Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И. Сурыгин Н.Д. Шаглина

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Практикум по математике

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2005

Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И. Сурыгин Н.Д. Шаглина

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Практикум по математике

Для студентов гуманитарных направлений подготовки
и специальностей

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2005

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С

Рецензенты:
Профессор кафедры высшей математики СПбГПУ *Ю.А. Хватов*
Доцент кафедры математики ИМОП СПбГПУ *В.В. Краснощёков*

Сурыгин А.И., Шаглина Н.Д. **МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА. Практикум по математике.** Для студентов гуманитарных направлений подготовки и специальностей. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. 120 с.

Учебное пособие соответствует примерной программе по дисциплине «Математика и информатика» для гуманитарных направлений бакалаврской подготовки и гуманитарных специальностей, одобренной научно-методическим советом по математике при Министерстве образования России.

В пособии представлена часть курса математики для гуманитариев – математический практикум, развивающая математические представления и математические навыки, приобретённые в школе. Пособие дополняет курс лекций по концепциям математики (Сурыгин А.И. Математика и информатика. Концепции математики: Текст лекций для студентов гуманитарных направлений и специальностей. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2002. 116 с.). Разделы дисциплины «Математика и информатика», посвящённые информатике, в данный курс не включены.

Предназначено студентам-гуманитариям, изучающим математические разделы курса «Математика и информатика».

Табл. 1. Ил. 36. Библиогр.: 4 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN

ПРЕДИСЛОВИЕ

– А вот кому «Основы дифференциального исчисления», популярнейшая брошюра, агромаднейший интерес!..

Т. Толстая («Кысь»)

Целью настоящего курса является углубление и развитие трудностей, лежащих в основе теории ...

Н. Бурбаки

Учебное пособие «Практикум по математике» составлено в соответствии с примерной программой по математике и информатике для студентов гуманитарных направлений и специальностей. Пособие содержит главы, посвящённые комплексным числам, элементам теории многочленов, началам математического анализа (предел и непрерывность функции, производная, неопределённый и определённый интеграл), а также некоторым простейшим типам дифференциальных уравнений. В пособие включены основные положения теории и решения типовых задач, а также задачи для самостоятельной работы, к которым приведены ответы с целью самоконтроля студентов.

При работе над пособием авторы ставили цель способствовать развитию у студентов представлений о базисных содержательных линиях школьного курса математики: числа, уравнения и системы уравнений, функции.

Развитие понятия *число* происходит через построение арифметики комплексных чисел и описание числовой системы в терминах теории множеств. Представление о комплексных числах в дальнейшем необходимо для изложения теории многочленов, разложения алгебраических дробей на простейшие и при решении дифференциальных уравнений.

Развитие понятия *уравнение* происходит по двум основным линиям:

1) от линейных и квадратных уравнений – к уравнениям произвольной степени (теория многочленов);

2) от линейных уравнений с одной неизвестной и системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными – к системам произвольного числа линейных уравнений с произвольным числом неизвестных.

Завершается развитие понятия *уравнение* после изучения элементов математического анализа рассмотрением качественно нового типа уравнений – дифференциальных уравнений, в которых неизвестной является функция, а не число, как в алгебраических уравнениях.

Развитие понятия *функция* происходит через овладение основами математического анализа (понятия предела и непрерывности функции, производной и дифференциала, первообразной, неопределённого и определённого интегралов). Приложения дифференциального исчисления продемонстрированы на примерах исследования функций. Дифференциальное и интегральное исчисления применены при решении дифференциальных уравнений. В качестве приложений определённого интеграла даны примеры и задачи на вычисление площадей плоских фигур.

Материал пособия прошёл апробацию в течение трёх лет в практике преподавания курса математики студентам специальности «Регионоведение» в Институте международных образовательных программ СПбГПУ.

Пособие рекомендовано к изданию кафедрой математики и методическим советом ИМОП.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Развитие понятия о числе

$N = \{1;\ 2;\ 3;...\}$ – множество натуральных чисел.

Натуральные числа используют для счёта предметов.

Множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения и умножения: сумма и произведение натуральных чисел являются натуральными числами, но разность и частное не всегда являются натуральными числами.

$Z = \{...-3;-2;-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;...\}$ – множество целых чисел.

Множество целых чисел замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения (результаты этих действий также принадлежат множеству Z, т.е. являются целыми числами).

Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел ($N \subset Z$).

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in Z,\ n \in N \right\}$ – множество рациональных чисел.

Множество рациональных чисел замкнуто относительно всех четырёх арифметических действий, кроме деления на нуль.

Любое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Например,

$$2\tfrac{3}{5} = \tfrac{13}{5} = 2{,}6 = 2{,}6(0);$$
$$1\tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3} = 1{,}333\ldots = 1{,}(3);$$
$$\tfrac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots = 0{,}(142857).$$

Множество рациональных чисел Q включает множество целых чисел Z $(Z \subset Q)$, то есть множество целых чисел Z есть подмножество множества рациональных чисел Q.

I – множество иррациональных чисел.

Понятие иррационального числа является дальнейшим расширением понятия о числе.

Иррациональные числа можно представить в виде бесконечных непериодических десятичных дробей.

Например, $\sqrt{2} = 1{,}414213...$; $\pi = 3{,}14159...$.

Множество иррациональных чисел I не включает множество рациональных чисел Q $I \not\subset Q$, множество Q не включено в I $(Q \not\subset I)$. Множества I и Q не имеют общих элементов, их пересечение – пустое множество $(Q \cap I = \varnothing)$.

Объединение множества рациональных и множества иррациональных чисел – это множество вещественных (действительных) чисел $Q \cup I = R$.

C – множество компле́ксных чисел.

Определение 1.1. ***Множество комплексных чисел*** *– это множество чисел вида $a + bi$, где $a, b \in R$, $i^2 = -1$.*

$$C = \left\{ z = a + ib \mid a \in R, b \in R, i^2 = -1 \right\}.$$

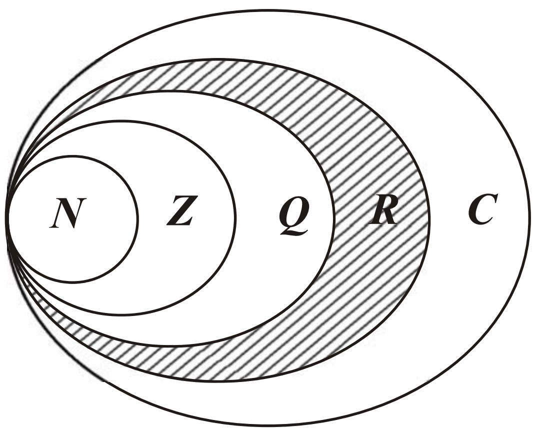

Рис. 1.1. Диаграмма Эйлера структуры числовой системы

Вещественные числа можно рассматривать как комплексные с нулевой мнимой частью: $r = r + 0\,i$.

Множество комплексных чисел C включает множество вещественных чисел R, множество R является подмножеством C $(R \subset C)$.

Необходимость расширения понятия числа и введения множества комплексных чисел C была обусловлена невозможностью решения в множестве R, например, уравнений $x^2+1=0$ или $x^2+2x+3=0$.

Структуру числовой системы (отношение включения между основными числовыми множествами) можно иллюстрировать кругами Эйлера (рис. 1.1).

Из рис. 1.1 видно, что $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ и $I \subset R \subset C$. Заштриховано на рисунке множество иррациональных чисел *I*, дополняющее множество рациональных чисел *Q* до множества вещественных чисел *R*: $Q \cup I = R$.

1.2. Алгебраическая форма комплéксного числа

Комплéксное число можно интерпретировать как точку на координатной плоскости (рис. 1.2). Координатную плоскость, рассматриваемую как модель множества комплексных чисел, называют *комплéксной плоскостью*.

Комплéксную плоскость можно рассматривать как модель множества комплéксных чисел, так как между точками плоскости и элементами множества комплéксных чисел имеет место взаимно однозначное соответствие. Это означает, что каждому комплéксному числу соответствует одна и только одна точка комплéксной плоскости и, наоборот, каждой точке комплéксной плоскости соответствует одно и только одно комплéксное число.

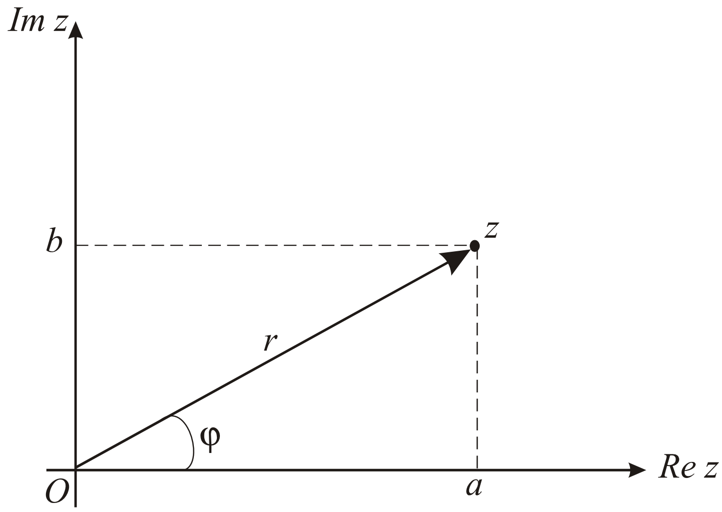

Рис. 1.2. Комплексное число $a+bi$ как точка комплексной плоскости

Ось абсцисс комплексной плоскости, на которой откладывают вещественные части комплексных чисел, называют *вещественной осью*. Ось ординат, на которой откладывают мнимые части комплексных чисел, называют *мнимой осью*.

Существуют различные формы записи комплексных чисел:

алгебраическая, *тригонометрическая*, *показательная*.

$z = a + bi$ – алгебраическая форма комплексного числа.

Число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ называют *модулем комплéксного числа* $z = a + bi$ и обозначают $|z|$:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = r .$$

Модуль комплéксного числа численно равен длине (модулю) соответствующего этому числу радиус-вектора.

Угол φ, образованный радиус-вектором с положительным направлением вещественной оси, называют *аргументом комплéксного числа* и обозначают $\operatorname{Arg} z$.

В общем случае аргумент комплексного числа может принимать любое значение:

$$-\infty < \operatorname{Arg} z < +\infty .$$

Значения $\operatorname{Arg} z$ в промежутке $(-\pi, \pi]$ называют *главным значением аргумента* и обозначают $\arg z$:

$$\arg z = \varphi \ (-\pi < \arg z \le \pi).$$

Комплексному нулю $Z = a + bi = 0$ на комплексной плоскости соответствует нулевой радиус-вектор или нуль-вектор.

Длина (модуль) такого вектора равна 0. Следовательно, модуль комплексного нуля равен 0.

Нуль-вектору можно приписать любое направление.

Следовательно, аргументу комплексного нуля можно приписать произвольное значение.

1.3. Арифметические действия с комплексными числами

Арифметические действия с комплексными числами (определения).

Равенство двух комплéксных чисел:

$$z_1 = z_2 \text{ тогда и только тогда, когда } \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}.$$

$$z = a + bi = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Действия с компле́ксными числами:

Если $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i,$ то:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$
$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Число $\bar{z} = a - bi$ называют компле́ксно сопряжённым числу $z = a + bi$.

Компле́ксно сопряжённые числа имеют следующие свойства:

$$1)\ |z| = |\bar{z}|; \qquad 2)\ z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2.$$

Операцию деления в терминах компле́ксно сопряжённых чисел можно записать так:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)\ (a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Свойства арифметических действий с комплексными числами аналогичны свойствам арифметических действий с вещественными числами:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения);

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность сложения);

3) для $\forall z_1$ и z_2 $\exists z$ такое, что $z_1 + z = z_2 \Rightarrow z = z_2 - z_1$ (разность комплексных чисел);

4) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (коммутативность умножения);

5) $z_1(z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ (ассоциативность умножения);

6) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);

7) для $\forall z_2$ и $z_1 \neq 0$ (т.е. $a_1 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$) $\exists z$ такое, что

$$z_1 \cdot z = z_2 \Rightarrow z = \frac{z_2}{z_1}$$ (частное комплексных чисел).

Следует обратить внимание на следующие свойства степени числа i:

$$i^1 = i;$$
$$i^2 = -1;$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i;$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1;$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$ и т.д.

Вообще $i^{4k+m} = i^m$, так как $i^{4k+m} = i^{4k} \cdot i^m = \left(i^4\right)^k \cdot i^m = 1^k \cdot i^m = 1 \cdot i^m = i^m$.
Например: $i^{22} = i^{20+2} = i^2 = -1$.

1.4. Решение квадратных уравнений в множестве комплексных чисел

Любое квадратное уравнение с вещественными коэффициентами $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ разрешимо в множестве комплексных чисел.

Решения находят по формуле корней квадратного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}:$$

1) если $D = b^2 - 4ac \geq 0$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

2) если $D = b^2 - 4ac < 0$ (следовательно, $4ac - b^2 > 0$), то формулу корней квадратного уравнения можно преобразовать:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-\left(4ac - b^2\right)}}{2a} =$$
$$= \frac{-b \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

и, таким образом,

если $D = b^2 - 4ac < 0$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$.

1.5. Решение типовых задач

☹ **Пример 1.** Дано: $A=\left\{-5;\ -\dfrac{1}{2};\ 0;\ 1;\ \sqrt{2};\ \pi;\ 5{,}7;\ 8\ \right\}$.

Найти: $A\cap N$; $A\cap Z$; $A\cap Q$; $A\cap I$; $A\cap R$.

😐 ***Решение.*** Натуральными числами в множестве A являются числа 1 и 8, поэтому $A\cap N=\{\ 1;\ 8\ \}$.

Целыми числами в множестве A являются натуральные 1 и 8, а также –5 и 0, поэтому $A\cap Z=\{-5;\ 0;\ 1;\ 8\ \}$.

Рациональными числами в множестве A являются целые числа –5, 0, 1 и 8, а также дроби $-\dfrac{1}{2}$ и $5{,}7$. Следовательно, $A\cap Q=\left\{-5;-\dfrac{1}{2};\ 0;\ 1;\ 5{,}7;\ 8\right\}$.

Иррациональными числами в множестве A являются $\sqrt{2}$ и π, следовательно, $A\cap I=\left\{\sqrt{2};\ \pi\right\}$.

Все числа из множества A являются вещественными, следовательно, $A\cap R=A=\left\{-5;\ -\dfrac{1}{2};\ 0;\ 1;\ \sqrt{2};\ \pi;\ 5{,}7;\ 8\ \right\}$.

Ответ: $A\cap N=\{\ 1;\ 8\ \}$; $A\cap Z=\{-5;\ 0;\ 1;\ 8\ \}$; $A\cap I=\left\{\sqrt{2};\ \pi\right\}$; $A\cap Q=\left\{-5;-\dfrac{1}{2};\ 0;\ 1;\ 5{,}7;\ 8\right\}$; $A\cap R=A=\left\{-5;\ -\dfrac{1}{2};\ 0;\ 1;\ \sqrt{2};\ \pi;\ 5{,}7;\ 8\ \right\}$.

☺

☹ **Пример 2.** Дано: $z_1=-3+2i$; $z_2=13-i$

Найти: 1) z_1+z_2 ; 2) $z_1\cdot z_2$

😐 ***Решение.*** Арифметические действия с комплексными числами выполняем как с обычными алгебраическими выражениями (раскрываем скобки, приводим подобные члены и т.п.), учитывая при этом, что $i^2=-1$.

$$z_1+z_2=-3+2i+13-i=10+i.$$

$$z_1\cdot z_2=(-3+2i)(13-i)=-39+26i+3i-2i^2=-39+29i+2=-37+29i$$

Ответы: 1) 10+ i; 2) –37+29i.

☺

☹ **П р и м е р 3.** Дано: $z_1 = -3 + 2i$; $z_2 = 13 - i$.

Найти: 1) $z_2 - z_1$; 2) $\dfrac{z_2}{z_1}$.

😐 ***Решение***. 1) $z_2 - z_1 = (13 - i) - (-3 + 2i) = 13 - i + 3 - 2i = 16 - 3i$.

2) Умножим числитель и знаменатель дроби на сопряжённое знаменателя:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{13 - i}{-3 + 2i} = \frac{(13 - i)\,(-3 - 2i)}{(-3 + 2i)\,(-3 - 2i)} = \frac{-39 + 3i - 26i + 2i^2}{(-3)^2 - (2i)^2} = \frac{-41 - 23i}{9 + 4} = -\frac{41}{13} - \frac{23}{13}i$$

Ответы: 1) $16 - 3i$; 2) $-\dfrac{41}{13} - \dfrac{23}{13}i$.

☺

☹ **П р и м е р 4.** Записать число $z = \dfrac{3 + i}{(1 + i)(1 - 2i)}$ в алгебраической форме.

😐 ***Решение.*** Комплексное число в алгебраической форме имеет вид $z = a + bi$. Приведём данное в условии число z к такому виду. Для этого перемножим сомножители в знаменателе и затем домножим числитель и знаменатель дроби на комплексно сопряжённое число знаменателя:

$$z = \frac{3 + i}{(1 + i)(1 - 2i)} = \frac{3 + i}{1 + i - 2i - 2i^2} = \frac{3 + i}{3 - i} =$$

$$= \frac{(3 + i)^2}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{9 + 6i + i^2}{9 + 1} = \frac{9 + 6i - 1}{10} =$$

$$= \frac{8 + 6i}{10} = \frac{8}{10} + \frac{6}{10}i = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

Ответ: $\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$.

☺

☹ **П р и м е р ы 5.** Возвести в степень

1) $(3 - 2i)^2$; 2) $(1 + i)^4$; 3) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$.

☹ ***Решения.***

1) По формуле квадрата разности

$$(3-2i)^2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot 2i + (2i)^2 = 9 - 12i + 4\cdot i^2 =$$
$$= 9 - 12i + 4\cdot(-1) = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i.$$

2) $(1+i)^4 = \left(1+2i+i^2\right)^2 = (1+2i-1)^2 = (2i)^2 = -4$.

3) По формуле куба суммы

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = 1^3 + 3(1)^2\cdot i\sqrt{3} + 3\cdot 1\cdot\left(i\sqrt{3}\right)^2 + \left(i\sqrt{3}\right)^3 =$$
$$= 1 + 3\sqrt{3}\,i - 3\cdot 3 + 3\sqrt{3}\,i^3 = 1 + 3\sqrt{3}\,i - 9 - 3\sqrt{3}\,i = -8.$$

Ответы: 1) $5-12i$; 2) -4; 3) -8.

☺

☹ **П р и м е р ы 6.** Вычислить 1) $\sqrt{4}$; 2) $\sqrt{7-24i}$.

☹ ***Решения.***

1) Ищем решение в множестве комплексных чисел.

Тогда $\sqrt{4} = z = a + bi \Rightarrow 4 = a^2 + 2abi + (bi)^2 \Rightarrow 4 + 0\cdot i = a^2 + 2abi - b^2$.

Из равенства комплексных чисел $\begin{cases} 4 = a^2 - b^2; \\ 0 = 2ab. \end{cases}$

Из второго равенства системы следует, что $\left[\begin{array}{l} a = 0; \\ b = 0. \end{array}\right.$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0; \\ -b^2 = 4; \end{cases} \quad -\text{нет решения (т.к. } b\in R\text{)}; \\ \begin{cases} b = 0; \\ a^2 = 4; \end{cases} \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 2 + 0i = 2; \\ z_2 = -2 + 0i = -2. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

2) Ищем решение в множестве комплексных чисел. Тогда $\sqrt{7-24i} = z = a + bi$, и $7 - 24i = a^2 + 2abi - b^2$.

Из равенства комплексных чисел: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ 2ab = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ ab = -12 \end{cases}$.

Решением системы являются $\begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}$ и $\begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases}$, следовательно,

$z_1 = 4 - 3i;\; z_2 = -4 + 3i$.

Ответы: 1) $z_1 = 2;\, z_2 = -2$; 2) $z_1 = 4 - 3i;\, z_2 = -4 + 3i$.

☺

☹ **Примеры 7.** Решить уравнения на множестве комплексных чисел

1) $x^2 + 3x + 3 = 0$; 2) $x^3 - 8 = 0$.

😐 ***Решения.***

1) $x^2 + 3x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; D = b^2 - 4ac = 9 - 12 < 0$. Следовательно,

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{12 - 9}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравнение второй степени имеет два комплексно сопряжённых корня.

2) Разложим левую часть уравнения $x^3 - 8 = 0$ на множители по формуле разности кубов $x^3 - 8 = (x - 2)\left(x^2 + 2x + 4\right)$.

Тогда $(x - 2)\left(x^2 + 2x + 4\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0; \\ x^2 + 2x + 4 = 0; \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2; \\ x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{4 - 1}; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2; \\ x_2 = -1 + i\sqrt{3}; \\ x_3 = -1 - i\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Уравнение третьей степени имеет в множестве комплексных чисел 3 корня, 2 из которых комплексно сопряжённые.

Ответы: 1) $\left\{ \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\; \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$; 2) $\left\{2;\; -1 + \sqrt{3}\,i;\; -1 - \sqrt{3}\,i\right\}$.

☺

1.6. Задания для самостоятельной работы

1. Найти модули комплексных чисел $z_1 = 2 - i;\; z_2 = 2\sqrt{6} + 5i;\; z_3 = i$.
2. $z_1 = 3 + 2i;\; z_2 = 4 - 3i$. Найти $z_1 + z_2$.
3. $z_1 = 2 - 3i;\; z_2 = 5 - 6i$. Найти $z_1 - z_2$.
4. $z_1 = 4 + 3i;\; z_2 = 2 - 3i$. Найти $z_1 \cdot z_2$.

5. $z_1 = 2 + 3i;\ z_2 = 1 - i$. Найти $\dfrac{z_1}{z_2}$.

6. Вычислить $(2 + 3i)^4$.

7. Записать число $z = \dfrac{5 + i}{(1 + i)\ (2 - 3i)}$ в алгебраической форме.

8. Вычислить $z = \sqrt{3 + 4i}$.

9. Решить в множестве комплексных чисел уравнения

а) $z^2 + z + 1 = 0$; б) $z^3 + 1 = 0$.

10. Найти x и y, если $x + yi = \dfrac{(1 + i)^7}{(1 - i)}$.

11. Найти модуль числа

а) $(1 + i)^4 + 3i$; б) $\dfrac{(1 + i)^5}{1 - i}$.

Ответы: 1) $|z_1| = \sqrt{5};\ |z_2| = 7;\ |z_3| = 1$; 2) $7 - i$; 3) $-3 + 3i$; 4) $17 - 6i$; 5) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$; 6) $-119 - 120i$; 7) $\dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13}\ i$; 8) $z_1 = 2 + i;\ z_2 = -2 - i$; 9) а) $z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i;\ z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $z_1 = -1;\ z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i;\ z_3 = \dfrac{1}{2} - \sqrt{3}\,i$; 10) $x = 8;\ y = 0$; 11) а) 5; б) 4.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОГОЧЛЕНОВ

2.1. Многочлены. Теорема Безу

Определение 2.1. ***Многочленом степени*** *n от переменной x называют функцию вида*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0;\ n \in N.$$

Сложение, вычитание и умножение многочленов хорошо известны из школы и не представляют трудности. Деление многочленов можно выполнять «уголком» (аналогично делению целых чисел).

Теорема 2.1 (Безу). *Если многочлен разделить на $(x-c)$, то остаток от деления равен значению многочлена при $x = c$.*

Доказательство. Результат деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x-c)$ можно записать в виде: $P_n(x) = P_{n-1}(x)\ (x-c) + r$, где r – остаток, а $P_{n-1}(x)$ – многочлен $(n-1)$-й степени. При $x = c$ получим $P_n(c) = P_{n-1}(c)(c-c) + r$. Следовательно, $r = P_n(c)$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если $x = c$ – корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x)$ делится на $(x-c)$ без остатка, то есть*

$$\frac{P_n(x)}{x-c} = P_{n-1}(x) \text{ или } P_n(x) = (x-c)\,P_{n-1}(x).$$

2.2. Основная теорема алгебры (теорема Гаусса)

Теорема 2.2 (Гаусса). *Любой многочлен степени n имеет по крайней мере один корень (вещественный или комплексный).*

Доказательство. Без доказательства.

