

На правах рукописи

Наумов Иван Васильевич

Определение напряженно-деформированного состояния упругого  
полупространства от произвольной нагрузки

01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Санкт-Петербург - 2008г

РАБОТА ВЫПОЛНЕНА НА КАФЕДРЕ МЕХАНИКИ И ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ  
ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор  
Пальмов Владимир Александрович

Официальные оппоненты:  
доктор физико-математических наук, Кривцов Антон Мирославович  
кандидат технических наук, Цейтлин Борис Вениаминович

Ведущая организация - Институт проблем машиноведения РАН г. Санкт-Петербург.

Защита состоится 11 февраля 2009 года в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.05 при ГОУ ВПО «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» по адресу: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29, корп. 2, ауд 265.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ГОУ ВПО «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ».

Автореферат разослан

2008 года

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 212.229.05

Воробьева Т.В.

## **Общая характеристика работы.**

**Актуальность темы.** Современные методы физико-математического моделирования основания под сооружениями могут учитывать различные свойства грунтов. Объем моделируемого основания под различными в плане сооружениями может быть относительно большим, но не бесконечным.

Вложенные в программы теоретические решения в расчете основания под сооружениями вызывают очень много вопросов. В какой степени математическая начинка программ соответствует строгому решению задачи и полевым экспериментальным наблюдениям? Сравнительный тестовый расчет упругого полупространства с хорошей программой по расчету ограниченного основания под фундаментами в СПб позволил выяснить существенную разницу по численным результатам. Вертикальные напряжения в сжатой части основания отличаются в некоторых точках до 30%, на величину горизонтальных напряжений практически не как не сказывается форма площадки нагружения. Более существенное расхождение по горизонтальным напряжениям. Из-за отсутствия точной и глобальной картины напряженного состояния, ранее построенные дома начинают разрушаться, не только при производстве буронабивных свай, но при сносе старых домов. Не все в порядке с горизонтальными напряжениями и формуле Короткина В.Г. величина их большая уже у поверхности и не уменьшается по глубине. В основании под домами и за его пределами возникает напряженно-деформированное поле. Пересечение полей напряжений приводит к их взаимодействию. Буровые работы снижают горизонтальные сжимающие напряжения. Очень слабые грунты от этого теряют структурную прочность и превращаются в пльвуны, а это приводит к необходимости откачки большого объема грунтов в месте будущего строительства дома, что в свою очередь приводит к сползанию фундамента соседних сооружений вместе с массивом грунта под ними. Для определения опасных напряжений в месте строительства и предотвращения вышеуказанных последствий нужны новые физико-математические

зависимости позволяющие, строить карту напряженно деформированного состояния бесконечного основания под микрорайоном, городом или промышленно-энергетическим комплексом. Такие формулы получены.

**Цель работы.** Получение новых физико-математических зависимостей для определения напряженно деформированного состояния бесконечного изотропного упругого полупространства.

**Методы исследования.** Физико-математическое моделирование изотропного упругого полупространства.

**Научную новизну** работы составляет:

- Использование связи в решении Буссинеска с началом координат, в месте приложения сосредоточенной силы, и другой декартовой системой координат.
- Составление подынтегральных выражений напряжений и перемещений для прямоугольной площадки нагруженной равномерно распределенной нормальной и касательной нагрузкой.
- Получение формул в виде конечного интеграла (18 формул).
- Новые результаты расчетов упругого полупространства.

**Практическая значимость работы.** Полученные зависимости позволяют построить картину напряженного состояния однородного основания под любым сооружением на любой глубине под ним. Возможно построение карты напряженно деформированного состояния под любым по величине городом, промышленно энергетическим комплексом с учетом нагрузки на основание от всех возведенных сооружений.

**Апробация работы.** Начало работы было представлено на конференции в городе Нарва в 1987г.

Последующие работы были представлены на семинарах во ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева в 1985-1993гг и на инженерно-строительном факультете СПб ГПУ в 2005г.

**Публикации.** Основное содержание работ опубликовано в трех научных работах.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 122 страницы текста. Объем диссертации составляет 120 страниц, из них 32 страницы занимает вывод формул, 8 страниц занимают 18 фундаментальных зависимостей. Работа содержит 35 рисунков, 27 графиков и 24 таблиц расчета упругого полупространства.

## **Содержание работы**

### **Введение**

В работе рассматриваются основные глобальные проблемы, возникающие при больших масштабах строительства. Затронуты проблемы, связанные со строительством больших городов и создания под ними напряженного деформированного поля.

В краткой форме указаны решения задач упругого полупространства другими авторами.

В главе 2 в параграфах 2.1, 2.2 уделено основное внимание поставленной цели и различным решениям других авторов.

## **Глава 3. Общее решение задачи теории упругости по определению напряжений и перемещений под произвольной площадкой нагружения от произвольной нагрузки.**

### **3.2 Получение формул для определения составляющих напряжений и перемещений в произвольной точке полупространства от равномерно распределенной нагрузки по прямоугольной площадке.**

Рассмотрим на плоскости упругого полупространства декартовую систему  $x, y, z$  с некоторой произвольной точкой  $O$  на оси  $z$  (см. Рис.1). Будем считать эту систему координат основной. В произвольной точке к границе полупространства приложим нормальную сосредоточенную силу. В точке приложения силы введем декартовую систему координат  $X, Y, Z$  оси  $X, Y$ , которой направлены во встречном направлении к основной системе координат.

В этой системе координат  $X, Y, Z$  точка  $O$  находящаяся на глубине  $z=Z$  имеет одинаковые координаты и радиусы с точкой приложения силы в основной системе координат т.е  $x=X, y=Y, R=r=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ . Следовательно, формулы Буссинеска составляющих напряжений и перемещений (см. 9.70 и 9.72 "Теория упругости" М.М. Филоненко – Бородич, М., 1947г) после введения в них координат  $x, y$  и  $z$  не изменятся.

$$\Delta Z = -\frac{P}{\pi E} \left[ \frac{1-\mu^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z^2(1+\mu)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \right];$$

$$\Delta X = -\frac{P(1+\mu)}{2\pi E} (1-2\mu) \left[ \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right] + \frac{xz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \Big];$$

$$\Delta Y = -\frac{P(1+\mu)}{2\pi E} \left[ (1-2\mu) \left[ \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right] + \frac{yz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \right].$$

