагаемым условия

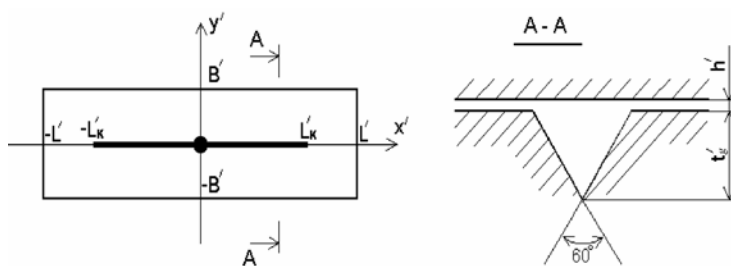


Рис. 3 Направляющая с микроканавкой

баланса расхода (3). С учетом сказанного был построен метод, учитывающий особенности задачи. Его суть заключается в том, что мощность корректирующих фиктивных источников понижается на величину расхода газа, уходящего через отверстие наддува непосредственно в канавку. То есть, чем больше глубина канавки, тем меньше будет величина коррекции расхода.

Как и в случае цилиндрического подшипника, предложенная методика приводит к построению консервативной разностной схемы, в которой величина расхода практически не зависит от шага сетки для любых параметров канавки. Численно было показано, что при параметре микроканавки  $K_g > 1.0$  коррекция расхода становится не столь важной. Такие величины параметра  $K_g$  часто соответствуют реальным устройствам.

**Третья глава** посвящена численному моделированию самоподдерживающихся подшипников, работающих в режимах малых чисел сжимаемости. В

этом случае нелинейное уравнение Рейнольдса (1) допускает линейризацию относительно малого параметра сжимаемости:  $p \approx p_0 + \Lambda p_1$ , где  $p_0$  и  $p_1$  определяются из уравнений

$$\nabla \cdot (h^3 \nabla p_0^2) = 0, \quad \nabla \cdot (h^3 \nabla (p_0 p_1) - \mathbf{V} h p_0) = \frac{\partial p_0 h}{\partial t}. \quad (4)$$

Поскольку задача (4) является самосопряженной и положительно определенной, то для ее решения можно использовать соответствующие современные методы, непосредственно неприменимые к уравнению Рейнольдса. Поэтому имеет смысл рассмотреть этот класс задач отдельно.

В качестве конкретного примера рассматривался расчет бинарного подшипника, у которого обе рабочие поверхности профилированы спиральными канавками, ориентированными в противоположных направлениях (рис. 4). Впервые подобные газодинамические узлы были рассмотрены в предположении бесконечно большого числа канавок в работе [1]. Случай конечного числа канавок ранее не рассматривался.

Выражение профиля толщины смазочного слоя для бинарного подшипника имеет вид

$$h(x, t) = h_0 + h_1(x) + h_2(x, t), \quad (5)$$

где  $h_0$  – расстояние между рабочими поверхностями подшипника,  $h_1(x)$  и  $h_2(x, t)$  – вклады канавок на неподвижном и вращающемся дисках соответственно,  $x$  – совокупность пространственных координат.

Сложность численного расчета бинарных подшипников заключается в том, что толщина смазочного слоя является быстро осциллирующей функцией как по пространственной, так и по временной переменным. В связи с этим требуется решать нестационарное уравнение Рейнольдса (1) до выхода на установившийся режим. Продолжительность времени установления может быть значительной. Однако, если ограничиться малыми числами сжимаемости, то задачу можно свести к совокупности стационарных задач, в которых время играет роль параметра.

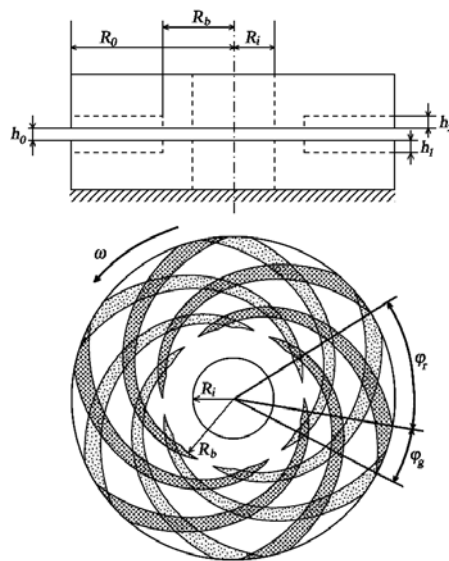


Рис. 4 Бинарный подшипник

Будем полагать, что на границе расчетной области  $\Omega$  задано условие первого рода  $p|_{\partial\Omega} = p_a = \text{const}$ . В этом случае уравнения (4) для бинарного подшипника сведутся к одному уравнению вида

