

На правах рукописи

ФРИДМАН

Александр Владимирович

**ДИНАМИКА МНОГОМАССОВОЙ УПРУГО-ДЕМПФЕРНОЙ
СИСТЕМЫ С РАЗРЫВНЫМИ СВЯЗЯМИ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2009

Работа выполнена на кафедре «Механика и процессы управления»
Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Научный руководитель – доктор физико-математических наук,
профессор Пальмов Владимир Александрович

Официальные оппоненты – доктор физико-математических наук,
профессор Бригаднов Игорь Альбертович
– доктор технических наук,
профессор Сливкер Владимир Исаевич

Ведущая организация – Институт проблем машиноведения РАН

Защита состоится 29 апреля 2009 г. в 16 час. на заседании диссертационного совета
Д 212.229.13 ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический
университет» по адресу: 195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29, корпус 1,
ауд. 41.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке
ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

Автореферат разослан ____ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.т.н., проф.

Б. С. Григорьев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы

На практике нередко встречаются задачи о колебаниях машин и механизмов со сложной разветвленной структурой. Примером может служить двигатель внутреннего сгорания (ДВС) большой мощности, состоящий из нескольких роторов, соединенных зубчатыми колесами.

При исследовании динамики систем с разветвленной структурой могут возникать трудности при составлении алгоритма расчета и при реализации вычислительного процесса. Но сложность решения задач о колебаниях ДВС большой мощности определяется не только их конструкцией и характером действующих сил. Другой важной причиной, которая существенно осложняет решение задач динамики этих двигателей, является наличие люфтов в соединениях зубчатых колес. Причем, эти люфты не есть ошибки в исполнении колес, они заложены в технологию сборки зубцовых соединений. Вместе с тем, наличие люфтов в соединениях зубчатых колес может существенно менять динамическое поведение коробки зубцовых передач и всего ДВС в целом. Это обстоятельство объясняется возникновением вибро-ударных колебаний, которые могут сопровождаться увеличением в разы динамических усилий в элементах ДВС, повышенным шумом и даже могут приводить к поломке зубцов. С принципиальной точки зрения люфты превращают ДВС с зубчатой системой передач в механическую систему с разрывными связями, а задача о колебаниях такой системы становится нелинейной. К уравнениям колебаний при этом добавляются условия контакта-разрыва для всех зубцовых соединений колес. Эти уравнения и условия определяют движение рассматриваемой механической системы с разрывными связями. Вместе с тем, в процессе движения сама колебательная система, вообще говоря, не остается раз и навсегда заданной, а в ней многократно и во всех зубцовых соединениях контакты могут переходить в их разрывы и наоборот.

Длительное время колебания ДВС с учетом люфтов считались не поддающимися расчету. Однако, в последние десятилетия, в связи с развитием вычислительной техники, в исследовательских центрах и на крупнейших моторостроительных предприятиях такие расчеты стали повсеместно выполняться. При этом, насколько известно из литературы, всюду применялся примерно один и тот же подход, основанный на численном решении задачи о нестационарных колебаниях при заданных начальных условиях.

В стационарном режиме работы двигателя внутреннего сгорания на роторы двигателя действуют периодические нагрузки. Экспериментальные исследования показывают, что в этом режиме работы ДВС изменение его вибрационного состояния также носит периодический характер.

Однако, при решении задачи о нестационарных колебаниях ДВС с учетом люфтов методом типа Рунге-Кутты рассчитываемое движение, как правило, не стремится к периодическому, а получается пучек движений, который можно увидеть, например, на фазовой плоскости. Средне-взвешенное значение амплитуд перемещений дисков и усилий в связях используется, обычно, для оценки интенсивности вибрационного и напряженного состояния ДВС. Такой способ решения задачи о динамическом поведении ДВС с учетом люфтов в соединениях зубчатых колес является весьма трудоемким. Это объясняется трудоемкостью метода Рунге-Кутты при большом числе искомых функций (по числу масс системы). Кроме того, для получения устойчивого результата обычно требуется выполнить расчет для большого числа (нескольких десятков) циклов работы ДВС.