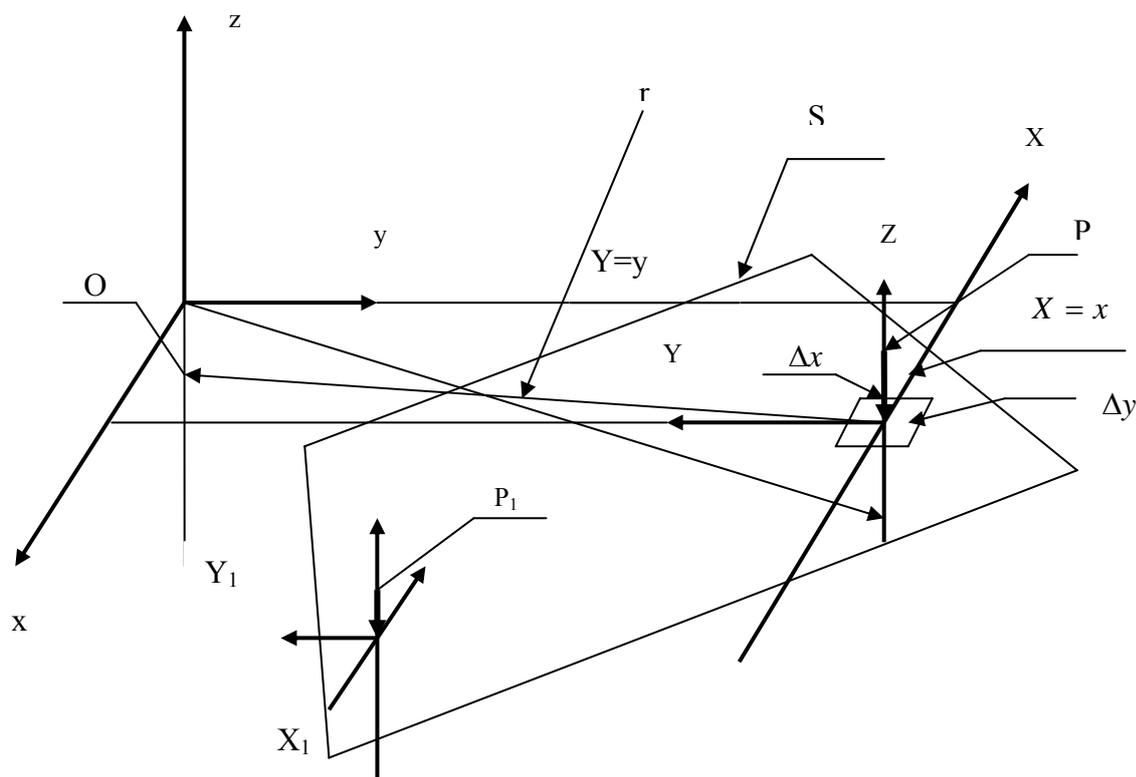


Рис.1 Основная система координат и декартовые координаты сил.

Пусть имеется вторая сила  $P_1$  приложенная в центре новой координатной системы, координаты рассмотренной произвольной точки  $O$  в

полупространстве в этой системе координат будут  $X_1, Y_1, Z_1=z$ . Точка приложения силы  $P_1$  на глубине  $Z_1=z$  имеет координаты  $x_1=X_1, y_1=Y_1$ . Перемещения и напряжения в произвольной точке  $O$  от воздействия двух сил  $P$  и  $P_1$  суммируются. Расчет напряжений и перемещений можно произвести и для любых других сил.

Пусть имеется произвольная четырехугольная площадка нагружения –  $S$  с равномерно распределенной нормальной нагрузкой. Перемещение произвольной точки на плоскости полупространства будет зависеть от формы, размеров и относительного положения точки на площадке. Разобьем всю площадь  $S$  на элементарные площадки со сторонами  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , нагрузку на каждую элементарную площадку нагружения представим в виде сосредоточенной силы со своей системой координат. Сосредоточенная сила от каждой площадки со своими координатами  $X_i$  и  $Y_i$  увеличивает долю вертикального перемещения произвольной точки  $O$  полупространства. Причем оси  $X_i$  и  $Y_i$  каждой элементарной площадки направлены в противоположном направлении к осям  $x$  и  $y$  основной системы координат. Суммарное

вертикальное перемещение при  $z=0$  равно  $\Delta Z = \sum_i \left[ -\frac{P_i(1-\mu^2)\Delta x\Delta y}{\pi E\sqrt{X_i^2+Y_i^2}} \right]$ , где  $i$  –

номер элементарной площадки нагружения.

Остается отметить, что записанная здесь сумма представляет собой сумму Римана некоторого интеграла, к которому стремится эта сумма. Переходя к

пределу при  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  получим  $\Delta Z = \iint_S \left[ -\frac{P(1-\mu^2)}{\pi E\sqrt{x^2+y^2}} \right] dx dy$ .

Напоминаю, что интегрирование в этой формуле ведется по всей площадке нагружения  $S$ .

Получим формулы для прямоугольной площадки нагружения см. (рис.2) где введены другие обозначения координатных осей ( $X, Y, Z$ ).

Для поставленной задачи из решений Буссинеска нужно получить формулы для произвольной прямоугольной площадки от нормальной равномерно распределенной нагрузки.

Допускаем существование бесконечного множества декартовых систем координат на плоскости упругого полупространства, причем ось  $X$  параллельна сторонам  $AD$  и  $BC$  (см. Рис.2). В решении Буссинеска составляющие напряжений и перемещений зависят от положения точки в упругом полупространстве и сила приложена в центре декартовой системы координат. В данном случае система координат находится в произвольной точке на плоскости упругого полупространства, а сама же произвольная точка упругого полупространства находится на оси  $Z$ .

Для решения задачи стороны  $AD$  и  $BC$  площадки нагружения представим линейными уравнениями. Эти функции будут нижними и верхними пределами интегрирования по  $Y$ . Одновременно эти линейные функции определяют положение произвольной точки  $O$  начала координат по оси  $Y$  и размеры площадки нагружения по  $Y$ . Продлив линейные функции сторон  $AD$  и  $BC$  до пересечения с осью  $Y$ , нагрузим всю площадку  $ABFL$  равномерно распределенной нагрузкой. Предположительно вычисляем составляющие напряжений и перемещений. Далее используя принцип независимости действия сил, приложим к площадке  $DCFL$  равномерно распределенную нагрузку противоположного направления  $(-P)$ . Это позволит определить пределы интегрирования по оси  $X$  и положение начала координат по оси  $X$ . Верхними и нижними пределами интегрирования по оси  $Y$  будут уравнения  $y = Y_2$  и  $y = Y_1$ , а по оси  $X$  соответственно,  $x = X_1$  и  $x = X_2$

При сложной нагрузке площадку нагружения можно разбить на маленькие в пределах, которых нагрузку можно считать равномерно распределенной.

Для более упрощенного варианта ввода исходных данных в программу расчета можно воспользоваться закрепленной системой координат с центром в точке  $O_0$  и ввести следующие обозначения;  $X_{2i} = X_{02i} - X_{0i}$ ,  $X_{1i} = X_{01i} - X_{0i}$ ,  $Y_{1i} = Y_{01i} - Y_{0i}$ ,  $Y_{2i} = Y_{02i} - Y_{0i}$ . Где  $i$  – номера точек где определяются напряжения и перемещения.

Интегралы перемещений от равномерно распределенной нагрузки после преобразований.