$$\nabla \cdot (h^3 \nabla p - \Lambda \mathbf{V}(h_1 - h_2)) = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{V}$  – скорость скольжения поверхностей относительно друг друга. Так как конфигурация смазочного слоя является периодической функцией времени, то для полного расчета бинарного подшипника необходимо решать поставленную краевую задачу на периоде  $0 \leq t \leq T_b$ . Практически вычисления проводились с некоторым постоянным шагом в отдельные моменты времени.

Для решения уравнения (6) в работе применялся метод конечных элементов с кусочно-линейными базисными функциями. Для адекватного отражения особенностей геометрии смазочного слоя использовалась неструктурированная сетка. Решение возникающих систем линейных алгебраических уравнений осуществлялось методом сопряженных градиентов вкупе с классическим многосеточным  $V$ -циклом или ВРХ-предобусловливателем.

Для случая бесконечно большого числа канавок в работе получено асимптотическое приближение уравнения Рейнольдса (1) с использованием метода двухмасштабных асимптотических разложений. Это приближение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( Qr p_{as} \frac{\partial p_{as}}{\partial r} + S \Lambda r^2 p_{as} \right) = \Lambda r \frac{\partial p_{as} \bar{h}}{\partial t}, \quad (7)$$

где  $r$  – радиальная полярная координата,  $p_{as}$  – асимптотическое давление,  $\bar{h}$  – осреднение  $h$ . Коэффициенты уравнения  $Q$  и  $S$  вычисляются как интегральные характеристики от решения вспомогательной двумерной задачи в частных производных

$$\nabla \cdot (h^3 \nabla N) = \frac{\partial h^3}{\partial y_2} \text{ в координатах } (y_1, y_2) = (\xi, \ln r) \quad (8)$$

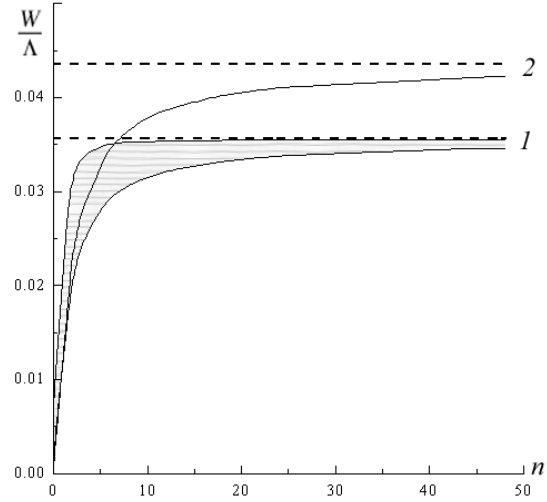
на периодически повторяющемся фрагменте  $[0, Y_1] \times [0, Y_2]$  рассматриваемой области. Для решения вспомогательной задачи использовался метод сопряженных градиентов вкупе с ВРХ-предобусловливателем.

В работе показано, что если на вращающейся поверхности положить глубину канавок равной нулю ( $h_2 = 0$ ), то асимптотическое уравнение (7) переходит в известное уравнение теории узких канавок для одностороннего подшипника.

Для сравнения с решением уравнения (6) (при большом количестве канавок) уравнение (7) предварительно линеаризуется аналогично (4)

$$\frac{d}{dr} \left( Qr \frac{dp_{as}}{dr} + S\Lambda r^2 \right) = 0. \quad (9)$$

В работе произведено сравнение характеристик одностороннего ( $h_2 = 0$ ) и бинарного подшипников с параметрами канавок, близкими к оптимальным (обеспечивающим максимум несущей способности). Односторонний подшипник рассчитывался как отдельно, так и (для проверки) как частный случай бинарного. На рис. 5 приведены зависимости несущей способности  $W$  от числа канавок  $n$  для обоих типов подшипников. Цифрой 1 отмечены кривые для бинарного подшипника, цифрой 2 – для одностороннего. Пунктиром показаны асимптотические значения, рассчитанные по решению задачи (9). Для бинарного подшипника приведены две кривые, соответствующие максимуму и минимуму несущей способности в пределах периода  $0 \leq t \leq T_b$ .



