на правах рукописи

ТРИФАНОВА Екатерина Станиславовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЭФФЕКТОВ В ДВУМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ ВОЛНОВОДАХ

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2008

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Попов Игорь Юрьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, Ульянов Сергей Владимирович

кандидат физико-математических наук, доцент Яревский Евгений Александрович

Ведущая организация: Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»

Защита состоится «28» января 2009 г. в 16 час. на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 при ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» по адресу: 195251, г.Санкт- Петербург, ул. Политехническая, 29, ауд. 41, 1-й учебный корпус.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

Автореферат разослан «___» __________ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

д.т.н., профессор Б.С. Григорьев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Стремительное развитие наноэлектроники требует математического описания различных наноструктур и эффектов, происходящих в них. Одним из примеров таких структур являются квантовые волноводы. Если несколько волноводов соединены слабой связью, то в таких структурах возникают резонансные эффекты, сильно влияющие на поведение баллистического электрона. В то же время, эти эффекты могут быть использованы для создания наноэлектронных устройств, что дает сильный толчок к изучению подобных систем.

Целью исследования является описание транспортных свойств электрона в системе слабо связанных двумерных волноводов и разработка способов использования подобных систем в качестве одноэлектронных устройств и элементов квантового компьютера.

Объектом исследования является стационарное уравнение Шредингера для свободного электрона в двумерных полосах, связанных через малые отверстия, при граничных условиях Неймана.

Методологическая и теоретическая основа работы – исследования и разработки отечественных (А.А. Арсеньев, Р.Р. Гадыльшин, А.М.Ильин и др.) и зарубежных (Exner P., Krejcirik D., Kriz J., Grunberg P., etc.) авторов по данной тематике.

Основные результаты, выносимые на защиту:

- теорема существования резонанса (квазисобственного числа оператора Лапласа) в системе плоских волноводов, соединенных через малое отверстие, при граничных условиях Неймана;
- два первых члена асимптотического разложения резонанса, близкого ко второму порогу непрерывного спектра;
- обоснование полученного асимптотического разложения резонанса;
- асимптотика решения задачи рассеяния в системе связанных волноводов;
- два первых члена асимптотического разложения резонанса для системы связанных искривленных волноводов при смешанных граничных условиях Дирихле - Неймана;
- функция Грина для двух невзаимодействующих частиц в волноводе;

- оценка сдвига резонанса под влиянием поперечного электрического поля в системе связанных волноводов;
- способ реализации элементной базы квантового компьютера на основе рассмотренных структур.

Научная новизна исследования – результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми.

Обоснованность и достоверность результатов. Результаты работы не противоречат результатам, полученным для аналогичных систем другими авторами (P.Exner, P.Duclos, D.Krejcirik, J.Kriz). Результаты были представлены на международных и российских конференциях и опубликованы в ведущих научных журналах.

Практическая значимость. Полученные в работе теоретические результаты могут быть использованы при проектировании новых наноэлектронных устройств, в том числе, элементов квантового компьютера.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертационной работы доложены на ряде конференций, в том числе: The Fourth International Conference “Tools for Mathematical Modeling”, (St.-Petersburg, 2003); Int. seminar “Days on Diffraction”, (St.-Petersburg, 2003, 2005,2006); Fourth European Congress of Mathematics, (Stockholm, 2004); QPC2005 (Dubna, 2005); Политехнический симпозиум: Молодые ученые - промышленности Северо-Западного региона, (СПб, 2005); EFMC6 KTH (Euromech Fluid Mechanics Conference 6) (Stockholm, 2006); International School “Few-Body Problem in Physics” (Dubna, 2006); ICO Topical Meeting on Optoinformatics Information Photonics (St.-Petersburg, 2006); «Индустрия наносистем и материалы» (Зеленоград, 2006).