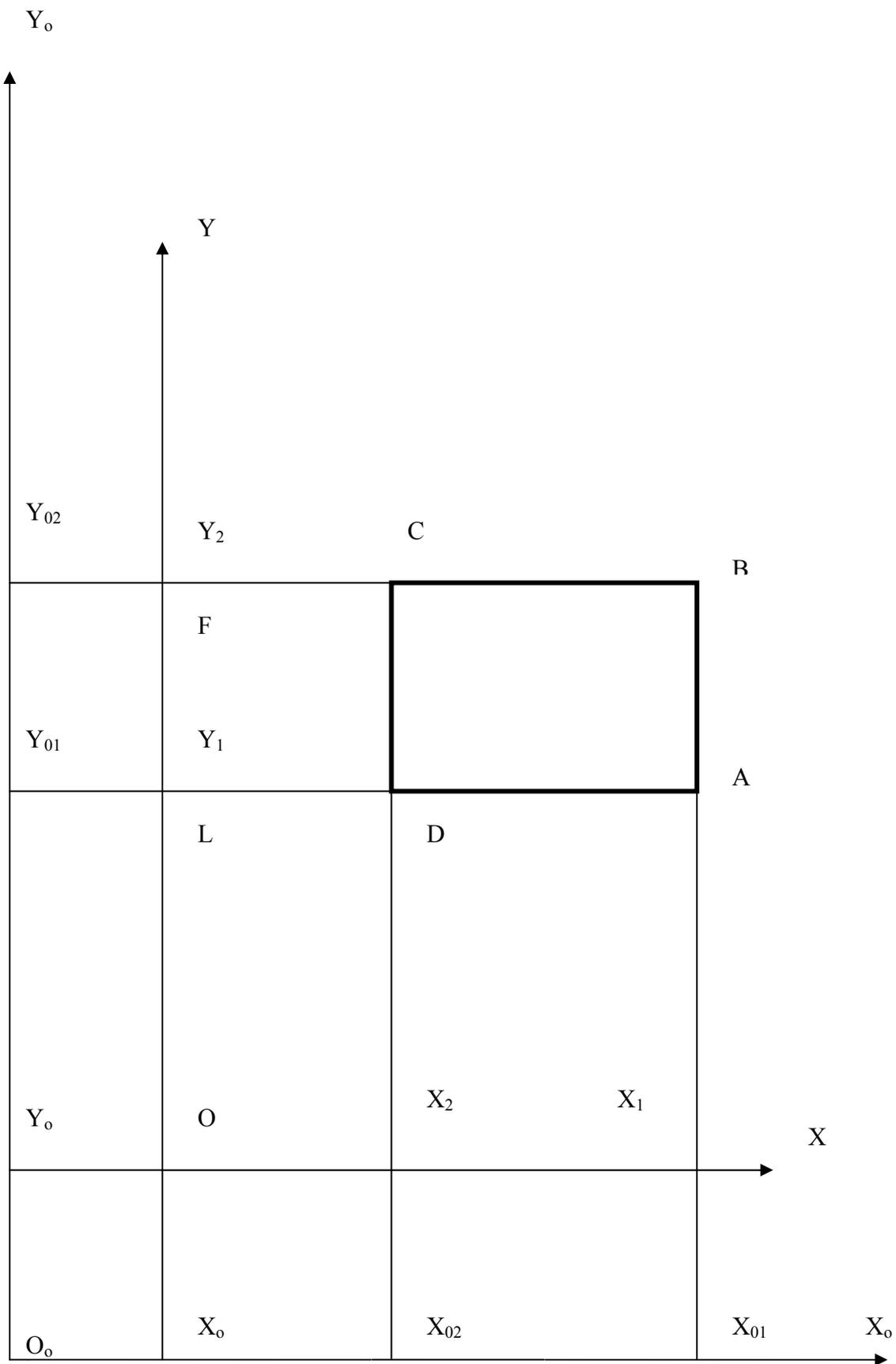


Рис 2

$$\Delta Z = -\frac{P}{\pi E} \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left[ \frac{1-\mu^2}{r} + \frac{z^2(1+\mu)}{2r^3} \right] dx dy;$$

$$\Delta X = -\frac{P(1+\mu)}{2\pi E} \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left[ (1-2\mu) \left[ \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{xz}{r(x^2+y^2)} \right] + \frac{xz}{r^3} \right] dx dy;$$

$$\Delta Y = -\frac{P(1+\mu)}{2\pi E} \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left[ (1-2\mu) \left[ \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{yz}{r(x^2+y^2)} \right] + \frac{yz}{r^3} \right] dx dy;$$

Интегралы напряжений.

$$Z_z = \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \frac{3Pz^3}{2\pi r^5} dx dy;$$

$$X_x = \frac{P}{2\pi} \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left[ \frac{3x^2z}{r^5} - (1-2\mu) \left[ \frac{r^2+rz-z^2}{r^3(r-z)} - \frac{x^2(2r-z)}{r^3(r-z)^2} \right] \right] dx dy;$$

$$Y_y = \frac{P}{2\pi} \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left\{ \frac{3y^2z}{r^5} - (1-2\mu) \left[ \frac{r^2+rz-z^2}{r^3(r-z)} - \frac{y^2(2r-z)}{r^3(r-z)^2} \right] \right\} dx dy;$$

$$X_y = \frac{P}{2\pi} \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left\{ \frac{3xyz}{r^5} - (1-2\mu) \left[ \frac{xy(2r-z)}{r^3(r-z)^2} \right] \right\} dx dy;$$

$$Y_z = \frac{P}{2\pi} \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \frac{yz^2}{r^5} dx dy;$$

$$Z_x = \frac{P}{2\pi} \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \frac{xz^2}{r^5} dx dy :$$

Где P- равномерно распределенная нагрузка.

Ниже приводятся результаты интегрирования по формулам для;  $\Delta Z$ ,  $Z_z$ ,  $X_x$ ,  $Y_y$ .

$$\Delta Z = -\frac{P}{\pi E} \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left[ \frac{1-\mu^2}{r} + \frac{z^2(1+\mu)}{2r^3} \right] dx dy;$$

$$\int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy = \int_{Y_1}^{Y_2} \left[ \ln \left( X_1 + \sqrt{X_1^2+y^2+z^2} \right) - \ln \left( X_2 + \sqrt{X_2^2+y^2+z^2} \right) \right] dy =$$

$$\left| y \ln \left( X_1 + \sqrt{X_1^2+y^2+z^2} \right) \right|_{Y_1}^{Y_2} - \left| y \ln \left( X_2 + \sqrt{X_2^2+y^2+z^2} \right) \right|_{Y_1}^{Y_2} -$$

$$- \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{y^2 dy}{\left( X_1 + \sqrt{X_1^2+y^2+z^2} \right) \sqrt{X_1^2+y^2+z^2}} + \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{y^2 dy}{\left( X_2 + \sqrt{X_2^2+y^2+z^2} \right) \sqrt{X_2^2+y^2+z^2}} =$$

