Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И. Сурыгин   М.А. Иванова   О.В. Изотова

МАТЕМАТИКА

Опорный конспект

Часть I

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007

Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И. Сурыгин   М.А. Иванова   О.В. Изотова

МАТЕМАТИКА

Опорный конспект

Часть I

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73
С

Сурыгин А.И., Иванова М.А., Изотова О.В. **МАТЕМАТИКА.** Опорный конспект. Часть I. / Под ред. А.И. Сурыгина. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 120 с.

Опорный конспект соответствует примерной программе по дисциплине «Математика» для студентов специальностей «Менеджмент организации», «Реклама» и согласован с основным учебником (Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер и др. Под ред. проф. Н.Ш. Кремера).

В пособии представлен опорный конспект первой части курса математики: приведены только формулировки определений и теорем, в необходимых случаях уточнённые. В некоторых случаях изменено структурирование учебного материала и порядок изложения. Для материала, данного в учебнике в недостаточном объёме, в опорном конспекте приведено подробное изложение.

Опорный конспект рекомендуется использовать при слушании лекций и подготовке к коллоквиумам и экзамену наряду с основным учебником.

Предназначен для студентов специальностей «Менеджмент организации» и «Реклама».

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN

А.И. Сурыгин, М.А. Иванова, О.В. Изотова

МАТЕМАТИКА

Опорный конспект

Часть I

Лицензия ЛР 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать .2007. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 7,5. Уч. изд. л. 7,5. Тираж 100. Заказ .

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного ИМОП СПбГПУ,
в типографии Издательства Политехнического университета.
195251, Санкт–Петербург, ул. Политехническая, 29.

Оглавление

Предисловие 6

Раздел 1. **Основы линейной алгебры и аналитической геометрии** 7

Глава 1. **Матрицы и определители** 7
1.1. Матрицы 7
1.2. Виды матриц 8
1.3. Операции над матрицами 10
1.4. Определители квадратных матриц второго и третьего порядка 12
1.5. Определители квадратных матриц 16
1.6. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Теорема Лапласа 17
1.7. Свойства определителей 17
1.8. Обратная матрица 19
1.9. Вычисление обратной матрицы 21
1.10. Свойства обратной матрицы 24
1.11. Ранг матрицы 25
1.12. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований 26
1.13. Линейная зависимость / независимость строк (столбцов) 26

Глава 2. **Системы линейных уравнений** 28
2.1. Линейные уравнения 28
2.2. Решение линейных уравнений 28
2.3. Примеры и определения 29
2.4. Классификация систем линейных уравнений 31
2.5. Матричная форма записи систем линейных уравнений 32
2.6. Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными методом обратной матрицы 32
2.7. Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными методом Крамера 33
2.8. Исследование системы n линейных уравнений с n неизвестными методом Крамера 34
2.9. Решение системы m линейных уравнений с n неизвестными методом Гаусса 35
2.10. Исследование системы m линейных уравнений с n неизвестными 38
2.11. Базисные решения системы 40
2.12. Системы линейных однородных уравнений 40
2.13. Фундаментальная система решений системы линейных

однородных уравнений 41

Глава 3. **Векторная алгебра** 43
3.1. Скалярные и векторные величины 43
3.2. Векторы 44
3.3. Линейные операции над векторами 45
3.4. Координатная форма записи векторов 47
3.5. Линейные операции над векторами в координатной форме 48
3.6. Скалярное произведение векторов 49
3.7. Вычисление угла между векторами 50
3.8. Векторное произведение векторов 51
3.9. Смешанное произведение векторов 52

Глава 4. **Элементы матричного анализа** 53
4.1. n–мерный вектор и векторное пространство 53
4.2. Линейная зависимость/независимость векторов 55
4.3. Размерность и базис векторного пространства 56
4.4. Переход к новому базису 57
4.5. Евклидово пространство 58
4.6. Отображения, функции, операторы 59
4.7. Линейные операторы 60
4.8. Действия над линейными операторами 61
4.9. Зависимость между матрицами оператора в разных базисах 62
4.10. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.... 63
4.11. Квадратичные формы 64

Глава 5. **Элементы аналитической геометрии** 66
5.1. Уравнение линии на плоскости 66
5.2. Две основные задачи аналитической геометрии 67
5.3. Уравнение прямой 67
5.4. Угол между двумя прямыми 69
5.5. Условия параллельности прямых 69
5.6. Условия перпендикулярности прямых 70
5.7. Точка пересечения прямых 70
5.8. Расстояние от точки до прямой 70
5.9. Кривые второго порядка 71
5.10. Окружность 71
5.11. Эллипс 72
5.12. Гипербола 72
5.13. Парабола 72
5.14. Общее уравнение плоскости в пространстве 73
5.15. Условие параллельности плоскостей в пространстве 73
5.16. Условие перпендикулярности плоскостей в пространстве 73
5.17. Уравнения линии в пространстве 74
5.18. Канонические уравнения прямой линии в пространстве 74

Раздел 2. **Введение в математический анализ** 75

Глава 6. **Компле́ксные числа** 75

6.1. Понятие компле́ксного числа 75
6.2. Действия над компле́ксными числами 77
6.3. Показательная форма записи компле́ксных чисел 79
6.4. Извлечение корня из компле́ксного числа 81

Глава 7. **Многочлены и их корни** 82

7.1. Основные понятия 82
7.2. Основная теорема алгебры и следствия из неё 84
7.3. Формулы Виета 85
7.4. Многочлены с вещественными коэффициентами 86
7.5. Разложение алгебраической дроби на простейшие 88

Глава 8. **Множества** 90

8.1. Виды теорем. Необходимое и достаточное условия 90
8.2. Понятие *множество* 93
8.3. Подмножества. Отношение включения 95
8.4. Операции над множествами 97
8.5. Числовые множества. Структура числовой системы 105
8.6. Геометрические модели числовых множеств 106
8.7. Абсолютная величина вещественного числа 107
8.8. Понятие ε–окрестности точки 108

Глава 9. **Предел и непрерывность функции** 109

9.1. Предел функции в точке (по Коши) 109
9.2. Предел функции в бесконечности (по Коши) 109
9.3. Предел числовой последовательности 110
9.4. Предел функции (по Гейне) 110
9.5. Бесконечно малые функции 111
9.6. Теорема о связи бесконечно малой функции и предела функции 112
9.7. Свойства бесконечно малых функций 112
9.8. Сравнение бесконечно малых функций 113
9.9. Бесконечно большие функции 114
9.10. Свойства бесконечно больших функций 115
9.11. Теорема о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций ... 115
9.12. Основные теоремы о пределах 116
9.13. Признаки существования предела 117
9.14. Замечательные пределы 118
9.15. Два определения непрерывности функции 118
9.16. Эквивалентность определений непрерывности функции 119
9.17. Свойства функций, непрерывных в точке 119
9.18. Свойства функций, непрерывных на отрезке 120

Предисловие

Кафедра математики Института международных образовательных программ СПбГПУ использует для обучения студентов специальностей «Менеджмент организации» и «Реклама» учебник под редакцией профессора Н.Ш. Кремера[1]. Однако при всех своих достоинствах учебник не может полностью удовлетворить потребности студентов. Поэтому подготовлен опорный конспект по первой части курса.