Следствия из теоремы Гаусса

Следствие 1. *Многочлен степени n можно представить в виде*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Доказательство. По теореме Гаусса многочлен имеет по крайней мере один корень x_1. Тогда по следствию из теоремы Безу многочлен должен делиться без остатка на $(x - x_1)$. Частное от деления будет многочленом степени $n - 1$ с коэффициентом a_n при старшем члене. Этот многочлен также (по теореме Гаусса) будет иметь корень x_2 и т. д.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)P_{n-1}(x) =$$
$$= (x - x_1)(x - x_2)P_{n-2}(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)P_{n-3}(x) =$$
$$= \ldots = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})(a_n x + c).$$

Обозначим $\dfrac{-c}{a_n} = x_n$, тогда $P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$.

Из последнего равенства видно, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются корнями многочлена $P_n(x)$. $P_n(x)$ не может обращаться в нуль при других значениях переменной x.

Многочлен $P_n(x)$ степени n имеет ровно n корней, среди которых могут быть равные.

Если среди корней многочлена есть k равных корней, то говорят о корне кратности k.

Например, многочлен

$$x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = (x + 1)(x - 4)(x - 4) = (x + 1)(x - 4)^2$$

имеет 3 корня $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 4$ или простой корень (кратности 1) $x_1 = -1$ и корень кратности 2 $x_{2,3} = 4$.

Следствие 2. *Если многочлен с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень $a + bi$, то он имеет и сопряженный корень $a - bi$.*

Доказательство. Без доказательства.

Например, $P(x)=x^2+4x+5$ имеет корни

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm 2i}{2}=\left[\begin{array}{l}-2+i\\-2-i\end{array}\right..$$

Следствие 3. *Если $P_n(x)$ многочлен с вещественными коэффициентами*, ($n\geq 2$), то его *можно разложить либо на линейные множители, либо на квадратные трёхчлены, либо на множители, среди которых имеются как линейные множители, так и квадратные трёхчлены.*

Доказательство. Без доказательства.

Например,

$$x^2-7x+10=(x-2)(x-5);$$
$$x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right);$$
$$x^4-8x+63=\left(x^2+4x+9\right)\left(x^2-4x+7\right).$$

Квадратные трёхчлены x^2-x+1, x^2+4x+9 и x^2-4x+7 нельзя разложить на более простые множители вида $(x-c)$ с вещественными коэффициентами ($c\in R$), так как эти трёхчлены не имеют вещественных корней.

2.3. Корни многочленов

Теорема о целых корнях многочлена с целыми коэффициентами

Теорема 2.3. *Если x_0 – целочисленный корень многочлена*

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,\ (n\in N,\quad a_n;a_{n-1};\ldots;a_0\in Z),$$

то x_0 является делителем свободного члена (т.е. $\dfrac{a_0}{x_0}\in Z$).

Доказательство. Пусть x_0 – целочисленный корень многочлена, тогда

$$a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots a_1x_0+a_0=0\Rightarrow$$
$$x_0\left(a_nx_0^{n-1}+a_{n-1}x_0^{n-2}+\ldots a_1\right)+a_0=0\Rightarrow$$
$$a_0=-x_0\left(a_nx_0^{n-1}+a_{n-1}x_0^{n-2}+\ldots+a_1\right).$$

Выражение в скобках является целым числом, следовательно, $\frac{a_0}{x_0} \in Z$.

Теорема доказана.

Итак, целые корни многочлена с целыми коэффициентами следует искать среди делителей свободного члена.

Теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами

Теорема 2.4. *Если* $x_0 = \frac{p}{q} \in Q$ *– рациональный корень многочлена*

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, ($n \in N$, $a_n, a_{n-1}, ..., a_0 \in Z$),

то p *является делителем свободного члена (обозначают* $(a_0 \vdots p)$*), а* q *– делителем коэффициента при старшей степени (обозначают* $(a_n \vdots q)$*).*

Доказательство. Без доказательства.

Корни приведённого уравнения с целыми коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

где $n \in N$ – натуральное число, а $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in Z$ – целые числа.

Корни этого уравнения являются корнями многочлена $P_n(x)$. При $a_n = 1$ уравнение является приведённым и его рациональные корни могут быть только целыми числами (так как коэффициент при старшей степени $a_n = 1$, его делителем может быть только $q = \pm 1$ по теореме 2.4 о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами).

Итак, в приведённом уравнении с целыми коэффициентами рациональные корни могут быть только делителями свободного члена, то есть только целыми числами.

2.4. Решение типовых задач

☹ **Пример 1.** Выполнить деление многочленов «уголком»

1) $\left(x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7x + 6\right) : \left(x^2 + 2x + 3\right)$;

$$2)\ \left(x^4+3x^3-5x+7\right):\left(x+2\right).$$

😐 ***Решение.*** Проводим деление «уголком» по аналогии с делением натуральных чисел.

1)

$$\begin{array}{l|l}
-\,\begin{array}{l} x^4+3x^3+7x^2+7x+6 \\ \underline{x^4+2x^3+3x^2} \end{array} & \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+x+2} \\
\qquad -\,\begin{array}{l} x^3+4x^2+7x+6 \\ \underline{x^3+2x^2+3x} \end{array} & \\
\qquad\qquad -\,\begin{array}{l} 2x^2+4x+6 \\ \underline{2x^2+4x+6} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \ (\text{остаток}) &
\end{array}$$

Итак, $\dfrac{x^4+3x^3+7x^2+7x+6}{x^2+2x+3}=x^2+x+2$

или $x^4+3x^3+7x^2+7x+6=\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+2x+3\right)$.

2)

$$\begin{array}{l|l}
-\,\begin{array}{l} x^4+3x^3-5x+7 \\ \underline{x^4+2x^3} \end{array} & \dfrac{x+2}{x^3+x^2-2x-1} \\
\qquad -\,\begin{array}{l} x^3-5x+7 \\ \underline{x^3+2x^2} \end{array} & \\
\qquad\qquad -\,\begin{array}{l} -2x^2-5x+7 \\ \underline{-2x^2-4x} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad -\,\begin{array}{l} -x+7 \\ \underline{-x-2} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 9 \ (\text{остаток}) &
\end{array}$$

Итак,

$$\frac{x^4+3x^3-7x+7}{x+2}=x^3+x^2-2x-1+\frac{9}{x+2}$$

или $x^4+3x^3-5x+7=\left(x^3+x^2-2x-1\right)\left(x+2\right)+9$ (остаток).

Ответы:

1) x^2+x+2; 2) $x^3+x^2-2x-1+\dfrac{9}{x+2}$

☺.

☹ **П р и м е р 2.** Найти целые корни многочлена

$$P(x)=2x^3+3x^2+5x+4.$$

😐 ***Решение.*** Целые корни многочлена с целыми коэффициентами ищем среди делителей свободного члена, т.е. среди чисел $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4$.

Заметим, что все коэффициенты многочлена положительны, следовательно, корень надо искать среди отрицательных чисел –1; –2; –4.

$P(-1)=0$, следовательно $x_1=-1$ – корень многочлена.

Чтобы найти другие корни многочлена, разделим $P(x)$ на $(x-x_1)$:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} 2x^3+3x^2+5x+4 \\ \underline{2x^3+2x^2} \end{array} & \begin{array}{l} \ \ x+1 \\ \hline 2x^2+x+4 \end{array} \\
-\begin{array}{l} x^2+5x+4 \\ \underline{x^2+\ x} \end{array} & \\
-\begin{array}{l} 4x+4 \\ \underline{4x+4} \end{array} & \\
0 &
\end{array}$$

Итак, частное от деления равно $\left(2x^2+x+4\right)$. Квадратный трёхчлен $2x^2+x+4$ не имеет вещественных корней $\left(D=b^2-4ac<0\right)$, следовательно $x_1=-1$ — единственный целый корень многочлена $P(x)=2x^3+3x^2+5x+4$.

Ответ: -1.

☺

☹ **П р и м е р 3.** Найти рациональные корни многочлена

$$P(x)=4x^3+5x^2+9x+2.$$

😐 ***Решение.*** $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Ищем рациональный корень $\dfrac{p}{q}$ такой, что p – делитель свободного члена (свободный член равен 2), а q – делитель коэффициента при старшей степени (числа 4).

$p\,\vdots \pm 1;\ \pm 2$; $\quad q\,\vdots \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4$; следовательно, $\dfrac{p}{q}\vdots \pm 1; \pm 2; \pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{1}{4}$.

Ищем корень среди отрицательных чисел (т.к. все коэффициенты многочлена больше нуля):

$$P(-1) = -4 + 5 - 9 + 2 \neq 0\,;$$
$$P(-2) = -32 + 20 - 18 + 2 \neq 0\,;$$
$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{9}{2} + 2 \neq 0\,;$$
$$P\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{5}{16} - \frac{9}{4} + 2 = 0\,.$$

Итак, $x_1 = -\dfrac{1}{4}$ – корень многочлена. Разделим многочлен на $(x - x_1) = (x + 1/4)$:

$$\begin{array}{r|l} -\,4x^3 + 5x^2 + 9x + 2 & (x + 1/4) \\ \underline{4x^3 + x^2} \qquad\qquad\quad & \overline{4x^2 + 4x + 8} \\ -\,4x^2 + 9x + 2 & \\ \underline{4x^2 + x} \qquad\;\; & \\ -\,8x^2 + 2 & \\ \underline{8x + 2} & \\ 0 \quad & \end{array}$$

Таким образом, $4x^3 + 5x^2 + 9x + 2 = \left(x + \dfrac{1}{4}\right)\left(4x^2 + 4x + 8\right)$.

Квадратный трёхчлен $4x^2 + 4x + 8$ не имеет вещественных корней, следовательно, $x_1 = -\dfrac{1}{4}$ – единственный рациональный корень многочлена.

Ответ: $x = -\dfrac{1}{4}$.

☺

☹ **П р и м е р 4.** Найти рациональные корни уравнения

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = 0\,.$$

😐 ***Решение.*** Это приведённое уравнение с целыми коэффициентами, поэтому корень ищем среди делителей свободного члена, т.е. среди чисел $\pm 1;\ \pm 5$.

$$P(1) = 1 + 2 - 2 - 6 + 5 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ – корень.}$$

Чтобы найти другие корни уравнения, разделим многочлен $x^4+2x^3-2x^2-6x+5$ на $x-1$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^4+2x^3-2x^2-6x+5 & \;x-1 \\
\underline{x^4-x^3\qquad\qquad\qquad\;\;} & \overline{x^3+3x^2+x-5} \\
-\;3x^3-2x^2-6x+5 & \\
\underline{3x^3-3x^2\qquad\quad} & \\
-\;x^2-6x+5 & \\
\underline{x^2-x\qquad} & \\
-5x+5 & \\
\underline{-5x+5} & \\
0 &
\end{array}
$$

Получаем преобразованное уравнение

$$(x-1)\left(x^3+3x^2+x-5\right)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^3+3x^2+x-5=0 \end{array}\right..$$

Теперь необходимо найти корни уравнения $x^3+3x^2+x-5=0$. Ищем их среди чисел ± 1; ± 5 – делителей свободного члена 5:

$$P(1)=1+3+1-5=0 \Rightarrow x=1 \text{ – корень.}$$

Чтобы найти другие корни, разделим многочлен x^3+3x^2+x-5 на $x-1$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3+3x^2+x-5 & \;x-1 \\
\underline{x^3-x^2\qquad\qquad\;} & \overline{x^2+4x+5} \\
-\;4x^2+\;\;x-5 & \\
\underline{4x^2-4x\quad\;\;} & \\
5x-5 & \\
\underline{5x-5} & \\
0 &
\end{array}
$$

Получаем $(x-1)\,(x-1)\left(x^2+4x+5\right)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-1=0 \\ x^2+4x+5=0 \end{array}\right..$

Квадратный трёхчлен x^2+4x+5 не имеет вещественных корней.

Исходное уравнение имеет рациональный корень $x=1$ (кратности 2).

Ответ: 1.

☺

☹ **Пример 5.** Решить уравнение $x^3+2x^2-3x-10=0$.

😐 ***Решение.*** $P(x)=x^3+2x^2-3x-10$ – многочлен с целыми коэффициентами. Ищем корни среди чисел $\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10$

$$P(1)=1+2-3-10\neq 0 \Rightarrow x=1 \text{ – не корень,}$$

$$P(2)=8+8-6-10=0 \Rightarrow x=2 \text{ – корень.}$$

Разделим $P(x)$ на $x-2$:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+2x^2-3x-10 & x-2 \\ \underline{x^3-2x^2} & \overline{x^2+4x+5} \\ -\,4x^2-3x & \\ \underline{4x^2-8x} & \\ 5x-10 & \\ \underline{5x-10} & \\ 0 & \end{array}$$

Следовательно,

$$x^3+2x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+4x+5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2+4x+5=0 \end{array}\right..$$

Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2; \\ x^2+4x+5=0 \Rightarrow x_{2,3}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=-2\pm i. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=2;\ x_2=-2+i;\ x_3=-2-i$.

☺

2.5. Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить деление многочленов

а) $\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 2\right) : \left(x^2 + x + 1\right)$;

б) $\left(x^3 + 3x^2 + 4x + 2\right) : \left(x + 1\right)$.

2. Найти целые корни уравнений

а) $x^3 + 4x^2 - 24 = 0$;

б) $x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 6 = 0$;

в) $2x^3 - 5x^2 - 2x - 2 = 0$.

3. Решить уравнения

а) $x^3 + 5x - x - 21 = 0$;

б) $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Ответы:

1) а) $x + 2$; б) $x^2 + 2x + 2$; 2) а) 2; б) $\{1;\ 3\}$; в) целых корней нет;

3) а) $\{-3;\ -1 + 2\sqrt{2};\ -1 - 2\sqrt{2}\}$; б) $\left\{3;\ -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\ -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Линейное уравнение

$ax + b = 0$ – линейное уравнение с одной неизвестной (x);

$ax + by = c$ или $ax_1 + bx_2 = c$ – линейное уравнение с двумя неизвестными (x; y или x_1, x_2);

$ax + by + cz = d$ или $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ – линейное уравнение с тремя неизвестными (x, y, z или x_1, x_2, x_3);

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ – линейное уравнение с n неизвестными x_1; x_2; x_3; ...; x_n.

3.2. Система линейных уравнений

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2 и x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Система двух линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2. \end{cases}$$

Система трёх линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3. \end{cases}$$

Общий случай – система *m* уравнений с *n* неизвестными x_1, x_2 и x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Определение 3.1. ***Решение системы линейных уравнений с n неизвестными*** *– это совокупность n чисел, при подстановке которых вместо неизвестных* ***все*** *уравнения системы обращаются в верные числовые равенства.*

Решить систему – значит найти все её решения.

В случае системы линейных уравнений возможны три случая:

1) система не имеет решений;
2) система имеет ровно одно решение;
3) система имеет бесконечное множество решений.

Универсальным методом решения систем является метод *подстановки*: выразить из какого-либо уравнения системы первую неизвестную и подставить полученное выражение в другие уравнения системы (исключить неизвестную), а использованное уравнение «отбросить» (впоследствии оно пригодится для вычисления значения первой неизвестной). Затем из какого-либо уравнения системы выразить вторую неизвестную, исключить ее из оставшихся уравнений, а второе использованное уравнение также «отбросить». И так далее, пока не останется одно уравнение с одной последней неизвестной. Решив это уравнение, можно найти численное значение последней неизвестной и, двигаясь в обратном порядке по «отброшенным» уравнениям, вычислить значения всех неизвестных от последней до первой.

Хотя метод подстановки является универсальным, применить его к произвольным системам уравнений чаще всего непросто. В случае же систем линейных уравнений этот метод разработан до уровня алгоритма и носит название *метода Гаусса*.

Поскольку системы линейных уравнений чрезвычайно важны в приложениях (математических моделях), разработаны и другие, менее общие методы их решения, например, *метод определителей*.

3.3. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса состоит в приведении системы к «ступенчатой» форме путём последовательного исключения неизвестных.

Рассмотрим метод Гаусса на примере системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Первое уравнение оставляем без изменений, а из второго и третьего исключаем неизвестную x_1. Для этого первое уравнение умножаем на a_{21}, второе – на a_{11} и вычитаем первое уравнение из второго. Аналогично поступаем с первым и третьим уравнениями. Получаем преобразованную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)}; \\ \qquad a_{31}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)}. \end{cases}$$

Теперь первые два уравнения оставляем без изменений, а из третьего исключаем неизвестную x_2 (выполняем преобразования уравнений (2) и (3) по аналогии с предыдущим шагом: умножаем второе уравнение на $a_{31}^{(1)}$, третье — на $a_{22}^{(1)}$ и вычитаем второе уравнение из третьего). Получаем систему «ступенчатого» вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)}; \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)}. \end{cases}$$

В этой системе выразим x_1 из уравнения (1) и x_2 из уравнения (2), а x_3 найдём из уравнения (3):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}; \\ \qquad x_2 = \dfrac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)}x_3}{a_{22}^{(1)}}; \\ \qquad\qquad x_3 = \dfrac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}. \end{cases}$$

Теперь последовательно можно вычислить числовое значение x_3 по последней формуле, потом по известной величине x_3 вычислить x_2 по второй формуле и, наконец, по известным x_3 и x_2 вычислить x_1 по первой формуле.

3.4. Решение типовых задач

☹ **Пример 1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 13; \\ x + y + z = 6; \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$$

😐 ***Решение.*** Обратим внимание, что в данной системе неизвестные обозначены x, y, z, а не x_1, x_2, x_3. Такие обозначения часто используют, если неизвестных не более трёх.

Для решения системы удобно оставить без изменений второе уравнение, а из уравнений (1) и (3) исключить неизвестную x. Для этого умножим второе уравнение на (– 2) и сложим с первым, а затем умножим второе уравнение на (– 3) и сложим с третьим. Получим (записав не изменившееся второе уравнение на первом месте):

$$\begin{cases} x + y + z = 6; \\ \quad -y + z = 1; \\ \quad -2y - 2z = -10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6; \\ \quad -y + z = 1; \\ \qquad y + z = 5. \end{cases}$$

Первое уравнение оставим без изменений, второе для удобства умножим на (– 1), а из третьего исключим y (для этого сложим его со вторым):

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \qquad y - z = -1 \\ \qquad\quad 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ \qquad y - z = -1 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - y - z \\ \qquad y = -1 + z \Rightarrow \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x = 6 - y - 3 \\ \quad y = -1 + 3 \\ \quad\quad z = 3 \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} x = 3 - y \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} x = 3 - 2 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Таким образом, тройка чисел (1, 2, 3) – решение системы. Проверим это подстановкой в исходную систему.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 13 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} 2\cdot 1 + 2 + 3\cdot 3 = 13 \\ 1 + 2 + 3 = 6 \\ 3\cdot 1 + 2 + 3 = 8 \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} 13 = 13 \\ 6 = 6 \\ 8 = 8 \end{cases}.$$

Все уравнения системы обратились в верные числовые равенства, следовательно, (1, 2, 3) действительно решение системы.

Ответ: $\{(1;\ 2;\ 3)\}$

☺

☹ **Пример 2.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 \qquad = 2; \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad = 0. \end{cases}$$

😐 ***Решение.*** В этом примере мы имеем 4 неизвестных и только 3 уравнения. Из трёх уравнений можно найти не более трёх неизвестных, следовательно, одну неизвестную придётся считать произвольной. Пусть произвольной неизвестной будет x_4.

Вычтем из второго уравнения первое:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ \qquad\quad -2x_3 - x_4 = 1; \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad = 0. \end{cases}$$

Перенесём члены с x_4 в правую часть и поменяем местами второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 - x_4; \\ \qquad x_2 + x_3 = 0; \\ \qquad\quad -2x_3 = 1 + x_4. \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 - x_2 - x_3; \\ x_2 = -x_3; \\ x_3 = -\dfrac{1 + x_4}{2}. \end{cases}$$

Считая $x_4 = t$ произвольным вещественным числом, находим:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = -\dfrac{1+t}{2} \\ x_2 = -\left(-\dfrac{1+t}{2}\right) \\ x_1 = 1 - t - \dfrac{1+t}{2} - \left(-\dfrac{1+t}{2}\right) \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -\dfrac{1+t}{2} \\ x_2 = \dfrac{1+t}{2} \\ x_1 = 1 - t \end{cases}.$$

Итак, решением системы будет набор четырёх чисел $(x_1;\, x_2;\, x_3;\, x_4) = \left(1 - t;\, \dfrac{1+t}{2};\, -\dfrac{1+t}{2};\, t\right)$, где t – любое вещественное число. Других решений система не имеет.

Хотя $t \in R$ – произвольное вещественное число, решением системы является отнюдь не любая четвёрка чисел. Числа четвёрки, являющейся решением системы, – не произвольный набор чисел. Они связаны между собой уравнениями системы. Другое дело, что четвёрок чисел, являющихся решением системы, бесконечно много, так как каждому значению произвольной неизвестной $t \in R$ (а таких значений бесконечно много) соответствует своя четвёрка.

Ответ: $\left\{\left(1 - t;\, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t;\, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}t;\, t\right)\right\}$, $t \in R$.

☺

☹ **П р и м е р 3.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y + z = 3; \\ 2x + y + z = 11; \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$

😐 ***Решение.***

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 11 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - z = 5 \\ 2y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + z = 5 \\ 5y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y - z \\ z = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x = 3 + 2 - z = 5 - z \\ z = 5 - 2\cdot 2 = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} x = 5 - 1 = 4 \\ z = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Система имеет единственное решение.

Ответ: $\{(4;\ 2;\ 1)\}$.

☺

☹ **П р и м е р 4.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

😐 ***Решение.***

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = t \in R \\ x_3 = -t \end{cases}.$$

Система имеет бесконечное множество решений $\{(1;\ t;\ -t)\}$ при любых $t \in R$. Например, (1; 2; –2) при $t = 2$, (1; –2; 2) при $t = -2$ и др.

Ответ: $\{(1;\ t;\ -t)\},\ t \in R$.

☺

☹ **П р и м е р 5.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 1; \\ 2x + 2y + 2z = 3; \\ 3x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$

😐 ***Решение.***

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$ (неверное числовое равенство).

Система не имеет решений (система несовместна).

Ответ: нет решений.

☺

3.5. Задания для самостоятельной работы

Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+4z=1 \\ -x+6y+z=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y-z=6 \\ 3x-y+2z=5 \\ 4x+2y-5z=9 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6x+2y-z=2 \\ 4x-y+3z=-3 \\ 3x+2y-2z=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+y+3z=13 \\ x+y+z=6 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 3x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 4x+3y+3z=4 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 4x+2y+3z=-2 \\ 2x+8y-z=8 \\ 9x+y+8z=0 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=5 \\ x_1+2x_2-2x_3=-6 \\ 3x_1+x_2-x_3=-1 \end{cases}$

Ответы:

1) $\{(1;1;0)\}$; 2) $\{(2;3;1)\}$; 3) $\{(-1;6;2)\}$; 4) $\{(1;2;3)\}$; 5) $\{(1;2;3)\}$; 6) $\{(2;-1;1)\}$; 7) нет решения (система несовместна); 8) нет решения (система несовместна); 9) $\left\{\frac{4}{5}; -\frac{17}{5}+t; t\right\}$; $t \in R$.

4. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

4.1. Определение предела функции

Определение 4.1. ***Предел функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** $x = a$ *– это число* B*, для которого по любому сколь угодно малому* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta(\varepsilon) > 0$*, что любое значение x, удовлетворяющее неравенствам* $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$*, удовлетворяет и неравенству* $|f(x) - B| < \varepsilon$*.*

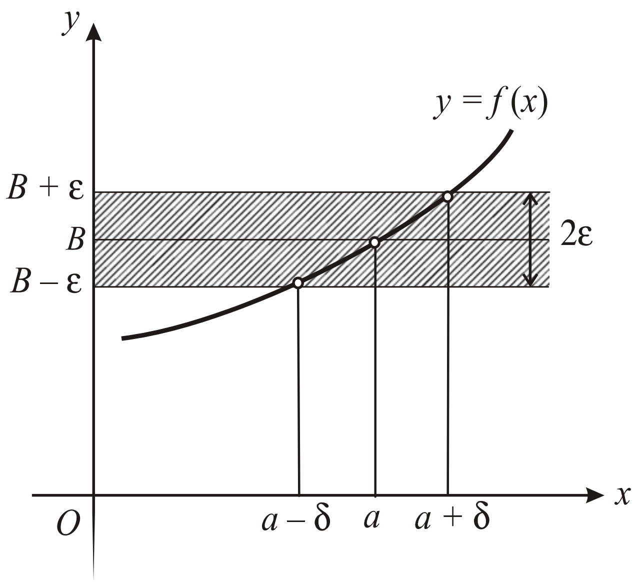

Рис. 4.1. Графическая интерпретация понятия *предел функции в точке*

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.

Определение 4. 1 можно записать в математических символах:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)=B\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0:\ \forall x: 0<|x-a|<\delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon\right).$$

Определение 4.2. ***Предел функции*** $y=f(x)$ ***в бесконечности*** *(при* $x\to\infty$*) – это число* B*, для которого по любому сколь угодно малому* $\varepsilon>0$ *найдётся такое* $M(\varepsilon)>0$*, что любое значение x, удовлетворяющее неравенству* $|x|>M$*, удовлетворяет и неравенству* $|f(x)-B|<\varepsilon$*.*

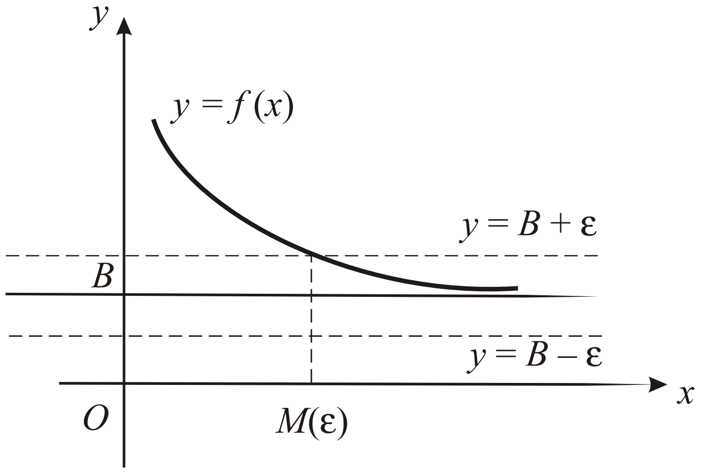

Рис. 4.2. Графическая интерпретация понятия
п р е д е л ф у н к ц и и в б е с к о н е ч н о с т и

Обозначение: $\lim_{x\to\infty} f(x)=B$.

Определение 4. 2 в математических символах:

$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x)=B\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0\ \exists M(\varepsilon)>0: \forall x: |x|>M(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon).$$

Определение 4.3. ***Бесконечный предел функции*** $y=f(x)$ *– это предел* $y=f(x)$ *в такой точке* $x=a$*, в окрестности которой по любому сколь угодно большому* $M>0$ *найдётся такое* $\delta(M)>0$*, что любое значение x, удовлетворяющее неравенствам* $0<|x-a|<\delta(M)$*, удовлетворяет и неравенству* $|f(x)|>M$*.*

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Определение 4. 3 в математических символах:

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = \infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall M > 0\ \exists \delta(M) > 0\colon\ \forall x\colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \mathrm{M}\right).$$

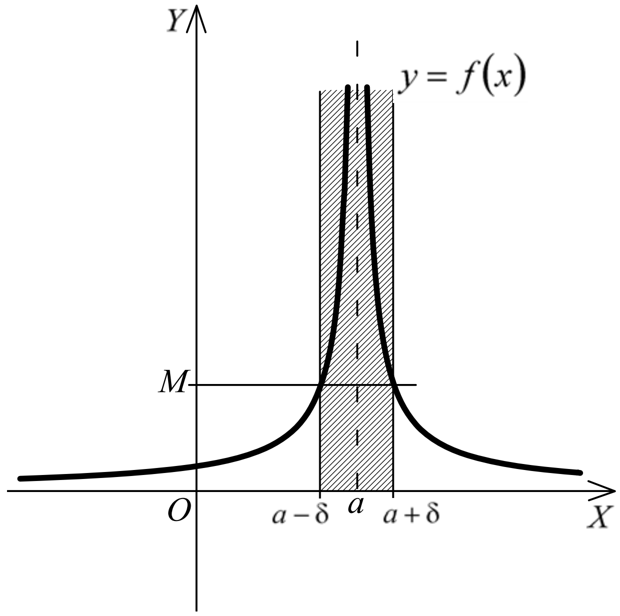

Рис. 4.3. Графическая интерпретация понятия
бесконечный предел функции

Необходимое и достаточное условия существования предела функции в точке x_0. *Для того, чтобы в точке x_0 (не обязательно из области определения функции $y = f(x)$) существовал предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовали и были равны между собой пределы слева и справа:*

1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ – существует предел слева;

2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ – существует предел справа;

3) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

4.2. Теоремы о пределах

Теорема 4.1. *Если функция имеет предел в точке* $x=a$*, то этот предел единственный.*

Теорема 4.2 (*о пределе промежуточной функции). Если* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=B$ *,* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=B$ *и* $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$ *в некоторой окрестности точки* $x=a$*, кроме, может быть, самой точки a, то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$ *.*

Теорема 4.3. *Если c – постоянная (*$c=\text{const}$*), то* $\lim\limits_{x\to a} c=c$ *.*

Теорема 4.4. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=B_1$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=B_2$*, то*

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)+\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=B_1+B_2$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=B_1\cdot B_2$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}=\dfrac{B_1}{B_2}$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x)\right]^{f_2(x)}=\left[\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}={B_1}^{B_2}$.

Следствие. $\lim\limits_{x\to a}\left[c\cdot f(x)\right]=c\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *где* $c=\text{const}$.

4.3. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Второй замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,}$$

где $e \approx 2{,}7183\ldots$ (основание натуральных логарифмов).

Часто используют следствия из второго замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$, $a>0$ $a\neq 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $(a=e)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$, $a>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ $(a=e)$.

4.4. Эквивалентные бесконечно малые

Определение 4.4. ***Бесконечно малая величина*** *в точке* $x=a$ *(при* $x\to a$*) – это такая функция* $\alpha=\alpha(x)$*, что* $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Например, функция $y=\sin x$ при $x\to 0$ (и вообще при $x\to\pi k$, $k\in Z$) и функция $y=2x-3$ при $x\to 3/2$ – бесконечно малые функции (или просто *бесконечно малые*).

Следует обратить внимание на условие $x\to a$ («привязка» к точке $x=a$) в определении бесконечно малой. Из примеров видно, что одна и та же функция может быть бесконечно малой в одной точке (при $x\to a$ или при $x\to\infty$) и не быть ею в других точках (при $x\to b\neq a$).

Определение 4.5. ***Эквивалентные бесконечно малые*** *(в точке $x = a$) – это такие бесконечно малые при $x \to a$ $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$, что $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$.*

Эквивалентность бесконечно малых обозначим знаком $\approx$, смысл которого *приближённо равно*.

Эквивалентные бесконечно малые (при $x \to 0$):

$$\sin x \approx x; \qquad (1 \pm x)^m - 1 \approx \pm mx; \qquad e^x - 1 \approx x;$$

$$1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}; \qquad \sqrt[n]{1 + x} - 1 \approx \frac{x}{n}; \qquad a^x - 1 \approx x \ln a;$$

$$\operatorname{tg} x \approx x; \qquad (a \pm x)^m - a^m \approx \pm \frac{mx}{a} a^m; \qquad \ln(1 \pm x) \approx \pm x.$$

4.5. Раскрытие неопределённостей

4.5.1. Раскрытие неопределённости вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Рассмотрим предел отношения двух многочленов степеней m и n (предел дробно-рациональной функции) при $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}, \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0).$$

Предел числителя $\lim\limits_{x \to \infty}\left(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m\right) = \infty$ и предел знаменателя $\lim\limits_{x \to \infty}\left(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n\right) = \infty$, следовательно, имеет место неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Раскроем её:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^m \left(a_0 + a_1/x + \ldots + a_m/x^m\right)}{x^n \left(b_0 + b_1/x + \ldots + b_n/x^n\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[\frac{x^m}{x^n} \cdot \frac{\left(a_0 + a_1/x + \ldots + a_m/x^m\right)}{\left(b_0 + b_1/x + \ldots + b_n/x^n\right)}\right] = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^m}{x^n}\right) \cdot \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(a_0 + a_1/x + \ldots + a_m/x^m\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(b_0 + b_1/x + \ldots + b_n/x^n\right)}.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_0 + a_1/x + ... + a_m/x^m\right) = a_0,\ \lim_{x\to\infty}\left(b_0 + b_1/x + ... + b_n/x^n\right) = b_0,$$

$$\text{а } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^m}{x^n}\right) = \lim_{x\to\infty} x^{m-n} = \begin{cases} \infty & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ 0 & (m < n) \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n} = \begin{cases} \infty & (m > n) \\ \dfrac{a_0}{b_0} & (m = n) \\ 0 & (m < n) \end{cases}.$$

4.5.2. Раскрытие неопределённости вида $\frac{0}{0}$

Если $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены и $P(a) = 0$ и $Q(a) = 0$, то нужно сократить дробь на $(x - a)$.

Если $P(x)$ и $Q(x)$ – иррациональные выражения, то нужно освободиться от иррациональности (в знаменателе или в числителе) или использовать метод введения новой переменной.

4.5.3. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$ с помощью эквивалентных бесконечно малых

Неопределённость можно раскрыть, используя эквивалентные бесконечно малые величины. Этот метод основан на теореме о том, что предел не изменится, если бесконечно малые заменить эквивалентными бесконечно малыми.

Для того, чтобы вычислить предел, необходимо заменить бесконечно малые в неопределённости эквивалентными, но более простыми, например, $\sin x \to x$ или $\left(e^x - 1\right) \to x$.

4.6. Непрерывность функции в точке

Определение 4.6(1). ***Непрерывная*** *в точке* x_0 ***функция*** *– это функция* $y = f(x)$*, предел которой при* $x \to x_0$ *равен значению функции при* $x = x_0$.

Определение означает выполнение трёх условий:

1) $\exists f(x_0)$ или $x_0 \in D(f)$;

2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 4.6(2). ***Непрерывная*** *в точке* x_0 ***функция*** *– это функция* $y = f(x)$*, предел приращения которой при* $x \to x_0$ *равен* 0*:*

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = 0.$$

Последнее равенство можно записать:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} \Delta f(x_0) = 0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

4.7. Решение типовых задач

☹ **Пример 1.** Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1}(6 - 2x) = 4$ и найти δ для $\varepsilon = 0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$.

😐 ***Решение.***

Используем определение предела. В данном примере $f(x) = 6 - 2x$; $a = 1$; $b = 4$. Для $\forall \varepsilon > 0$ найдём такое δ, что для $\forall x\ x \neq 1$, при которых $|x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|6 - 2x - 4| < \varepsilon$.

Решим это неравенство относительно $|x - 1|$, т.е. выразим $|x - 1|$ через ε.

Тогда $|6 - 2x - 4| < \varepsilon \Rightarrow |2 - 2x| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Итак, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Если $|x - 1| < \delta$, то $|6 - 2x - 4| < \varepsilon$, это и означает, что $\lim\limits_{x \to 1}(6 - 2x) = 4$.

Для каждого ε можно найти соответствующее значение δ. Если $\varepsilon = 0{,}1$ то $\delta = 0{,}05$; если $\varepsilon = 0{,}01$, то $\delta = 0{,}005$; если $\varepsilon = 0{,}001$, то $\delta = 0{,}0005$.

Ответ: $\delta = 0{,}05$ при $\varepsilon = 0{,}1$; $\delta = 0{,}005$ при $\varepsilon = 0{,}01$; $\delta = 0{,}0005$ при $\varepsilon = 0{,}001$.

☺

☹ **П р и м е р ы 2.** Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+3x+1\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+8}{x^2-9}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\left(1+2x\right)^{x^2-7}$.

😐 ***Решения.***

1) Выражение в скобках – сумма одночленов. Используем теорему о пределе суммы:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+3x+1\right)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}1=4+6+1=11.$$

2) Используем теоремы о пределах частного и суммы:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+8}{x^2-9}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-5x+8\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-9\right)}=\frac{1-5+8}{1-9}=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}.$$

3) По теореме 7: $\lim\limits_{x\to 3}\left(1+2x\right)^{x^2-7}=\lim\limits_{x\to 3}\left(1+2x\right)^{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-7\right)}=7^2=49$.

Ответы: 1) 11; 2) $-\dfrac{1}{2}$; 3) 49.

☺

☹ **П р и м е р ы 3.** Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5}{x^5+3x^4+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x+5)(2x-1)}{x^3-2x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x+5}{3x^2-5x+1}$.

😐 ***Решения.*** В этих примерах для вычисления предела необходимо раскрыть неопределённость типа $\dfrac{\infty}{\infty}$.

1) Вынесем за скобки x^2 в числителе и x^5 в знаменателе:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x^5+3x^4+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}{x^5\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^5}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^5}\right)}=0\cdot\frac{1}{1}=0.$$

2) Вынесем за скобки x из каждого сомножителя в числителе и x^3 в знаменателе:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x+5)(2x-1)}{x^3-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{5}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{5}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=1\cdot\frac{1\cdot 1\cdot 2}{1}=2\,.$$

3) Вынесем за скобки x^4 в числителе и x^2 в знаменателе:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x+5}{3x^2-5x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(1-\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^2}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\left(\lim_{x\to\infty}x^2\right)\cdot\frac{1}{3}=\infty\,.$$

Ответы: 1) 0; 2) 2; 3) ∞.

☺

☹ **Примеры 4.** Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$; 4) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt[3]{y+1}-1}$.

😐 ***Решения.*** В этих примерах надо раскрыть неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$.

1) Разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь на $(x-3)$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}\,.$$

2) <u>Способ 1</u>. Освободимся от иррациональности в числителе. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое числителю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2}{2}=1.$$

<u>Способ 2</u>. Заменим выражения $\sqrt{1\pm x}$ в числителе на эквивалентные $\sqrt{1\pm x}\approx 1\pm\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x/2)-(1-x/2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

3) <u>Способ 1</u>. Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое числителю, и выражение, сопряжённое знаменателю.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{\sqrt{2+7}+3}{\sqrt{2+2}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

<u>Способ 2</u>. Бесконечно малые в числителе и знаменателе дроби заменим на эквивалентные. Для этого выполним некоторые преобразования:

$$\sqrt{x+2}-2=\sqrt{4+(x-2)}-2=\sqrt{4}\cdot\sqrt{1+\frac{x-2}{4}}-2\approx 2\cdot\left(1+\frac{x-2}{8}\right)-2=\frac{x-2}{4}.$$

Аналогичные преобразования дают:

$$\sqrt{x+7}-3=\sqrt{9+(x-2)}-3=\sqrt{9}\cdot\sqrt{1+\frac{x-2}{9}}-3\approx 3\cdot\left(1+\frac{x-2}{18}\right)-3=\frac{x-2}{9}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)/4}{(x-2)/9}=\lim_{x\to 2}\frac{9}{4}=\frac{9}{4}=\frac{3}{2}.$$

4) <u>Способ 1</u>. Введём новую переменную t такую, что $1+y=t^6$. Тогда $t\to 1$ при $y\to 0$, $\sqrt{1+y}=t^3$ и $\sqrt[3]{1+y}=t^2$:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt[3]{y+1}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}.$$

<u>Способ 2</u>. Бесконечно малые в числителе и знаменателе дроби заменим на эквивалентные:

$$\sqrt{y+1}-1=\sqrt{1+y}-1\approx y/2;$$
$$\sqrt[3]{y+1}-1=\sqrt[3]{1+y}-1\approx y/3.$$

Тогда

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt[3]{y+1}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{y/2}{y/3}=\lim_{t\to 1}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Ответы: 1) $\frac{1}{6}$; 2) 1; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$.

☺

☹ **Примеры 5.** Вычислить пределы

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2};\quad 3)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x};$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x};\quad 5)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}.$$

😐 ***Решения.***

1) Способ 1. Используем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

Способ 2. Используем эквивалентную бесконечно малую $\operatorname{tg}x\approx x$ при $x\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

2) Способ 1. Выполним тождественные преобразования и используем теоремы о пределах и первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=$$
$$=2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=2\cdot 1\cdot 1=2.$$

Способ 2. Используем эквивалентную бесконечно малую: при $x\to 0$ $1-\cos 2x\approx\frac{(2x)^2}{2}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x^2)/2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(2\frac{x^2}{x^2}\right)=2.$$

3) Используем свойства степени и второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3}=e^{3}.$$

4) Используем свойства степени и второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=e^{2}.$$

5) Преобразуем дробь, выделив целую часть (разделим числитель на знаменатель), а затем используем свойства степени и второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-2)+5}{x-2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{5(2x+1)}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x+5}{x-2}}=e^{10}.$$

Ответы: 1) 1; 2) 2; 3) e^3; 4) e^2; 5) e^{10}.

☺

☹ **П р и м е р ы 6.** Доказать непрерывность функций

1) $y=x^2$; 2) $y=\sin x$.

😐 ***Решения.***

1) Используем второе определение непрерывности и найдём приращение функции по приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$, а затем предел приращения функции при условии $\Delta x\to 0$:

$$\Delta f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2;$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)=0.$$

Мы не накладываем никаких ограничений на *x*. Следовательно, функция $y=x^2$ непрерывна в любой точке *x* области определения, т.е. при $\forall x\in R$.

2) Используем второе определение непрерывности и найдём предел приращения функции:

$$\Delta f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot 0\cdot\cos x=0$$

Так как нет никаких ограничений на переменную x, то функция $y=\sin x$ непрерывна во всей области определения, т.е. при $\forall x\in R$.

☺

4.8. Задания для самостоятельной работы

1) Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{x-3}=12$. Найти δ для $\varepsilon=0{,}1$, для $\varepsilon=0{,}01$.

Вычислить пределы:

2) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+5x-2)$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$;

6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$; 7) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$; 8) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+2}-2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3-\sqrt[3]{x+22}}{x-5}$; 10) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt[4]{x+11}-2}{x-5}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x+1}$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$; 17) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{2x^2+3x+4}$; 18) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{x^2+3}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 2x}{\sin 5x-\sin 4x}$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$.

21) Доказать непрерывность функции $y=\cos x$.

Ответы:

1) 0,05; 0,005; 2) 20; 3) –3; 4) –2; 5) $-\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{6}$; 7) $\frac{1}{6}$; 8) – 2; 9) $-\frac{1}{27}$; 10) $\frac{1}{32}$; 11) $\frac{3}{5}$; 12) $e^{3/2}$; 13) e^{-2}; 14) 3; 15) 4; 16) ½; 17) 0; 18) ∞; 19) 1; 20) 20.

5. ПРОИЗВОДНАЯ

5.1. Основные понятия

Определение 5.1. Производная *функции* $y = f(x)$ *в точке* x *– это предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.*

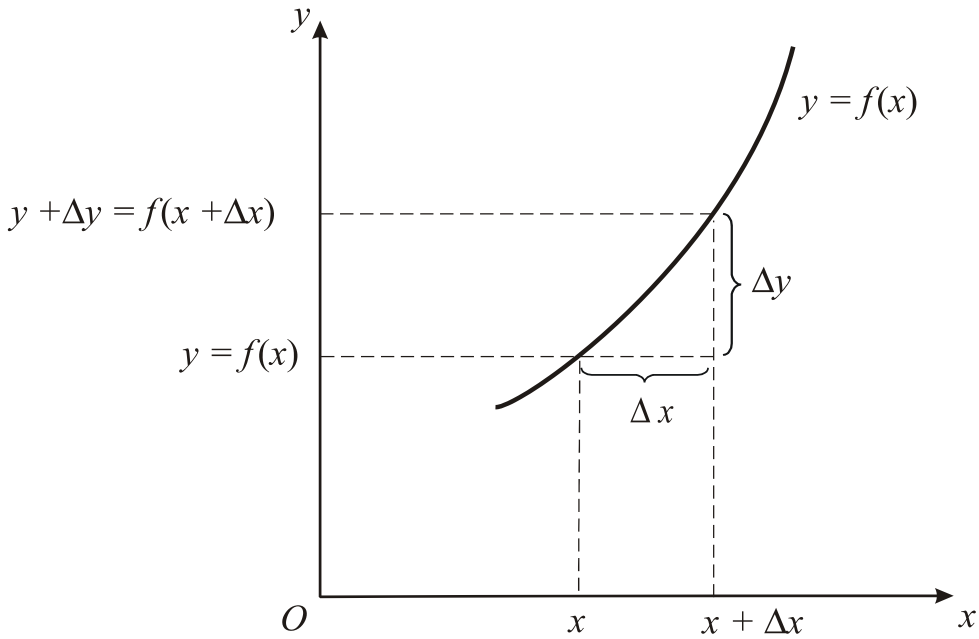

Рис. 5.1. Приращение аргумента Δx и функции Δy

Если Δx – приращение аргумента в точке x,
а $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ – приращение функции в точке x, то производная функции $y = f(x)$ в точке x

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Производная функции – это тоже функция. Производную этой функции (если она существует) также можно вычислить. Если $y' = f'(x)$ – производная функции $y = f(x)$, то производную производной $(y')' = [f'(x)]'$ называют второй производной.

Обозначения второй производной: y'', y''_x, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, $f''(x)$, $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 численно равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha.$$

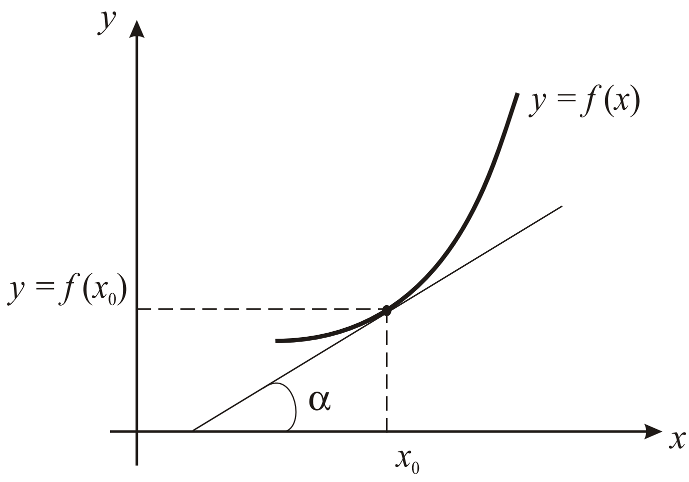

Рис. 5.2. Геометрический смысл производной: производная численно равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке вычисления производной

Дифференциал функции

Определение 5.2. ***Дифференциалом функции*** $y=f(x)$ *называют произведение производной этой функции* $f'(x)$ *на приращение аргумента* Δx :

$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

Дифференциал аргумента dx равен приращению аргумента Δx : $dx = \Delta x$, поэтому

$$dy = f'(x)dx.$$

5.2. Правила дифференцирования

1) $(u+v)' = u' + v'$ (производная суммы);

2) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ (производная произведения);

3) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, c=const (постоянный множитель можно выносить за знак производной);

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ (производная частного).

5.3. Производная сложной функции

Пусть $y = y\,[u(x)]$ – сложная функция, тогда

формула производной сложной функции:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Этой формулой можно пользоваться, если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y(u)$ дифференцируема в точке u.

Формулу производной сложной функции можно обобщить для произвольного числа n функций. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(z)$, $z = \psi(x)$ и $y = f\{\varphi[\psi\,(x)]\}$, причём существуют производные f'_u; φ'_z; ψ'_x, то $y'_x = y'_u \cdot u'_z \cdot z'_x$.

5.4. Производная обратной функции

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ – взаимно обратные дифференцируемые функции.