$$\begin{aligned}
& \left| y \ln \left( X_1 + \sqrt{X_2^2 + y^2 + z^2} \right) \right|_{Y_1}^{Y_2} - \left| y \ln \left( X_2 + \sqrt{X_2^2 + y^2 + z^2} \right) \right|_{Y_1}^{Y_2} - \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{y^2 \left( \sqrt{X_1^2 + y^2 + z^2} - X_1 \right) dy}{(y^2 + z^2) \sqrt{X_1^2 + y^2 + z^2}} + \\
& + \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{y^2 \left( \sqrt{X_2^2 + y^2 + z^2} - X_2 \right) dy}{(y^2 + z^2) \sqrt{X_2^2 + y^2 + z^2}} = Y_2 \ln \left( \frac{X_1 + \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}}{X_2 + \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} \right) - Y_1 \ln \left( \frac{X_1 + \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}}{X_2 + \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} \right) + \\
& + X_1 \ln \left( \frac{Y_2 + \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}}{Y_1 + \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} \right) - X_2 \ln \left( \frac{Y_2 + \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}}{Y_1 + \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} \right) + \\
& + z \left( \operatorname{arctg} \frac{Y_2 X_2}{z \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{Y_1 X_2}{z \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \right. \\
& \left. - \operatorname{arctg} \frac{Y_2 X_1}{z \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \operatorname{arctg} \frac{Y_1 X_1}{z \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} \right) \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} dx dy = \int_{Y_1}^{Y_2} \left[ \frac{x}{(y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]_{X_1}^{X_2} dy = \\
& \int_{Y_1}^{Y_2} \left[ \frac{X_1}{(y^2 + z^2) \sqrt{X_1^2 + y^2 + z^2}} - \frac{X_2}{(y^2 + z^2) \sqrt{X_2^2 + y^2 + z^2}} \right] dy = \left[ \frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{y X_1}{z \sqrt{X_1^2 + y^2 + z^2}} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{y X_2}{z \sqrt{X_2^2 + y^2 + z^2}} \right]_{Y_1}^{Y_2} = \frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{Y_2 X_1}{z \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{Y_1 X_1}{z \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \\
& - \frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{Y_2 X_2}{z \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \frac{1}{z} \operatorname{arctg} \frac{Y_1 X_2}{z \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta Z = & -\frac{P}{\pi E} \left[ (1 - \mu^2) \left[ Y_2 \ln \left( \frac{X_1 + \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}}{X_2 + \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} \right) - Y_1 \ln \left( \frac{X_1 + \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}}{X_2 + \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} \right) + \right. \right. \\
& X_1 \ln \left( \frac{Y_2 + \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}}{Y_1 + \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} \right) - X_2 \ln \left( \frac{Y_2 + \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}}{Y_1 + \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} \right) + z \left[ -\operatorname{arctg} \frac{Y_2 X_1}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{arctg} \frac{Y_1 X_1}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} + \operatorname{arctg} \frac{Y_2 X_2}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{Y_1 X_2}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} \right] \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Z(1+\mu)}{2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{Y_2 X_1}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{Y_1 X_2}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \right. \\
& \left. - \operatorname{arctg} \frac{Y_2 X_2}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \operatorname{arctg} \frac{Y_1 X_2}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} \right] ] (I) \\
Z_z = & \frac{3P}{2\pi} \left[ \frac{X_1 Z [3(X_1^2 + Z^2) + 2Y_2^2]}{6Y_2 (X_1^2 + Z^2) \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \frac{X_1 Z (Y_2^2 - 3Z^2)}{6Y_2 (Y_2^2 + Z^2) \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{X_1 Y_2}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \right. \\
& - \frac{X_2 Z [3(X_2^2 + Z^2) + 2Y_1^2]}{6Y_1 (X_2^2 + Z^2) \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \frac{Z X_2 (Y_1^2 - 3Z^2)}{6Y_1 (Y_1^2 + Z^2) \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{X_2 Y_2}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \\
& - \frac{X_1 Z [3(X_1^2 + Z^2) + 2Y_1^2]}{6Y_1 (X_1^2 + Z^2) \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \frac{X_1 Z (Y_1^2 - 3Z^2)}{6Y_1 (Y_1^2 + Z^2) \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{X_1 Y_1}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} + \\
& + \frac{X_2 Z [3(X_2^2 + Z^2) + 2Y_1^2]}{6Y_1 (X_2^2 + Z^2) \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} + \frac{Z X_2 (Y_1^2 - 3Z^2)}{6Y_1 (Y_1^2 + Z^2) \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{X_2 Y_1}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} \left. \right] (VII) \\
X_x = & \frac{P}{2\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{X_1 Y_2}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{X_1 Y_1}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{X_2 Y_2}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \right. \\
& + \operatorname{arctg} \frac{X_2 Y_1}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \frac{X_1 Y_2 Z (X_1^2 + Y_2^2 + 2Z^2)}{(X_1^2 + Z^2)(Y_2^2 + Z^2) \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \\
& \frac{X_2 Y_1 Z (X_2^2 + Y_1^2 + 2Z^2)}{(X_2^2 + Z^2)(Y_1^2 + Z^2) \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} + \\
& \frac{X_1 Y_1 Z (X_1^2 + Y_1^2 + 2Z^2)}{(X_1^2 + Z^2)(Y_1^2 + Z^2) \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \frac{X_2 Y_1 Z (X_2^2 + Y_1^2 + 2Z^2)}{(X_2^2 + Z^2)(Y_1^2 + Z^2) \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \\
& - (1 - 2\mu) \left[ - \operatorname{arctg} \frac{X_1}{Y_2} + \operatorname{arctg} \frac{X_2}{Y_2} + \right. \\
& \operatorname{arctg} \frac{X_1}{Y_1} - \operatorname{arctg} \frac{X_2}{Y_1} - \left( \operatorname{arctg} \frac{X_2 Y_2}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{X_1 Y_2}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \right. \\
& \left. + \operatorname{arctg} \frac{X_1 Y_1}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{X_2 Y_1}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} \right) + \left( \operatorname{arctg} \frac{X_2 Z}{Y_2 \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{arctg} \frac{X_1 Z}{Y_2 \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \operatorname{arctg} \frac{X_1 Z}{Y_1 \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{X_2 Z}{Y_1 \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} \Big] \Big] (VIII) \\
Y_y = & \frac{P}{2\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{X_1 Y_2}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{X_2 Y_2}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{X_1 Y_1}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} + \right. \\
& + \operatorname{arctg} \frac{X_2 Y_1}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \frac{X_1 Y_2 Z (X_1^2 + Y_2^2 + 2Z^2)}{(X_1^2 + Z^2)(Y_2^2 + Z^2) \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \\
& + \frac{X_2 Y_2 Z (X_2^2 + Y_2^2 + 2Z^2)}{(X_2^2 + Z^2)(Y_2^2 + Z^2) \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \frac{X_1 Y_1 Z (X_1^2 + Y_1^2 + 2Z^2)}{(X_1^2 + Z^2)(Y_1^2 + Z^2) \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \\
& - \frac{X_2 Y_1 Z (X_2^2 + Y_1^2 + 2Z^2)}{(X_2^2 + Z^2)(Y_1^2 + Z^2) \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} - (1 - 2\mu) \left[ - \operatorname{arctg} \frac{Y_2}{X_1} + \operatorname{arctg} \frac{Y_1}{X_1} + \operatorname{arctg} \frac{Y_2}{X_2} - \right. \\
& - \operatorname{arctg} \frac{Y_1}{X_2} - \left( \operatorname{arctg} \frac{X_1 Y_1}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{X_1 Y_2}{Z \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \operatorname{arctg} \frac{X_2 Y_2}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{X_2 Y_1}{Z \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} \right) + \left( \operatorname{arctg} \frac{Y_1 Z}{X_1 \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{Z Y_2}{X_1 \sqrt{X_1^2 + Y_2^2 + Z^2}} + \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{arctg} \frac{Z Y_2}{X_2 \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{Z Y_1}{X_2 \sqrt{X_2^2 + Y_1^2 + Z^2}} \right) \right] \Big] (IX)
\end{aligned}$$

### **Получение формул от равномерно распределенной касательной нагрузки по прямоугольной площадке нагружения.**

В данном разделе получены формулы для определения напряжений и перемещений упругого полупространства от равномерно распределенной касательной нагрузки направленной параллельно оси - X. Решение и методика составления интегралов описаны в параграфе 3.2. Полученные формулы громоздки и по этой причине не приведены. В параграфе 2.3 получены

формулы для определения вертикальных перемещений под трапецеидальной площадкой нагружения от равномерно распределенной и линейной нагрузки.

По полученным выше формулам можно определить составляющие напряжений и перемещений, от нагружения любой площадки произвольной нагрузкой. Для этого достаточно всю площадку разбить на не большие, в пределах, которых, нагрузку можно разложить на равномерно распределенную нормальную и касательную.

### **3.4 Примеры расчетов упругого полупространства**

Для проектирования сооружений очень важно иметь представление объемной картины напряженного состояния бесконечного основания.

Рассмотрим простой тестовый расчет осадки скального упругого полупространства. – Площадь нагружения 21\*14км (примерная площадь Санкт-Петербурга), модуль упругости  $E=200000 \text{ т/м}^2$  (реальный модуль под арочной плотиной), коэффициент Пуассона равен 0,2. При действии равномерно распределенной нагрузки  $5 \text{ т/м}^2$ , центр площадки нагружения при ( $Z=0$ ) опустится на 0,45м.

В центре под большой площадкой нагружения наблюдаются вертикальные и горизонтальные напряжения даже на большой глубине.

Так при  $Z=200\text{м}$ ,  $Z_z = -5,078 \text{ т/м}^2$ ,  $X_x = -0,014 \text{ т/м}^2$ ,  $Y_y = -0,72 \text{ т/м}^2$ .

$Z=2000\text{м}$ ,  $Z_z = -5,64 \text{ т/м}^2$ ,  $X_x = 0,84 \text{ т/м}^2$ ,  $Y_y = 0,35 \text{ т/м}^2$ .

$Z = 20000\text{м}$ ,  $Z_z = -1,76 \text{ т/м}^2$ ,  $X_x = 0,76 \text{ т/м}^2$ ,  $Y_y = 0,75 \text{ т/м}^2$ .

Глобальные масштабы нагружения приводят к включению в работу больших объемов основания под нагрузкой. Для расчетов формулы введены в компьютер.

### **3.5 Анализ расчетов по вертикальным составляющим напряжений.**

Произведен расчет прямоугольной площадки нагружения 20\*100м. от равномерно распределенной нагрузки 20 т/м<sup>2</sup> (см. график на рис 3). Масштаб для наглядности на рисунках только по вертикали (1 дел =5т/м<sup>2</sup>).

Сравнение численных результатов вертикальных напряжений производилось по измененной формуле В.Г Короткина, которая приведена в учебнике В.А.Флорина (см.11). К сожалению, в диссертационной работе В.Г. Короткина нет математической выкладки получения формул и примеров расчета, поэтому трудно делать какие-то выводы, особенно по горизонтальным напряжениям. В решении он использовал гармоническую функцию Галеркина –

$$\varphi_3 = \frac{P(1-2\sigma)}{2\pi} \left[ z \ln \left( z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{2\sigma}{1-2\sigma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \right].$$

В решении Буссинеска эта функция равна -  $\omega = \frac{cz}{r^3}$ .