Опорный конспект имеет следующие принципиальные особенности.

1. Опорный конспект не заменяет учебник, а дополняет его, чем облегчает, по мнению авторов, конспектирование лекций, работу с учебником, подготовку к экзаменам. Пособие рекомендуется использовать наряду с основным учебником.

2. Порядок изложения в опорном конспекте в основном следует порядку изложения учебного материала в учебнике. Однако в некоторых деталях он отличается в соответствии с лекциями.

3. В конспекте приведены только формулировки определений и теорем. Однако они не всегда повторяют формулировки учебника. Авторы конспекта постарались уточнить не вполне удачные формулировки, устранить лингвистический «разнобой» в их построении.

4. Структурирование учебного материала в опорном конспекте часто отличается от структурирования материала в учебнике, хотя в целом канва изложения сохранена. По мнению авторов, материал в учебнике не всегда структурирован достаточно чётко и подробно, что затрудняет его восприятие студентами.

5. В тех случаях, когда материал дан в учебнике в недостаточном объёме (теория многочленов, комплексные числа и т.п.), в конспекте приведены не только формулировки определений и теорем, а представлено сравнительно подробное изложение соответствующих вопросов.

[1] Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов по экон. специальностям / Н.Ш. Кремер и др.; под ред. Н.Ш. Кремера. 3-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006.

Раздел 1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Матрицы

Определение 1.1. ***Матрица*** *размера $m \times n$ – это прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов.*

Записывают:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или (сокращённо) $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

или (совсем коротко) $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $\quad i = 1,\dots,m$ – номер строки;

$j = 1,\dots,n$ – номер столбца.

Определение 1.2. ***Элементы матрицы*** *– это числа, составляющие матрицу.*

☑ **Пример.** Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Матрица коэффициентов системы (матрица системы):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Расширенная матрица системы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

☒

1.2. Виды матриц

Определение 1.3. ***Матрица-строка (вектор-строка)*** *– это матрица, состоящая из одной строки.*

Например, $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$.

Определение 1.4. ***Матрица-столбец (вектор-столбец)*** *– это матрица, состоящая из одного столбца.*

Например, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Определение 1.5. ***Квадратная матрица*** *n-го порядка – это матрица, которая состоит из n строк и n столбцов (количество строк равно количеству столбцов).*

Например, $A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Определение 1.6. ***Диагональный элемент*** *матрицы – это элемент* a_{ii}*, у которого номер столбца равен номеру строки (* $j=i$ *).*

Определение 1.7. ***Главная диагональ*** *матрицы – это совокупность всех диагональных элементов* a_{ii} *матрицы.*

Определение 1.8. ***Треугольная матрица*** *– это квадратная матрица, все элементы которой ниже (выше) главной диагонали равны* 0:

$$(a_{ij}=0 \text{ при } i>j) \text{ или } (a_{ij}=0 \text{ при } i<j).$$

Например, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определение 1.9. ***Диагональная матрица*** *– это квадратная матрица, все недиагональные элементы которой равны* 0*:*

$$a_{ij}=0 \text{ если } i\neq j.$$

Например, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определение 1.10. ***Единичная матрица*** *– это диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны* 1.

Обозначение: E (E_n).

Например, $E=E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определение 1.11. ***Нулевая матрица (нуль-матрица)*** *– это любая матрица, все элементы которой равны* 0.

$$\text{Обозначение: } \mathbf{0}_{m\times n} \text{ или } \mathbf{0}\text{: } \mathbf{0}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3. Операции над матрицами

Определение 1.12. ***Равные матрицы*** *– это матрицы* $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$ *и* $B_{m\times n} = (b_{ij})$, $i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$, *все соответствующие элементы которых равны.*

$$(A_{m\times n} = B_{m\times n}) \Leftrightarrow (a_{ij} = b_{ij},\ i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n).$$

Определение 1.13. ***Произведение матрицы*** $A_{m\times n}$ ***на число*** λ *– это матрица* $B_{m\times n} = (b_{ij})$, $i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$, *элементы которой* $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ *для всех* $i = 1,\dots,m$ и $j = 1,\dots,n$.

$$(B_{m\times n} = \lambda A_{m\times n}) \Leftrightarrow (b_{ij} = \lambda a_{ij},\ i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n).$$

Определение 1.14. ***Сумма матрицы*** $A_{m\times n}$ ***и матрицы*** $B_{m\times n}$ *– это матрица* $C_{m\times n} = (c_{ij})$, $i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$, *элементы которой* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *для всех* $i = 1,\dots,m$ *и* $j = 1,\dots,n$.

$$(C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}) \Leftrightarrow (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n).$$

Определение 1.15. ***Разность матрицы*** $A_{m\times n}$ ***и матрицы*** $B_{m\times n}$ *– это матрица* $C_{m\times n} = (c_{ij})$, $i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$, *элементы которой* $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ *для всех* $i = 1,\dots,m$ и $j = 1,\dots,n$.

$$(C_{m\times n} = A_{m\times n} - B_{m\times n}) \Leftrightarrow (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij},\ i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n).$$

Определение 1.16. ***Произведение матрицы*** $A_{m\times n}$ ***на матрицу*** $B_{n\times k}$ – *это матрица* $C_{m\times k}=\left(c_{ij}\right)$, $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,k$, *элементы которой*

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}$$

для всех $i=1,\ldots,m$ *и* $j=1,\ldots,k$.

$$\left(C_{m\times k}=A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{c} c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum\limits_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}, \\ i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,k \end{array}\right).$$

Теорема 1.1 (свойства операций над матрицами). *Если A и B – матрицы соответствующих размеров, а* $\lambda\in R$ *– вещественное число, то*

1) $A+B=B+A$;
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
4) $A(B+C)=AB+AC$;
5) $(A+B)C=AC+BC$;
6) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$;
7) $A(BC)=(AB)C$.