Легко видеть, что $\varphi\left[\,y\,\right]=\varphi\,[\,\underbrace{f(x)}_{y}\,]=x$. Дифференцируя обе части по x и используя правило дифференцирования сложной функции, получим формулу производной обратной функции:

$$\varphi'_y\cdot f'_x=1\Rightarrow f'_x=\frac{1}{\varphi'_y}\quad(\varphi'_y\neq 0).$$

5.5. Таблица производных

Таблица производных имеет следующий вид (функция $u=u(x)$ – произвольная дифференцируемая функция, для которой существует производная $u'=\dfrac{du}{dx}$):

$c'=0$ (где c=const)	
$\left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$	$(\mathrm{tg}\,u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$\left(a^u\right)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$; $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$	$(\mathrm{ctg}\,u)'=\dfrac{-1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$; $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$	$(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	$(\arccos u)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	$(\mathrm{arctg}\,u)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

5.6. Уравнение касательной и нормали к графику функции

Уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0;\,f(x_0))$

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Уравнение нормали к графику функции в точке $(x_0;\, f(x_0))$

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

5.7. Решение типовых задач

☹ **Примеры 1.** Найти $f'(x)$ при помощи определения производной.

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$; 3) $f(x) = \sin x$.

😐 ***Решения.***

1) $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

2) $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3) $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Ответы: 1) $2x$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 3) $\cos x$.

☺

☹ **Примеры 2**. Пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, найти производные:

1) $y = 2x^2 - 3x$; 2) $y = \left(2x^2 - 5x + 1\right)\cos x$; 3) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

😐 ***Решения.***

1) Используем правила дифференцирования 2 и 3 (см. раздел 5.2):

$$\left(2x^2 - 3x\right)' = 2\left(x^2\right)' - 3x' = 4x - 3.$$

2) Используем правило дифференцирования произведения, полагая

$$U = 2x^2 - 5x + 1, \;\; V = \cos x.$$

Тогда

$$\left[\left(2x^2 - 5x + 1\right)\cos x\right]' = \left(2x^2 - 5x + 1\right)' \cos x + \left(2x^2 - 5x + 1\right)\left(\cos x\right)' =$$
$$= \left(4x - 5\right)\cos x + \left(2x^2 - 5x + 1\right)\left(-\sin x\right).$$

3) Используем правило дифференцирования частного, полагая

$$U = x^2 - 1, \;\; V = x^2 + 1.$$

Тогда

$$\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{\left(x^2 - 1\right)'\left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)'}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{2x\left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right)2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} =$$
$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2 + 1\right)^2}.$$

Ответы: 1) $4x - 3$; 2) $\left(4x - 5\right)\cos x + \left(2x^2 - 5x + 1\right)\left(-\sin x\right)$;

3) $\dfrac{4x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$.

☺

☹ **Примеры 3.** Вычислить производные сложных функций

1) $y = \sin 5x$; 2) $y = \left(x^2 + x + 1\right)^{100}$;

3) $y = 8^{3x^2 + x + 1}$; 4) $y = \sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$.

😐 ***Решения.***

1) Полагаем $u = 5x$, тогда $y = \sin u$,

$$u'_x = 5, \qquad y'_u = \cos u.$$

По формуле производной сложной функции

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\cos u) \cdot 5 = 5\cos 5x .$$

2) Полагаем, что $u = x^2 + x + 1$. Тогда $u'_x = 2x + 1$.

$y = u^{100}$; $y'_u = 100 \cdot u^{99}$. Следовательно,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 100 \cdot u^{99} \cdot (2x+1) = 100\left(x^2 + x + 1\right)^{99}(2x+1).$$

3) Пусть $u = 3x^2 + x + 1$; $u'_x = 6x + 1$, тогда $y = 8^u$, $y'_u = 8^u \cdot \ln 8$,

$$y'_x = 8^u \ln 8 \cdot (6x+1) = 8^{3x^2+x+1} \cdot \ln 8 \cdot (6x+1).$$

4) В этом случае применим правило дифференцирования сложной функции дважды:

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}} \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{4\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}.$$

Ответы: 1) $5\cos 5x$; 2) $100\left(x^2 + x + 1\right)^{99}(2x+1)$; 3) $\dfrac{1}{4\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}$.

☺

☹ **П р и м е р 4.** Найти производную функции

$$y = \frac{1 + x^2}{\sqrt[3]{x^4} \cdot (\sin x)^7}; \quad x \neq \pi k,\ k \in Z .$$

😐 ***Решение.*** При дифференцировании функции, являющейся произведением или частным нескольких функций, удобно предварительно прологарифмировать её.

Рассмотрим функцию $z = \ln y$. Тогда $z' = \dfrac{1}{y} \cdot y'$ и $y' = y \cdot z'$,

где $z = \ln y = \ln \dfrac{1 + x^2}{\sqrt[3]{x^4}(\sin x)^7} = \ln\left(1 + x^2\right) - \frac{4}{3}\ln x - 7\ln(\sin x)$.

Тогда $z' = \dfrac{2x}{1 + x^2} - \dfrac{4}{3x} - 7\operatorname{ctg} x$ и получаем

$$y' = y \cdot z' = \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4}(\sin x)^7} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - 7\operatorname{ctg} x\right).$$

Ответ:

$$\frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4}(\sin x)^7} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - 7\operatorname{ctg} x\right).$$

☺

☹ **Пример 5.** Вычислить производную функции $y = \arcsin x$.

😐 ***Решение.*** $y = \arcsin x$, обратная функция $x = \sin y$.
Чтобы найти производную, применим формулу производной обратной функции $f'_x = \dfrac{1}{\varphi'_y}$ ($\varphi'_y \neq 0$):

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

☺

☹ **Примеры 6.** Найти уравнение касательной и нормали к графику функции:

1) $y = x^2$ в точке $x_0 = 3$; 2) $y = x^3 - 2x + 1$ в точке $x_0 = 2$.

😐 ***Решения.***

Находим уравнения касательной и нормали, используя формулу касательной к графику функции

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

и формулу нормали к графику функции

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

1) В точке x_0 $f(x_0) = 3^2 = 9;$ $f'(x_0) = 2 \cdot 3 = 6$.

Уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 9 + 6(x-3) \Rightarrow y = 6x - 9.$$

Уравнение нормали:

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)=9-\frac{x-3}{6}\Leftrightarrow y=-x/6+9{,}5.$$

2) В точке $x_0=2$ $\quad f(x_0)=2^3-2\cdot 2+1=5;\quad f'(x_0)=3\cdot 2^2-2=10$.

Уравнение касательной:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=5+10(x-2)\Rightarrow y=10x-15.$$

Уравнение нормали:

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)=5-\frac{x-2}{10}\Rightarrow y=-0{,}1x+5{,}2.$$

Ответы:

1) уравнение касательной $y=6x-9$;

уравнение нормали $y=x/6+19/2$;

2) уравнение касательной $y=10x-15$;

уравнение нормали $y=-0{,}1x+5{,}2$.

☺

☹ **П р и м е р ы 7.** Найти уравнение касательной в точке $x_0=0$ к графику функции

1) $y=\sin x$; $\qquad$ 2) $y=\arcsin x$.

😐 ***Решения.***

1) В точке $x_0=0$ $\; f(x_0)=\sin 0=0;\; f'(x_0)=\cos 0=1$.

Уравнение касательной:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0+1(x-0)\Rightarrow y=x$$

2) В точке $x=0$ $\quad f(0)=\arcsin 0=0;\quad f'(0)=\frac{1}{\sqrt{1-0}}=1.$

Уравнение касательной:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0+1(x-0)=x\Rightarrow y=x.$$

Ответы: 1) $y=x$; $\quad$ 2) $y=x$.

☺

☹ **П р и м е р ы 8.** Найти дифференциал функции

1) $y=x^3$; $\quad$ 2) $y=\sqrt{x^2-1}$; $\quad$ 3) $y=\left(x^3-2\right)^4$.

😐 ***Решения***. Находим дифференциал функции, используя формулу

$$df(x)=f'(x)dx.$$

1) $y = x^3$; $y' = 3x^2$; $dy = 3x^2 dx$.

2) $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Находим производную по формуле производной сложной функции: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Тогда $dy = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

3) $y = (x^3 - 2)^4 \Rightarrow y' = 4\left(x^3 - 2\right)^3 \cdot \left(x^3\right)' = 4 \cdot 3x^2\left(x^3 - 2\right)^3 = 12x^2\left(x^3 - 2\right)^3$.

$$dy = 12x^2\left(x^3 - 2\right)^3 dx.$$

Ответы: 1) $3x^2dx$; 2) $\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$; 3) $12x^2\left(x^3 - 2\right)^3 dx$.

☺

5.8. Задания для самостоятельной работы

1) Найти производную функции $y = x^5 - x^4 + 9$ и вычислить её значения в точках x=0 и x=1.

Найти производные:

2) $y = \left(x^2 - 1\right)\left(3x^2 + 5\right)$; 3) $y = \left(2x^3 - 3\right)\left(2x^3 - 1\right)$; 4) $y = \dfrac{x^2 - 6}{3x + 1}$; 5) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$;
6) $y = \dfrac{3x - 2}{4x + 5}$; 7) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$; 8) $y = \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 + x + 1}$; 9) $y = \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{3x^3}$;
10) $y = \sqrt[3]{9x^2} - \sqrt[4]{7x^3}$; 11) $y = 4\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x^2} - 8\sqrt[4]{x^3}$; 12) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;
13) $y = \operatorname{tg} x - x$; 14) $y = x\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$; 15) $y = t^2 \cdot \sqrt[3]{t}$; 16) $y = 7\cos x - 5\sin x - 9$;
17) $y = \log_3(4x - 2)$; 18) $y = \ln\left(x^3\right)$; 19) $y = (\ln x)^3$; 20) $y = \sqrt{1 + 2\sin x}$;
21) $y = \sin^2 2x$; 22) $y = \sin x^3$; 23) $y = (2 - 3x)^5$; 24) $y = \sqrt[4]{(5 - 8x)^3}$.

Найти дифференциал функции:

25) $y = x^2 + 5x - 7$; 26) $y = \dfrac{x + 2}{x + 3}$; 27) $y = e^{\sin 3x}$; 28) $y = \cos 5x$.

Написать уравнение касательной и нормали к графику функции:

29) $y = x^2 + 4x + 5$ в точке $x_0 = -3$;

30) $y = 3x^2 + x$ в точке $x_0 = -1$.

31) Написать уравнение касательных, проведённых к графику функции $y = x^3 - 4x$ в точках его пересечения с осью *OX*.

Ответы:

1) $y' = 5x^4 - 4x^3$; $y'(0) = 0$; $y'(-1) = 9$; 2) $4x(3x^2 + 1)$; 3) $24x^2(x^3 - 1)$;

4) $\dfrac{3x^2 + 2x + 18}{(3x+1)^2}$; 5) $-\dfrac{4x}{(x^2 - 1)^2}$; 6) $\dfrac{23}{(4x+5)^2}$; 7) $\dfrac{10x}{(x^2+4)^2}$;

8) $-\dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$; 9) $-\dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}$; 10) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{9}{x}} - \dfrac{3}{4}\sqrt[4]{\dfrac{7}{x}}$;

11) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{6}{\sqrt[4]{x}}$; 12) $\dfrac{4}{\sin^2 2x}$; 13) $\mathrm{tg}^2 x$; 14) $\dfrac{11}{6}\sqrt[6]{x^5}$;

15) $\dfrac{7}{3}\, t\sqrt[3]{t}$; 16) $-7\sin x - 5\cos x$; 17) $\dfrac{2}{(2x-1)\ln 3}$; 18) $\dfrac{3}{x}$;

19) $\dfrac{3(\ln x)^2}{x}$; 20) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + 2\sin x}}$; 21) $2\sin 4x$;

22) $3x^2\cos x^3$; 23) $-15(2-3x)^4$; 24) $-\dfrac{6}{\sqrt[4]{5-8x}}$;

25) $(2x+5)dx$; 26) $\dfrac{dx}{(x+3)^2}$; 27) $3e^{\sin 3x}\cos 3x dx$; 28) $-5\sin 5x dx$;

29) $y = -2x - 4$; $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{7}{2}$; 30) $y = -5x - 3$; $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{11}{5}$;

31) $y = 8x + 16$; $y = -4x$; $y = 8x - 16$.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

6.1. Возрастание и убывание функции

Определение 6.1. ***Возрастающая*** *на промежутке* (a, b) ***функция*** *– это такая функция* $y = f(x)$*, что для любых* $x_1, x_2 \in (a, b)$ *из условия* $x_1 < x_2$ *следует* $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 6.2. ***Убывающая*** *на промежутке* (a, b) ***функция*** *– это такая функция* $y = f(x)$*, что для любых* $x_1, x_2 \in (a, b)$ *из условия* $x_1 < x_2$ *следует* $f(x_1) > f(x_2)$.

Смысл этих определений иллюстрируют рис. 6.1 и 6.2.

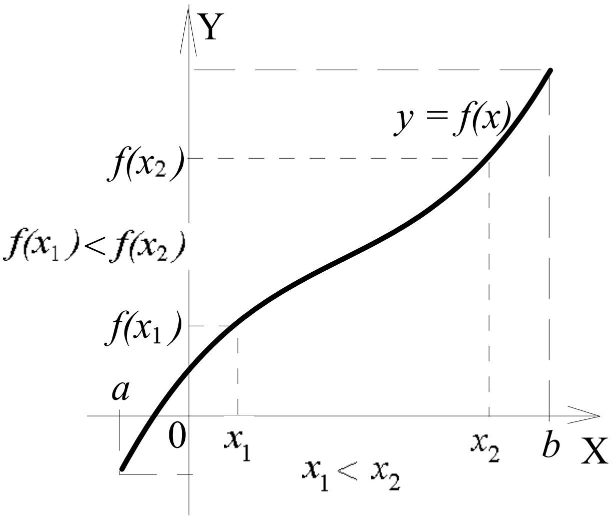

Рис. 6.1. График возрастающей функции

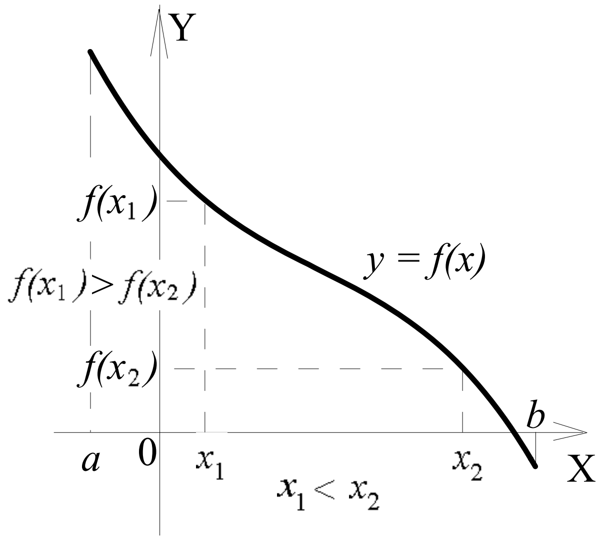

Рис. 6.2. График убывающей функции

Теорема 6.1. *Для того, чтобы функция была возрастающей (убывающей) на промежутке* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы её производная была больше (меньше)* 0 *на этом промежутке.*

$$\left(y = f(x) \text{ возрастает при } x \in [a,b]\right) \Leftrightarrow \left(f'(x) > 0 \text{ при } \forall\, x \in [a,b]\right)$$

$$\left(y = f(x) \text{ убывает при } x \in [a,b]\right) \Leftrightarrow \left(f'(x) < 0 \text{ при } \forall\, x \in [a,b]\right)$$

6.2. Точки экстремумов

Определение 6.3. ***Точка максимума*** *функции* $f(x)$ *– это значение аргумента* x_0*, для которого существует такое* $\delta > 0$*, что для всех x, удовлетворяющих условию* $0 < |x - x_0| < \delta$*, выполняется неравенство* $f(x) < f(x_0)$.

Определение 6.4. ***Точка минимума*** *функции* $f(x)$ *– это значение аргумента* x_0*, для которого существует такое* $\delta > 0$*, что для всех x, удовлетворяющих условию* $0 < |x - x_0| < \delta$*, выполняется неравенство* $f(x) > f(x_0)$.

Понятия *максимума* и *минимума функции* иллюстрируют рис. 6.3 и 6.4.

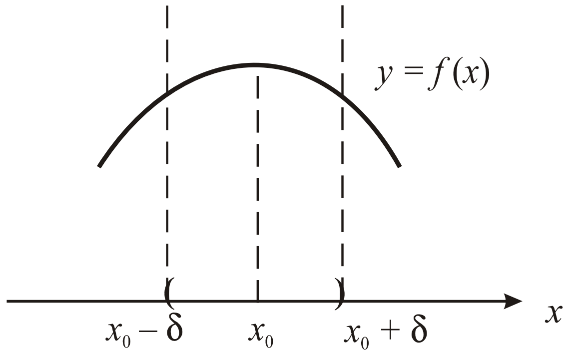

Рис. 6.3. Максимум функции $y = f(x)$ при $x = x_0$

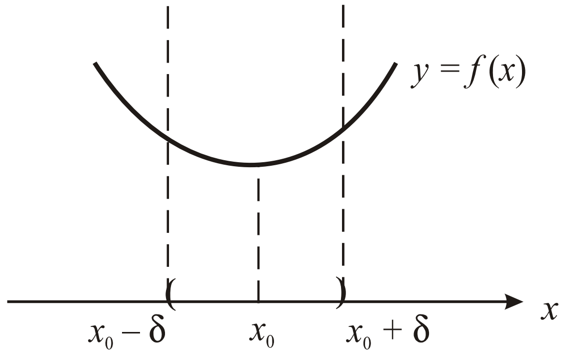

Рис. 6.4. Минимум функции $y = f(x)$ при $x = x_0$

Минимумы и максимумы функции называют общим термином *экстремумы*. Соответственно точки минимума и максимума называют *точками экстремума*.

Определение 6.5. ***Критические точки*** *функции* $f(x)$ *– это точки области определения функции, в которых производная данной функции равна нулю или не существует.*

($f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, $x_0 \in D$) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (x_0 – критическая точка функции $y = f(x)$)

Определение 6.6. ***Стационарная точка*** *функции* $f(x)$ *– это точка, в которой производная данной функции равна нулю.*

($f'(x_0) = 0$) $\Leftrightarrow$ (x_0 – стационарная точка функции $y = f(x)$)

Стационарная точка – частный случай критической точки. В точках x_0 на рис. 6.3 и 6.4 $f'(x_0) = 0$, следовательно, x_0 – стационарные точки функции $y = f(x)$.

Теорема 6.2 (необходимое условие существования экстремума функции). *Если точка x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$, то в этой точке производная или не существует, или $f'(x_0) = 0$.*

(x_0 – точка экстремума $y = f(x)$) $\Rightarrow$ ($f'(x_0)$ не существует или $f'(x_0) = 0$)

Теорема 6.3 (достаточное условие существования экстремума функции). *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и в этой точке производная меняет знак, то x_0 – точка экстремума.*

($y = f(x)$ непрерывна в x_0 и $f'(x_0 - 0) \cdot f'(x_0 + 0) < 0$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (x_0 – точка экстремума $y = f(x)$)

x	$(x_0 - \delta; x_0)$	$(x_0;\ x_0 + \delta)$
$f'(x)$	–	+
x_0 – точка минимума		

x	$(x_0 - \delta; x_0)$	$(x_0;\ x_0 + \delta)$
$f'(x)$	+	–
x_0 – точка максимума		

Следует обратить внимание, что дифференцируемость функции в точке экстремума по этому условию не требуется.

Если функция имеет экстремум в точке x_0, то x_0 – критическая точка. Но если x_1 – критическая точка, то функция не обязательно имеет экстремум в этой точке.

6.3. Схема исследования функции на экстремум

Чтобы найти экстремумы функции $y = f(x)$, надо:

1) найти $f'(x)$;
2) найти критические точки ($f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует при $x_0 \in D$, D – область определения функции);
3) исследовать знаки $f'(x_0 - 0)$ и $f'(x_0 + 0)$;
4) сделать заключение и выбрать точки экстремума:

если $f'(x_0 - 0) > 0$ и $f'(x_0 + 0) < 0$, то в точке x_0 максимум;
если $f'(x_0 - 0) < 0$ и $f'(x_0 + 0) > 0$, то в точке x_0 минимум;

если $f'(x_0 - 0) \cdot f'(x_0 + 0) > 0$, то экстремума в точке x_0 нет;
5) найти экстремумы функции.

6.4. Выпуклости и точки перегиба кривой

Если график функции $y = f(x)$ лежит не ниже касательной к графику, построенной при любом значении $x \in (a;\, b)$, то говорят, что график $y = f(x)$ на интервале $(a;\, b)$ выпуклый вниз (имеет выпуклость вниз) (рис. 6.5).

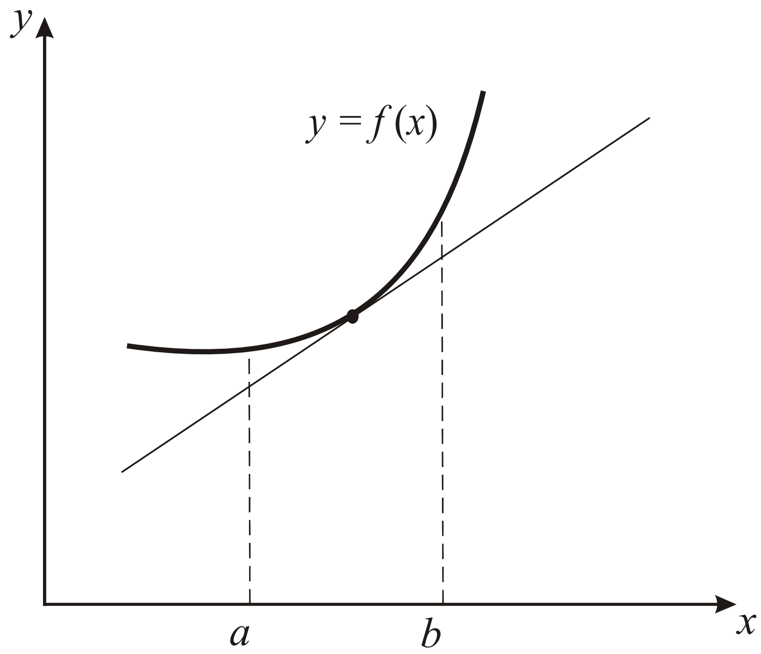

Рис. 6.5. Выпуклость вниз: график функции на интервале $(a;\, b)$ не ниже любой касательной

Если график функции $y = f(x)$ лежит не выше касательной к графику, построенной при любом значении $x \in (a;\, b)$, то говорят, что график $y = f(x)$ на интервале $(a;\, b)$ выпуклый вверх (имеет выпуклость вверх) (рис. 6.6).

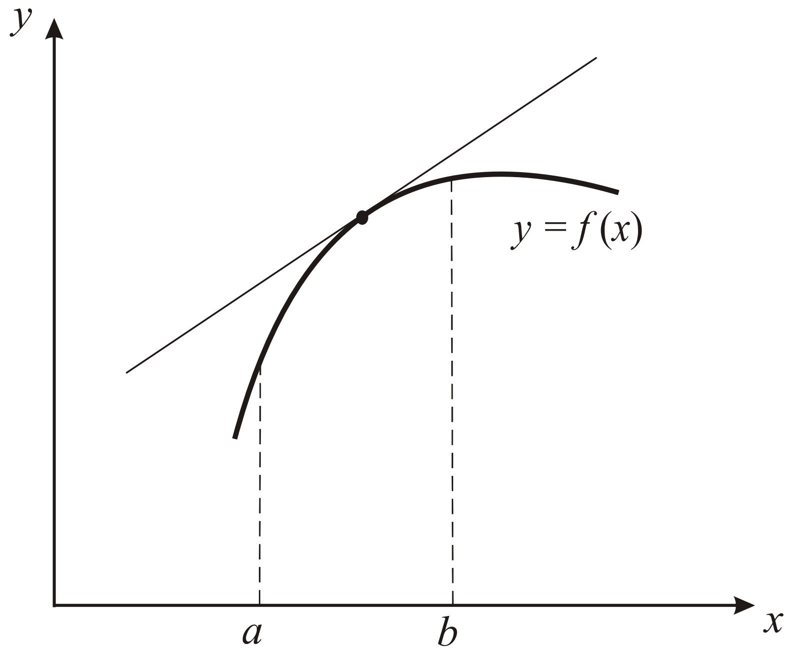

Рис. 6.6. Выпуклость вверх: график функции
на интервале $(a; b)$ не выше любой касательной

Теорема 6.4. *Для того, чтобы график дважды дифференцируемой функции* $y = f(x)$ *имел выпуклость вверх (вниз) на промежутке* $(a; b)$*, необходимо и достаточно чтобы вторая производная* $y = f(x)$ *на* $(a; b)$ *была меньше (больше)* 0.