**Рис. 5** Зависимость несущей способности от числа канавок для двух типов подшипников

Расчеты моментов сопротивления одностороннего и бинарного подшипников с параметрами канавок, обеспечивающими максимум несущей способности, показали, что они примерно одинаковы.

**Четвертая глава** посвящена решению задач с большими числами сжимаемости  $\Lambda$ . Под большими числами сжимаемости будем понимать такие значения  $\Lambda$ , при которых в уравнении Рейнольдса преобладают конвективные слагаемые. Конкретные значения зависят от типа подшипника и его параметров.

Поскольку в этой главе рассматриваются только стационарные задачи, то уравнение Рейнольдса удобно записать относительно квадрата давления  $P = p^2$

$$\nabla \cdot (h^3 \nabla P - 2 \Lambda \mathbf{V} h \sqrt{P}) = 0. \quad (10)$$

Линеаризация уравнения производится по методу Ньютона  $\sqrt{P} = \frac{P^{new} + P^{old}}{2 \sqrt{P^{old}}}$ ,

что приводит к следующему уравнению для  $k$ -того приближения

$$\nabla \cdot \left( H^3 \nabla P^k - \Lambda \mathbf{V} H \frac{P^k}{\sqrt{P^{k-1}}} \right) = \Lambda \nabla \cdot \left( \mathbf{V} H \sqrt{P^{k-1}} \right), \quad k = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Поскольку при больших значениях параметра  $\Lambda$  на каждом шаге итерационного процесса (11) приходится решать уравнение с большим конвективным слагаемым, требуется привлечение специальных вычислительных методов, разработанных для так называемых уравнений конвекции-диффузии. В работе для аппроксимации поставленной задачи на неструктурированной сетке используется противопоточная конечно-элементная схема с усреднением по ребрам [2]. Но в отличие от [2] в настоящей работе производится гармоническое усреднение коэффициентов не только левой части уравнения (11), но и правой. В работе показывается, что построенная схема удовлетворяет принципу максимума и, следовательно, является монотонной.

Численное решение было выполнено для одностороннего упорного подшипника со спиральными канавками. Для адекватной аппроксимации канавок строилась неструктурированная сетка. Полученная при аппроксимации система линейных алгебраических уравнений решалась с помощью обобщенного метода минимизации невязки (GMRES). В качестве предобусловливателя выбирался многосеточный  $V$ -цикл. При выборе сглаживающих операторов наилучшие результаты по сходимости были получены с использованием блочного метода Гаусса-Зейделя, блоки которого расположены поперек потока и нумеруются вниз по потоку. Для нумерации использовался оптимальный по количеству операций упорядочивающий алгоритм, основанный на вспомогательном ориентированном графе.

Полученные результаты с точностью до нескольких процентов совпали с данными других работ, в частности, с работой [3]. При этом предложенный метод позволил использовать более мелкие сетки и охватить более широкий диапазон параметров подшипника.

В работе были построены зависимости несущей способности  $W$  от числа канавок  $n$  (до 100 канавок) и от числа сжимаемости  $\Lambda$  (до нескольких тысяч). Показано, что зависимость  $W(n)$  выходит на асимптоту, полученную по известной теории узких канавок, при этом, чем больше число сжимаемости, тем медленнее происходит выход. С увеличением числа канавок можно наблюдать сглаживание осцилляций поля давлений и выход его на асимптотические значения.

Для того чтобы найти асимптотику зависимости  $W(\Lambda)$ , в работе было получено предельное решение уравнения Рейнольдса при  $\Lambda \rightarrow \infty$  для подшипников с кусочно-непрерывной формой профиля. Оно является обобщением известного решения Котляра Я. М.