Поэтому возникает необходимость разработки метода и программы прямого расчета периодических нелинейных колебаний многомассовой упруго-демпферной системы с разрывными связями за один цикл изменения действующих нагрузок. Такой подход, как показывают контрольные расчеты, позволяет на один – два порядка сократить трудоемкость вычислений, что весьма важно при многовариантной разработке конструкции ДВС.

Цель работы

Цель работы состоит в том, чтобы

- 1) предложить математическую модель многомассовой упруго-демпферной системы с разрывными связями, которая была бы адекватна механической модели ДВС большой мощности со сложной разветвленной структурой при наличии люфтов в соединениях зубцовых колес коробки передач;
- 2) выбрать параметры предложенной математической модели с тем, чтобы обеспечить существование периодических колебаний многомассовой упруго-демпферной системы, которая при наличии разрывных связей становится нелинейной;
- 3) разработать совокупность методов, которые дают возможность эффективно решать задачу о нелинейных периодических колебаниях указанной системы;

- 4) с использованием разработанных методов составить комплекс программ расчета периодических колебаний ДВС большой мощности со сложной разветвленной структурой при наличии люфтов в соединениях зубчатых колес коробки передач;
- 5) выполнить расчет реального ДВС большой мощности с целью доказать высокую эффективность разработанных методов и комплекса программ расчета вибрационного и напряженного состояния ДВС.

Научная новизна

В данной работе предлагается новый подход к решению нелинейной задачи о колебаниях многомассовой упруго-демпферной системы с разрывными связями. А именно: рассматриваются периодические колебания такой системы за один период изменения действующих внешних сил (за один цикл работы двигателя). Ставится задача разработки эффективного метода решения задачи в такой постановке. С этой целью выбирается адекватная модель разрывного звена, которая допускала бы существование периодических колебаний рассматриваемой механической системы. Вводится обобщенная операторная запись нелинейных уравнений колебаний, для решения которых используется итерационный метод Ньютона-Канторовича. На каждом шаге итерационного процесса решается линеаризованное уравнение, причем, линеаризация параметров механической системы облегчается тем, что выбранная модель разрывного звена допускает простое аналитическое дифференцирование. Решение линеаризованного уравнения представляется в виде гармонического ряда, благодаря чему выполняются условия периодичности и требование двухкратного дифференцирования координатных функций. Для определения коэффициентов ряда – амплитуд гармонических колебаний – применяется метод Галеркина (проекционный метод). Поскольку ДВС большой мощности состоит из нескольких роторов, соединенных с помощью зубчатых колес, то и механическая схема двигателя имеет сложную разветвленную структуру. Путем введения фиктивных элементов с нулевой массой и нулевой жесткостью исходная механическая система превращается в цепную. Это позволяет применить для решения системы алгебраических уравнений, которая получается по методу Галеркина, весьма эффективный модифицированный метод векторной прогонки. В работе дается доказательство существования периодического решения задачи о нелинейных периодических колебаниях выбранной модели многомассовой упруго-демпферной системы с разрывными связями, а также доказательство сходимости предложенных методов решения поставленной задачи.

Достоверность результатов

Достоверность результатов обеспечивается приведенными доказательствами корректности поставленной задачи и применяемых методов ее решения, а также результатами контрольных расчетов.

Практическая ценность

Практическая ценность работы заключается в том, что разработанные методы и комплекс программ позволяют почти мгновенно оценить вибрационное состояние ДВС большой мощности со сложной структурой при наличии люфтов в соединениях зубчатых колес коробки передач. Эти результаты могут быть использованы при проектировании ДВС большой мощности и, в частности, при выборе метода гашения его вибраций.

Методы исследования

Методы решения рассматриваемой проблемы основаны на методах теории нелинейных колебаний и прикладных методах функционального анализа.

Апробация работы

Основные результаты работы представлены на международной конференции Американского общества инженерной механики (ACME) – Internal combustion engine division (ICED), April 27-30, 2008, Chicago, Illinois, USA.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Она изложена на 128 страницах текста, включая 18 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 33 наименования.

Публикации

По теме диссертации опубликовано четыре работы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит краткую характеристику рассматриваемой в диссертации научной проблемы и связанные с этой проблемой конкретные задачи теории нелинейных колебаний сложных механических систем. Обсуждаются основные подходы к решению указанных задач, а также имеются ссылки на работы по тематике диссертации и на использованные источники.