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 14 опубликованных статьях, в том числе, 5 из Перечня ВАК («Теоретическая и математическая физика», «Physica E», «Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО» (2), «Письма в ЭЧАЯ»), список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертационной работы. Диссертация изложена на 106 страницах машинописного текста. Содержит 7 глав, в том числе введение и заключение, 17 рисунков, список литературы, содержащий 111 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе диссертации (введение) приводятся необходимые сведения о транспортных свойствах электрона в тонких слоях, резонансной теории рассеяния, методе согласования асимптотических разложений и элементной базе квантового компьютера. Также дан обзор предшествующих результатов в этой области и сформулирована основная цель и задачи диссертационной работы. Дано определение резонанса (квазисобственного числа) как полюса аналитического продолжения матрицы рассеяния $S(\lambda)$ в нижнюю полуплоскость спектрального параметра k ($k^2 = \lambda$).

Вторая глава посвящена системе плоских (двумерных) квантовых волноводов, связанных через малые отверстия, при граничном условии Неймана.

Рассматривается система двух плоских волноводов Ω^+, Ω^- шириной d_+ и d_- $\left(d_+ \geq d_-\right)$, соответственно, соединенных конечным числом отверстий с центрами в точках $(x^q, 0)$, $q = 1, \ldots, n$, диаметры которых равны $2a_q = 2aw_q$ (a – малый параметр), при граничном условии Неймана. Поведение электрона в системе описывается следующей краевой задачей:

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где ψ – волновая функция электрона, n – нормаль к поверхности границы $\partial\Omega$, k - волновое число электрона.

Доказана

Теорема 1. *Оператор Лапласа с граничными условиями Неймана для двумерных полос* $\Omega_\pm$ *связанных через малое отверстие, имеет резонанс (квазисобственное число), близкий к нижней границе* $\pi^2 d_+^{-2}$ *ветви непрерывного спектра.*

Доказательство теоремы основано на рассмотрении нижнего волновода как предела при $n \to \infty$ последовательности расширяющихся ограниченных областей $D_n = D_\infty \setminus \{(x, y) \in \Omega^-, |x| > n\}$ (резонатор шириной d_- и длиной $2n$), $D_n \subset D_{n+1}$, для которых ранее было доказано существование резонанса. Требуемый результат получается с помощью предельного перехода.

Основным результатом главы 2 является построение и обоснование асимптотического разложения резонанса, близкого к порогу $\pi^2 d_+^{-2}$. А именно, методом согласования асимптотических разложений получены первый и второй члены асимптотического разложения функции резонанса:

$$\gamma_a = \sqrt{\frac{\pi^2}{d_+^2} - k_a^2} = \tau_1 \ln^{-1}\left(a/d_-\right) + \tau_2 \ln^{-2}\left(a/d_-\right) + o\left(\ln^{-2}\left(a/d_-\right)\right) \tag{2}$$

Асимптотическое разложение квазисобственной функции $\psi_a(x)$ ищутся в виде:

$$\psi_a(x) = \begin{cases} \pm\gamma_a \sum_{q=1}^{n} \alpha_q G^{\pm}\left(x,(x^q,0),k_a\right) + \ldots, & x \in \Omega^{\pm} \backslash \mathrm{S}^q_{\sqrt{a}}, \\ v_0^i\left(\dfrac{x}{a}\right) + v_1^i\left(\dfrac{x}{a}\right) \cdot \ln^{-1}\left(a/d_-\right) + \ldots, & x \in \mathrm{S}_{2\sqrt{a}}, \end{cases} \tag{3}$$

где S_t^i – круг радиуса t с центром в середине i-го отверстия. Согласование в областях: $\left(\Omega^+ \backslash \mathrm{S}^i_{\sqrt{a}}\right) \cap \mathrm{S}^i_{2\sqrt{a}}$, $\left(\Omega^- \backslash \mathrm{S}^i_{\sqrt{a}}\right) \cap \mathrm{S}^i_{2\sqrt{a}}$ производится с помощью выбора функций $v_0^i\left(x/a\right), v_1^i\left(x/a\right)$. В итоге значения искомых коэффициентов для случая $d_+ > d_-$ таковы:

$\tau_1 = \dfrac{\pi n}{2d_+}$, τ_2 - одно из собственных чисел матрицы $\mathrm{M} = \left\{\mu_{i,q}\right\}$:

$$\mu_{i,i} = \frac{\pi^2 n}{4d_+}\left[g^+\left(x^i, \frac{\pi}{d_+}\right) + g^-\left(x^i, \frac{\pi}{d_+}\right) - \frac{|x^i|}{d_+}\right],$$

$$\mu_{i,q} = \frac{\pi^2 n}{4d_+}\left[G^-\left(x^i, x^q, k\right) + G^+\left(x^i, x^q, k\right) - \frac{1}{d_+\gamma_k}\right]\Bigg|_{k=\pi/d_+}$$

где $g^{\pm}\left(x^i, \pi/d_+\right)$ - регулярная часть функции Грина в соответствующей точке в верхнем (+) или нижнем (-) волноводе.