Второе отличие в том, что определение составляющих напряжений и перемещений он получил не интегрированием, а более длинным и сложным решением с использованием работ других авторов.

В представленном мной решении, после составления интегралов подынтегральные функции удастся привести к хорошо известным табличным интегралам.

Вертикальные напряжения в центре под площадкой первоначально возрастают до -24,04т/м<sup>2</sup> на глубине 6м, что практически не наблюдается в решении с использованием формулы В.Г. Короткина.

По формуле Короткина В.Г. величина его равна -20,16 т/м<sup>2</sup>.

При движении точки вдоль оси X от центра площадки нагружения величина напряжений уменьшается. Причем более существенное уменьшение величин напряжений наблюдается при возрастании Z более 6м.

Увеличение сторон площадки нагружения на порядок приводит к увеличению слоя полупространства с большими напряжениями и максимальное по величине значение -24,04 т/м<sup>2</sup> достигается при Z=60м. Это соответствует опусканию зоны вертикальных напряжений на порядок.

За пределами площадки нагружения у плоскости упругого полупространства вертикальные напряжения возрастают от нулевых значений до определенной величины, зависящей от положения точки в упругом полупространстве, формы и размеров площадки нагружения (см. таблицу 1, и рис.4). Изменение горизонтальных напряжений более сложное.

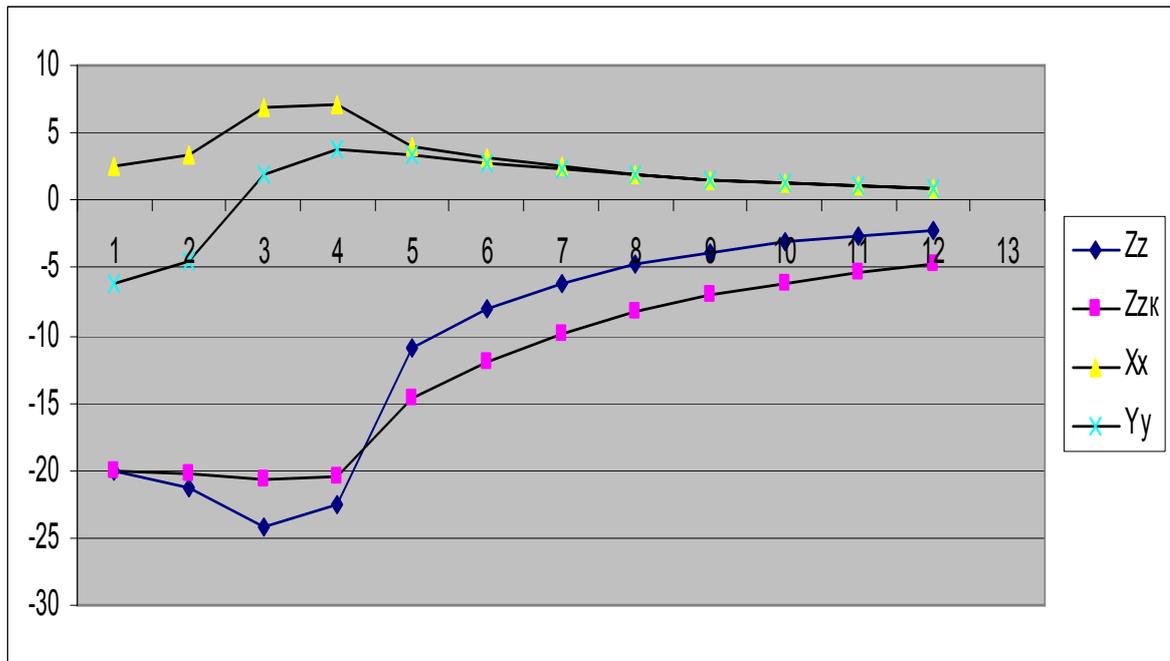


Рис.3 Напряжения в центре площадки нагружения.

№ точки	Z	Zz	Zzk	Xx	Yy
1	-0,1	-0,03495185	0,00018501	3,622194325	-3,789345314
2	-1	-0,377148284	-0,028334047	2,53239191	-4,113048803
3	-6	-3,781003434	-2,099349658	0,788854279	-2,791659443
4	-10	-5,472055839	-3,388355674	1,353491792	-1,042561999
5	-20	-5,531640787	-3,610536162	1,698793181	0,56978574
6	-30	-4,529840871	-3,012042005	1,480214448	0,842582713
7	-40	-3,692858831	-2,490003763	1,25102611	0,856265877
8	-50	-3,062810722	-2,090770964	1,069378433	0,810899678
9	-60	-2,583304022	-1,783246797	0,92756833	0,751621413
10	-70	-2,208900615	-1,540229306	0,814122424	0,690761754
11	-80	-1,909521988	-1,343484369	0,720843969	0,632247279
12	-90	-1,665467959	-1,181093066	0,642428964	0,577483077
13	-100	-1,463475011	-1,045069978	0,575444265	0,526972853

Таблица 1. Координаты точки за площадкой:  $Y_1=-10\text{м}$ ,  $Y_2=10\text{м}$ ,  $X_1=100,5\text{м}$ ,  $X_2=0,5\text{м}$ .

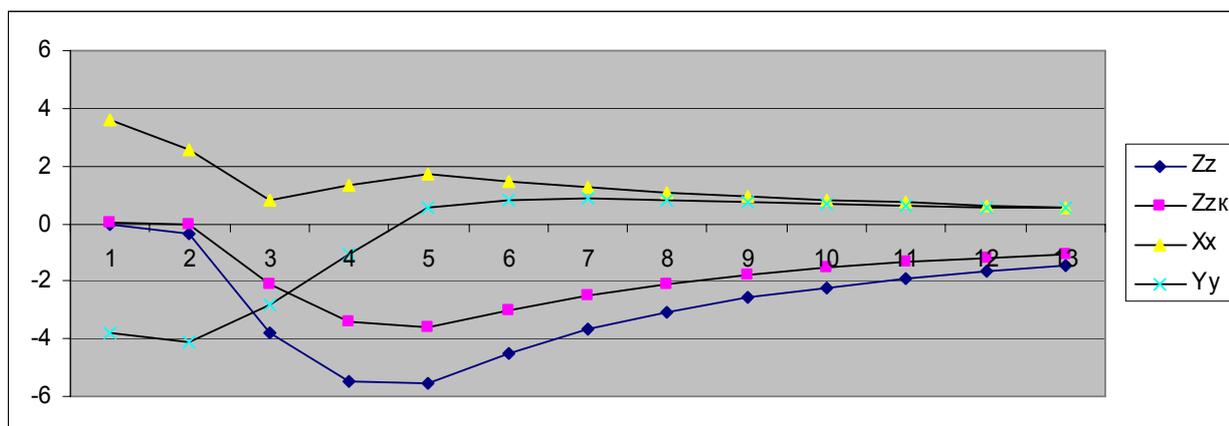


Рис.4 Напряжения за пределами площадки нагружения.

### 3.6 Анализ горизонтальных составляющих напряжения.

Величина составляющих горизонтальных и вертикальных напряжений зависит не только от положения точки в упругом полупространстве, но и от формы и размеров площадки нагружения. В отличие от вертикальных напряжений на величину горизонтальных сжимающих и растягивающих напряжений огромное влияние оказывает форма площадки нагружения. В центре под площадкой (20\*100м) в направлении длинной стороны ее наблюдаются возрастающие растягивающие напряжения  $X_x$  до глубины 5м. По мере движения расчетной точки в глубину полупространства напряжения уменьшаются до нулевых значений.

За пределами площадки нагружения наибольшая величина напряжений наблюдается у поверхности, где вертикальные напряжения близки к нулю. Увеличение величины  $Z$  в этих формулах вызывает быстрый переход от сжимающих к растягивающим напряжениям. Так при площадке (100\*100м.) сжимающие напряжения в центре под площадкой действуют в пределах 10м., далее на достаточно большую глубину наблюдается растягивающие напряжения.