Первая глава диссертации посвящена рассмотрению вынужденных периодических колебаний многомассовой упруго-демпферной системы сложной структуры. Конкретно

имеется в виду механическая модель ДВС большой мощности. В данной главе колебательная система предполагается линейной, то есть считается, что в соединениях зубчатых колес коробки передач ДВС отсутствуют люфты. Предлагается модификация метода векторной прогонки, пригодная для решения задачи о колебаниях систем сложной структуры.

ДВС большой мощности состоит из нескольких валов, связанных между собой зубчатыми колесами. На каждом валу имеется только одно зубчатое колесо. Двигатель обычно представляется как система тонких абсолютно жестких дисков, совершающих крутильные колебания относительно собственных осей. Эти диски соединяются торсионами - упругими связями, работающими на кручение. К числу дисков относят и зубчатые колеса, упругая связь которых определяется упругостью зубцов. Условная схема ДВС большой мощности изображена на рис. 1.

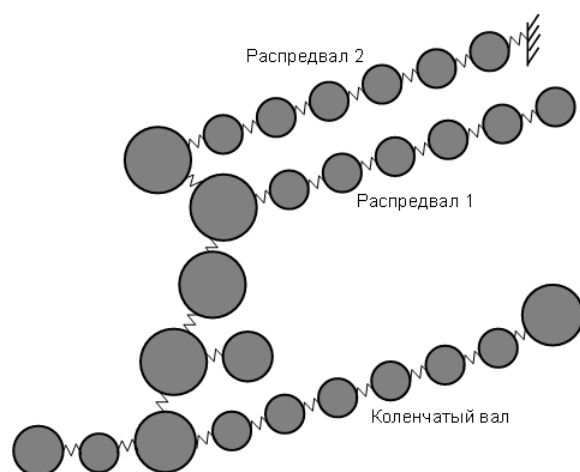


Рис. 1. Динамическая модель двигателя внутреннего сгорания.

На этом рисунке диски изображены кружками, а упругие связи – пружинками.

Искомые неизвестными в задаче о колебаниях ДВС являются угловые перемещения дисков. Однако, при составлении уравнений колебаний в качестве неизвестных удобнее принять окружные перемещения дисков на радиусе соответствующего зубчатого колеса. Это позволяет наряду с учетом упругости валов принимать также во внимание упругость зубцов. В дальнейшем окружные перемещения дисков именуется просто перемещениями, и уравнения крутильных колебаний преобразуются в уравнения относительно этих перемещений, с соответствующим преобразованием инерционных и демпферных

параметров механической модели ДВС. Также внешние крутящие моменты заменяются окружными усилиями, приложенными к дискам на радиусе соответствующего зубчатого колеса. Таким образом, механическая модель ДВС замещается многомассовой упруго-демпферной системой.

Далее осуществляется преобразование механической системы со сложной разветвленной структурой, типа изображенной на рис. 1, в систему цепного вида. Для этого указанная сложная структура представляется в виде основной цепи с боковыми ответвлениями, и вводятся фиктивные элементы с нулевой инерцией и нулевой жесткостью, позволяющие ввести сквозную нумерацию узлов (рис. 2).

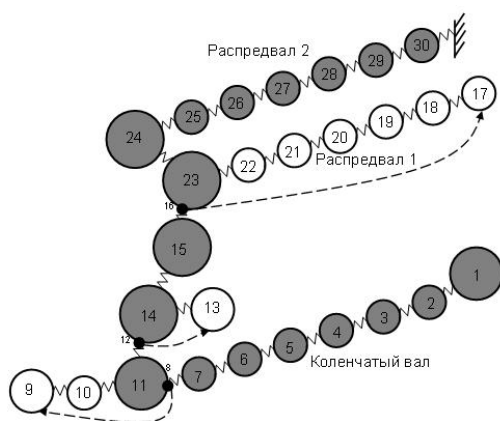


Рис. 2. Динамическая модель ДВС. Расчетная схема.