Дано обоснование асимптотического разложения (2), а именно, доказана

Теорема 2. *Остаточный член в асимптотическом разложении резонанса (2) имеет порядок* $o\left(\ln^{-2}\left(a/d_-\right)\right)$.

Доказательство проводится для одного соединяющего отверстия (что легко обобщается на случай конечного числа отверстий) и основано на представлениях для квазисобственной функции и резонанса как возмущений найденных значений: $\psi_a = \tilde{\psi}_a + \varphi_a$, $k_a^2 = \tilde{k}_a^2 + m_a^2$. Тогда уравнение для φ_a, m_a^2 (остаточный член) примет вид:

$$\left(\Delta + \tilde{k}_a^2 + m_a^2\right)\varphi_a + m_a^2\tilde{\psi}_a = -\Delta\tilde{\psi}_a - \tilde{k}_a^2\tilde{\psi}_a. \qquad (4)$$

Доказательство теоремы 2 получается с помощью оценивания левой и правой частей равенства (4).

В последнем параграфе второй главы исследованы волноводы, соединённые периодической системой отверстий. Для такой структуры оператор представлен в виде разложения (расслоения) в прямой интеграл по квазиимпульсу θ. Получены оценки резонансной зоны, которые находятся с помощью изменения квазиимпульса ($\theta \in \left(-\pi L/2; \pi L/2\right)$, где L – расстояние между отверстиями), из асимптотического разложения резонанса для оператора в слое. Доказана

Теорема 3. *Асимптотическое разложение квазисобственного числа* k_a *оператора в заданном слое (при фиксированном значении θ) для системы периодически соединенных волноводов (отверстия расположены с периодом L) имеет вид:*

$$k_a^2 = \frac{\pi^2}{d_+^2} - \frac{6\left(1-\cos\theta L\right)^2}{A^2\left(\theta,L\right)\left(2+\cos\theta L\right)L^3}\cdot\tau_1\left(\theta,L\right)\ln^{-1}\left(a/d_-\right) + o\left(\ln^{-1}\left(a/d_-\right)\right) \qquad (5)$$

С помощью численных расчетов построены и проанализированы графики вещественной и мнимой части коэффициента в разложении (5) в зависимости от расстояния L между отверстиями.

В третьей главе диссертации исследуется задача рассеяния плоской волны в системах волноводов, соединенных конечным числом отверстий. Пусть количество отверстий равно n, их диаметры равны $2a_q = 2a\omega_q$ (a – малый параметр). Для нахождения коэффициентов прохождения считается, что частота

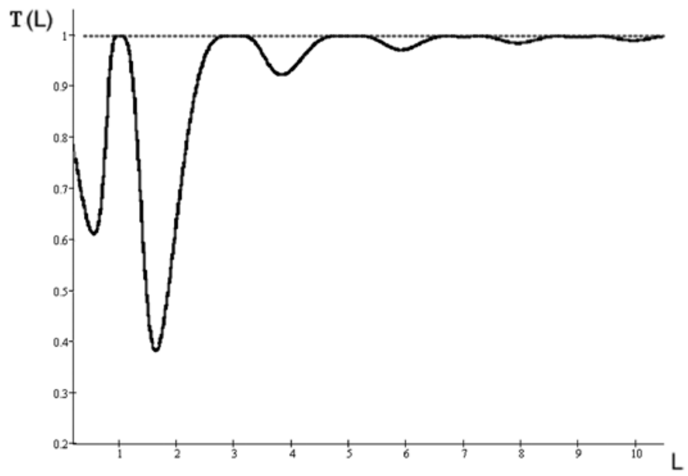

Рис.1 Зависимость коэффициента прохождения от расстояния между отверстиями в случае двух окон. Спектральный параметр близок к резонансу, в качестве единицы длины для L выбрана ширина волновода d_+