(График $y = f(x)$ выпуклый вверх при $x \in (a, b)) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\, f''(x) < 0 \text{ при } \forall x \in (a, b));$$

(График $y = f(x)$ выпуклый вниз при $x \in (a, b)) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\, f''(x) > 0 \text{ при } \forall x \in (a, b)).$$

Определение 6.7. ***Точка перегиба*** *графика функции – это точка* $(x_0; f(x_0))$*, для которой при любом сколь угодно малом* δ *существует окрестность* $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ *точки* x_0 *такая, что для* $x < x_0$ *из этой окрестности выпуклость кривой направлена в одну сторону, а при* $x > x_0$ *– в противоположную.*

Иными словами, точка перегиба графика – это точка, разделяющая интервалы, в которых функция имеет выпуклость разного характера. Точка M_0 на рис. 6.7 – *точка перегиба*.

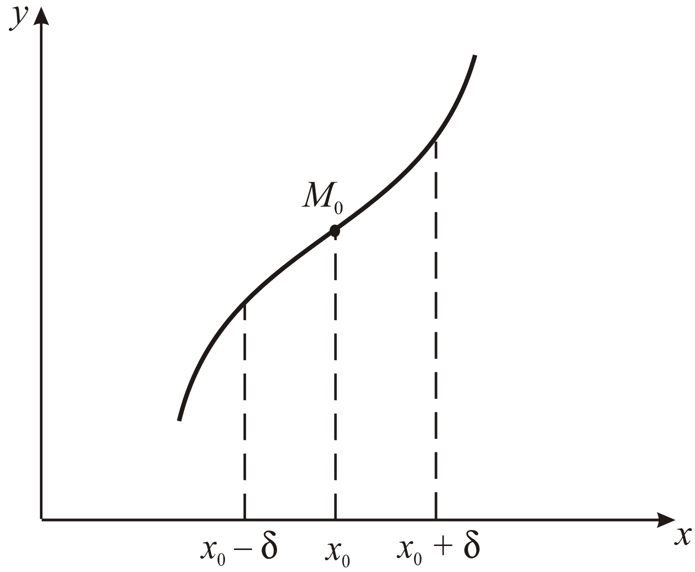

Рис. 6.7. Точка перегиба графика функции M_0:
(при $x_0 - \delta < x < x_0$ – выпуклость вверх,
при $x_0 < x < x_0 + \delta$ – выпуклость вниз)

Достаточное условие перегиба. *Для того, чтобы график дважды дифференцируемой функции* $y = f(x)$ *имел в точке* $(x_0; f(x_0))$ *перегиб, достаточно, чтобы вторая производная* $f''(x_0)$ *этой функции при переходе через точку* x_0 *меняла знак (* $f''(x_0 - 0) \cdot f''(x_0 + 0) < 0$ *).*

Это условие можно сформулировать в форме теоремы 6.5.

Теорема 6.5. *Если* $f''(x_0) = 0$ *или* $f''(x_0)$ *не существует и при переходе через точку* x_0 *производная* $f''(x_0)$ *этой функции меняет знак (* $f''(x_0 - 0) \cdot f''(x_0 + 0) < 0$ *), то точка* $(x_0; f(x_0))$ *– точка перегиба графика функции* $y = f(x)$.

Необходимое условие перегиба. *Для того, чтобы график дважды дифференцируемой функции* $y = f(x)$ *имел в точке* $(x_0; f(x_0))$ *перегиб, необходимо, чтобы* $f''(x_0) = 0$.

Для по крайней мере дважды дифференцируемой функции критическая точка, не являющаяся точкой экстремума, является точкой перегиба графика функции.

6.5. Исследование экстремумов функции с помощью второй производной

Чтобы найти экстремумы функции $y = f(x)$ с помощью второй производной, надо:

1) найти $f'(x)$;
2) найти *стационарные точки* функции $y = f(x)$ (точки x_0, в которых $f'(x_0) = 0$);
3) найти $f''(x)$;
4) исследовать знак $f''(x)$;
5) сделать заключение и выбрать точки экстремума:
   - если $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет минимум;
   - если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет максимум;
   - если $f''(x_0) = 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ экстремумов не имеет (x_0 – точка перегиба графика функции);
6) найти экстремумы функции.

Исследование экстремумов функции с помощью второй производной возможно только для по крайней мере дважды дифференцируемых функций, то есть только для стационарных точек.

В нижеприведённой таблице собраны все необходимые и достаточные условия и соответствующие им теоремы, которые используют при исследовании функций с помощью производных.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ И ТЕОРЕМЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ

Свойство функции: **возрастание** (**убывание**)	
Необходимое условие возрастания (убывания)	Теорема
Для того, чтобы дифференцируемая функция $y = f(x)$ возрастала (убывала) на промежутке X, **необходимо**, чтобы $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in X$	**Если** дифференцируемая функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, **то** $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in X$
Достаточное условие возрастания (убывания)	Теорема
Для того, чтобы функция $y = f(x)$ возрастала (убывала) на промежутке X, **достаточно**, чтобы $f'(x)$ существовала и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in X$	**Если** $f'(x)$ существует и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in X$, **то** функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X

Свойство функции: **локальный экстремум**	
Необходимое условие существования локального экстремума	Теорема
Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела экстремум в точке x_0 , **необходимо**, чтобы $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существовала	**Если** функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , **то** $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует
Первое достаточное условие существования локального экстремума	Теорема
Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела в точке x_0 экстремум, **достаточно**, чтобы $f'(x_0 - 0) \cdot f'(x_0 + 0) < 0$	**Если** x_0 – критическая точка функции $y = f(x)$ и $f'(x_0 - 0) \cdot f'(x_0 + 0) < 0$, **то** функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум (при $f'(x_0 - 0) > 0$ ($f'(x_0 + 0) < 0$) – максимум; при $f'(x_0 - 0) < 0$ ($f'(x_0 + 0) > 0$) – минимум)
Второе достаточное условие существования локального экстремума	Теорема
Для того, чтобы дважды дифференцируемая функция $y = f(x)$ имела в стационарной точке x_0 экстремум, **достаточно**, чтобы $f''(x_0) \neq 0$	**Если** x_0 – стационарная точка дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ и $f''(x_0) \neq 0$, **то** функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум (при $f''(x_0) < 0$ – максимум, при $f''(x_0) > 0$ – минимум)

Свойство графика функции: **выпуклость вверх** (**вниз**)	
Необходимое и достаточное условие выпуклости вверх (вниз)	
Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ был выпуклым вверх (вниз) на промежутке X, **необходимо и достаточно**, чтобы $f'(x)$ монотонно убывала (возрастала) на промежутке X	
Необходимое условие выпуклости вверх (вниз)	Теорема
Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ был выпуклый вверх (вниз) на X, **необходимо**, чтобы $f''(x) \le 0$ ($f''(x) \ge 0$) на X	**Если** график функции $y = f(x)$ выпуклый вверх (вниз) на X, **то** $f''(x) \le 0$ ($f''(x) \ge 0$) на X
Достаточное условие выпуклости вверх (вниз)	Теорема
Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ был выпуклый вверх (вниз) на X, **достаточно**, чтобы $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) на X	**Если** $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) на X, **то** график функции $y = f(x)$ выпуклый вверх (вниз) на X
Свойство графика функции: **перегиб**	
Необходимое условие существования точки перегиба	Теорема
Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел перегиб в точке x_0, **необходимо**, чтобы $f''(x_0) = 0$	**Если** график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке x_0, **то** $f''(x_0) = 0$
Достаточное условие существования точки перегиба	Теорема
Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел в точке x_0 перегиб, **достаточно**, чтобы точка x_0 являлась стационарной и $f''(x_0 - 0) \cdot f''(x_0 + 0) < 0$	**Если** x_0 – стационарная точка дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ и $f''(x_0 - 0) \cdot f''(x_0 + 0) < 0$, **то** график функции $y = f(x)$ имеет в точке x_0 перегиб

6.6. Решение типовых задач

☹ **Примеры 1.** Найти интервалы монотонности функций

1) $y = x - x^3$; 2) $y = x^3 - 3x$.

😐 ***Решения.***

1) Находим производную $y'(x) = 1 - 3x^2$.

Интервал, на котором функция возрастает, является решением неравенства $1-3x^2>0$. Решение неравенства – интервал $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Следовательно, данная функция возрастает на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Интервал, на котором функция убывает, получаем из неравенства $1-3x^2<0$.

Решения этого неравенства – интервалы $\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \infty\right)$.

Следовательно, на интервалах $\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \infty\right)$ функция убывает.

2) Находим производную $y'(x)=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)$.
Интервал, на котором функция возрастает, является решением неравенства $3\left(x^2-1\right)>0$, т.е. $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$. Интервал, на котором функция убывает, является решением неравенства $3\left(x^2-1\right)<0$, т.е. $(-1;\ 1)$.

Ответы: 1) функция возрастает при $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, функция убывает при $x\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \infty\right)$; 2) функция возрастает при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, функция убывает при $x\in(-1;\ 1)$ **.**

☺

☹ **Примеры 2.** Найти критические точки функции и проверить, имеет ли функция экстремум в этих точках:

1) $y=|x|$; 2) $y=2x+|x|$.

😐 ***Решения.***

1) График функции $y=|x|$ представлен на рис. 6.8.
Производная $y'=1$ при $x\in(0;\ +\infty)$ и $y'=-1$ при $x\in(-\infty;\ 0)$.
В точке $x=0$ производная не существует (по теореме о единственности предела), следовательно, $x=0$ – критическая точка. При переходе через эту точку производная y' меняет знак с (–) на (+). Следовательно, в данной точке функция $y=|x|$ имеет минимум.

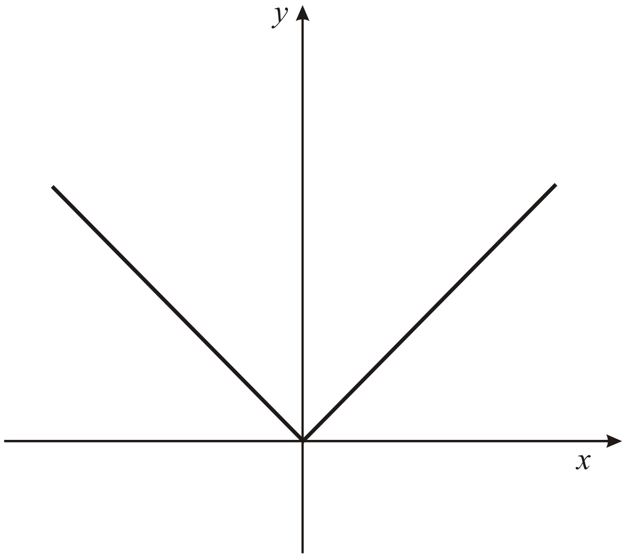

Рис. 6.8. График функции $y = |x|$

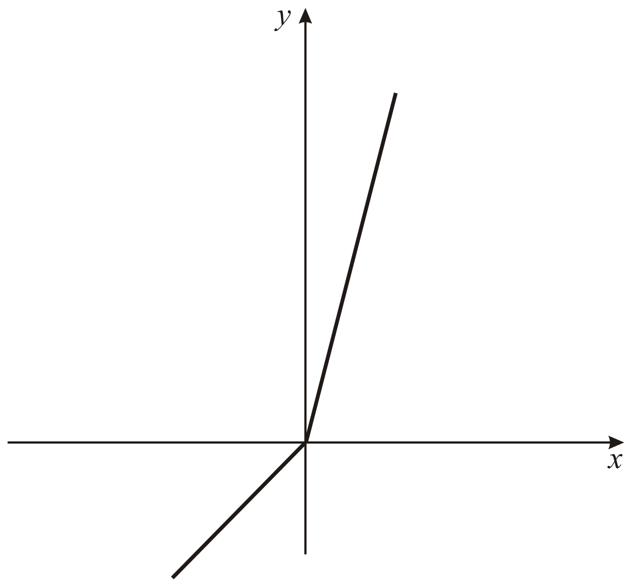

Рис. 6.9. График функции $y = 2x + |x|$

2) График функции $y = 2x + |x|$ представлен на рис. 6.9. Производная $y' = 3$ при $x > 0$ и $y' = 1$ при $x < 0$. В точке $x = 0$ производная не существует, $x = 0$ – критическая точка. При переходе через эту точку производная не меняет знак. Следовательно, в данной точке нет ни минимума, ни максимума.

Ответы: 1) $x = 0$, экстремум есть (минимум); 2) $x = 0$, экстремума нет.

☺

☹ **П р и м е р ы 3.** Исследовать функцию и построить график

1) $y = x^3 - 3x + 1$; 2) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

😐 ***Решения.***

1. Исследуем функцию в соответствии с планом исследования функции:

1) $D(f) = R$;

2) $E(f)$ рассмотрим позднее;

3) корни найти трудно;

4) $f(0) = 1$;

5) функция является функцией общего вида;

6) интервалы монотонности и экстремумы функции необходимо найти.

Производная $y' = \left(x^3 - 3x + 1\right)' = 3x^2 - 3$. Критические точки находим из уравнения $y' = 0$: $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$. Критические точки разбивают область определения функции на интервалы монотонности. Найдём знак производной на каждом из интервалов и рассмотрим характер критических точек.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
Знак $f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	max $f(-1) = 3$	↘	min $f(1) = -1$	↗

График функции имеет максимум при $x = -1$ и минимум при $x = 1$.

Построим график функции $y = x^3 - 3x + 1$ (рис. 6.10.). По графику легко видеть, что $E(f) = R$.

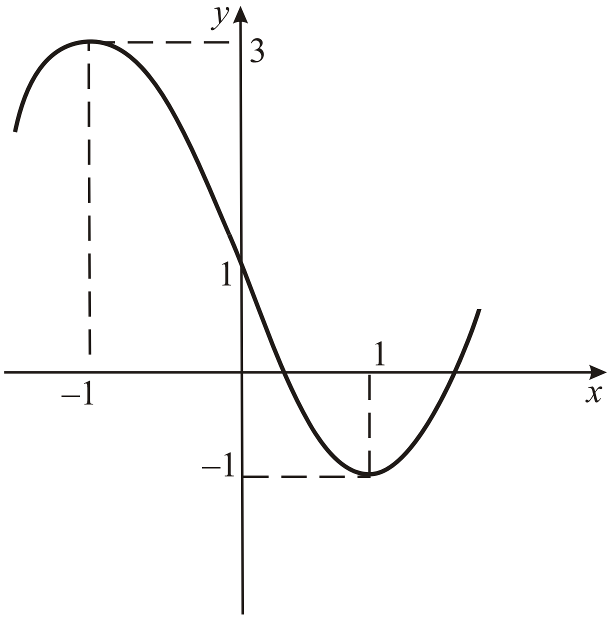

Рис. 6.10. График функции $y = x^3 - 3x + 1$

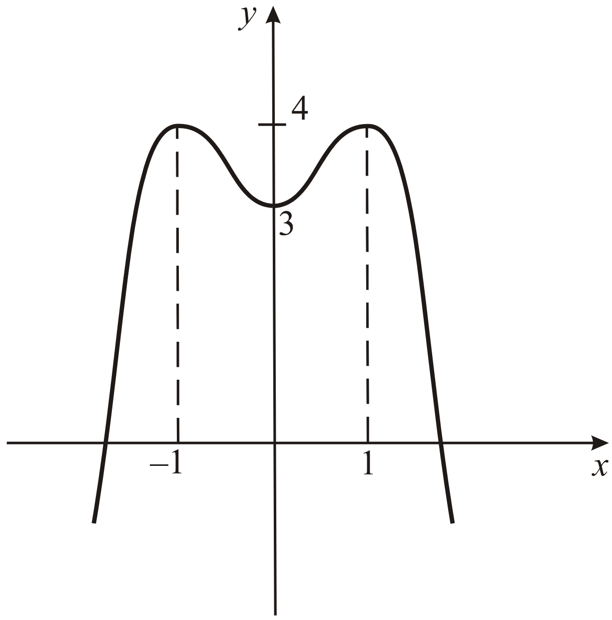

Рис. 6.11. График функции $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

2. Исследуем функцию в соответствии с планом исследования функции.

1) $D(f) = R$;

2) $E(f)$ рассмотрим позднее;

3) корни функции: $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$;

4) $f(0) = 3$;

5) функция чётная;

6) интервалы монотонности: $y' = \left(-x^4 + 2x^2 + 3\right)' = -4x^3 + 4x$; критические точки находим из уравнения $y' = -4x^3 + 4x = 0$; получаем $x_1 = -1;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1$.

Составим таблицу

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; -1;)$	1	$(1; \infty)$
Знак $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	max $f(-1) = 4$	↘	min $f(0) = 3$	↗	max $f(1) = 4$	↘

График функции имеет максимум при $x = \pm 1$ и минимум при $x = 0$.

Построим график функции $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ (рис. 6.11). Из графика видно, что $E(f) = (-\infty;\ 4\,]$.

Данная функция чётная, поэтому достаточно было исследовать функцию и построить график при $x \ge 0$. График при $x < 0$ получается зеркальным отражением графика при $x > 0$ относительно оси OY (симметрия графика чётной функции относительно оси OY).

Ответы: 1) график см. рис. 6.10; 2) график см. рис. 6.11.

☺

☹ **Пример 4.** Найти интервалы выпуклости графика функции

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + 3x^2.$$

😐 ***Решение.*** Найдём вторую производную y'' и вычислим те значения независимой переменной *x*, при которых $y'' = 0$:

$$y' = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x;\quad y'' = x^2 - 5x - 6\ ;$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\quad x_2 = 3.$$

Точки $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ разбивают область определения на три интервала. Найдём знак второй производной y'' на каждом интервале, результаты занесём в таблицу.

	$(-\infty;\, 2)$	2	$(2;\, 3)$	3	$(3;\, +\infty)$
Знак y''	+		–		+
	Выпуклость вниз		Выпуклость вверх		Выпуклость вниз

Ответ: при $x \in (-\infty;\ 2) \cup (3; +\infty)$ график функции $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + 3x^2$ (рис. 6.12) имеет выпуклость вниз, при $x \in$ (2; 3) – выпуклость вверх.

☺

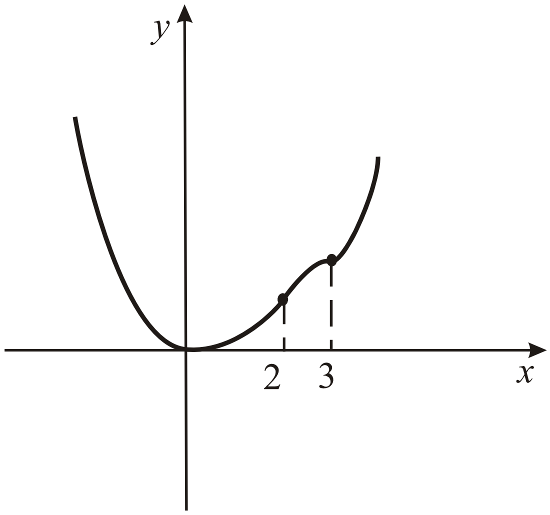

Рис. 6.12. График функции $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + 3x^2$

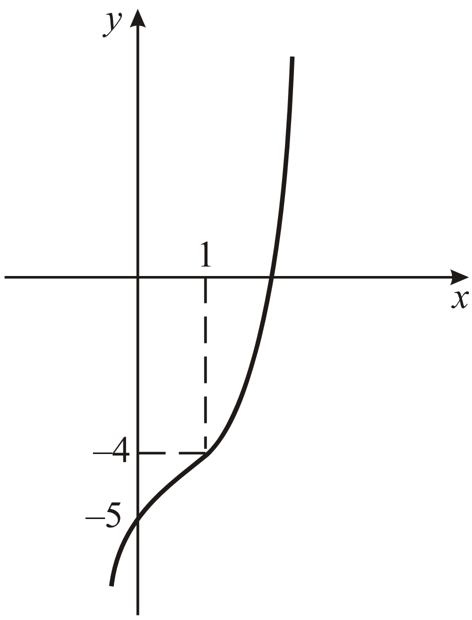

Рис. 6.13. График функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$

☹ **П р и м е р 5.** Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.

😐 ***Решение.*** Находим производные данной функции

$$y' = 3x^2 - 6x + 3,\ \ y'' = 6x - 6 = 6(x-1).$$

Вторая производная $y'' = 0$ при $x = 1$. При $x < 1$ вторая производная $y'' < 0$, поэтому график имеет выпуклость вверх. При $x > 1$ вторая производная $y'' > 0$, следовательно, график имеет выпуклость вниз. Точка

$M(1;-4)$ – точка перегиба графика функции $y=x^3-3x^2+3x-5$ (рис. 6.13).

Ответ: при $x\in(-\infty;1)$ график функции $y=x^3-3x^2+3x-5$ (рис. 6.13) имеет выпуклость вверх, при $x\in(1;+\infty)$ – выпуклость вниз; $M(1;-4)$ – точка перегиба.

☺

☹ **Пример 6.** Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию $y=x^3-9x^2+24x-12$.

😐 ***Решение.*** Найдём стационарные точки, то есть те значения аргумента x, при которых $y'=0$:

$y'=3x^2-18+24=3(x^2-6x+8)=0 \Rightarrow x_1=2$ и $x_2=4$ – стационарные точки.

Теперь найдём вторую производную и определим её знак в стационарных точках:

$$y''=6x-18;$$
$$y''|_{x=2}=f''(2)=12-18<0 \Rightarrow x=2 \text{ – точка максимума;}$$
$$y''|_{x=4}=f''(4)=24-18>0 \Rightarrow x=4 \text{ – точка минимума.}$$

Вычислим значения функции в точках экстремума:

$$y_{\max}=f(2)=8; \quad y_{\min}=f(4)=4.$$

Ответ: $y_{\max}=f(2)=8; \quad y_{\min}=f(4)=4$.

☺

6.7. Задания для самостоятельной работы

Найти интервалы монотонности функций:

1) $y=x-x^3$; 2) $y=x^3-3x^2+7$; 3) $y=\dfrac{3}{x}$; 4) $y=e^{-x^2}$.

Найти экстремумы функций:

5) $y=x^3+4x$; 6) $y=\dfrac{1}{2}x^4-2x$; 7) $y=\dfrac{2}{3}x^3-5x^2+12x-14$.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции

8) $y = x^4 - 8x^3 + 3$ на отрезке $[-2;\,2]$.

Найти интервалы выпуклости графика функций:

9) $y = x^3 - 12x^2 + 3x$; 10) $y = -x^3 + 3x^2$.

Найти точки перегиба графика функций:

11) $y = x^3 - 6x + 7$; 12) $y = x^3 - 6x^2 + 9$; 13) $y = x^4 - 6x^2 + 5x - 9$;

14) $y = \dfrac{1}{x-2} + 3$; 15) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Исследовать функции на экстремум с помощью второй производной:

16) $y = x^2 - 2x - 3$; 17) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$.