Номера узлов: 11,14,15,23,24 – зубчатые колеса; 9,17,30 – демпферы;

1 – реактивная нагрузка; 8,12,16 – фиктивные узлы.

Черные кружки соответствуют узлам основной цепи, белые – боковым ответвлениям.

Уравнение колебаний и условия периодичности цепной системы в векторно-матричной форме могут быть представлены в виде:

$$Ax = 0, \quad A = -M \ddot{x} - B \dot{x} - Rx + q, \quad (1)$$

$$Rx = D^*CDx = D^*f, \quad f = cl, \quad l = Dx, \quad (2)$$

$$x(0) = x(T) \quad , \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \quad , \quad (3)$$

где $x(t)$ – искомая вещественная векторная функция времени, $x(t) = (x_s(t))$ – вектор-столбец, $x_s(t)$ – перемещение s -ой массы, $1 \leq s \leq S$, S – полное число масс механической системы, норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, T – период колебаний, для простоты выкладок осуществляется переход к безразмерному времени и принимается $T = 2\pi$, t – безразмерное время, $0 \leq t \leq T$; $M = \text{diag}(m_s)$ – диагональная матрица инерции, m_s – масса s -того узла; $B = \text{diag}(b_s)$ – диагональная матрица внешнего трения, b_s – коэффициент внешнего трения (силы внешнего трения приложены к массам); $C = \text{diag}(c_s)$ – диагональная матрица жесткости, c_s – жесткость связи s -ой и $s+1$ масс; $q = q(t) = (q_s(t))$ – вектор-столбец внешних сил;

Матрица, используемая для вычисления конечных разностей: $D = (d_{sj})$; $s, j = 1, 2, \dots, S$, где $(d_{sj}) = -1$, если $s = j$; $(d_{sj}) = 1$, если $j = s+1$; $(d_{sj}) = 0$, если $s \neq j$ и $j \neq s+1$; D^* – сопряженная матрица.

В проекциях уравнение (1) и условия периодичности (3) записываются так

$$(Ax)_s = 0 \quad , \quad (4)$$

$$(Ax)_s = -m_s \ddot{x}_s - b_s \dot{x}_s - c_{s-1} (x_s - x_{s-1}) + c_s (x_{s+1} - x_s) + q_s \quad , \quad (5)$$

$$x_s(0) = x_s(T) \quad , \quad \dot{x}_s(0) = \dot{x}_s(T) \quad , \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (6)$$

при граничных условиях, соответствующих условиям закрепления на рис.2.:

$$c_{s-1} [x_s(t) - x_{s-1}(t)] = 0 \quad , \quad s = 1 \quad \text{и} \quad x_s(t) = 0 \quad , \quad s = S+1 \quad (7)$$

(мягкое закрепление при $s = S + 1$ предпринято для того, чтобы сделать определенным перемещение механической системы как жесткого целого).

Приближенное решение уравнения (4), (5) при условиях (6), (7) отыскивается в виде гармонического ряда

$$x_s(t) = \sum_{n=-N}^N a_s^n e^{int}, \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (8)$$

Для определения комплексных амплитуд a_s^n гармонических составляющих колебаний используются проекционные условия Галеркина (вопрос о сходимости метода Галеркина в рассматриваемой задаче обсуждается в главе 5):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Ax)_s e^{-int} dt = 0, \quad s = 1, 2, \dots, S; \quad n = -N, \dots, 0, \dots, N \quad (9)$$

Подставляя сюда ряд (8) с учетом условий (6), (7), получаем:

$$T_s a_s + C_s a_{s+1} + p_s = 0, \quad s = 1, \quad (10)$$

$$C_{s-1} a_{s-1} + T_s a_s + C_s a_{s+1} + p_s = 0, \quad s = 2, 3, \dots, S-1, \quad (11)$$

$$C_{s-1} a_{s-1} + T_s a_s + p_s = 0, \quad s = S, \quad (12)$$

где C_{s-1}, T_s, C_s – квадратные матрицы порядка $2N + 1$, $a_s = (a_s^n)$, $p_s = (p_s^n)$, $n = -N, \dots, 0, \dots, N$, – векторы-столбцы,

$$p_s^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_s e^{-int} dt \quad (13)$$