Для построения асимптотического решения вводится новое поле  $\tilde{P} = P_\infty h^2 / \langle h \rangle^2$ , где  $P_\infty$  – асимптотическое давление, а угловые скобки обозначают операцию осреднения  $\langle h \rangle = \int_0^{2\pi} h d\xi / 2\pi$ . Для нахождения вспомогательного поля  $\tilde{P}$  выводится уравнение

$$\frac{d}{dr} \left( \langle h \rangle^3 r \frac{d\tilde{P}}{dr} + \langle h \rangle^2 \tilde{P} \tilde{\delta} \right) = 0, \quad (12)$$

где  $\tilde{\delta}$  – кусочно-непрерывная функция, зависящая от параметров спиральных канавок,  $r$  – радиальная координата. Граничные условия для этого уравнения имеют вид

$$\tilde{P}(R_i) = \frac{\langle h_i^3 \rangle}{\langle h_i \rangle^3} P_i, \quad \tilde{P}(R_o) = \frac{\langle h_o^3 \rangle}{\langle h_o \rangle^3} P_o, \quad (13)$$

где индексы  $i$  и  $o$  обозначают соответственно внутреннюю и внешнюю границы несущей поверхности подшипника. Уравнение (12) справедливо как для подшипников без перекосов, так и с перекосами.

Полученное асимптотическое распределение давления согласуется с решением двумерной задачи (10) при больших числах сжимаемости. При этом построенная в работе зависимость  $W(\Lambda)$  для двумерной задачи выходит на предельное значение, вычисленное с помощью задачи (12), (13).

**Пятая глава** посвящена разработке методов численного решения задач по исследованию устойчивости равновесного положения газодинамических подшипников. Для исследования устойчивости был выбран метод сопряженных уравнений [4]. В его основе лежит анализ чувствительности реакции подшипника к малым изменениям положения смазываемых поверхностей. В случае осевых возмущений упорного подшипника это изменение вызвано поступательным перемещением подвижного диска вдоль оси его вращения. При отклонении подвижного диска от равновесного положения он совершает возмущенное движение, описываемое уравнением

$$M \delta \ddot{\varepsilon}(t) + \int_0^\tau D(t) \delta \dot{\varepsilon}(\tau - t) dt + \int_0^\tau G(t) \delta \varepsilon(\tau - t) dt = -D(\tau) \delta \varepsilon(0), \quad (14)$$

где  $D(t) = \sigma \int_\Omega p_o \mathcal{G} d\Omega$ ,  $G(t) = \int_\Omega p_o (3h_o^2 \nabla p_o - \Lambda \mathbf{V}) \cdot \nabla \mathcal{G} d\Omega$ ,  $M$  – безразмерная масса. Входящая сюда функция  $\mathcal{G}$  является решением следующей задачи

$$\frac{\sigma h_o}{p_o} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = \nabla \cdot (h_o^3 \nabla \mathcal{G}) + \frac{h_o}{p_o} \Lambda \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{G}, \quad \mathcal{G}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathcal{G}|_{t=0} = \frac{1}{\sigma h_o}, \quad (15)$$

где  $p_o$ ,  $h_o$  – давление и толщина смазочного слоя в положении статического равновесия. Давление  $p_o$  является решением задачи, разобранный в предыдущей главе.

Необходимым и достаточным условием устойчивости является отсутствие в правой комплексной полуплоскости корней характеристического квазиполинома  $F(\lambda) = M\lambda^2 + \lambda \int_0^\infty D(t)e^{-\lambda t} dt + \int_0^\infty G(t)e^{-\lambda t} dt$ . То есть, если его корни удовлетворяют условию  $\text{Re } \lambda < 0$ , то подшипник обладает асимптотической устойчивостью.

Таким образом, для исследования устойчивости необходимо определить давление  $p_o$  в равновесном положении, решив уравнение Рейнольдса методом, изложенным в предыдущей главе. Далее нужно найти функцию  $\mathcal{G}$ , решив начально-краевую задачу (15), и определить корни характеристического квазиполинома  $F(\lambda)$ . Основным достоинством метода сопряженных уравнений является то, что решение уравнения (15) не зависит от  $\lambda$ , и тем самым задача анализа корней характеристического квазиполинома решается автономно.