Результаты тестовых расчетов по современным программам и формулам Короткина, показали почти нулевое влияние формы площадки нагружения на величину горизонтальных напряжений.

### 3.7 Анализ вертикальных перемещений.

Вертикальные перемещения в центре под площадкой с глубиной уменьшаются по величине. При движении точки в горизонтальном направлении за пределами площадки нагружения величина перемещений уменьшается более интенсивно. Величины горизонтальных перемещений значительно меньше вертикальных перемещений. Величина вертикальных перемещений зависит не только от формы, размеров площадки нагружения и коэффициента Пуассона, но в решающей степени от модуля упругости полупространства. Пример расчета перемещений в центре площадки нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $20\text{т/м}^2$  со сторонами  $100*100\text{м}$  по глубине приведен в таблице 3 ( $Y_1=-50\text{м}$ ,  $Y_2=50\text{м}$ ,  $X_2=-50\text{м}$ ,  $X_1=50\text{м}$ , обозначения в диссертации -  $\Delta Z = Dz$ ,  $\Delta X = Dx$ ,  $\Delta Y = Dy$ ).

Z	$\Delta Z$	$\Delta X$	$\Delta Y$
-0,01	-0,1077778	0	0,000
-100	-0,0427546	0	0
-200	-0,0233788	0	0
-300	-0,0158833	0	0
-400	-0,0119941	0	0
-500	-0,009626	0	0
-600	-0,0080357	0	0
-700	-0,0068951	0	0
-800	-0,0060373	0	0
-900	-0,005369	6,3643E-19	6,364E-19
-1000	-0,0048338	0	0

Таблица 3 Вертикальные и горизонтальные перемещения

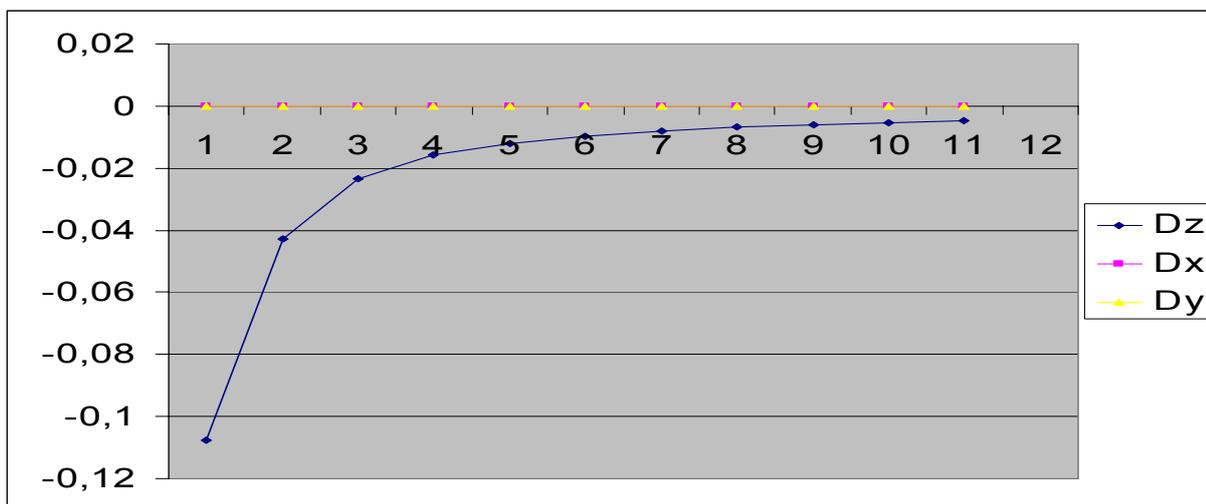


Рис.5 Вертикальные и горизонтальные перемещения центра площадки нагружения. Масштаб по вертикали- 1 дел.=0,02м.

### 3.8 Общая картина напряженного состояния бесконечного основания.

При малых значениях  $z$  за пределами площадки нагружения наблюдаются зоны небольших по величине вертикальных напряжений, направление которых противоположное направлению приложенной нагрузки. По формулам, полученным с использованием гармонической функции Буссинеска в виде конечных интегралов, в центре под площадкой нагружения до определенной глубины наблюдается рост вертикальных напряжений, далее уменьшение. В расчете по формулам В.Г Короткина рост напряжений незначителен.

Если представить картину объемного напряженного состояния упругого полупространства от некоторой площадки нагружения, увеличение периметра площадки на порядок соответствует увеличению этой картинки на порядок.

Основной недостаток современных программ расчета основания под сооружениями это ограниченный объем моделируемого основания, небольшие величины вертикальных напряжений под площадкой нагружения и отсутствие влияние формы площадки нагружения на величину сжимающих и растягивающих горизонтальных напряжений. Под квадратной площадкой нагружения первоначально возникает объем всесторонне сжатой части

основания, далее под ним формируется основание с вертикальными сжимающими и горизонтальными растягивающими напряжениями.

При большой площади и плотности застройки расчеты ограниченного объема основания становятся не объективными, если не учитывать работу основания между домами. Суммарные горизонтальные сжимающие напряжения могут быть такими большими, что буровые работы, уменьшающие их, приведут к нарушению структурной прочности грунта и последующей подвижке их под соседними домами вместе с фундаментом в сторону буровых работ. Сами работы по бурению превратятся в откачку пульпы.

### **3.10 Расчет от касательной нагрузки направленной параллельно оси X.**

В расчете площадка нагружения 20\*100м., модуль упругости принят равным 9000т/м<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона равен 0,3 и равномерно распределенная нагрузка 20т/м<sup>2</sup>, параллельна длинной стороне площадки.

Первоначально начало системы координат на плоскости полупространства перемещается вдоль осевой линии площадки нагружения параллельно длинной стороне от центра к краю. Горизонтальные перемещения уменьшаются при движении начала координат к краю площадки и при движении точки в глубину полупространства см. Рис.6. Масштаб 1дел.=0,02м.

Концентрация главных ( $Z_z$ ,  $X_x$ ,  $Y_y$ ) напряжений наблюдается ближе к краю площадки нагружения. Эти напряжения возрастают от нулевых значений в середине до максимальных значений на короткой стороне площадки см.рис8. Напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  с глубиной уменьшаются см. таблицу 3.

<b>Z</b>	$\Delta X$	$Z_z$	$X_x$	$Y_y$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$
0,1	0,11	0	0	0	29,46	-9,94
10	0,08	0	0	0	25,16	-4,64
20	0,06	0	0	0	19,68	-2,33
30	0,05	0	0	0	15,78	-1,27
40	0,04	0	0	0	13,04	-0,73
50	0,04	0	0	0	11,05	-0,44
60	0,03	0	0	0	9,55	-0,27
70	0,03	0	0	0	8,39	-0,18
80	0,02	0	0	0	7,47	-0,12
90	0,02	0	0	0	6,72	-0,08
100	0,02	0	0	0	6,1	-0,06

Таблица 3 Перемещение и напряжения.  $Y_1=-10\text{м}$ ,  $Y_2=10\text{м}$ ,  $X_1=50\text{м}$ ,  $X_2=-50\text{м}$ .