Система алгебраических уравнений (10), (11), (12) состоит из блоков, которые в свою очередь образуют блочную трехдиагональную матрицу, и эта правильная форма матрицы позволяет применить метод последовательного исключения неизвестных векторов a_s (прямая векторная прогонка) с последующим восстановлением их значений (обратная прогонка). Предлагаемая модификация метода прогонки заключается не только в том, чтобы ввести фиктивные узлы и сквозную нумерацию узлов, но и в том, чтобы в процессах прямой и обратной прогонки, используя промежуточные результаты, выполнять условия равновесия и непрерывности перемещений в узлах, имеющих боковые ответвления. В результате удастся распространить эффективный метод прогонки на случай механической системы со сложной разветвленной структурой.

После определения $a_s = (a_s^n)$ по формуле (8) строится перемещение $x_s(t)$ для всех $s = 1, 2, \dots, S$, и могут быть вычислены усилия в упругих связях

$$f_s = c_s l_s, \quad l_s = (x_{s+1} - x_s), \quad (14)$$

(возвращаясь к задаче о крутильных колебаниях, можно получить угловые перемещения дисков, разделив $x_s(t)$ на радиус соответствующего зубчатого колеса и определить крутящие моменты, умножив $f_s(t)$ на этот радиус).

Во второй главе рассматриваются вынужденные нелинейные периодические колебания многомассовой упруго-демпферной системы с разрывными связями. Уравнение колебаний, аналогичное уравнению (1), (2), но нелинейное, можно записать в виде:

$$A(x) = 0, \quad A(x) = -M\ddot{x} - B\dot{x} - R(x) + q \quad (15)$$

$$R(x) = D^* f, \quad f = f(l), \quad l = Dx, \quad (16)$$

при условиях периодичности (3).

Все отличие уравнений (15), (16) от уравнений (1), (2) состоит в том, что на место линейной зависимости $f = cl$ в формуле (2) становится нелинейная зависимость $f = f(l)$.

При этом в уравнении (15), (16) пишется $R(x)$ вместо Rx , как это было в уравнении (1), (2), для того, чтобы указать на нелинейный характер функции $R(x)$. Отметим, что

$f = (f_s)$ и $l = (l_s)$, $1 \leq s \leq S$ так, что нелинейная зависимость в формуле (16) имеет место для каждой проекции:

$$f_s = f_s(l_s) \quad (17)$$

Идеальный вид функции (17) в соединении зубцовых колец с люфтом представлен на левом рисунке 3.

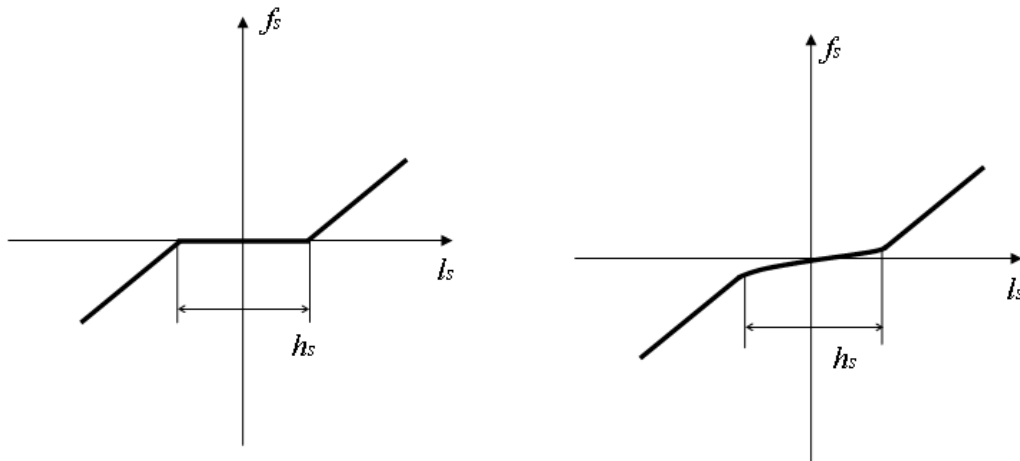


Рис.3. Зависимость контактного усилия от взаимного перемещения зубцов при наличии люфта в зубцовом соединении ДВС, h_s – размер люфта.