Ответы:

1) функция убывает при $x \in \left(-\infty; -{}^{1}\!/\!_{\sqrt{3}}\right) \cup \left({}^{1}\!/\!_{\sqrt{3}};\,+\infty\right)$,

возрастает при $x \in \left(-{}^{1}\!/\!_{\sqrt{3}};\,{}^{1}\!/\!_{\sqrt{3}}\right)$;

2) функция возрастает при $x \in (-\infty;\,0) \cup (2;\,+\infty)$, убывает при $x \in (0;2)$;

3) функция убывает при $x \in (-\infty;\,0) \cup (0;+\infty)$;

4) функция возрастает при $x \in (-\infty;\,0)$, убывает при $x \in (0;+\infty)$;

5) экстремумов нет; 6) $y_{\min} = f(1) = -{}^{3}\!/\!_{2}$;

7) $y_{\max} = f(2) = -{}^{14}\!/\!_{3}$; $y_{\min} = f(3) = -5$;

8) $y_{\max} = f(-2) = 83$; $y_{\min} = f(2) = 45$;

9) при $x \in (-\infty;\,4)$ выпуклость вверх, при $x \in (4;+\infty)$ выпуклость вниз;

10) при $x \in (-\infty;\,1)$ выпуклость вниз, при $x \in (1;\,+\infty)$ выпуклость вверх;

11) $M(0;\,7)$; 12) $M(2;-7)$; 13) $M(-1;-19)$; 14) точек перегиба нет;

15) $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\,\dfrac{3}{4}\right)$, $N\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\,\dfrac{3}{4}\right)$;

16) $y_{\min} = f(1) = -4$; 17) $y_{\max} = f(1) = {}^{16}\!/\!_{3}$; $y_{\min} = f(3) = 4$.

7. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

7.1. Вертикальная асимптота

Определение 7.1. ***Вертикальная асимптота*** *графика функции* $y = f(x)$ *– это такая прямая* $x = a$, *что* $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ *или* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$.

Например, график функции $y = \dfrac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty\right)$ и $\left(\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty\right)$. Примеры графиков функций, имеющих вертикальные асимптоты, приведены на рис. 7.1.

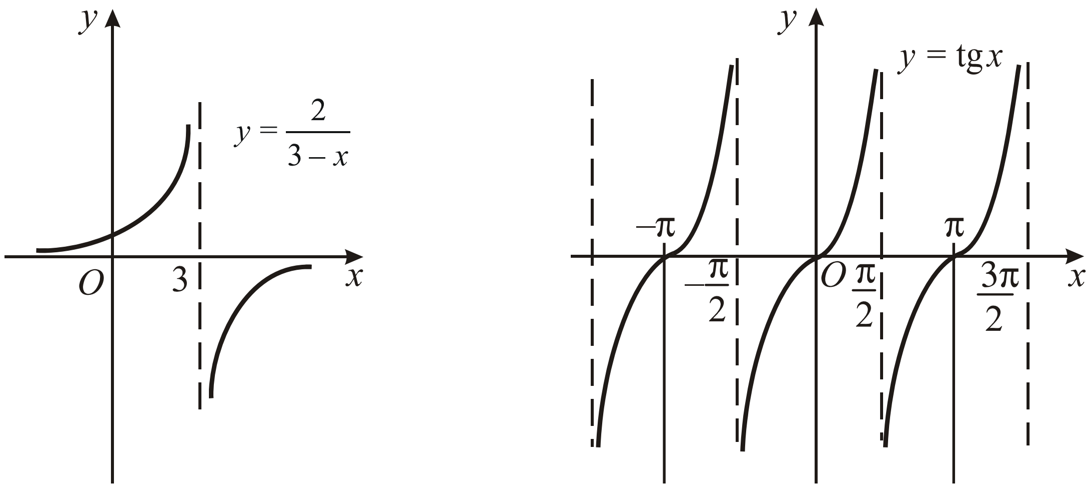

Рис.7.1. Примеры графиков функций с вертикальными асимптотами $x = 3$ и $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

7.2. Горизонтальная асимптота

Определение 7.2. ***Горизонтальная асимптота*** *графика функции $y = f(x)$ – это такая прямая $y = b$, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ (или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$).*

Например, функция $y = 2^x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$).

Функция $y = \dfrac{x+1}{x}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ $\left(\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1\right)$.

Функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$ имеет горизонтальные асимптоты $y = \dfrac{\pi}{2}$ и $y = -\dfrac{\pi}{2}$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\dfrac{\pi}{2}$).

Примеры графиков функций, имеющих горизонтальные асимптоты, приведены на рис. 7.2.

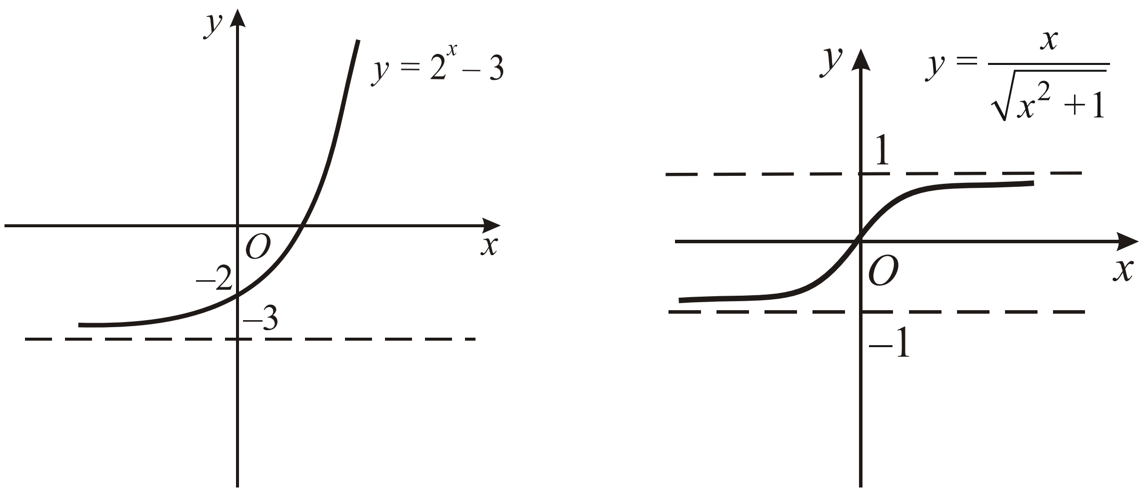

Рис.7.2. Примеры графиков функций с горизонтальными асимптотами $y = -3$ и $y = \pm 1$

7.3. Наклонная асимптота

Определение 7.3. ***Наклонная асимптота*** *графика функции* $y = f(x)$ – *это такая прямая* $y = kx + b$, *что* $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$ *или* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$ *или* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$.

Теорема 7.1. *Для того, чтобы график функции* $y = f(x)$ *имел при* $x \to \pm\infty$ *наклонную асимптоту* $y = kx + b$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]= b$.

Доказательство. Без доказательства.

Примеры графиков функций, имеющих наклонные асимптоты, приведены на рис. 7.3.

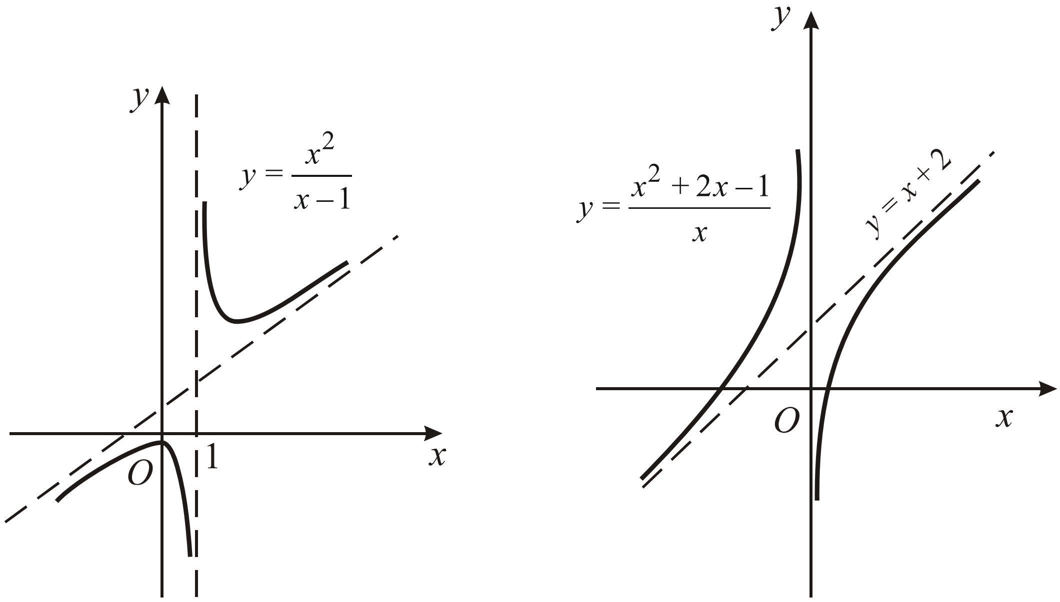

Рис.7.3. Примеры графиков функций с наклонными асимптотами $y = x+1$ и $y = x+2$

7.4. Решение типовых задач

☹ **Примеры 1.** Найти асимптоты и построить графики функций:

$$1)\ y=\frac{1}{x+3}+1;\qquad 2)\ y=\frac{4}{x^2-4};\qquad 3)\ y=\frac{x^2}{x+3}.$$

😐 ***Решения.***

1). Чтобы найти вертикальные асимптоты, надо рассмотреть точки разрыва функции:

$$x=-3\notin D(f),\quad \lim_{x\to -3+0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to -3-0} f(x)=-\infty.$$

Следовательно, прямая $x=-3$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=\dfrac{1}{x+3}+1$ (рис. 7.4).

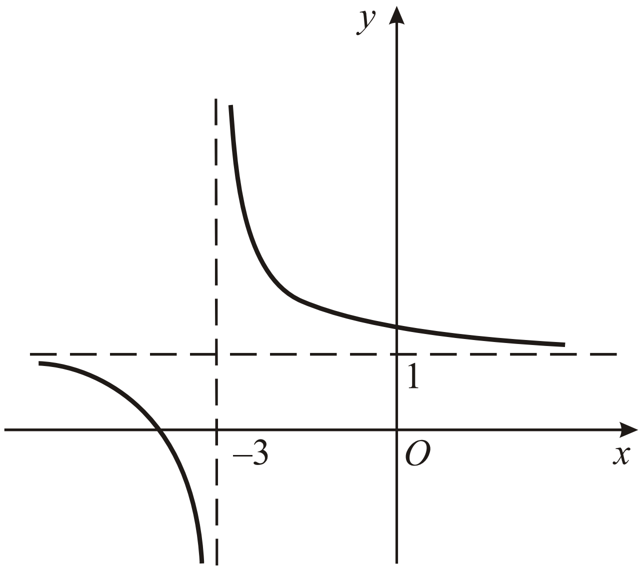

Рис.7.4. График функции $y=\dfrac{1}{x+3}+1$
с вертикальной асимптотой $x=-3$
и горизонтальной асимптотой $y=1$

Чтобы найти горизонтальные асимптоты, надо вычислить $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x+3}+1\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+3}+1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+3}+1\right)=1.$$

Следовательно, прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=\dfrac{1}{x+3}+1$ (рис. 7.4).

Наклонных асимптот нет, так как $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{x+3}+1\right)}{x}=0$.

2). Чтобы найти вертикальные асимптоты, надо рассмотреть точки разрыва функции:

$$x=2\notin D(f);\ \lim_{x\to2+0}\frac{4}{x^2-4}=\infty;\ \lim_{x\to2-0}\frac{4}{x^2-4}=-\infty.$$

Следовательно, прямая x=2 – вертикальная асимптота.

$$x=-2\notin D(f);\ \lim_{x\to-2+0}\frac{4}{x^2-4}=-\infty;\ \lim_{x\to-2-0}\frac{4}{x^2-4}=\infty.$$

Следовательно, прямая $x=-2$ тоже является вертикальной асимптотой графика функции.

Для отыскания горизонтальной асимптоты найдём

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2-4}=0.$$

Следовательно, прямая $y=0$ – горизонтальная асимптота.

Наклонных асимптот у графика этой функции нет, так как

$$k=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4/\left(x^2-4\right)}{x}=0.$$

Чтобы найти экстремумы и интервалы монотонности, проведём исследование функции с помощью производной.

$y'=\left(\dfrac{4}{x^2-4}\right)'=\dfrac{-8x}{\left(x^2-4\right)^2}$; $x=\pm2$ и $x=0$ – критические точки, так как при $x=\pm2$ производная y' не существует, а при $x=0$ производная $y'=0$.

Занесём данные для критических точек и интервалов между ними в таблицу:

x		-2		0		2	
y'	$+$	Не существует	$+$	0	$-$	Не существует	$-$
y	↗	Разрыв	↗	-1 max	↘	Разрыв	↘

$y_{\max} = f(0) = -1$.

График функции $y = \dfrac{4}{x^2 - 4}$ представлен на рис. 7.5.

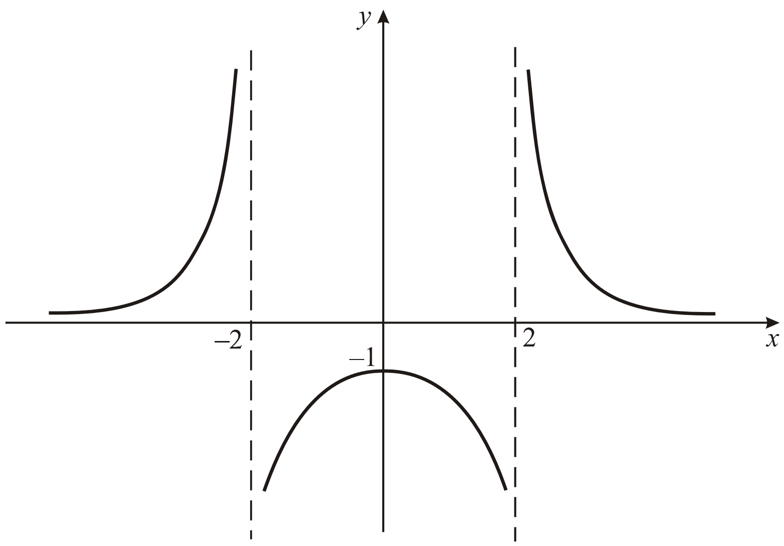

Рис.7.5. График функции $y = \dfrac{4}{x^2 - 4}$
с вертикальными асимптотами $x = \pm 2$
и горизонтальной асимптотой $y = 0$

3) $x = -3 \notin D(f)$ – точка разрыва функции.

Предел справа $\lim\limits_{x \to -3+0} \dfrac{x^2}{x+3} = +\infty$; предел слева $\lim\limits_{x \to -3-0} \dfrac{x^2}{x+3} = -\infty$.

Следовательно, прямая $x = -3$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Горизонтальных асимптот нет, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x+3} = \infty$.

Чтобы найти наклонные асимптоты, вычислим коэффициенты k и b.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2/(x+3)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+3} = 1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-x\right)=\lim_{x t_0 \infty}\frac{x^2-x^2-3x}{x+3}=-3.$$

Итак, $k=1$; $b=-3$, следовательно, наклонной асимптотой к графику функции является прямая $y=x-3$.

Чтобы построить график, исследуем функцию с помощью производной.

$$y'=\left(\frac{x^2}{x+3}\right)'=\frac{2x(x+3)-x^2}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}=\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}.$$

$y'=0$ при $x=-6$ и при $x=0$; y' не существует при $x=-3$. Следовательно,

$x=-6$; $x=-3$; $x=0$ – критические точки.

x		–6		–3		0	
y'	+		–		–		+
y	↗	–12 max	↘	Разрыв	↘	0 min	↗

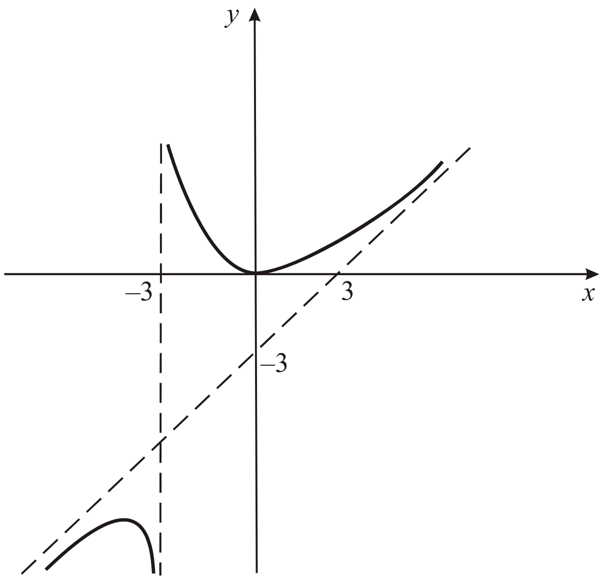

Рис.7.6. График функции $y=\frac{x^2}{x+3}$
с вертикальной асимптотой $x=-3$
и наклонной асимптотой $y=x-3$

$y_{\max}=f(-6)=-12;$
$y_{\min}=f(0)=0.$

График функции $y=\dfrac{x^2}{x+3}$ представлен на рис. 7.6.

Ответы: 1) вертикальная асимптота $x=3$, горизонтальная асимптота $y=1$, наклонных асимптот нет;

2) вертикальные асимптоты $x=\pm 2$, горизонтальная асимптота $y=0$, наклонных асимптот нет;

3) вертикальная асимптота $x=-3$, горизонтальных асимптот нет, наклонная асимптота $y=x-3$.

☺

☹ **Пример 2.** Исследовать функцию $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ и построить график.

😐 ***Решение.*** Исследование функции и построение графика можно проводить по следующей схеме:

1) область определения функции ($D(f)$);
2) точки разрыва и вертикальные асимптоты;
3) чётность, нечётность, периодичность;
4) точки пересечения графика с осями координат;
5) поведение функции на бесконечности: горизонтальные и наклонные асимптоты;
6) интервалы монотонности и экстремумы, точки перегиба.

Для функции $y=\dfrac{1}{1+x^2}$

1) $D(f)=R$;
2) точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет.
3) функция чётная (график симметричен относительно оси OY), непериодическая;
4) $y(0)=1;\ \ y\neq 0,\ \ y>0$ при $\forall\, x$ (график лежит в верхней полуплоскости);
5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0;\ \ y=0$ – горизонтальная асимптота; наклонных асимптот нет;
6) $y'=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

x		0	
y'	+	0	–
y	↗	1 max	↘

$y_{\max}=f(0)=1$.

$$y'' = -2\frac{1-3x^2}{\left(1+x^2\right)^3} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}};\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ – точки перегиба.

График функции $y = \frac{1}{1+x^2}$ представлен на рис. 7.7.

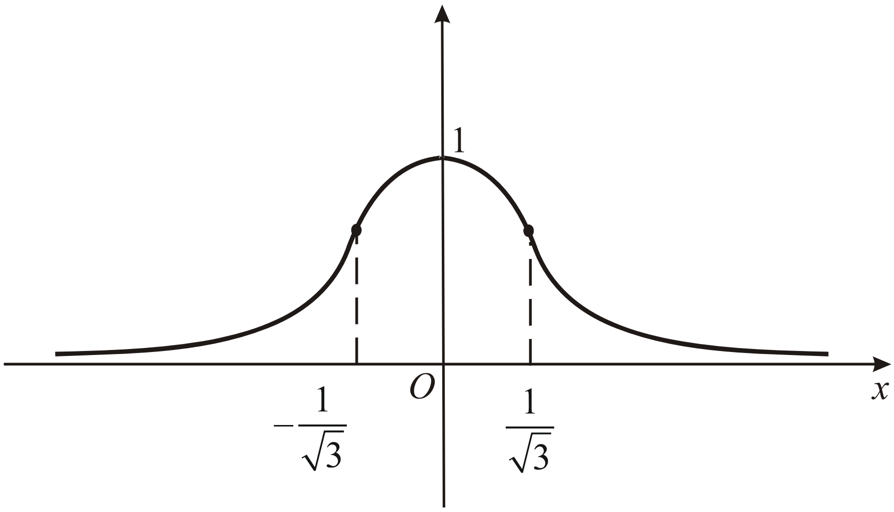

Рис.7.7. График функции $y = \frac{1}{1+x^2}$

Ответ: график см. рис. 7.7.

☺

7.5. Задания для самостоятельной работы

Найти асимптоты графиков функций:

1) $y = \frac{1}{x-5}$; 2) $y = \frac{x}{x-1}$; 3) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 4) $y = \frac{5}{x^2-25}$;

5) $y = \frac{x^2+6x-5}{x}$; 6) $y = \frac{x^2+1}{x}$; 7) $y = \frac{x^2-5x+4}{x-4}$; 8) $y = e^{-x^2}$.

Ответы:

1) $y=0;\ x=3$; 2) $x=1;\ y=1$; 3) при $x \to +\infty$ $y=1$, при $x \to -\infty$ $y=-1$;

4) $x=-5;\ x=5;\ y=0$; 5) $x=0$ и $y=x+6$; 6) $x=0;\ y=x$;

7) $x=4;\ y=x-1$; 8) $y=0$.

8. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

8.1. Первообразная и неопределённый интеграл

Определение 8.1. ***Первообра́зная функция*** *функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$ – это функция $F(x)$, для которой $F'(x)=f(x)$ при любом x из промежутка* $[a;b]$.

Например, функция $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ является первообразной функции $f(x)=x^2$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$, так как $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2$ при любом $x\in R$.

$F(x)=\dfrac{x^3}{3}+5$ тоже первообразная функции $y=f(x)=x^2$.

Определение 8.2. ***Неопределённый интеграл*** *функции $f(x)$ – это множество всех первообразных данной функции.*

Обозначают:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C, \text{ где } F'(x)=f(x),\ C=\text{const}.$$

8.2. Свойства неопределённого интеграла

$$1.\ \left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x);$$

2. $d\left(\int f(x)\,dx\right)= f(x)dx;$

3. $\int f'(x)\,dx = f(x)+C$;

4. $\int d\, f(x)= f(x)+C$;

5. $\int a\, f(x)\,dx = a\int f(x)dx$, где $a = \text{const}$;

6. $\int (f_1(x)+ f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$

8.3. Таблица интегралов

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad \left(\int dx = x + C\right) \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

8.4. Методы интегрирования

Метод замены переменной

Если $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, то:

$$1)\ \int f(ax)\,dx=\frac{1}{a}\,F(ax)+C;$$

$$2)\ \int f(x+b)\,dx=F(x+b)+C;$$

$$3)\ \int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет вид $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ или $g(x)\cdot g'(x)$, то удобно ввести новую переменную $g(x)=t$, тогда $g'(x)\,dx=dt$ и $\int f(x)\,dx=\int\dfrac{g'(x)}{g(x)}dx=\int\dfrac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|g(x)|+C$,

$$\int f(x)\,dx=\int g(x)\cdot g'(x)\,dx=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{(g(x))^2}{2}+C.$$

Метод интегрирования по частям

Формула интегрирования по частям:

$$\int udv=u\cdot v-\int v\,du,$$

где $u=u(x)$ и $v=v(x)$.

Метод интегрирования по частям используют, когда интеграл в правой части проще (ближе к табличному), чем интеграл в левой части.

8.5. Решение типовых задач

☹ **Примеры 1.** Доказать, что функция $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ при $x\in R$:

1) $F(x)=x^5$; $f(x)=5x^4$;
2) $F(x)=\cos x-4$; $f(x)=-\sin x$;
3) $F(x)=5-x^4$; $f(x)=-4x^3$.

😐 ***Решения.*** Функция $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$. Найдём $F'(x)$ и проверим выполнение этого условия.

1) $F'(x)=\left(x^5\right)'=5x^4$; $f(x)=5x^4$;
2) $F'(x)=(\cos x-4)'=(\cos x)'-4'=-\sin x$; $f(x)=-\sin x$;

$$3)\ F'(x)=\left(5-x^4\right)'=-\left(x^4\right)'=-4x^3;\ f(x)=-4x^3.$$

Ответ: функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ во всех трёх случаях.