Теорема 1.2. *Если* $A_{m\times k}$ *и* $B_{k\times n}$ *– матрицы, то в общем случае* $AB\neq BA$, *причём при* $m\neq n$ *произведение* $B_{k\times n}A_{m\times k}$ *не определено, а при* $m=n$ *как правило отлично от произведения AB.*

Равенство $AB=BA$ *возможно как исключение.*

Определение 1.17. ***Целая положительная степень квадратной матрицы*** $A_{n\times n}$ *– это матрица* $C_{n\times n}=A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\ \text{множителей}}$. $A^0=E$; $A^1=A$.

Теорема 1.3. *Если A – квадратная матрица, то*

1) $A^m\cdot A^k=A^{m+k}$;
2) $\left(A^m\right)^k=A^{mk}$.

Определение 1.18. ***Транспонированная матрица*** $A_{m\times n}$ *– это матрица* $C_{n\times m}=\left(A_{m\times n}\right)'$, *в которой столбцы – это строки матрицы A, а строки – это столбцы матрицы A.*

$$\left(C_{n\times m} = \left(A_{m\times n}\right)'\right) \Leftrightarrow \left(c_{ij} = a_{ji},\ j = 1,\ldots,m;\ i = 1,\ldots,n\right).$$

Теорема 1.4 (свойства операции транспонирования). *Если A – матрица и A' – транспонированная матрица, то*

1) $(A')' = A$;
2) $(\lambda A)' = \lambda A'$;
3) $(A+B)' = A' + B'$;
4) $(AB)' = B'A'$.

1.4. Определители квадратных матриц второго и третьего порядка

Пример системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}.$$

Решение системы методом определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 1\cdot(-1) = 6 + 1 = 7,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - 5\cdot(-1) = 9 + 5 = 14,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 1\cdot 3 = 10 - 3 = 7.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1.$$

Как возникает понятие *определитель*?

Решим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными в общем виде. В левой колонке будем записывать решение в обычном виде, а в правой колонке – с помощью расширенной матрицы системы.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными в общем виде:	Расширенная матрица системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$

Умножим первое уравнение на a_{21}, а второе уравнение – на a_{11}:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}b_2 \end{array}\right)$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + \quad a_{12}a_{21}x_2 \quad = \quad b_1a_{21} \\ \quad 0 \cdot x_1 \quad + \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & b_1a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{array}\right)$$

Обозначим $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}:$$

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21} \\ \qquad \qquad \Delta x_2 \quad = \quad \Delta_2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & b_1a_{21} \\ 0 & \Delta & \Delta_2 \end{array}\right)$$

Пусть $\Delta \neq 0$, тогда разделим второе уравнение на Δ:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21} \\ \qquad \qquad x_2 \quad = \Delta_2/\Delta \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & b_1a_{21} \\ 0 & 1 & \Delta_2/\Delta \end{array}\right)$$

Вычтем второе уравнение, умноженное на $a_{12}a_{21}$, из первого уравнения:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + 0 \cdot x_2 = b_1a_{21} - a_{12}a_{21} \cdot \Delta_2/\Delta \\ \qquad \quad x_2 \quad = \qquad \Delta_2/\Delta \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{21} & 0 & b_1a_{21} - a_{12}a_{21} \cdot \Delta_2/\Delta \\ 0 & 1 & \Delta_2/\Delta \end{array}\right).$$

Разделим первое уравнение на $a_{11}a_{21}$ (считаем, что $a_{11}a_{21} \neq 0$):

$$\left\{\begin{aligned} x_1 \quad &= (b_1 - a_{12}\cdot\Delta_2/\Delta)/a_{11} \\ x_2 = \quad &\Delta_2/\Delta \end{aligned}\right. \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (b_1 - a_{12}\cdot\Delta_2/\Delta)/a_{11} \\ 0 & 1 & \Delta_2/\Delta \end{array}\right).$$

Можно показать, что $(b_1 - a_{12}\cdot\Delta_2/\Delta)/a_{11} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$,

где $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$.

Тогда

$$\left\{\begin{aligned} x_1 \quad &= \Delta_1/\Delta \\ x_2 &= \Delta_2/\Delta \end{aligned}\right. \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \Delta_1/\Delta \\ 0 & 1 & \Delta_2/\Delta \end{array}\right)$$

Следовательно, $\left\{\left(x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}\right)\right\}$ – решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Обратите внимание на важные введённые обозначения:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Это определители второго порядка. Определитель Δ – главный определитель системы.

Определение 1.19. *Определитель квадратной матрицы* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ***второго порядка*** *(определитель второго порядка) – это число, вычисляемое по правилу* $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определение 1.20. ***Определитель (квадратной) матрицы*** $A = (a_{11})$ ***первого порядка*** *(определитель первого порядка) – это число* $\Delta = |A| = a_{11}$.

Определение 1.21. ***Определитель квадратной матрицы*** $A = (a_{ij})$, $(i = 1,2,3;\ \ j = 1,2,3)$ ***третьего порядка*** *(определитель третьего порядка) – это число, вычисляемое по правилу*

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определители третьего порядка удобно вычислять по правилу Саррюса:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{vmatrix} a_{11} & \times & \times \\ \times & a_{22} & \times \\ \times & \times & a_{33} \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} \times & \times & \times \\ a_{21} & \times & \times \\ \times & a_{32} & \times \\ \times & \times & a_{13} \\ \times & \times & \times \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ a_{31} & \times & \times \\ \times & a_{12} & \times \\ \times & \times & a_{23} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \times & \times & a_{13} \\ \times & a_{22} & \times \\ a_{31} & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & a_{23} \\ \times & a_{32} & \times \\ a_{11} & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & a_{33} \\ \times & a_{12} & \times \\ a_{21} & \times & \times \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

1.5. Определители квадратных матриц

Полное определение определителя n-го порядка, данное в учебнике, трудно для восприятия и на практике его не используют. Достаточно уяснить, что определитель – это **число**, равное алгебраической сумме всех возможных произведений элементов матрицы при условии, что в каждое произведение входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знак каждого произведения в алгебраической сумме определяется по специальному правилу.

Определение 1.22. ***Перестановка** J из n последовательных натуральных чисел – это n последовательных натуральных чисел, записанных в произвольном порядке.*

Определение 1.23. ***Инверсия** (**беспорядок**) в перестановке J из n натуральных чисел – это количество пар чисел, в которых большее число предшествует меньшему.*

Количество инверсий в перестановке J обозначим $r(J)$.

Определение 1.24. ***Определитель квадратной матрицы** $A_{n\times n}$ (**определитель n-го порядка**) – это число, равное алгебраической сумме $n!$ слагаемых, представляющих собой все возможные произведения из n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причём знак каждого слагаемого определяется как $(-1)^{r(J)}$, где $r(J)$ – количество инверсий в перестановке J из номеров столбцов элементов матрицы, если при этом номера строк записаны в порядке возрастания.*

Обозначают:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{r(J)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} .$$

1.6. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Теорема Лапласа

Определение 1.25. ***Минор*** *M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A n-го порядка – это определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.*

Обозначение: M_{ij}.