Но в данной работе, для того, чтобы обеспечить существование периодического решения, предполагается, что и в случае отсутствия контакта между смежными зубцами сохраняется, пусть как угодно слабая, упругая связь. Физически ясно, что сохранение очень слабой связи зубцов при разрыве их контакта не может существенно изменить картину вибраций двигателя внутреннего сгорания. Но это допущение существенно используется при доказательстве существования периодического решения задачи о колебаниях ДВС при наличии люфтов в зубцовых соединениях в случае действия периодических внешних нагрузок.

Второе предположение касается узкой зоны перехода от разрыва к контакту и наоборот. В этой зоне при идеальной зависимости контактного усилия от относительного перемещения зубцов происходит скачкообразное изменение жесткости зубцового соединения от нулевого значения до величины, определяемой упругими свойствами зубцов. В действительности такого скачка не происходит, поскольку зубцы имеют выпуклую

поверхность, и при контакте жесткость зубцового соединения нарастает (или убывает) плавно, аналогично тому, как это имеет место в задаче Герца. Это обстоятельство позволяет сгладить переход между состояниями разрыва и контакта, что также существенно используется при доказательстве существования периодического решения. На основании сказанного используемая в работе зависимость контактного усилия от взаимного расположения зубцов приобретает вид, изображенный на правом рисунке 3, и соответствующее аналитическое выражение для этой зависимости будет таким

$$f_s(l_s) = \begin{cases} c_s^1 l_s, & |l_s| < 0.4 h_s, \\ c_s^1 l_s + 2.5 \frac{c_s^2 - c_s^1}{h_s} (l_s - 0.4 h_s \text{sign}(l_s))^2 \cdot \text{sign}(l_s); 0.4 h_s \leq |l_s| \leq 0.6 h_s, \\ c_s^2 l_s + (c_s^1 - c_s^2) \cdot h_s / 2 \cdot \text{sign}(l_s), & |l_s| > 0.6 h_s \end{cases} \quad (18)$$

где $c_s^1 = c_s$ и $c_s^2 = \varepsilon c_s$, $\varepsilon = 0.03 - 0.05$.

Функция $f_s(l_s)$ дважды дифференцируема. Причем $f_s'(l_s)$ – первая производная от $f_s(l_s)$ по l_s – представляет собой непрерывную, положительную кусочно-линейную функцию $f_s'(l_s) > 0$, а вторая производная $f_s''(l_s)$ – функция ступенчатая, ограниченная. Отметим, что функция $f_s(l_s)$ не разлагается в ряд Тейлора (поскольку уже третья производная содержит дельта-функции), но это и не требуется для доказательства существования периодического решения и сходимости предлагаемых методов решения задачи о периодических колебаниях.

Третья глава посвящена построению алгоритма решения задачи о периодических колебаниях многомассовой упруго-демпферной системы с помощью итерационного метода Ньютона-Канторовича. Начнем с вычисления первой и второй производных от векторной функции $A(x)$ по векторной функции x :

$$A'(x) = -M \frac{d^2}{dt^2} - B \frac{d}{dt} - R'(x) \quad , \quad R'(x) = D^* \frac{df}{dl} \frac{dl}{dx} = D^* C(x) D, \quad (19)$$

$$A''(x) = -R''(x), \quad R''(x) = D^* \frac{d^2 f}{dl^2} D^2 \quad (20)$$

Проекции функций $\frac{df}{dl}$ и $\frac{d^2 f}{dl^2}$, то есть $\frac{df_s}{dl_s}$ и $\frac{d^2 f_s}{dl_s^2}$, получаются путем дифференцирования правой части формулы (17). Их выражения здесь не приводятся, но имеются в диссертации. В частности, оказывается, что норма $\|\frac{d^2 f}{dl^2}\|$ ограничена, и на этом основании в главе 4 дается оценка:

$$\|A''(x)\| \leq K < \infty \quad (21)$$

и используется неравенство (Л.В. Канторович):

$$\|A(x + \Delta) - A(x) - A'(x)\Delta\| \leq \frac{1}{2} \sup \|A''(x)\| \|\Delta\|^2, \quad (22)$$

которое служит доказательством того, что $A'(x)$ является сильной производной (производной Фреше) функции $A(x)$ в точке x .