Для решения уравнения (15) применялась неявная схема, на каждом временном шаге которой требуется решить эллиптическое уравнение конвекции-диффузии, используя противопоточную схему. Описанный в четвертой главе метод конечных элементов с усреднением по ребрам напрямую непригоден для этого уравнения. Поэтому в данной главе строится другая противопоточная схема, однако использующая те же идеи, что и метод с усреднением по ребрам. Возникающая при этом система линейных алгебраических уравнений решалась тем же методом, что и в предыдущей главе (GMRES с многосеточным  $V$ -циклом в качестве предобусловливателя).

Для исследования устойчивости на комплексной плоскости  $(\text{Re } \lambda, \text{Im } \lambda)$  строился годограф корней характеристического квазиполинома, каждой точке которого отвечает определенное значение массы  $M$ . По виду годографа и пересечениям его ветвей с осью  $\text{Re } \lambda = 0$  можно найти диапазон значений  $M$ , в котором подшипник устойчив.

На основе предложенного метода в работе произведено исследование устойчивости реальных устройств – упорных подшипников и уплотнений со спиральными канавками. Анализ годографа корней показал, что условием устой-

чивости является неравенство  $M < M_b$ , где  $M_b$  – граничная масса, определяющая границу устойчивости.

На рис. 6 приведена зависимость граничной массы от числа канавок для подшипника с оптимальными по несущей способности параметрами при числе сжимаемости  $\Lambda = 110$ . Пунктиром показано значение, полученное с помощью асимптотического приближения для бесконечно большого числа канавок. Видно, что граничная масса монотонно убывает, приближаясь сверху к асимптотическому значению. Отсюда вытекает, что использование теории узких канавок позволяет рассчитать устойчивость подшипников со спиральными канавками с запасом. Это важно, так как уравнения асимптотической теории значительно проще уравнения Рейнольдса. Изучение зависимостей граничной массы от параметров спиральных канавок показало, что параметры, обеспечивающие максимум несущей способности, являются наихудшими с точки зрения устойчивости. Это важное обстоятельство следует учитывать при проектировании рассмотренных типов опор.

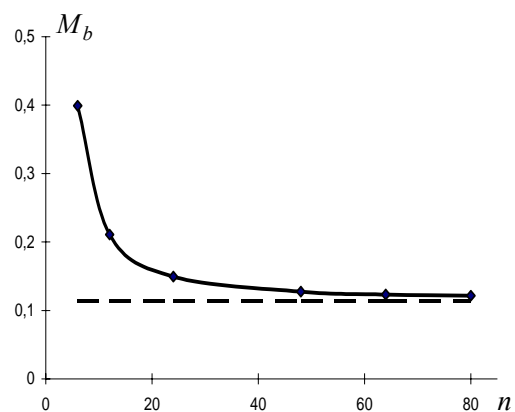


Рис. 6 Зависимость граничной массы от числа канавок

### Заключение.

Основные результаты, полученные в диссертации, сводятся к следующему.

- Предложена новая консервативная разностная схема для решения задач газовой смазки с наддувом. Разработаны ее модификации для источников наддува разных типов (простая диафрагма, кольцевая диафрагма, микроканавки).
- В линейном приближении численно рассчитаны поля давлений в упорном подшипнике нового типа – с профилем, нанесенным на обеих рабочих поверхностях. Построено асимптотическое (при бесконечно большом числе канавок) приближение уравнения Рейнольдса для таких подшипников.
- Разработан метод решения уравнения Рейнольдса с преобладающими конвективными членами для расчета самоподдерживающихся профилированных подшипников сложной геометрии. С помощью данного метода стало возможным рассчитать характеристики опорных подшипников и уплотне-



ний со спиральными канавками при большом числе канавок и больших числах сжимаемости.

- Получено асимптотическое (для бесконечно больших чисел сжимаемости) решение уравнения Рейнольдса с кусочно-непрерывными коэффициентами. В частности, найдено предельное решение для упорных подшипников со спиральными канавками.
- Разработан метод решения сопряженной задачи газовой смазки с преобладающими конвективными членами, возникающей при исследовании устойчивости равновесного положения подшипников. Произведено исследование устойчивости самоподдерживающихся подшипников со спиральными канавками по отношению к осевым возмущениям (при конечном числе канавок).
- Решение конкретных задач подтвердило эффективность разработанных алгоритмов. Сравнение с некоторыми известными решениями, экспериментальными данными и асимптотическими решениями обнаружило хорошее совпадение результатов. В то же время были получены новые данные по статическим и динамическим характеристикам рассмотренных конструкций опорных узлов.