Определение 1.26. ***Алгебраическое дополнение*** *A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A n-го порядка – это минор M_{ij} элемента a_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема 1.5 (теорема Лапласа). *Если Δ – определитель квадратной матрицы, то он равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}A_{ir}$$

(разложение по элементам i-й строки);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j-го столбца).

1.7. Свойства определителей

Рассмотрим свойства определителей квадратных матриц.

Свойство 1. *Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель матрицы равен* 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = 0.$$

Свойство 2. *Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя умножить на число* λ*, то определитель умножится на это число* λ*.*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \; |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \lambda a_{i3} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |B| = \lambda |A|.$$

Свойство 3. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы (при транспонировании матрицы её определитель не изменяется).*

$$|A| = |A'|.$$

Свойство 4. *Если переставить (поменять местами) две строки (столбца) определителя, то знак определителя меняется на противоположный.*

Свойство 5. *Если соответствующие элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны (или равны), то её определитель равен* 0*.*

Свойство 6. *Если A – квадратная матрица, то сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы A на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна* 0:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0 \quad \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ri} A_{rj} = 0 \right) \quad (i \neq j).$$

Если A – квадратная матрица, то сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы A на их алгебраические дополнения равна определителю этой матрицы:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{is} = |\,A\,| \quad \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ri} A_{ri} = |\,A\,| \right).$$

Свойство 7. *Если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.*

Свойство 8. *Если A – квадратная матрица, то сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из A заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$.*

Свойство 9. *Если A и B – квадратные матрицы, то определитель их произведения равен произведению их определителей.*

$$|\,A \cdot B\,| = |\,B \cdot A\,| = |\,A\,| \cdot |\,B\,|.$$

Свойство 10. *Если квадратная матрица треугольная или диагональная, то её определитель равен произведению элементов главной диагонали.*

1.8. Обратная матрица

Определение 1.27. ***Обратная матрица*** *к квадратной матрице A – это матрица A^{-1}, произведения которой на матрицу A как справа, так и слева равны единичной матрице:*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Определение 1.28. ***Особенная (вырожденная) матрица*** *– это квадратная матрица A, определитель которой равен нулю:*

$$|A| = 0.$$

Определение 1.29. ***Неособенная (невырожденная) матрица*** *– это квадратная матрица A, определитель которой отличен от нуля:*

$$|A| \neq 0.$$

Теорема 1.6 (необходимое и достаточное условия существования обратной матрицы). *Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда матрица А невырожденная.*

Теорема 1.6а (необходимость). *Если обратная матрица A^{-1} существует, то матрица А невырожденная.*

$$\left(\exists A^{-1}\right) \Rightarrow \left(|A| \neq 0\right)$$

Теорема 1.6б (достаточность). *Если матрица А невырожденная, то обратная матрица A^{-1} существует.*

$$\left(|A| \neq 0\right) \Rightarrow \left(\exists A^{-1}\right)$$

Доказательство.

Составим присоединённую матрицу $\tilde{A}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычислим $A \cdot \tilde{A}$:

$$A \cdot \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+\ldots+a_{1n}A_{1n} & \ldots & a_{11}A_{n1}+\ldots+a_{1n}A_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}A_{11}+\ldots+a_{nn}A_{1n} & \ldots & a_{n1}A_{n1}+\ldots+a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} |A| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & |A| \end{pmatrix}=|A|\cdot\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}=|A|\cdot E.$$

Тогда $A\cdot\tilde{A}=|A|\cdot E$ и, следовательно, $A\cdot\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)=E$. Если обозначить $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}$, то можно получить $A\cdot A^{-1}=E$.

Аналогично получают $\tilde{A}\cdot A=|A|\cdot E$, из чего следует $\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)\cdot A=E$. Снова обозначив $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}$, имеем $A^{-1}\cdot A=E$.

Следовательно, $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ и A^{-1} – обратная матрица.

Таким образом, теорема 1.6б доказывает существование обратной матрицы и даёт способ её построения:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}.$$

☒

Теорема 1.7 (единственность обратной матрицы). *Если обратная матрица A^{-1} существует, то она единственна.*

1.9. Вычисление обратной матрицы

Алгоритм вычисления обратной матрицы через вычисление присоединённой матрицы

1. Найти $|A|$.

Если $|A|=0$, то матрица A^{-1} не существует и вычисления окончены.

Если $|A| \neq 0$, то матрица A^{-1} существует и переход к п. 2.

2. Найти матрицу A', транспонированную к A.

3. Найти алгебраические дополнения $A'_{ij} = A_{ji}$ ($i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,n$) ко всем элементам матрицы A'.

4. Составить присоединенную матрицу $\widetilde{A}$: $\widetilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}$ ($i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,n$).

5. Вычислить обратную матрицу: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}$ $\left(|A| \neq 0\right)$.

6. Проверить вычисления по определению обратной матрицы: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Определение 1.30. ***Элементарные преобразования матрицы*** *– это:*

1) отбрасывание нулевой строки (столбца);

2) умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю;

3) изменение порядка строк (столбцов) матрицы;

4) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;

5) транспонирование матрицы.

Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований рассмотрим на примере.

☑ **Пример.** Вычислить обратную матрицу A^{-1} к матрице $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований.

<u>*Решение*</u>. Расширим матрицу A до размера 3×6, приписав к ней справа единичную матрицу третьего порядка:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Существо метода состоит в том, чтобы с помощью элементарных преобразований добиться, чтобы в левой части расширенной матрицы A^* образовалась единичная матрица. Тогда в правой части получится матрица A^{-1}.

Прежде всего приведём матрицу A^* к ступенчатому виду. Для этого третью строку сложим с первой, а вторую – с удвоенной первой; первую строку оставим без изменений:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Полученную треугольную матрицу приведём к диагональному виду. Для этого из второй строки вычтем третью, а из первой – третью, умноженную на $1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Осталось получить 0 в первой строке во втором столбце. Для этого из первой строки вычтем вторую:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Чтобы получить в левой части единичную матрицу, умножим первую и вторую строки на -1, а третью – на $1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Матрица в правой части

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и является обратной матрицей к матрице A. Проверить это можно с помощью определения обратной матрицы, вычислениями доказав равенство

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E\,.$$

☒

Для самостоятельной работы:

1. Вычислите с помощью присоединённой матрицы обратную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Результат сравните с полученным выше с помощью элементарных преобразований.

2. Докажите, что $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – обратные матрицы.