При малом Δ приближенно положим

$$\|A(x + \Delta) - A(x) - A'(x)\Delta\| = 0, \quad (23)$$

что может быть, только если

$$A(x + \Delta) = A(x) + A'(x)\Delta \quad (24)$$

Эта формула используется для получения итерационного алгоритма метода Ньютона-Канторовича. В качестве начального (нулевого) элемента итерационного процесса выбирается $x = x_0$ – векторная, S – мерная, непрерывная, дважды дифференцируемая функция времени, удовлетворяющая условиям периодичности (3). При этом принимается в качестве первого приближения

$$x_1 = x_0 + \Delta_0, \quad (25)$$

так что будет

$$A(x_1) = A(x_0) + A'(x_0)\Delta_0 \quad (26)$$

и приближенно предполагается, что уже в первом приближении выполняется уравнение (15). Получается, что

$$A(x_0) + A'(x_0)(x_1 - x_0) = 0, \quad (27)$$

поскольку, согласно (25), $\Delta_0 = x_1 - x_0$, и далее (n - номер приближения):

$$A(x_n) + A'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0 \quad (28)$$

Иначе

$$A'(x_n) \Delta_n = q_n, \quad \Delta_n = x_{n+1} - x_n, \quad q_n = -A(x_n), \quad (29)$$

$$A'(x_n) = -M \frac{d^2}{dt^2} - B \frac{d}{dt} - R'(x_n) \quad (30)$$

Глава 4 посвящена исследованию существования периодического решения нелинейного уравнения (15) и сходимости итерационного процесса Ньютона-Канторовича при отыскании этого решения.

Предполагается, что силы внешнего трения действуют на все без исключения массы, и все коэффициенты трения положительны $b_s \geq b_{s\min} > 0$. Кроме того, предполагается, что, согласно правому рисунку 3, минимальная жесткость всех связей положительна. При этих допущениях показывается, что для всех x из области определения оператора A :

$$\|A'x\| \geq \mu \|x\|, \quad \mu > 0, \quad (31)$$

что означает существование обратного ограниченного оператора

$$\Gamma = (A')^{-1}, \quad \|\Gamma(x)\| \leq H < \infty \quad (32)$$

Кроме того, показывается, что в силу ограниченности нормы $\left\| \frac{d^2 f}{dt^2} \right\|$ (за счет сглаживания графика на правом рисунке 3) справедлива, как уже сказано, оценка (21). Теперь может быть использована

Теорема (Л.В. Канторович). Введем векторную функцию x_0 из области определения оператора $A(x)$, для которой

$$\Gamma_0 = \Gamma(x_0), \quad \|\Gamma_0\| \leq H_0 < \infty, \quad (33)$$

и предположим, что δ_0 , удовлетворяющее неравенству:

$$\delta_0 \geq \|\Gamma_0 A(x_0)\|, \quad (34)$$

достаточно мало для того, чтобы выполнялось неравенство:

$$h_0 = H_0 \delta_0 K \leq \frac{1}{2} \quad (35)$$

при K , удовлетворяющему условию (21). Тогда:

1). Нелинейное уравнение (15) имеет решение x^* , которое находится в области вблизи x_0 , определяемой неравенством

$$\|x - x_0\| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \delta_0 \quad (36)$$

2). Последовательные приближения x_n , вычисляемые по рекуррентной формуле (28) или (29), сходятся к x^* , и быстрота сходимости оценивается неравенством

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{2^{n-1}} \delta_0 \quad (37)$$

Глава 5 содержит изложение метода Галеркина – проекционного метода – для приближенного решения линеаризованного уравнения (29). Подход к решению этого уравнения (при наличии люфтов) в принципе такой же, как и к решению линейного уравнения (1) в первой главе (при отсутствии люфтов). А именно: механическая система со сложной структурой преобразуется в цепную, используется процедура Галеркина с представлением периодического движения в виде гармонического ряда, коэффициенты

которого определяются методом прогонки. Отличие заключается только в вычислении интегралов

$$\int_0^{2\pi} c_s(t) e^{-i(n-m)t} dt, \quad s=1,2,\dots,S; \quad n,m = -N,\dots,N, \quad (38)$$

содержащих значения жесткостей упругих связей $c_s(t)$, поскольку эти жесткости являются элементами диагональной матрицы $C(x(t))$ в формуле (19).