☺

☹ **Примеры 2.** Найти интегралы

$$1)\ \int\left(3x^2+x+1\right)dx;\qquad 2)\ \int\frac{2+x}{x}dx;$$

$$3)\ \int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};\qquad 4)\ \int\frac{dx}{36+x^2}.$$

😐 ***Решения.*** Воспользуемся свойствами 2) и 3) неопределённого интеграла, а также таблицей интегралов.

$$1)\int\left(3x^2+x+1\right)dx=\int 3x^2dx+\int x\,dx+\int dx=$$

$$=3\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C=x^3+\frac{x^2}{2}+x+C.$$

$$2)\ \int\frac{2+x}{x}\,dx=\int\frac{2\,dx}{x}+\int dx=2\ln|x|+x+C.$$

$$3)\ \int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}+C.$$

$$4)\ \int\frac{dx}{36+x^2}=\int\frac{dx}{6^2+x^2}=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{6}+C.$$

Ответы: 1) $x^3+\frac{x^2}{2}+x+C$**;** **2)** $2\ln|x|+x+C$ **;**

3) $\arcsin\frac{x}{2}+C$ **4)** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{6}+C$**.**

☺

☹ **Пример 3.** Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

😐 ***Решение.*** Для вычисления интеграла надо преобразовать подынтегральную функцию.

Учитывая основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получим:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Ответ: $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$ **.**

☺

☹ **Пример 4.** Найти интеграл $\int \cos 5x\,dx$.

😐 ***Решение.*** I способ. Используем метод замены переменной (раздел 8.4): если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$.

Следовательно, $\int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\sin 5x + C$.

II способ. Пусть $5x = t$, тогда $dt = 5\,dx$.

$$\int \cos 5x\,dx = \int \cos t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \cos t\,dt = \frac{1}{5}\sin t + C = \frac{1}{5}\sin 5x + C.$$

Ответ: $\frac{1}{5}\sin 5x + C$ **.**

☺

☹ **Примеры 5.** Найти интегралы:

$$1)\ \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,dx; \qquad 2)\ \int e^{\sin x}\cos x\,dx.$$

😐 ***Решения.*** Найдём интегралы методом замены переменной.

1) Пусть $\frac{1}{x} = t$, тогда $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$ и

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,dx = \int t^2 e^t \frac{-dt}{t^2} = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

2) Пусть $\sin x = t$, тогда $\cos x\,dx = dt$ и

$$\int e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx=\int e^{t}dt=e^{t}+C=e^{\sin x}+C.$$

Ответы: 1) $-e^{\frac{1}{x}}+C$; 2) $e^{\sin x}+C$.

☺

☹ **П р и м е р ы 6.** Найти интегралы:

$$1)\ \int\frac{5x^4+15x^2}{x^5+5x^3+1}\,dx;\qquad 2)\ \int\frac{x^2dx}{4x^3+1};\qquad 3)\ \int\sin x\cdot\cos^2 x\,dx.$$

😐 ***Решения.***

Если $f(x)$ имеет вид $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ или $g(x)\cdot g'(x)$, то можно ввести новую переменную $t=g(x)$.Тогда $dt=g'(x)\,dx$ и интеграл упрощается.

1) Пусть $x^5+5x^3+1=t$, тогда $\left(5x^4+15x^2\right)dx=dt$ и

$$\int\frac{5x^4+15x^2}{x^5+5x^3+1}\,dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x^5+5x^3+1\right|+C.$$

2) Пусть $4x^3+1=t$, тогда $12x^2dx=dt$ и

$$\int\frac{x^2dx}{4x^3+1}=\frac{1}{12}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{12}\ln|t|+C=\frac{1}{12}\ln\left|4x^3+1\right|+C.$$

3) Пусть $\cos x=t$, тогда $dt=-\sin x\,dx$ и

$$\int\sin x\cdot\cos^2 x\,dx=-\int t^2dt=-\frac{t^3}{3}+C=-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

Ответы: 1) $\ln\left|x^5+5x^3+1\right|+C$; 2) $\dfrac{1}{12}\ln\left|4x^3+1\right|+C$;

3) $-\dfrac{\cos^3 x}{3}+C$.

☺

☹ **П р и м е р ы 7.** Найти интегралы:

$$1)\ \int x\cdot e^{x}dx;\qquad 2)\ \int\ln x\,dx;\qquad 3)\ \int x\cdot\cos x\,dx.$$

😐 ***Решения.***

Используем формулу интегрирования по частям.

1) Пусть $U = x;\ dV = e^x dx,$ тогда $dU = dx, V = e^x$ и

$$\int x \cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2) Пусть $\ln x = U;\ dx = dV,$ тогда $dU = \dfrac{dx}{x}, V = x$ и

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int \frac{x\, dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

3) Пусть $x = U;\ \ \cos x\, dx = dV,$ тогда $dU = dx,\ \ V = \sin x$ и

$$\int x \cdot \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Ответы: 1) $xe^x - e^x + C$; 2) $x \ln x - x + C$; 3) $x \sin x + \cos x + C$.

☺

8.6. Задания для самостоятельной работы

Найти интегралы:

1) $\int 7x\, dx$; 2) $\int 4\left(x^2 - x + 3\right) dx$; 3) $\int 2(3x - 1)^2 dx$; 4) $\int x^{-4} dx$; 5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$.

Найти интегралы при помощи формул (1–3) (раздел 8.4):

6) $\int \cos 3x\, dx$; 7) $\int e^{-10x} dx$; 8) $\int \sin(3x + 4) dx$; 9) $\int (2x + 5)^2 dx$.

Найти интегралы методом замены переменной:

10) $\int \dfrac{x^2 dx}{3 + 5x^3}$; 11) $\int x\left(1 + x^2\right)^5 dx$; 12) $\int \sin x \cdot \cos^2 x\, dx$;

13) $\int \dfrac{2^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}\, dx$; 14) $\int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$; 15) $\int \dfrac{x\, dx}{x^2 + 1}$; 16) $\int \mathrm{tg}\ x\, dx$.

Найти интегралы методом интегрирования по частям:

17) $\int x \sin x\, dx$; 18) $\int x \ln x\, dx$; 19) $\int \arcsin x\, dx$; 20) $\int x \sin 2x\, dx$.

Ответы:

1) $7x + C$; 2) $\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C$; 3) $6x^3 - 6x^2 + 2x + C$;

4) $-\frac{1}{3x^3} + C$; 5) $2\sqrt{x} + C$; 6) $\frac{1}{3}\sin 3x + C$; 7) $\frac{-1}{10}e^{-10x} + C$;

8) $-\frac{1}{3}\cos(3x+4) + C$; 9) $\frac{(2x+5)^3}{6} + C$; 10) $\frac{1}{15}\ln\left|3+5x^3\right| + C$;

11) $\frac{1}{12}\left(1+x^2\right)^6 + C$; 12) $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$; 13) $\frac{2}{3}\,\frac{2^{\sqrt{x}}}{\ln 2} + C$;

14) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$; 15) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$; 16) $-\ln\left|\cos x\right| + C$;

17) $-x\cos x + \sin x + C$; 18) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$; 19) $x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$;

20) $-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

9. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

9.1. Вычисление определённого интеграла

Для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределённый интеграл, используют *формулу Ньютона – Лейбница*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

Например, вычислим определённые интегралы 1) $\int_{-1}^{2} x^2 dx$; 2) $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

Для вычисления интегралов воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница и найдём разность первообразных в точках верхнего и нижнего пределов:

$$1)\ \int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3;$$

$$2)\ \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

9.2. Площадь криволинейной трапеции и определённый интеграл

Фигуру, заштрихованную на рис. 9.1 ($y = f(x) \geq 0$ при $x \in [a\,;\,b]$), называют *криволинейной трапецией.*

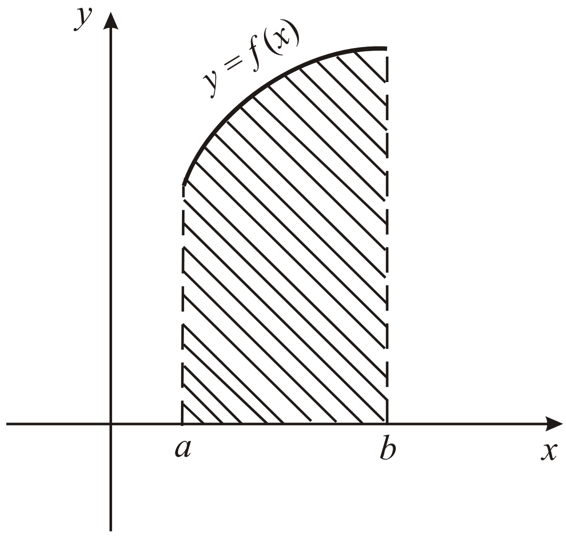

Рис. 9.1. Криволинейная трапеция

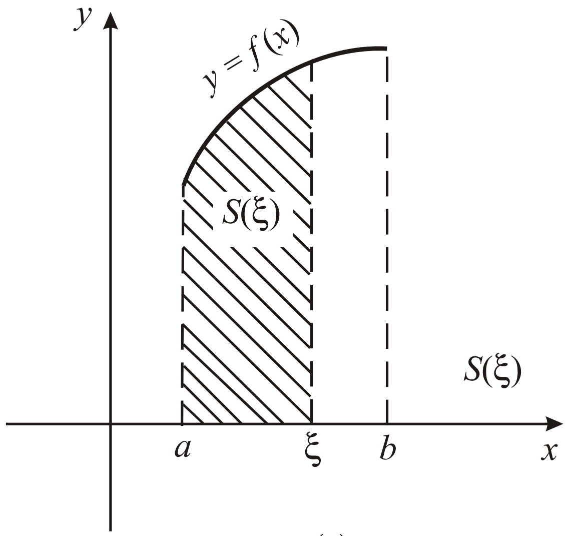

Рис. 9.2. Функция $S(\xi)$ как площадь криволинейной трапеции с переменной правой границей

Рассмотрим функцию $S(\xi)$ – площадь криволинейной трапеции с переменной правой границей (переменной криволинейной трапеции), ограниченной графиком $y = f(x)$, осью OX, вертикальной прямой $x = a$ и вертикальной прямой с переменным положением $x = \xi$ (рис. 9.2). Положение правой границы трапеции изменяется вдоль оси OX. Переменная координата правой границы трапеции – текущее изменяющееся значение независимой переменной x – здесь обозначена через ξ.

Легко видеть, что при $\xi = a$ площадь переменной криволинейной трапеции $S(a) = 0$. Обозначим $S(b) = S$ площадь переменной криволинейной трапеции при $\xi = b$.

Покажем, что $S(x)$ – первообразная функции $y = f(x)$.

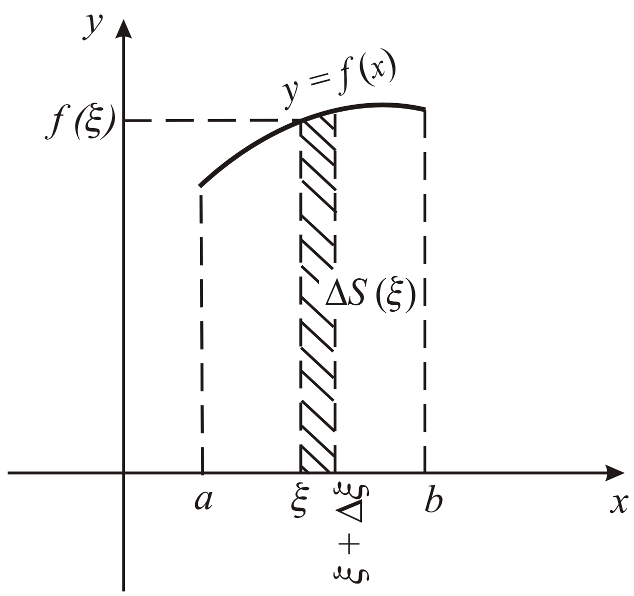

Рис.9.3. Приращение площади криволинейной трапеции $\Delta S(\xi)$ (заштриховано на рисунке) при приращении аргумента $\Delta\xi$

При малых $\Delta\xi$

$$\Delta\xi : \Delta S(\xi) = S(\xi + \Delta\xi) - S(\xi) \approx f(\xi) \cdot \Delta\xi \text{ и } \frac{\Delta S(\xi)}{\Delta\xi} \approx f(\xi).$$

Перейдём к пределу при $\Delta\xi \to 0$:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(\xi)}{\Delta\xi} = f(\xi) \Rightarrow S'(\xi) = f(\xi)$, т.е. $S(\xi)$ – первообразная функции $f(\xi)$.

Все первообразные запишем в виде: $F(\xi) = S(\xi) + C$.

Тогда при $\xi = a$

$$F(a) = S(a) + C = 0 + C,$$

откуда $F(a) = C$ и $F(\xi) = S(\xi) + F(a)$.

Тогда при $\xi = b$ имеем

$$F(b) = S(b) + F(a) = S + F(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = F(b) - F(a) = \int_a^b f(\xi) d\xi = \int_a^b f(x) dx.$$

В последнем равенстве сделана обратная замена переменной ξ на привычное x ($\xi \to x$), так как обозначение переменной под знаком интеграла значения не имеет и мы полагали $\xi = x$ с самого начала.

Геометрический смысл определённого интеграла. Определённый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на $[a; b]$ функции $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$.

9.3. Свойства определённого интеграла

1) $\displaystyle\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx$

(интеграл суммы равен сумме интегралов);

2) $\displaystyle\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$, где $k = \text{const}$

(постоянный множитель можно вынести за знак интеграла);

3) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$

(при перемене местами пределов интегрирования интеграл меняет знак);

4) $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$

(интеграл по отрезку нулевой длины равен 0);

5) Если $c \in [a;\, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$

(интеграл по отрезку равен сумме интегралов по частям отрезка).

9.4. Вычисление площадей плоских фигур

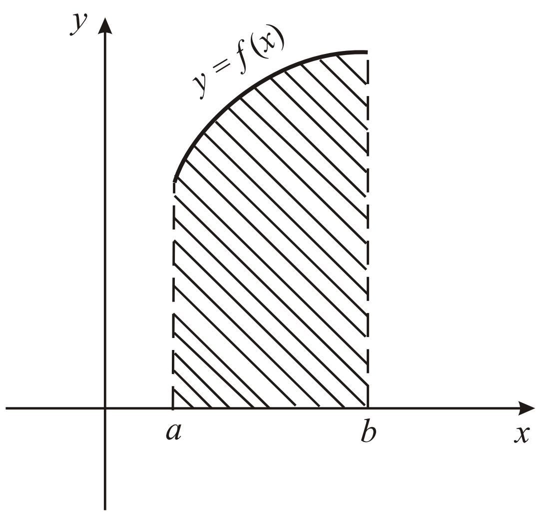

Рис. 9.4. Криволинейная трапеция расположена в верхней полуплоскости

1) Если $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a;\, b]$, то $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (рис. 9.4).

2) Если $f(x) \le 0$ на $[a;\, b]$, то $S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (рис. 9.5).

3) Если $f_2(x) \ge f_1(x)$ при $\forall x \in [a;\, b]$, то $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx$ (рис. 9.6).

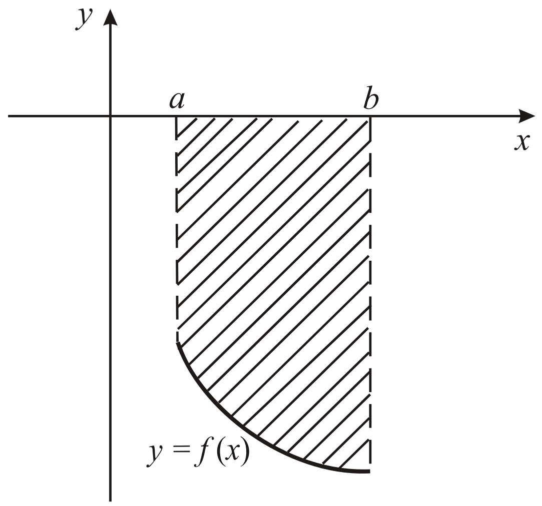

Рис. 9.5. Криволинейная трапеция расположена в нижней полуплоскости

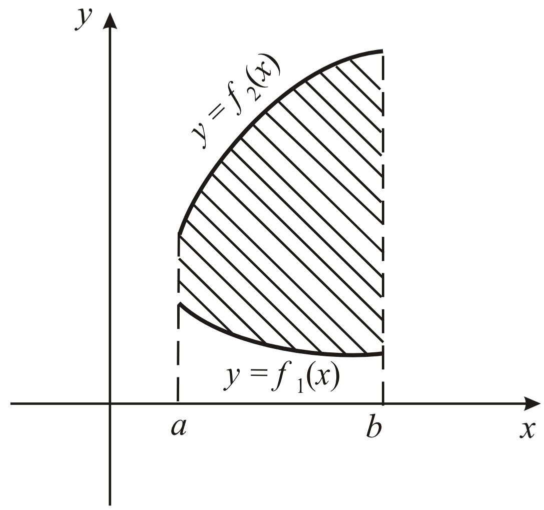

Рис. 9.6. Искомая площадь ограничена графиками $y = f_2(x)$ (сверху), $y = f_1(x)$ (снизу) и линиями $x = a$ и $x = b$

9.5. Решение типовых задач

☹ **Примеры 1.** Вычислить определённые интегралы:

1) $\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2 + 2x + 1\right)dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{1}\left(x + \sin x + x^{10}\right)dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\, dx$.

😐 ***Решения.***

1) Найдём первообразную подынтегральной функции и вычислим интеграл по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2 + 2x + 1\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}2^3 + 2^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^1 + (-1)\right) = 9.$$

2) Используем свойства определённого интеграла и формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_{-1}^{1}\left(x+\sin x+x^{10}\right)dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}+\left(-\cos x\right)\Big|_{-1}^{1}+\frac{x^{11}}{11}\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}(1-1)+\left(-\cos 1+\cos(-1)\right)+\frac{1}{11}(1+1)=\frac{2}{11}.$$

3) Чтобы найти первообразную, введём новую переменную и сведём интеграл к табличному, а затем используем формулу Ньютона – Лейбница. Пусть $\sin x = y$, тогда $\cos dx = dy$. При $x=0$ $\quad y=0$, при $x=\frac{\pi}{2}$ $\quad y=1$. Тогда

$$\int_{0}^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx=\int_{0}^{1} e^{y}dy=e^{y}\Big|_{0}^{1}=e-1.$$

Ответы: 1) 9; 2) $\frac{2}{11}$; 3) $e-1$.

☺

☹ **Примеры 2.** Вычислить площади фигур, ограниченных:

1) линиями $y=x^2-2x+2$, $x=-1$, $x=2$ и отрезком $[-1;\,2]$ оси OX ;

2) линиями $y=x^3$ и $x=-1$ и осью OX ;

3) линиями $y=x+3$ и $y=x^2+1$.

😐 ***Решения.***

1) Функция $y=x^2-2x+2$ положительна в своей области определения (дискриминант $\Delta=b^2-4ac<0$, следовательно, квадратный трёхчлен не имеет корней). Чтобы найти площадь, используем формулу площади криволинейной трапеции:

$$S=\int_{-1}^{2}\left(x^2-2x+2\right)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}-x^2\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{1}^{2}=6.$$

2) На отрезке $[-1;0]$ функция $y=x^3$ принимает отрицательные значения (рис. 9.7), поэтому площадь искомой фигуры можно вычислить по формуле $S=-\int_{a}^{b} f(x)\,dx$:

$$S=-\int\limits_{-1}^{0}x^3dx=-\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{4}.$$

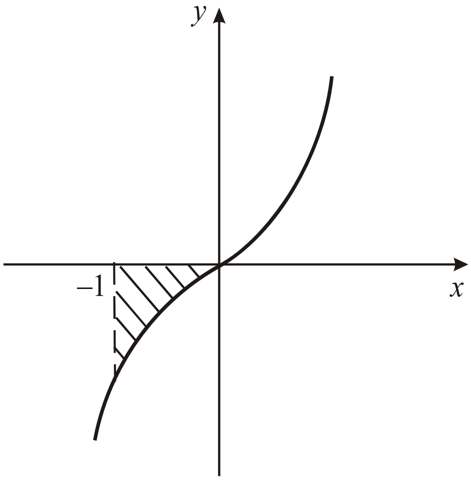

Рис. 9.7. Искомая площадь ограничена сверху осью OX, снизу — графиком функции $y=x^3$

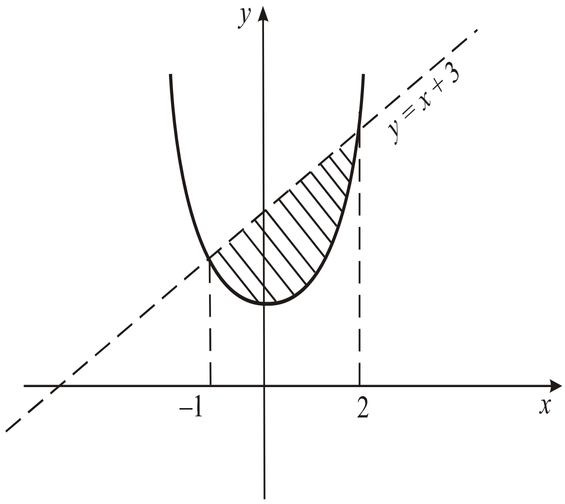

Рис. 9.8. Искомая площадь ограничена графиками $y=x+3$ (сверху) и $y=x^2+1$ (снизу)

3) Постоим график функций $y=x+3$ и $y=x^2+1$ (рис. 9.8). Площадь искомой фигуры равна разности определённых интегралов

$$S=\int\limits_{a}^{b}(x+3)\,dx-\int\limits_{a}^{b}\left(x^2+1\right)dx.$$

Чтобы найти пределы интегрирования, найдём абсциссы точек пересечения графиков функций $y=x+3$ и $y=x^2+1$:

$$x+3=x^2+1\Rightarrow x_1=a=-1;\ x_2=b=2.$$

Тогда

$$S=\int\limits_{-1}^{2}(x+3)\,dx-\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)dx=\int\limits_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}+\frac{1}{2}x^2\Bigg|_{-1}^{2}+2x\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$

Ответы: 1) 6; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{9}{2}$.

☺

9.6. Задания для самостоятельной работы

Вычислить определённые интегралы: 1) $\int\limits_1^3 x^3 dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx$;

3) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\, dx$; 4) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 5) $\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 6) $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x\, dx$;

8) $\int\limits_0^{\pi/2} (2\cos x - 3\sin x)dx$; 9) $\int\limits_2^3 (2x-1)^3\, dx$; 10) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$.

Найти площади фигур, ограниченных:

11) графиком функции $y=\cos x$ и отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси OX;

12) параболой $y = 9 - x^2$, прямыми $x=-1$ и $x=2$ и осью OX;

13) прямыми $y=2x$, $y=0$ и $x=3$;

14) параболами $y=x^2$ и $y=2x^2-1$;

15) параболой $y=-x^2+4$ и прямой $y=0$;

16) линией $y=\sin x$ и отрезком $[0,\pi]$ оси OX;

17) параболой $y^2=x$, $y\ge 0$ и прямыми $x=1$ и $x=4$;

18) графиком функции $y=\cos x$, отрезком $\left[-\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$ оси OX и прямыми $x=-\frac{5\pi}{6}$ и $x=\pi$.

Ответы:

1) 20; 2) –1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) 2; 7) $\frac{1}{2}$; 8) –1; 9) 68;

10) $\frac{2}{5}$; 11) 2; 12) 24; 13) 9; 14) $\frac{4}{3}$; 15) $10\frac{2}{3}$; 16) 2; 17) $4\frac{2}{3}$; 18) $\frac{7}{2}$.

10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

10.1. Дифференциальное уравнение. Общие понятия

Дифференциальным уравнением называют уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и её производные (или дифференциалы).

Например, $y'' - \frac{y}{x} = 0$ или $y^2 dy + \cos x \, dx = 0$.

Дифференциальные уравнения – качественно иной математический объект по сравнению с алгебраическими уравнениями, которые изучают в школе. Решением алгебраического уравнения является **число** (значение неизвестной); решением дифференциального уравнения является **функция** (конкретный вид неизвестной функции).

Этот факт говорит об области применения тех и других уравнений. Алгебраические уравнения, решением которых являются числа, описывают стационарные (неизменные) состояния систем. Даже для движущихся систем это, например, постоянное значение скорости или постоянное значение ускорения.