3. Вычислите с помощью элементарных преобразований обратную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Результат сравните с обратной матрицей, полученной в учебнике под редакцией Н.Ш. Кремера с помощью вычисления присоединённой матрицы (пример 1.10, стр. 28).

1.10. Свойства обратной матрицы

Теорема 1.8 (свойства обратной матрицы). *Если A – невырожденная матрица и* A^{-1} *– обратная к ней, то имеют место следующие свойства:*

1) $\left| A^{-1} \right| = \dfrac{1}{|A|}$;

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

3) $\left(A^{m}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{m}$;

4) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

5) $\left(A^{-1}\right)' = (A')^{-1}$.

1.11. Ранг матрицы

Определение 1.31. ***Минор k-го порядка*** *матрицы $A_{m\times n}$ – это определитель квадратной подматрицы $B_{k\times k}$, $k \le \min(m,n)$, полученной из матрицы $A_{m\times n}$ вычеркиванием строк и столбцов.*

Определение 1.32. ***Ранг матрицы*** *– это наибольший порядок отличных от нуля миноров данной матрицы.*

Обозначение: $r(A)$.

Свойства ранга матрицы, следующие из определения:

1) ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из её размеров:

$$r(A) \le \min(m,n);$$

2) ранг матрицы $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю:

$$r(A)=0 \Leftrightarrow A=\mathbf{0};$$

3) ранг квадратной матрицы $A_{n\times n}$ $r(A_{n\times n})=n$ тогда и только тогда, когда матрица $A_{n\times n}$ невырожденная.

Другие свойства ранга матрицы:

1) $r(A+B) \le r(A)+r(B)$;

2) $r(A-B) \ge \left| r(A)-r(B) \right|$;

3) $r(AB) \le \min\{r(A); r(B)\}$;

4) $r(A'A) = r(A)$;

5) $r(AB)=r(A)$, если B – невырожденная квадратная матрица;

6) $r(AB) \ge r(A)+r(B)-n$, где n – количество столбцов матрицы A или строк матрицы B.

1.12. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований

Теорема 1.9. *Если над матрицей произвести элементарные преобразования, то ранг матрицы не изменится.*

1.13. Линейная зависимость / независимость строк (столбцов)

Обозначим строки матрицы $A_{m\times n}$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix};$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix};$$
$$\dots$$
$$e_m = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.33. ***Линейная комбинация*** *строк (столбцов) матрицы – это строка (столбец) e, вычисляемая по формуле*

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m \quad \left(e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n\right)$$

где $e_i = \left(a_{i1}, \dots, a_{in}\right)$ $\left(i = 1, \dots, m\right)$ *– строки (или* $e_j = \left(a_{1j}, \dots, a_{mj}\right)'$ $\left(j = 1, \dots, n\right)$ *– столбцы) матрицы,* $\lambda_i \in R$ *– вещественные числа.*

Определение 1.34. ***Линейно зависимые строки (столбцы)*** *матрицы – это строки (столбцы)* $e_1, \dots, e_s$, *для которых существуют неравные одновременно* 0 *числа* $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in R$ *такие, что линейная комбинация строк (столбцов) матрицы равна нулевой строке (столбцу)* $\mathbf{0}$:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_s e_s = \mathbf{0}.$$

Определение 1.35а. ***Линейно независимые строки (столбцы)*** *матрицы – это строки (столбцы) $e_1, \ldots, e_s$, для которых НЕ существуют не равные одновременно* 0 *числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in R$ *такие, что линейная комбинация строк (столбцов) матрицы равна нулевой строке (столбцу)* $\mathbf{0}$:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_s e_s = \mathbf{0}.$$

Определение 1.35б. ***Линейно независимые строки (столбцы)*** *матрицы – это строки (столбцы) $e_1, \ldots, e_s$, линейная комбинация которых* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_s e_s = \mathbf{0}$ *только при* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0$.

Теорема 1.10. *Если строки (столбцы) матрицы являются линейно зависимыми, то хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией остальных.*

Теорема 1.11 (о ранге матрицы). *Если матрица $A_{m \times n}$ имеет ранг r, то максимальное количество линейно независимых строк или столбцов в матрице $A_{m \times n}$ равно её рангу r, причём все остальные строки (столбцы) матрицы можно представить в виде линейной комбинации её линейно независимых строк (столбцов).*

Доказательство. Принимаем без доказательства.

Глава 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Линейные уравнения

$ax + b = 0$ – линейное уравнение с одной неизвестной (x);

$ax + by = c$ или $ax_1 + bx_2 = c$ – линейное уравнение с двумя неизвестными (x; y или x_1, x_2);

$ax + by + cz = d$ или $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ – линейное уравнение с тремя неизвестными (x, y, z или x_1, x_2, x_3).

Общий случай:

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ – линейное уравнение с n неизвестными x_1; x_2; x_3; ...; x_n.

2.2. Решение линейных уравнений

Определение 2.1. ***Решение уравнения*** *– это такое число (или числа), при подстановке которого (которых) вместо неизвестной (неизвестных) уравнение обращается в верное числовое равенство.*

Решить уравнение значит найти все его решения (множество его решений).

Исследовать уравнение значит определить, имеет ли уравнение решения, сколько и при каких условиях.

Решение линейного уравнения с одной неизвестной $ax + b = 0$:

1) $a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{b}{a}$ (графическая интерпретация – точка на числовой оси);

2) $a = 0, b = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in R$ – любое вещественное число (графическая интерпретация – вся числовая ось);

3) $a = 0, b \neq 0 \quad \Rightarrow$ решений нет.

Решение линейного уравнения с двумя неизвестными

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b:$$

1) $a_1, a_2 \neq 0$.

Пусть $x_2 = c \in R$ – любое вещественное число. Тогда $x_1 = \dfrac{b - a_2 c}{a_1}$. Графическая интерпретация – прямая линия в прямоугольных координатах $x_1 x_2$: координаты любой точки этой прямой являются решениями уравнения; координаты любой точки вне этой прямой не являются решениями уравнения;

2) случаи $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$ не рассматриваем, так как они не представляют интереса.

2.3. Примеры и определения

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2. \end{cases}$$

Система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2 и x_3:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2; \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3. \end{cases}$$

Система двух линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2. \end{cases}$$

Система трёх линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3. \end{cases}$$

Общий случай:

система m линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, …, x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Определение 2.2. ***Система m линейных уравнений с n неизвестными*** *– это система уравнений вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Здесь a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, b_k – свободные члены.