Матрица (38) имеет специальную структуру. А именно, каждая следующая по номеру строка равна предыдущей, смещенной на одну клетку вправо. Такая матрица является частным случаем матрицы Топлитца (Toeplitz). Для того, чтобы сформировать матрицу Топлитца, достаточно для каждого s подсчитать элементы только первой строки матрицы, а остальные строки получатся автоматически за счет использования специальной команды, например, на языке MatLab следует только набрать команду "toeplitz" и указать размерность матрицы.

Далее данная глава содержит также доказательство сходимости метода Галеркина при решении линеаризованного уравнения (29). Для этого дифференциальное уравнение преобразуется в интегральное уравнение, являющееся частным случаем уравнения с вполне непрерывным оператором, для которого сходимость метода Галеркина доказана (С.Г. Михлин).

В главе 6 приводится краткое описание пакета программ, составленных на основании разработанного алгоритма решения задачи о периодических колебаниях многомассовой упруго-демпферной системы с разрывными связями. На рисунке 4 представлен один из результатов расчета динамики реального ДВС большой мощности.

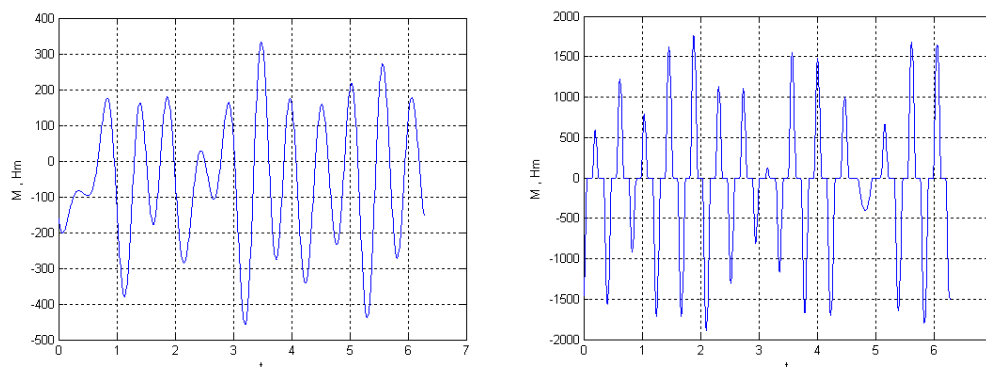


Рис. 4. Момент, действующий на колесо 11 при отсутствии и наличии люфтов в зубцовых соединениях.

Из этих графиков видно, что при учете люфтов в зубцовых соединениях получающееся расчетное значение момента, действующего на колесо 11 (рис. 2) примерно в четыре раза превышает его же значение при отсутствии люфтов.

Заключение содержит формулировку результатов, выносимых на защиту.

Список работ, опубликованных по теме диссертации.

1. **Фридман, А.В. Эффективный метод расчета периодических колебаний многомассовой упругой системы с разветвленной структурой / А.В. Фридман // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 4-1/2007. – Т.1. – С. 151-154.**
2. **Фридман, А.В. Метод расчета периодических колебаний двигателя внутреннего сгорания большой мощности при наличии люфтов в соединениях зубчатых колес / А.В. Фридман // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2008. - № 2. – С. 17-21.**
3. **Фридман, А.В. Нелинейные периодические колебания многомассовой механической системы с разрывными связями / А.В.Фридман, О.В. Привалова // Вычислительная математика и механика: Тр. СПбГТУ. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2006. - №498. - С. 198-205.**
4. **Fridman, A. Method of Computation for Periodic Oscillations of a High Power Density Internal Combustion Engine Drive Train in the Presence of Backlash / A. Fridman, O. Privalova, I. Piraner // Proceedings of ASME Internal Combustion Engine Division 2008 Spring Conference ICES2008. - Chicago, Illinois, USA. – 2008. – 6 p.**