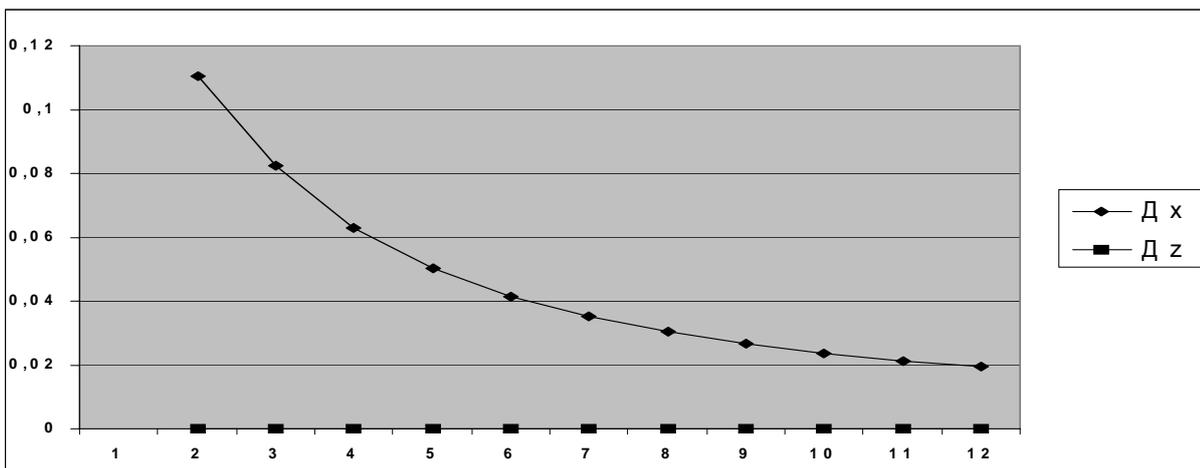


Рис.6 Горизонтальные перемещения от касательной нагрузки.  $D_x=\Delta X$ ,  $D_z=\Delta Z$

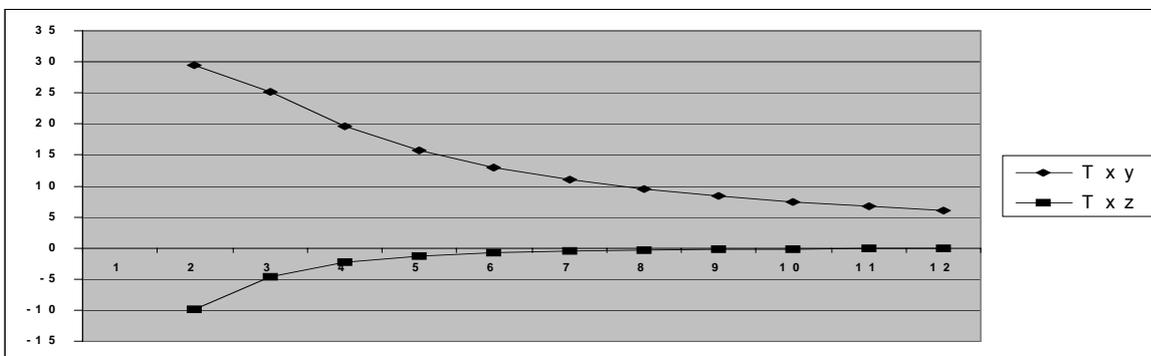


Рис.7 Касательные напряжения.  $T_{xy}=\tau_{xy}$ ,  $T_{xz}=\tau_{xz}$

Z	$\Delta X$	$\Delta Z$	$\sigma_z$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$	$\tau_{zx}$
0,1	0,07	0,01	-0,1	-40	21	19,67	-9,34
10	0,06	0,01	-4,4	-8,1	5,8	17,29	-2,46
20	0,04	0,02	-2,8	-3,2	2,8	14,26	-1,38
30	0,04	0,02	-2	-1,2	1,7	12,04	-0,89
40	0,03	0,02	-1,5	-0	1,1	10,41	-0,62
50	0,03	0,02	-1,1	0,7	0,8	9,15	-0,45
60	0,03	0,02	-0,9	1,3	0,6	8,15	-0,33
70	0,02	0,02	-0,7	1,8	0,4	7,34	-0,25
80	0,02	0,02	-0,6	2,3	0,3	6,66	-0,19
90	0,02	0,02	-0,5	2,6	0,3	6,09	-0,14
100	0,02	0,02	-0,4	3	0,2	5,61	-0,11

Таблица 4 Перемещений и напряжений  $Y_1=-10\text{м}, Y_2=10\text{м}, X_1=99\text{м}, X_2=-1\text{м}.$

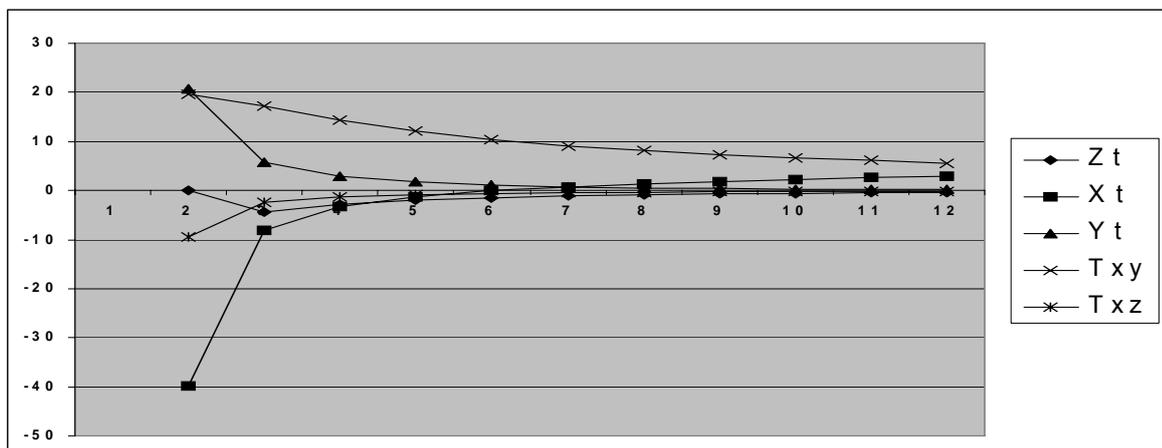


Рис.8 Напряжения от касательной нагрузки.  $Z_t=Z_z, X_t=X_x, Y_t=Y_y$

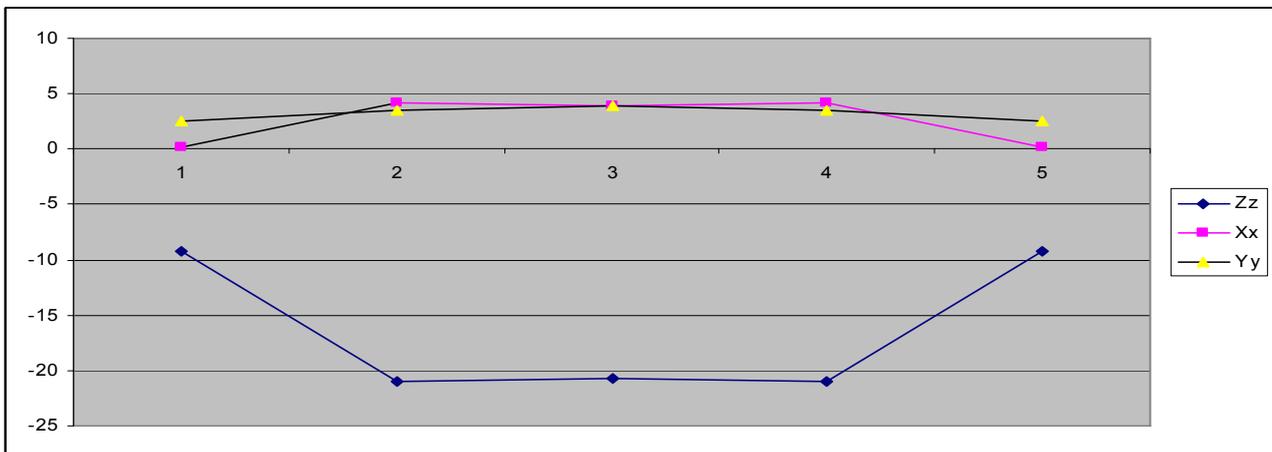
### 3.11 Расчет напряжений под произвольной площадкой нагружения.