приходящей волны k близка к резонансной и отличие от резонанса задается отличием от τ_2 коэффициента c в представлении:

$$\sqrt{\frac{\pi^2}{d_+^2}-k^2}=\tau_1\ln^{-1}\left(a/d_-\right)+c\ln^{-2}\left(a/d_-\right)+o\left(\ln^{-2}\left(a/d_-\right)\right). \qquad (6)$$

Доказана теорема, которую для краткости запишем лишь для случая $d_+ > d_-$:

Теорема 4. *Коэффициент прохождения плоской волны e^{-ikx} в системе волноводов, связанных через n отверстий с координатами x^q с граничными условиями Неймана имеет вид:*

$$T=\left|1-\frac{i}{2kd_+}\sum_{q=1}^{n}\alpha_q\exp\left(ikx^q\right)\right|^2, \qquad (7)$$

где коэффициенты α_j находятся из следующей системы

$$\alpha_j\left(\frac{c}{d_+\tau_1{}^2}-g_j\right)+\sum_{q\neq j}\alpha_q\left(\frac{c}{d_+\tau_1{}^2}-\zeta_q\right)=e^{-ikx^q},$$

где $$g_q = g^+\left(x^q, \frac{\pi}{d_+}\right) + g^-\left(x^q, \frac{\pi}{d_+}\right) - \frac{2}{\pi}\ln\left|\frac{2}{\omega_q}\right|,$$

$$\zeta_q = G^-\left(0,(x^q,0),\frac{\pi}{d_+}\right) + \left(G^+(0,(x^q,0),k) - \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - k^2 d_+{}^2}}\right)\Bigg|_{k=\pi d_+{}^{-1}},$$

где $g^{\pm}\left(x^i, \pi / d_+\right)$ - регулярная часть функции Грина в соответствующей точке в верхнем (+) или нижнем (-) волноводе.

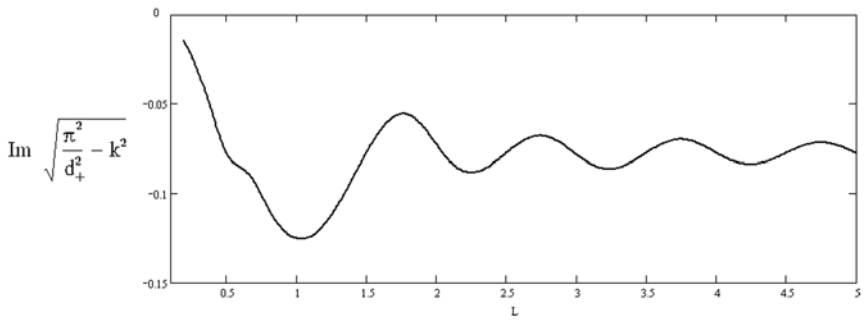

Рис. 2 Мнимая часть квазисобственного значения как функции от расстояния L между отверстиями

Был проведен анализ полученного коэффициента прохождения для случая одного и двух соединяющих отверстий. Для двух отверстий построен и проанализирован график коэффициента прохождения как функции расстояния между отверстиями (рис.1). Величина пиков коэффициента прохождения зависит от мнимой части соответствующего квазисобственного значения (k_a), которое, в свою очередь, зависит от расстояния между отверстиями *L*. На рисунке 2 показана зависимость мнимой части квазисобственного значения от *L*.

Четвертая глава посвящена исследованию системы связанных изогнутых волноводов. В такой системе возникают как связанные состояния (или резонансы), порожденные кривизной, так и резонансы, вызванные соединяющим отверстием.