Краткая запись системы:

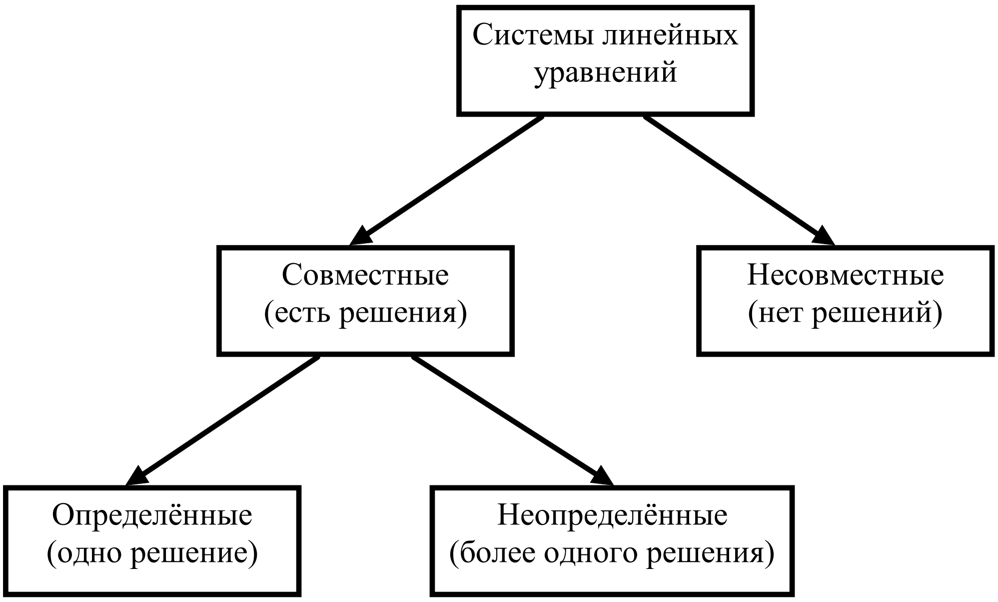
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Определение 2.3. ***Решение системы линейных уравнений с n неизвестными*** *– это совокупность n чисел, при подстановке которых вместо неизвестных* ***все*** *уравнения системы обращаются в верные числовые равенства*.

Определение 2.4. ***Равносильные (эквивалентные) системы линейных уравнений*** *– это системы линейных уравнений, множества решений которых равны (совпадают).*

2.4. Классификация систем линейных уравнений

Схема классификации систем линейных уравнений приведена на рисунке.



Определение 2.5. ***Совместная система линейных уравнений*** *– это система линейных уравнений, которая имеет хотя бы одно решение.*

Определение 2.6. ***Несовместная система линейных уравнений*** *– это система линейных уравнений, которая не имеет ни одного решения.*

Определение 2.7. ***Определённая система линейных уравнений*** *– это система линейных уравнений, которая имеет одно и только одно решение.*

Определение 2.8. ***Неопределённая система линейных уравнений*** *– это система линейных уравнений, которая имеет бесконечное множество решений.*

Таким образом, по основанию классификации «наличие / отсутствие решений» системы линейных уравнений разделяют на два класса: совместные (есть решения) и несовместные (нет решений).

В свою очередь, совместные системы линейных уравнений по основанию классификации «количество решений» классифицируют на определённые (одно и только одно решение) и неопределённые (бесконечное множество решений).

Отметим, что для систем линейных уравнений возможны только 3 случая: 1) нет решений, 2) одно решение, 3) бесконечно много (бесконечное множество) решений.

2.5. Матричная форма записи систем линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме записи:

$$AX = B,$$

где $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы;

$X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных;

$B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов.

2.6. Решение системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными методом обратной матрицы

Теорема 2.1. *Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными* $\Delta \neq 0$*, то система имеет единственное решение, которое можно вычислить по матричной формуле*

$$X = A^{-1}B,$$

где A^{-1} – обратная матрица к матрице коэффициентов системы
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Доказательство. Рассмотрим матричную форму записи системы

$$AX = B.$$

Так как по условию теоремы определитель системы (определитель матрицы *A*) $\Delta \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}. Следовательно,

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad EX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B.$$

☒

Недостаток метода: применим только к системам *n* линейных уравнений с *n* неизвестными.

2.7. Решение системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными методом Крамера

Теорема 2.2 (теорема Крамера). *Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными* $\Delta \neq 0$*, то система имеет единственное решение, которое можно вычислить по формулам*

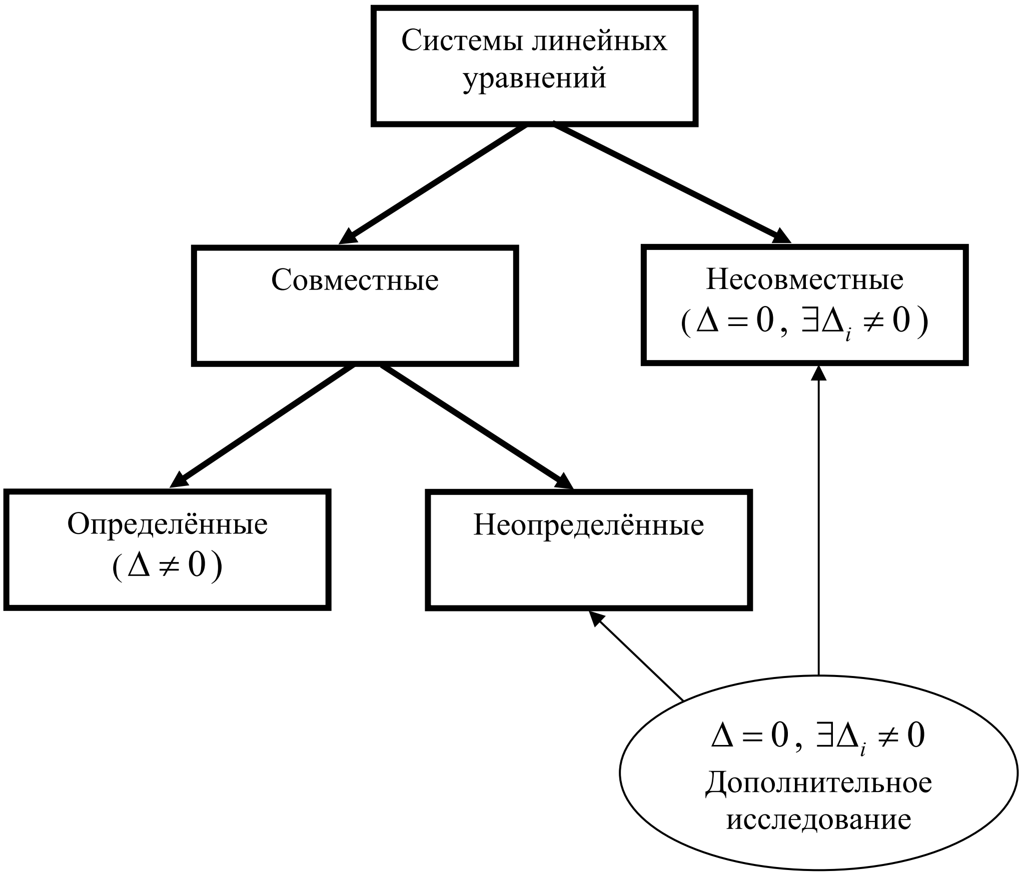
$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \text{ (формулы Крамера)},$$

где Δ_j – определитель, получаемый из определителя Δ матрицы коэффициентов системы заменой *j*-го столбца столбцом свободных членов.