На рисунке 9 приведена сложная тестовая площадка нагружения с равномерно распределенной нагрузкой  $P=20\text{т/м}^2$ . Стороны площадок нагружения параллельны осям X и Y. Таблица вертикальных и горизонтальных напряжений при нахождении начала координат в точке (а) на плоскости упругого полупространства, на глубине 0,1м приведена ниже. Сложная площадка нагружения разбита на семь площадок (номера площадок в первом столбике). Каждая площадка нагружения вносит свою долю в изменение

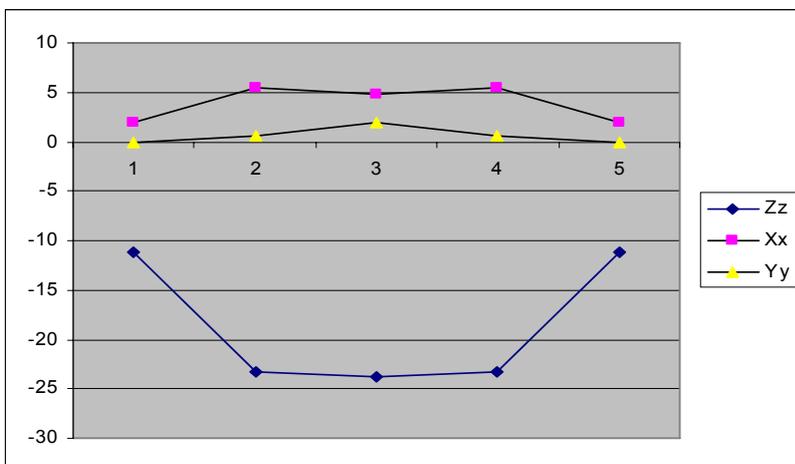
напряженного состояния. Чем ближе площадка нагружения к точке определения напряжений, тем больше влияние на горизонтальные напряжения. Ниже приведены графики распределения главных напряжений по сечениям А-А и В-В.

№	Y1	Y2	X2	X1	Zz	Xx	Yy
1	-50	50	15	-15	-20,0175	-40.23	-32.95
2	-15	15	45	15	-0,0103	1,1073	-1,1754
3	-20	20	75	45	0,0005	-0,27	0,27
4	-15	15	105	75	-0,0004	0,1360	-0,1378
5	-20	20	135	105	0,0002	0,152	-0,153
6	-15	15	155	135	-0,0001	0,0349	-0,0351
7	-50	50	185	155	-0,0002	0,1182	-0,1191
s				$\Sigma$	-20,035	-37,4	-35,88

Таблица 5 Напряжения в точке а.



Линии напряжений по сечению А-А. По горизонтали номера точек в прямоугольниках рисунка площадки нагружения.



Линии напряжений по сечению В-В

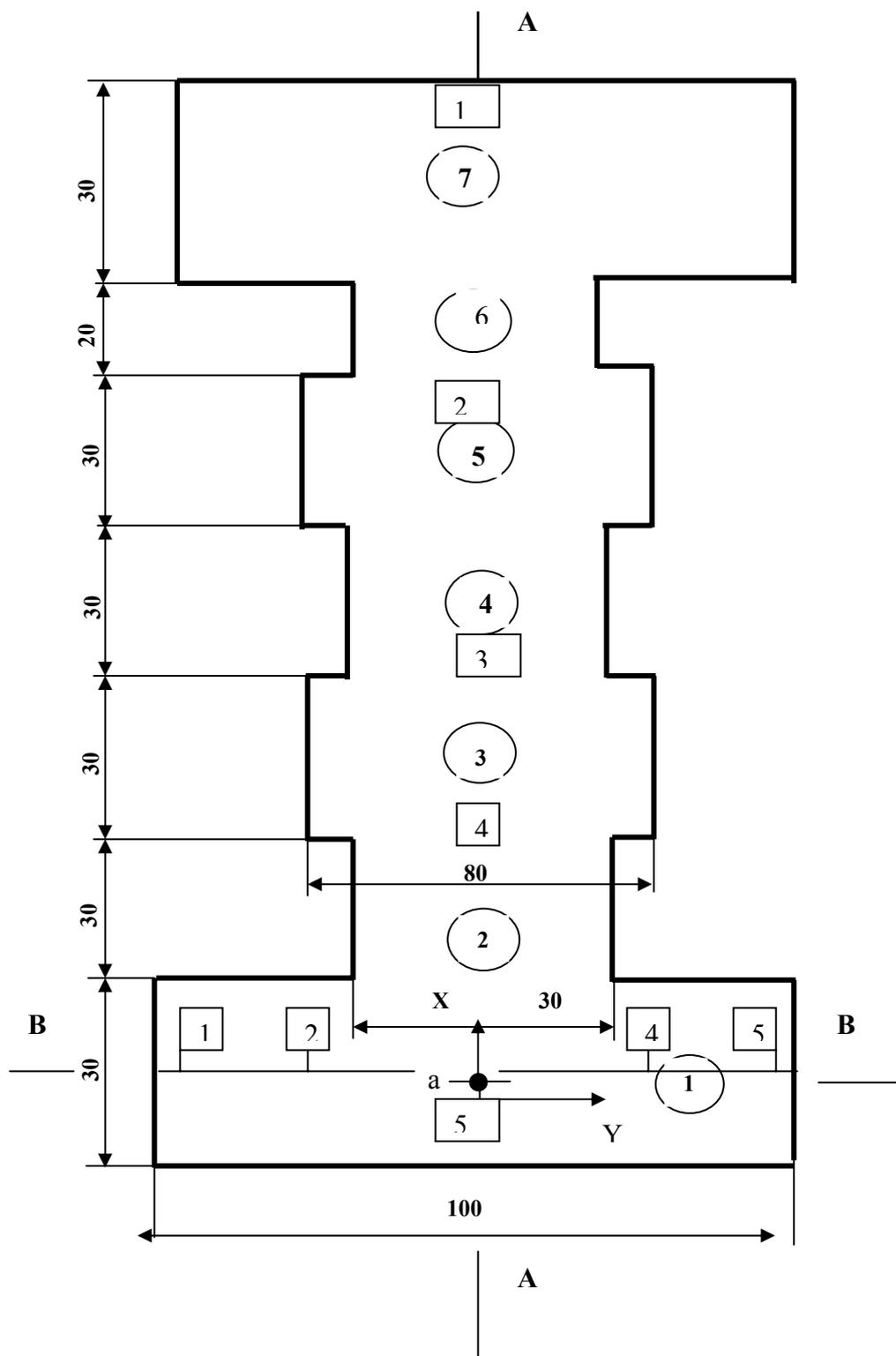


Рис.9

## **Заключение**

Получены формулы для определения составляющих напряжений и перемещений от действия на прямоугольную площадку равномерно распределенной нормальной и касательной нагрузок, которые позволяют считать составляющие напряжений перемещений упругого полупространства от нагружения произвольной площадки любой нагрузкой.

Впервые возможно получение полной глобальной картины напряженно - деформированного состояния основания под комплексом сооружений.

### **Результаты выносимые на защиту.**

1. Использована связь в решении Буссинеска с началом координат, в месте приложения сосредоточенной силы, и другой произвольной декартовой системой координат для некоторой точки.

2. Составление подынтегральных выражений напряжений и перемещений для прямоугольной площадки, нагруженной равномерно распределенной нормальной и касательной нагрузками.

3. Получение (18) фундаментальных формул в виде конечного интеграла.

4. Получены формулы для определения вертикальных перемещений от нагружения трапецеидальной площадки равномерно распределенной нормальной и линейной нагрузкой (3 формулы).

5. Представлены новые результаты расчетов составляющих напряжений и перемещений точек упругого полупространства.

### **Публикации автора по теме диссертации.**

**Наумов И.В.** Анализ перемещений устоя и арочной плотины Материалы конференций и совещаний по гидротехнике. //ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ Ленинград 1987.- С.67.

**Наумов И.В.** Определение осадок устоя арочной плотины с трапецеидальной формой основания //ИЗВЕСТИЯ ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева Сборник научных трудов // ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ Ленинград 1984.- №171.- С.103-108.

**Наумов И.В.** Упругое полупространство //НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ СПбГТУ 2005.-№7.- С. 84-93.