Рассматривается система искривленных волноводов, связанных отверстием диаметром *2a* с условиями Неймана на границах, содержащих отверстие, и условиями Дирихле на других границах. Методом согласования асимптотических разложений доказана

Теорема 5. *Асимптотическое разложение резонанса, близкого к порогу* λ_0 *, появление которого вызвано наличием соединяющего отверстия имеет вид*

$$\sqrt{\lambda_0 - k_a^2} = \tau_1 \ln^{-1}\left(a/d_-\right) + \tau_2 \ln^{-2}\left(a/d_-\right) + o\left(\ln^{-2}\left(a/d_-\right)\right), \qquad (8)$$

$$\tau_1 = \frac{\pi}{2}\psi_+^2(0), \qquad \tau_2 = \tau_1\left[\frac{\pi}{2}\left(g^+(0,k_0) + g^-(0,k_0)\right) + \ln 2\right],$$

где ψ_+ *- собственная функция по поперечной координате в верхнем волноводе.*

Для коэффициента τ_1 получены оценки:

$$\frac{\pi d_+^3}{18}\left(\frac{\kappa^2}{4\left(1+\kappa d_+\right)^2} + \lambda_0\right)^2 \le \tau_1 \le \frac{\pi d_+^3}{6}\left(\frac{\kappa^2}{4} + \lambda_0\right)^2. \qquad (9)$$

Аналогичный результат получен для связанного состояния, порожденного кривизной.

Пятая глава посвящена двум моделям для двухчастичных задач. Эти задачи важны для описания двухкубитовых квантовых операций. Первая задача - получение функции Грина для двух невзаимодействующих частиц в плоском волноводе с граничными условиями Неймана.

Рассмотрим задачу более подробно. Пусть $X_1 = (x_1, y_1)$ и $X_2 = (x_2, y_2)$ - координаты первой и второй частиц соответственно, $0 \le y_{1,2} \le d$, z - полная энергия системы$\left(\operatorname{Im} z = const > 0\right)$. Тогда функция Грина двухчастичной задачи может быть получена в виде свертки двух функций Грина для каждой частицы:

$$G(X_1, X_2, X_1', X_2', z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L g(X_1, X_1', \varsigma) g(X_2, X_2', z-\varsigma) d\varsigma, \qquad (10)$$

где L - контур вокруг спектра соответствующего оператора (спектр лежит на неотрицательной части вещественной оси), $g(X_{1,2}, X_{1,2}', \varsigma)$ - функции Грина одного электрона в волноводе с энергией ς и граничными условиями Неймана. Доказана

Теорема 6. *Функция Грина для двух невзаимодействующих частиц в плоском волноводе с граничными условиями Неймана имеет вид:*

$$G\left(X_1, X_2, X_1', X_2', z\right) = -\frac{8\sqrt{z}}{\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p_\pm^\pm} \frac{N_1\left(\sqrt{z}\, p_\pm^\pm(n,m)\right)}{p_\pm^\pm(n,m)}\,, \tag{11}$$

где $p_\pm^\pm(n,m) = \sqrt{\left(y_1 \pm y_1' + 2dn\right)^2 + \left(y_2 \pm y_2' + 2dm\right)^2 + R^2}$ *и внутреннее суммирование ведется по всем возможным комбинациям знаков выражения* $p_\pm^\pm(n,m)$. $\left(R^2 = \left(x_1 - x_1'\right)^2 + \left(x_2 - x_2'\right)^2\right)$.

Также получен главный член асимптотического разложения функции Грина (11) при $R \to 0$, $\left|y_{1,2} - y_{1,2}'\right| \to 0$.

Вторая задача главы - изучение взаимного влияния двух заряженных частиц в приближении среднего поля. А именно, рассматривается поведение электрона в волноводах под действием среднего поля *E*, создаваемого другим электроном. Получено асимптотическое разложение соответствующего резонанса. Основной результат изложен в теореме

Теорема 7. *Асимптотическое разложение квазисобственного числа* k_a^2, *близкого к порогу* λ_1, *для системы волноводов, связанных отверстием диаметром 2a, находящихся в поперечном электрическом поле напряженностью E имеет вид:*

$$\sqrt{\lambda_1 - k_a^2} = \tau_1 \ln^{-1} a + \tau_2 \ln^{-2} a + o(\ln^{-2} a), \tag{12}$$

$$\tau_1 = \frac{\pi}{2} \psi_1^2 \left(-\lambda_1 E^{-2/3}\right),$$

$$\tau_2 = \tau_1 \left[\frac{\pi}{2}\left(g^+(0) + g^-(0)\right) + \ln 2\right],$$