Дифференциальные уравнения, решением которых являются функции – зависимости между переменными, описывают динамические (изменяющиеся) состояния систем.

Дифференциальное уравнение называют *обыкновенным,* если искомая функция зависит только от одной независимой переменной.

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0 .$$

В дифференциальном уравнении неизвестной является **ф у н к ц и я** $y = f(x)$, а не переменная x.

Порядком дифференциального уравнения называют порядок старшей производной, входящей в данное уравнение.

Например, $y' - y = 0$ – дифференциальное уравнение первого порядка, $y'' - 10y' + 25y = 0$ – дифференциальное уравнение второго порядка.

Решением (или *интегралом*) дифференциального уравнения называют такую функцию, которая обращает данное уравнение в тождество.

Например, уравнение $y' + ky = 0$ имеет решение $y = e^{-kx}$, так как $y' = -ke^{-kx}$ и $y' + ky = -ke^{-kx} + k \cdot e^{-kx} \equiv 0$.

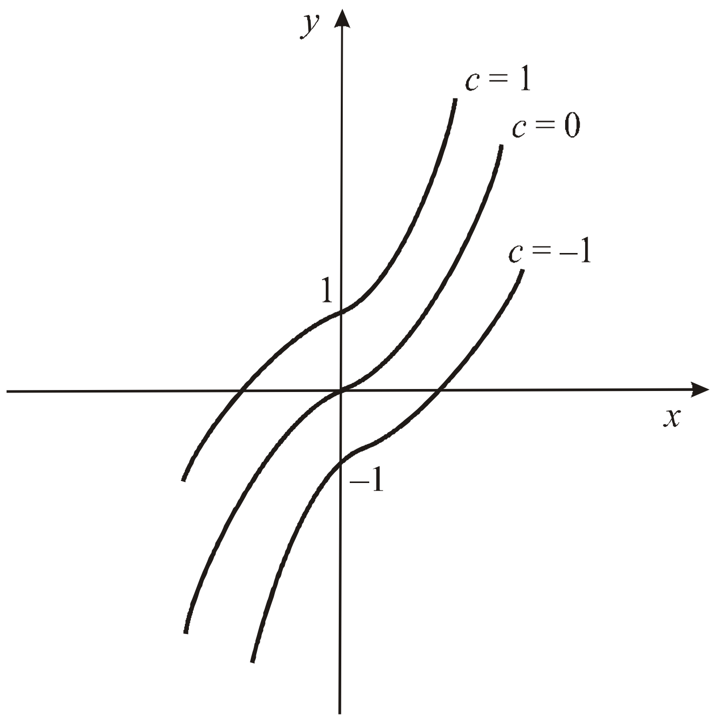

Рис. 10.1. Интегральные кривые $y = x^3 + C$ дифференциального уравнения $y' = 3x^2$ при различных значениях постоянной C

Решить дифференциальное уравнение – значит найти все его решения.

График функции, являющейся решением дифференциального уравнения, называют *интегральной кривой.*

Например, решением дифференциального уравнения $y' = 3x^2$ является функция $y = \int 3x^2 dx = x^3 + C$. На рис. 10.1 представлены интегральные кривые при различных значениях произвольной постоянной C.

Дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

10.2. Задача Коши и её геометрический смысл

Дифференциальные уравнения рассматривают как математические модели различных процессов. Для исследования конкретного процесса надо из общего решения уравнения выделить частное. При этом к дифференциальному уравнению необходимо добавить какие-то дополнительные условия. Чаще всего для исследования процесса, развивающегося во времени, вводят *начальные условия*.

Для выделения единственного решения дифференциального уравнения первого порядка надо задать значение искомой функции при фиксированном значении аргумента $y(x_0)=y_0$ (начальные условия). Это задача Коши.

Например, найдём частное решение уравнения $y'=3x^2$ при 1) $y(0)=0$; 2) $y(0)=1$.

1) Общее решение дифференциального уравнения $y'=3x^2$ – функция $y=x^3+C$. Если $y(0)=0^3+C=0$, то $C=0$ и, следовательно, $y=x^3$.

2) Если $y(0)=0^3+C=1$, то $C=1$ и, следовательно, $y=x^3+1$.

Решения $y=x^3$ и $y=x^3+1$ – частные решения уравнения, удовлетворяющие заданным начальным условиям $y(0)=0$ и $y(0)=1$ соответственно.

Геометрический смысл задачи Коши при решении дифференциального уравнения первого порядка состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через данную точку координатной плоскости.

10.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными называют дифференциальные уравнения, которые можно привести к виду $y'=f(x)\cdot g(y)$, где $f(x)$ – функция, зависящая только от x, а $g(y)$ – функция, зависящая только от y.

В уравнениях с разделяющимися переменными можно разделить переменные: в левой части записать выражение, зависящее от одной переменной (например, y), а в правой – от другой (например, x):

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Если переменные разделены, то для решения уравнения надо проинтегрировать обе его части:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

При решении уравнений с разделяющимися переменными возможна потеря решений при разделении переменных (когда $g(y) = 0$). Эти случаи надо рассматривать отдельно.

10.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка имеют вид

$$y' + p(x) \cdot y = f(x).$$

Если $f(x) = 0$, то уравнение превращается в линейное однородное, которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение является линейным неоднородным.

Ищем решение уравнения $y' + p(x) \cdot y = f(x)$ в виде $y = u \cdot v$, где u и v – функции от x. Тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение будет иметь вид:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = f(x) \quad \text{или} \quad u \cdot v' + v(u' + p(x) \cdot u) = f(x).$$

Выберем u так, чтобы $u' + p(x) \cdot u = 0$ (т.е. u – решение линейного однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному), тогда $u \cdot v' = f(x)$. Из последнего уравнения находим v.

При решении линейного неоднородного уравнения можно решить сначала линейное однородное уравнение $y' + p(x)y = 0$, а затем применить *метод вариации производной постоянной:*

$$y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -p(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int p(x)\,dx + \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C \cdot e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Ищем решение уравнения $y' + p(x)\cdot y = f(x)$ в виде $y = \varphi(x)\cdot e^{-\int p(x)\,dx}$. Вычислим $y' = \varphi'(x)\cdot e^{-\int p(x)\,dx} + \varphi(x)\cdot\left(-e^{-\int p(x)\,dx}\cdot p(x)\right)$ и подставим в уравнение, которое примет вид $\varphi'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x)$ или $\dfrac{d\varphi}{dx} = f(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx}$ и, следовательно,

$$\varphi(x) = \int f(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx}dx + C_1.$$

Подставляя данное выражение в решение однородного уравнения, получим решение уравнения $y' + p(x)\cdot y = f(x)$:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\cdot\left(C + \int f(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx}dx\right).$$

10.5. Решение типовых задач

☹ **Пример 1**. Решить уравнение $y' = 3x$.

😐 ***Решение.*** Это простейшее дифференциальное уравнение первого порядка вида $y' = f(x)$.

Множество решений этого уравнения – неопределённый интеграл $\int f(x)\,dx$.

$$y' = 3x \Rightarrow y = \int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + C.$$

Ответ: $y = \dfrac{3x^2}{2} + C$.

☺

☹ **Примеры 2.** Проверить, является ли функция $y = f(x)$ решением дифференциального уравнения:

1) $y = e^{2x}$, $y' = 2y$; 2) $y = e^{-x} + 1$; $\dfrac{dy}{dx} = -y + 1$;

3) $y = e^{-2x} + e^x$; $y' + 3y = 3e^x$.

☹ **Решения.**

1) $y = e^{2x}$; найдём производную: $y' = e^{2x} \cdot 2$.

При подстановке y и y' в уравнение получим тождество $e^{2x} \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x}$. Это значит, что $y = e^{2x}$ является решением уравнения.

2) $y = e^{-x} + 1$; $\dfrac{dy}{dx} = y' = -e^{-x}$. Подставим $\dfrac{dy}{dx}$ и y в уравнение: $-e^{-x} = -\left(e^{-x} + 1\right) + 1 = -e^{-x}$ (тождество) $\Rightarrow y = e^{-x} + 1$ является решением.

3) $y = e^{-2x} + e^{x}$; $y' = -2e^{-2x} + e^{x}$. Подставим y' и y в уравнение:
$-2e^{-2x} + e^{x} + 3\left(e^{-2x} + e^{x}\right) = 3e^{x} \Leftrightarrow e^{-2x} + 4e^{x} \neq 3e^{x} \Rightarrow$
$y = e^{-2x} + e^{x}$ не является решением уравнения.

Ответы: 1) является; 2) является; 3) не является.

☺

☹ **Примеры 3.** Решить задачу Коши:

1) $y' = 3x^2 + 2x + 1$; $y(1) = 4$; 2) $y' = 4x^{-3}$; $y(1) = 2$;

3) $y' = \dfrac{1}{3}\sin 3x$; $y(0) = \dfrac{5}{6}$.

☹ **Решения.**

1) $y' = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y = \int\left(3x^2 + 2x + 1\right)dx = x^3 + x^2 + x + C$.

$y(1) = 1 + 1 + 1 + C = 4 \Rightarrow C = 1$, следовательно, частное решение, удовлетворяющее начальному условию, имеет вид: $y = x^3 + x^2 + x + 1$.

2) $y' = 4x^{-3} \Rightarrow y = \int \dfrac{4}{x^3}\,dx = \dfrac{4x^{-2}}{-2} + C = -\dfrac{2}{x^2} + C$.

$y(1) = -2 + C = 2 \Rightarrow C = 4$. Искомое частное решение: $y = -\dfrac{2}{x^2} + 4$.

3) $y' = \dfrac{1}{3}\sin 3x \Rightarrow y = \int \dfrac{1}{3}\sin 3x\,dx = -\dfrac{1}{9}\cos 3x + C$.

$$y(0) = -\frac{1}{9}\cos 0 + C = -\frac{1}{9} + C = \frac{5}{6} \Rightarrow C = \frac{5}{6} + \frac{1}{9} = \frac{15+2}{18} = \frac{17}{18}.$$

Следовательно, искомое частное решение: $y = -\dfrac{1}{9}\cos 3x + \dfrac{17}{18}$.

Ответы:

1) $y = x^3 + x^2 + x + 1$; 2) $y = -\dfrac{2}{x^2} + 4$; 3). $y = -\dfrac{1}{9}\cos 3x + \dfrac{17}{18}$.

☺

☹ **Примеры 4.** Решить дифференциальные уравнения

1) $y' = \dfrac{2y}{x}$; 2) $y' = 2x(y-1)^2$; 3) $y^2 dy + \cos x\, dx = 0$.

😐 ***Решения.*** Это уравнения с разделяющимися переменными.

1) $y' = \dfrac{2y}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\ y}{x}$. Разделим переменные: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2\ dx}{x}$. Интегрируя, получим: $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + C$.

Представим произвольную постоянную *C* в виде $\ln C_1$, тогда $y = C_1 x^2$.

Проверим, не произошло ли при разделении переменных потери решений. Мы исключили *y* = 0, так как *y* находится в знаменателе дроби. Однако *y* = 0 является решением уравнения. Это решение может быть получено из множества $y = C_1 x^2$ при $C_1 = 0$, так что потери решения нет.

2) $y' = 2x(y-1)^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2x(y-1)^2$.

Разделим переменные $\dfrac{dy}{(y-1)^2} = 2x\ dx$ и проинтегрируем

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int 2x\,dx \Rightarrow \frac{-1}{y-1} = \frac{2x^2}{2} + C = x^2 + C \Rightarrow y = \frac{-1}{x^2 + C} + 1.$$

В этом примере из-за деления на $y-1$ возможна потеря решения $y = 1$. Функция $y = 1$ является решением (в чем легко убедиться, подставив $y = 1$ в исходное уравнение), но $y = 1$ не входит в полученный ответ. Действительно, $\dfrac{-1}{x^2 + C} + 1 \neq 1$ при любых значениях *C*.

Следовательно, решение можно записать в виде $y = \dfrac{-1}{x^2 + c} + 1$; $y = 1$.

3) $y^2 dy + \cos x\ dx = 0$.

Разделим переменные $y^2 dy = -\cos x\ dx$ и проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int y^2 dy = \int -\cos x\, dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = -\sin x + C \Rightarrow y^3 = 3(C - \sin x).$$

Следовательно, $y = \sqrt[3]{3(C - \sin x)}$.

Ответы: 1) $y = Cx^2$; 2) $y = \dfrac{-1}{x^2 + C} + 1$ и $y = 1$;

3) $y = \sqrt[3]{3(C - \sin x)}$.

☺

☹ **Пример 5.** Решить уравнение $y' - \dfrac{2}{x} y = x$.

😐 ***Решение.*** Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Ищем решение в виде $y = u \cdot v$.

Подставим *y* и $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ в исходное уравнение:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{2}{x} u \cdot v = x \Rightarrow u \cdot v' + v\left(u' - \frac{2}{x} u\right) = x.$$

Решим уравнение $u' - \dfrac{2}{x} u = 0$ или $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2}{x} \cdot u$ (оно соответствует однородному исходному уравнению). Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные $\dfrac{du}{u} = \dfrac{2}{x} dx$ и проинтегрируем.

Получим $\ln u = 2\ln x + C = \ln x^2 + \ln C = \ln\left(Cx^2\right)$, следовательно, $u = C x^2$.

Выберем одно из решений, например, $u = x^2$, тогда уравнение $uv' = x$ примет вид $x^2 v' = x$ или $xv' = 1$, откуда найдем *v*:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int dv = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln|x| + C.$$

Искомое решение $y = u \cdot v = x^2 (\ln|x| + C)$.

Ответ: $y = x^2 (\ln|x| + C)$.

☺

☹ **Пример 6.** Решить уравнение $\dfrac{y'}{2x} + 3xy = e^{-2x^3}$.

😐 ***Решение.*** Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Приведем его к виду $y' + p(x)\cdot y = f(x)$:

$$y' + 6x^2 y = 2x \cdot e^{-2x^3}.$$

Решим однородное уравнение $y' + 6x^2 y = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -6x^2 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -6x^2 dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -6\int x^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = -2x^3 + \ln c \Rightarrow y = ce^{-2x^3}.$$

Варьируем произвольную постоянную, заменяя её неизвестной функцией $\varphi(x)$: $y = \varphi(x)\cdot e^{-2x^3}$.

Находим производную y':

$$y' = \varphi'(x)\cdot e^{-2x^3} - 6x^2 \cdot \varphi(x)\cdot e^{-2x^3}.$$

Подставим y и y' в исходное уравнение $y' + 6x^2 y = 2x \cdot e^{-2x^3}$:

$$\varphi'(x)\cdot e^{-2x^3} - 6x^2 \cdot \varphi(x)\cdot e^{-2x^3} + 6x^2\varphi(x)e^{-2x^3} = 2x\ e^{-2x^3} \Rightarrow$$

$$\varphi'(x)\cdot e^{-2x^3} = 2x \cdot e^{-2x^3} \Rightarrow \varphi'(x) = 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = 2x \Rightarrow \int d\varphi = \int 2x\,dx; \quad \varphi = x^2 + C_1.$$

Тогда $y = \varphi(x)\cdot e^{-2x^3} = \left(x^2 + C_1\right)\cdot e^{-2x^3}$.

Ответ: $\left(x^2 + C_1\right)\cdot e^{-2x^3}$.

☺

10.6. Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения:

1) $y' = 3$; 2) $\dfrac{dy}{dx} = x$; 3) $y' + 4x = 0$;

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x+1}$; 5) $\dfrac{dy}{dx} = 4\cos x$; 6) $y' = e^{-3x}$.

Решить задачу Коши:

7) $x\,dy = y\,dx$; $y(2) = 6$; 8) $3y^2 dy = x^2 dx$; $y(3) = 1$;

9) $y' = x \cdot e^{-y}$; $y(1) = 0$; 10) $y\,tgx\,dx + dy = 0$; $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$.

Решить уравнения с разделяющимися переменными:

11) $y' = y$; 12) $3y' = \left(1 + x^2\right)/\, y^2$;

13) $\sqrt{y}dx + x^2 dy = 0$; 14) $\left(x^2 + 1\right)dy - x\,y\,dx = 0$.

Решить линейное дифференциальное уравнение:

15) $y' - \frac{1}{x} \cdot y = x \cdot \cos x$; 16) $y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2}$.

Ответы:

1) $y = 3x + c$; 2) $y = \frac{x^2}{2} + c$; 3) $y = -2x^2 + c$; 4) $y = \ln|x + 1| + c$;

5) $y = 4\sin x + c$; 6) $y = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c$; 7) $y = 3x$; 8) $y = \sqrt[3]{\frac{x^3}{3} - 8}$;

9) $y = \ln\frac{x^2 + 1}{2}$; 10) $y = 8\cos x$; 11) $y = c\,e^x$;

12) $y = \sqrt[3]{\frac{x^3}{3} + x + c}$; 13) $y = \left(\frac{1}{2x} + c\right)^2$; 14) $y = c \cdot \sqrt{x^2 + 1}$;

15) $y = x(\sin x + c)$; 16) $y = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)$.

11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

11.1. Общие понятия

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

При интегрировании дифференциальных уравнений число произвольных постоянных в решении уравнения равно порядку уравнения. Решения дифференциальных уравнений второго порядка содержат по две произвольных постоянных.

Например, $y'' = 0$, $y' = C_1$, $y = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$. Решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные константы.

Простейшее дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид $y'' = f(x)$.

Например, решим уравнение $y'' = e^{2x} + \sin x$.

Интегрируем уравнение 2 раза:

$$y' = \int \left(e^{2x} + \sin x\right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - \cos x + C_1;$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \cos x + C_1\right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

Чтобы выделить единственное решение задают начальные условия (значение функции в точке x_0 и значение производной в точке x_0). Это задача Коши. Геометрический смысл задачи Коши в этом случае заключается в нахождении интегральной кривой, проходящей через данную точку

$(x_0;\ y(x_0))$ и имеющей заданный угловой коэффициент касательной в этой точке $(k = y'(x_0))$.
Например, решим задачу Коши

$$y'' = 2, \quad y(1) = 0; \quad y'(1) = 4.$$

Интегрируем уравнение 2 раза:

$$y' = \int 2dx = 2x + C_1, \ y = \int (2x + C_1)dx = x^2 + C_1 x + C_2,$$

$$\begin{cases} y(1) = 1 + C_1 + C_2 = 0; \\ y'(1) = 2 + C_1 = 4 \Rightarrow C_1 = 2;\ C_2 = -3. \end{cases}$$

Следовательно, $y = x^2 + 2x - 3$.

11.2. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p и q – вещественные числа.

Будем искать решение уравнения в виде $y = e^{kx}$. Подставим $y = e^{kx}$ в уравнение $y'' + py' + qy = 0$:

$$\left(e^{kx}\right)'' + p\left(e^{kx}\right)' + q \cdot e^{kx} = 0 \ \Rightarrow \ \left(ke^{kx}\right)' + pk \cdot e^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 \cdot e^{kx} + pk \cdot e^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0 \ \Rightarrow \ e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$$

Заметим, что $e^{kx} \neq 0$, следовательно, функция $y = e^{kx}$ будет решением уравнения $y'' + py' + qy = 0$ только, если k будет решением уравнения $k^2 + pk + q = 0$.

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называют *характеристическим уравнением* линейного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

В зависимости от дискриминанта характеристического уравнения решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$ имеет вид:

$$1)\ \Delta > 0, \quad k_1 \neq k_2 \qquad y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

2) $\Delta = 0,\quad k_1 = k_2 \qquad y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{k_1 x}$;

3) $\Delta < 0,\quad \begin{cases} k_1 = a + bi \\ k_2 = a - bi \end{cases} \quad y = e^{ax}\left(C_1 \cdot \cos bx + C_2 \cdot \sin bx\right)$.

11.3. Решение типовых задач

☹ **Пример 1.** Решить уравнение $y'' = e^{2x} + \sin x$.

😐 ***Решение.*** Это простейшее дифференциальное уравнение второго порядка. Интегрируем последовательно:

$$y' = \int \left(e^{2x} + \sin x\right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - \cos x + C_1; \quad y = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \cos x + C_1\right) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4} e^{2x} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

Ответ: $y = \frac{1}{4} e^{2x} - \sin x + C_1 x + C_2$.

☺

☹ **Пример 2.** Решить уравнение $y'' - 2y' - 8y = 0$.

😐 ***Решение.*** Это линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 8 = 0$.

Дискриминант $\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 32 > 0$, следовательно, уравнение имеет вещественные различные корни $\left(k_1 = 4;\, k_2 = -2\right)$, а общее решение исходного уравнения имеет вид $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$.

Ответ: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$.

☺

☹ **Пример 3.** Решить уравнение $y'' + 14y' + 49y = 0$.

😐 ***Решение.*** Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 14k + 49 = 0.$$

Дискриминант $\Delta = 0$, следовательно, уравнение имеет вещественные равные корни $k_1 = k_2 = -7$.

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-7x}.$$

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)e^{-7x}$.

☺

☹ **Пример 4.** Решить уравнение $y'' + 6y' + 25y = 0$.

😐 ***Решение.*** Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 6k + 25 = 0.$$

Дискриминант $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 100 < 0$ отрицателен, следовательно, корни уравнения являются комплексными числами $k_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{25-9} \Rightarrow$
$k_1 = -3 + 4i, \quad k_2 = -3 - 4i$.
Решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

☺

11.4. Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения:
1) $y'' = x$; 2) $y'' = \sin x$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:
3) $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = 12x,$ если $y(0) = 2$ и $y'(0) = 20$;
4) $y'' = 6x,$ если $y(0) = 0, \quad y'(0) = 10$;
5) $y'' = 18x + 2;$ если $y(0) = 4; \quad y'(0) = 5$.

Решить уравнения:
6) $y'' + 8y' + 15y = 0$; 7) $y'' + 3y' = 0$; 8) $y'' - 6y' + 9y = 0$;
9) $y'' - 4y' + 13y = 0$; 10) $y'' + 16y = 0$; 11) $y'' - 2y = 0$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

12) $y'' + 4y = 0,$ если $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ \ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$;

13) $y'' - 2y' = 0,$ если $y(0) = \frac{3}{2};\ \ y'(0) = 1$;

14) $y'' + 3y' + 2y = 0,$ если $y(0) = -1;\ y'(0) = 3$.

Ответы:

1) $y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$; 2) $y = -\sin x + C_1 x + C_2$;

3) $y = 2x^3 + 20x + 2$; 4) $y = x^3 + 10x$; 5) $y = 3x^3 + x^2 + 5x + 4$;

6) $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-3x}$; 7) $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$; 8) $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$;

9) $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$; 10) $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$;

11) $y = e^{\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x}$; 12) $y = \cos 2x + \sin 2x$; 13) $y = 1 + \frac{1}{2}e^{2x}$;

14) $y = e^{-x} - 2e^{-2x}$.

Библиографический список

1. Курс высшей математики для гуманитарных специальностей: Учеб. пособие / Ю.Д. Максимов, О.И. Недзвецкий, М.Ф. Романов, Ю.А. Хватов, А.В. Ястребов. Под общ. ред. Ю.Д. Максимова. СПб.: СпецЛит, 1999.

2. *Турецкий В.Я.* Математика и информатика. 3-е изд. М.: ИНФРА-М, 2000.

3. *Леванков В.А.*, *Максимов Ю.Д.*, *Романов М.Ф.* Математика и её приложения для гуманитарных специальностей: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2001.

4. *Демидович Б.П.*, *Кудрявцев В.А.* Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов. М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2001.

Оглавление

СУРЫГИН Александр Игоревич
ШАГЛИНА Наталья Дмитриевна

Математика и информатика. Практикум по математике

Для студентов гуманитарных направлений подготовки и специальностей

Редактор *О.Е. Сафонова*
Технический редактор *А.И. Колодяжная*

Оригинал-макет подготовлен авторами

Директор Издательства Политехнического университета *А.В. Иванов*

Свод. темплан 2005 г.

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97
Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать Формат 60×84/16
Уч.-изд.л. 7,5 Усл.печ.л. 7,5 Тираж 100 Заказ

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.
Издательство Политехнического университета,
член Издательско-полиграфической ассоциации
университетов России.
Адрес университета и издательства:
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.