Разработанные в диссертации численные методы и программные средства позволяют повысить надежность решения задач, связанных с исследованием и проектированием упорных и уплотнительных узлов на газовой смазке.

#### Список цитируемой литературы.

- [1] **Емельянов, А.В. Основы теории газодинамических подшипников и бесконтактных уплотнений со спиральными канавками на обеих поверхностях** [Текст] / А.В. Емельянов, И.А. Емельянов // Доклады академии наук. -1998. -Т.363 -№2. -С. 187-190.
- [2] **Xu, J. A monotone finite element scheme for convection-diffusion equations** [Text] / J. Xu, L. Zikatanov // Mathematics of Computation 68. -1999. - P. 1429-1446.
- [3] **Faria, M.T.C. An efficient finite element procedure for analysis of high-speed spiral groove gas face seals** [Text] / M.T.C. Faria // ASME. Journal of Tribology. -2001. -Vol.123. -P. 205-210.
- [4] **Григорьев, Б.С. Применение метода сопряженных уравнений к нестационарным задачам газовой смазки** [Текст] / Б.С. Григорьев // Сопряженные уравнения в задачах математической физики. Сб. научных трудов. Отдел вычислительной математики АН СССР. -Москва, 1990. -С. 47-63.

### Список работ, опубликованных по теме диссертации.

1. **Григорьев, Б.С. Численные методы расчета газовых опор с наддувом** [Текст] / Б.С. Григорьев, Д.Б. Смирнов // XXIX неделя науки СПбГТУ. 27 ноября – 02 декабря 2000 года. СПбГТУ. -2001. -С. 10-11.
2. **Grigoriev, B.S. Finite-difference method for solving externally pressurized gas bearings** [Text] / B.S. Grigoriev, D.B. Smirnov // Abstracts of Papers from 2nd World Tribology Congress. -Vienna, 2001. -CD-ROM. ISBN 3-901657-08-8. -P. 443.
3. **Григорьев, Б.С. О расчете газостатических опор с микроканавками** [Текст] / Б.С. Григорьев, Д.Б. Смирнов // Формирование технической политики инновационных наукоемких технологий. Материалы научно-практической конференции и школы-семинара 18-20 июня 2002 года. СПбГТУ. -2002. -Т.2. -С. 64-69.
4. **Григорьев, Б.С. Разностная схема с компенсацией расхода для расчета гибридных подшипников на газовой смазке** [Текст] / Б.С. Григорьев, Д.Б. Смирнов // Сборник трудов СПбГТУ №485, “Прикладная математика”. -2002. -С. 31-41.
5. **Григорьев, Б.С. Расчет газостатических подшипников методом конечных разностей** [Текст] / Б.С. Григорьев, Д.Б. Смирнов // Проблемы машиностроения и надежности машин. -2002. -№4. -С. 35-42.
6. **Григорьев, Б.С. Асимптотический анализ газодинамических подшипников со спиральными канавками на обеих рабочих поверхностях** [Текст] / Б.С. Григорьев, Д.Б. Смирнов, Ю.К. Шиндер // Проблемы машиностроения и надежности машин. -2004. -№6. -С. 22-26.
7. **Григорьев, Б.С. Асимптотическое решение уравнения Рейнольдса с кусочно-непрерывными коэффициентами** [Текст] / Б.С. Григорьев, Д.Б. Смирнов // Материалы научно-практической конференции “Научные исследования и инновационная деятельность”. СПбГПУ. -2007. -С. 57.
8. **Смирнов, Д.Б. Численный анализ газодинамических подшипников со спиральными канавками на обеих поверхностях** [Текст] / Д.Б. Смирнов // Всероссийская конференция ассоциации технических университетов России “Фундаментальные исследования и инновации в технических университетах”. Тезисы докладов. СПбГПУ. -2007. -С. 259-260.