где ψ_1 *- первая собственная функция по поперечной координате.*

Для оценки влияния электрического поля на сдвиг резонанса, получена асимптотика для коэффициента τ_1 в формуле (12):

$$\tau_1 \sim \frac{\pi}{2d_+} + \frac{385}{48^2} \cdot \frac{E^2 {d_+}^2}{\pi^2}. \qquad (13)$$

Для системы в поперечном электрическом поле были проведены численные расчеты. Моделировалось прохождение через два связанных конечных волновода с условиями Дирихле на продольных границах волнового пакета. Пакет генерировался заданием периодических по времени граничных условий на левой стенке верхнего волновода. Применялся метод разностных схем. Была использована трехслойная явная разностная схема на пятиточечном шаблоне «крест». На рисунках 3 - 5 показано распределение квадрата модуля волновой функции электрона в волноводах при наличии электрического поля и при его отсутствии.

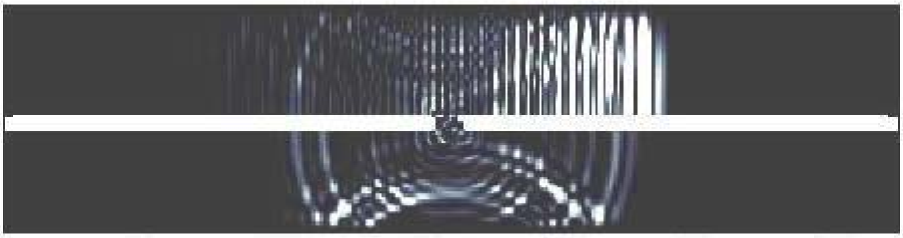

Рис. 3 Распределение квадрата модуля волновой функции электрона в системе при наличии электрического поля, направленного вверх

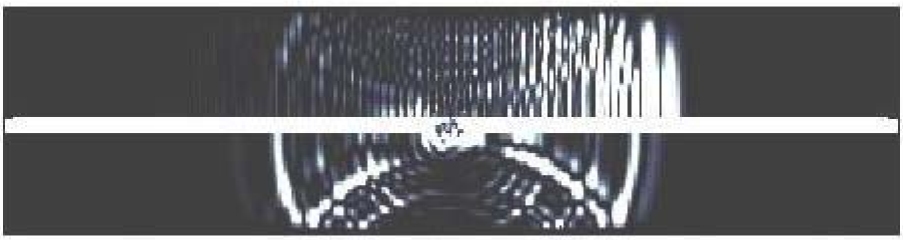

Рис. 4 Распределение квадрата модуля волновой функции электрона в системе без электрического поля

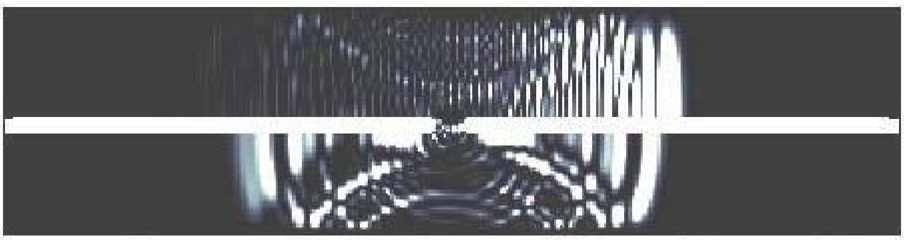

Рис. 5 Распределение квадрата модуля волновой функции электрона в системе при наличии электрического поля, направленного вниз

В шестой главе исследуется возможность реализации квантовых вычислений на элементной базе плоских слабосвязанных наноструктур. Предлагаются две интерпретации кубита: «волноводная» и «спиновая». В «волноводной» интерпретации два связанных волновода выступают в роли кубита, при этом его базисные состояния определяются наличием электрона в верхнем или, соответственно, в нижнем волноводе. При «спиновой» интерпретации кубит задается с помощью выделенных состояний спина движущейся частицы.