Недостаток метода: применим только к системам *n* линейных уравнений с *n* неизвестными.

2.8. Исследование системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными методом Крамера

Метод Крамера позволяет исследовать системы n линейных уравнений с n неизвестными.Схема исследования приведена на рисунке.



Обратите внимание: случай $\Delta = 0$, $\forall \Delta_i = 0$ требует дополнительного исследования, так как система линейных уравнений может оказаться как совместной неопределённой, так и несовместной. Метод Крамера необходимого ответа в этом случае не даёт.

2.9. Решение системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными методом Гаусса

Рассмотрим метод Гаусса на примере системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Первое уравнение оставляем без изменений, а из второго и третьего – исключаем неизвестную x_1. Для этого первое уравнение умножаем на a_{21}, второе – на a_{11} и вычитаем первое уравнение из второго. Аналогично поступаем с первым и третьим уравнениями. Получаем преобразованную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)}; \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)}. \end{cases}$$

Теперь первые два уравнения оставляем без изменений, а из третьего исключаем неизвестную x_2 (выполняем преобразования второго и третьего уравнений по аналогии с предыдущим шагом: умножаем второе уравнение на $a_{32}^{(1)}$, третье — на $a_{22}^{(1)}$ и вычитаем второе уравнение из третьего). Получаем систему «ступенчатого» вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)}; \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)}. \end{cases}$$

Далее возможны два способа решения.

Способ 1. В полученной системе выразим x_1 из первого уравнения и x_2 из второго уравнения, а x_3 найдём из третьего уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}; \\ \qquad x_2 = \dfrac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)}x_3}{a_{22}^{(1)}}; \\ \qquad\qquad x_3 = \dfrac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}. \end{cases}$$

Теперь последовательно можно вычислить числовое значение x_3 по последней формуле, потом по известной величине x_3 вычислить x_2 по второй формуле и, наконец, по известным x_3 и x_2 вычислить x_1 по первой формуле.

Способ 2 (обратный ход метода Гаусса). Преобразуем систему так, чтобы x_1 в первом уравнении, x_2 во втором уравнении и x_3 в третьем уравнении имели коэффициенты, равные 1:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)}; \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)}; \\ \qquad\qquad x_3 = b_3^{(3)}. \end{cases}$$

Теперь из первого и второго уравнений вычтем третье уравнение, умноженное на $a_{13}^{(1)}$ и $a_{23}^{(2)}$ соответственно. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 \qquad = b_1^{(2)}; \\ \qquad x_2 \qquad = b_2^{(3)}; \\ \qquad\qquad x_3 = b_3^{(3)}. \end{cases}$$

Далее из первого уравнения вычтем второе уравнение, умноженное на $a_{12}^{(2)}$:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = b_1^{(2)}; \\ \qquad x_2 \qquad = b_2^{(3)}; \\ \qquad\qquad x_3 = b_3^{(3)}. \end{cases}$$

Мы получили решение системы.

☑ **П р и м е р .** Решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1; \\ x_1+x_2-x_3=2; \\ \quad\;\; x_2+x_3=0. \end{cases}$

Решение.

Система: | Расширенная матрица системы:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1; \\ x_1+x_2-x_3=2; \\ \quad\;\; x_2+x_3=0. \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Из второго уравнения вычитаем первое:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1; \\ \qquad\;\; -2x_3=1; \\ \quad\;\; x_2+x_3=0. \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Поменяем местами второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1; \\ \quad\;\; x_2+x_3=0; \\ \qquad\;\; -2x_3=1. \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Расширенная матрица приобрела ступенчатую форму, к которой мы стремились. Разделим третье уравнение на (– 2):

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1; \\ \quad\;\; x_2+x_3=0; \\ \qquad\quad\; x_3=-\tfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} \end{array}\right)$$

Вычтем из первого и второго уравнений третье:

$$\begin{cases} x_1+x_2 \qquad =1\tfrac{1}{2}; \\ \quad\;\; x_2 \qquad =\tfrac{1}{2}; \\ \qquad\quad\; x_3=-\tfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1\tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} \end{array}\right)$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad =1; \\ \quad\;\; x_2 \qquad =\tfrac{1}{2}; \\ \qquad\quad\; x_3=-\tfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} \end{array}\right)$$

Система решена.

$\boxtimes$

Решение системы $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - \ x_3 = 2; \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ приводит к расширенной матрице $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Последняя строка эквивалентна тождеству $0 \equiv 0$. Следовательно, мы имеем систему двух независимых уравнений с тремя неизвестными, т.е. совместную неопределённую систему.

Решение системы $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - \ x_3 = 2; \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$ приводит к расширенной матрице $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$. Последняя строка эквивалентна невозможному равенству $0 = 3$. Следовательно, мы имеем несовместную систему линейных уравнений.

2.10. Исследование систем *m* линейных уравнений с *n* неизвестными

Задача исследования систем линейных уравнений состоит в определении того, имеет ли система решения и если имеет, то сколько. В задачу исследования не входит решение системы.

Теорема 2.3 (Кронекера – Капелли). *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:*

$$(\text{Система } S \text{ совместна}) \iff (r(A) = r(A_+))$$

Доказательство. Принимаем без доказательства.

☒

Теорема 2.4. *Если система линейных уравнений совместна и её ранг r равен числу переменных n, то эта система определённая (имеет единственное решение).*

$$(\text{Система } S \text{ совместна, } r(A) = n) \iff (\text{система } S \text{ определённая})$$

Доказательство. Принимаем без доказательства.