В последней главе (заключение) подведены итоги работы и сделаны выводы.

Публикации по материалам диссертационной работы

1. **Попов, И.Ю. Электрон в многослойной магнитной структуре: асимптотика резонанса** [Текст] / И.Ю.Попов, Е.С. Тесовская (Трифанова)// Теоретическая и математическая физика. - 2006. - № 146 (3). - С. 429 – 442.
2. **Weakly coupled quantum wires and layers as an element of quantum computer** [Текст] /L.V. Gortinskaya [и др.]. - Письма в ЭЧАЯ. - 2007. – № 4. - №2 (138). – С. 237 - 243.
3. **Electronic transport in the multilayers with very thin magnetic layers** [Текст] /L.V. Gortinskaya [и др.]. - Physica E. – 2007. – № 36. - P. 12–16.
4. **Гортинская, Л.В., Асимптотики резонансов для двумерных волноводов, соединенных малыми отверстиями, при граничном условии Неймана** [Текст] / Л.В.Гортинская, И.Ю.Попов, Е.С. Тесовская (Трифанова) // Научно-технический вестник СПбГИТМО (ТУ). – 2003. - № 9. - С. 22 - 28.
5. **Гортинская, Л.В., Асимптотический подход в исследовании свойств слабо связанных квантовых волноводов** [Текст] /Л.В.Гортинская, И.Ю.Попов, Е.С. Тесовская (Трифанова) // Научно-технический вестник СПбГУИТМО. – 2004. – № 16. - С. 211 – 216.
6. **Popov, I.Yu. Resonances for coupled planar waveguides: asymptotic expansions** [Текст] / I. Yu. Popov, E.S.Tesovskaya (Trifanova) // Proceedings of The Fourth Int. Conf. “Tools for mathematical modeling”. - St.-Petersburg, 2003 - P. 356 – 358.

7. **Gortinskaya, L.V. Laterally coupled waveguides with Neumann boundary condition: formal asymptotic expansions** [Текст] / L.V. Gortinskaya, I. Yu. Popov, E.S. Tesovskaya (Trifanova) // Proceedings of Int. sem. "Days on Diffraction". – St.-Petersburg, 2003. - P. 52 – 59.

8. **Гортинская, Л.В. Плоские волноводы, связанные через малые отверстия: резонансные эффекты** [Текст] / Л.В. Гортинская, И.Ю. Попов, Е.С. Тесовская (Трифанова) // Методы возмущений в гомологической алгебре и динамика систем: межвузовский сборник научных трудов. – Саранск, 2004. - С. 135 – 145.

9. **Gortinskaya, L.V. Spectral asymptotics for layered magnetic structures** [Текст] / L.V. Gortinskaya, I. Yu. Popov, E.S. Tesovskaya (Trifanova) // Proceedings of Int. sem. "Days on Diffraction". – St.-Petersburg, 2005. – P. 116 - 123.

10. **Quantum Algorithms Implementation Using Quantum Wires System** [Текст] / M.I.Gavrilov [и др.] - Proceedings of the “ICO Topical Meeting on Optoinformatics Information Photonics”. – St.-Petersburg, 2006. - P. 327 – 329.

11. **Many particles problems for quantum layers** [Текст] / L.V.Gortinskaya [и др.] - Proceedings of Int. sem. "Days on Diffraction". – St.-Petersburg, 2006. - P. 218 – 225.

12. **Тесовская (Трифанова), Е.С. Спектральные свойства электрона в периодически соединенных волноводах** [Текст] / Е.С.Тесовская (Трифанова) // Научно-Технический вестник СПбГУИТМО. – 2006. - № 26. - С. 77 – 80.

13. **Левин, С.Б. Функция Грина двухчастичной задачи в волноводе** [Текст] / С.Б. Левин, И.Ю. Попов, Е.С. Тесовская(Трифанова) // Научно-Технический вестник СПбГУИТМО. – 2006. - № 31. - С. 3 – 6.

14. **Возможная реализация операций в элементах квантового компьютера на квантовых волноводах** [Текст] / М.А. Гаврилов [и др.] - Научно-технический вестник СПбГУИТМО. – 2006. - № 30. - С. 71 - 75.