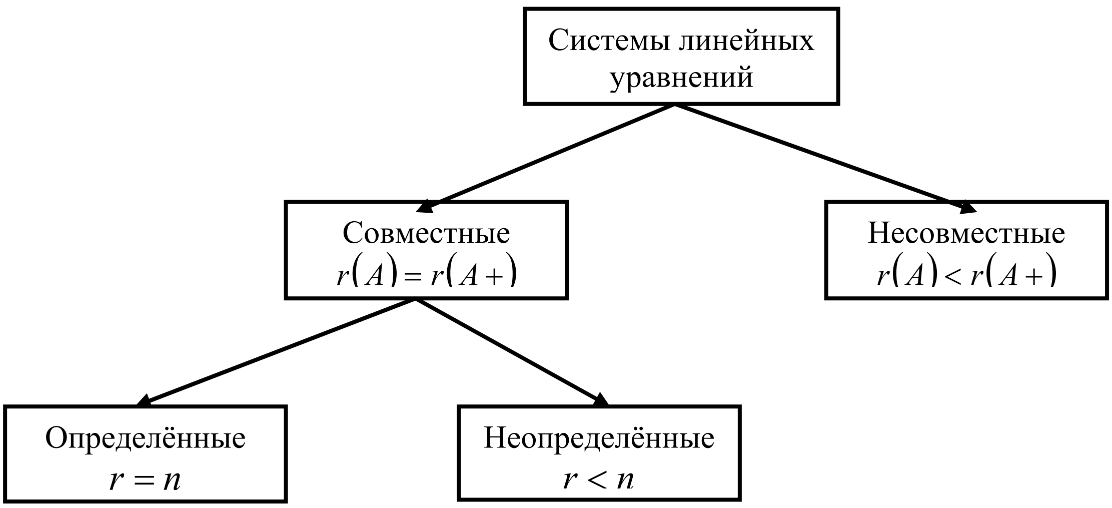
☒

Теорема 2.5. *Если система линейных уравнений совместна и её ранг r меньше числа переменных n ($r < n$), то эта система неопределённая (имеет бесконечное множество решений).*

$$(\text{Система } S \text{ совместна, } r(A) < n) \iff (\text{система } S \text{ неопределённая})$$

Доказательство. Принимаем без доказательства.

☒



На рисунке представлена схема исследования систем m линейных уравнений с n неизвестными методом Кронекера – Капелли.

2.11. Базисные решения системы

Определение 2.9. ***Основные (базисные) неизвестные*** *системы линейных уравнений – это такие неизвестные, определитель матрицы коэффициентов при которых (базисный минор) отличен от нуля.*

Если $r(A) < n$, то в системе можно найти $r(A)$ основных (базисных) неизвестных. Остальные $(n - r(A))$ неизвестных – *неосновные* или *свободные*.

Определение 2.10. ***Неосновные (свободные) неизвестные*** *системы линейных уравнений – это такие неизвестные, которые не выбраны в качестве базисных.*

Определение 2.11. ***Базисное решение*** *системы линейных уравнений – это решение, в котором все* $(n - r)$ *свободные неизвестные равны* 0.

2.12. Системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, поскольку всегда имеет по крайней мере *тривиальное решение*.

Определение 2.12. ***Тривиальное решение*** *системы линейных уравнений – это решение, в котором все неизвестные равны* 0.

Однако в приложениях интерес представляют прежде всего системы линейных однородных уравнений, имеющие *нетривиальные* решения.

Теорема 2.6. *Система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы её коэффициентов меньше количества неизвестных ($r(A) < n$).*

Доказательство. Принимаем без доказательства.

☒

Свойства решений системы линейных однородных уравнений:

1) решение, умноженное на число, тоже будет решением;

2) линейная комбинация двух решений тоже будет решением;

3) всякая линейная комбинация решений тоже будет решением.

Поэтому представляет интерес задача об отыскании таких линейно независимых решений однородной системы, через которые выражались бы все остальные решения системы.

2.13. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений

Определение 2.13. ***Фундаментальная система решений*** *системы линейных однородных уравнений – это такая совокупность линейно независимых решений, для которой каждое решение системы можно представить в виде линейной комбинации решений данной совокупности.*

Два условия:

1) линейная независимость решений, входящих в фундаментальную систему;

2) возможность выразить любое решение системы через линейную комбинацию решений фундаментальной системы.

Теорема 2.7. Если ранг r матрицы коэффициентов системы линейных *однородных уравнений меньше числа неизвестных n, то всякая фундаментальная система решений данной системы линейных уравнений состоит из $(n-r)$ решений.*

Доказательство. Принимаем без доказательства. ☒

☑ **П р и м е р.**

Найти фундаментальные решения системы $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1-\ x_2+\ x_3-\ x_4=0 \\ 3x_1+\ x_2-\ x_3+2x_4=0 \end{cases}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Пусть x_1, x_2 – базисные неизвестные; x_3, x_4 – свободные неизвестные.

Найдём систему фундаментальных решений.

Удобный способ построить систему фундаментальных решений:

Неизвестные	1-е решение	2-е решение
x_3	1	0
x_4	0	1

1) $x_3=1,\ x_4=0$.

$$\begin{cases} x_1+2x_2=\ 2 \\ \quad -5x_2=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases}.$$

Следовательно, первое фундаментальное решение – $(0;\ 1;\ 1;\ 0)$.

2) $x_3=0$, $x_4=1$.

$$\begin{cases} x_1+2x_2=-3 \\ \quad -5x_2=\ 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1/5 \\ x_2=-7/5 \end{cases}.$$

Следовательно, второе фундаментальное решение – $\left(-1/5;\ -7/5;\ 0;\ 1\right)$.

Итак, система фундаментальных решений $\left\{(0;\ 1;\ 1;\ 0);\ \left(-1/5;\ -7/5;\ 0;\ 1\right)\right\}$.

Покажем, что полученные фундаментальные решения являются линейно независимыми. Для этого представим решения в виде матриц-столбцов $S_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $S_2=\begin{pmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и составим их линейную комбинацию:

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 .$$

Найдём, при каких значениях λ_1 и λ_2 возможно равенство этого выражения нулевой матрице-столбцу $\mathbf{0}$:

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = \mathbf{0} .$$

Последнее матричное равенство эквивалентно системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad -\tfrac{1}{5}\lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 - \tfrac{7}{5}\lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 \quad = 0, \\ \quad \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что система линейных уравнений относительно λ_1 и λ_2 как неизвестных имеет единственное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Это означает, что решения S_1 и S_2 линейно независимы.

$\boxtimes$

Глава 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

3.1. Скалярные и векторные величины

Физические величины бывают *скалярные* и *векторные*.

Скалярные величины характеризуются только числовым значением.

Векторные величины характеризуются числовым значением и направлением.

Математическая модель скалярной величины – *число*.

Математическая модель векторной величины – *вектор* (направленный отрезок).

3.2. Векторы

Если начало вектора «закреплено», «связано» с определённой точкой, такой вектор называют *связанным*.

Мы будем рассматривать свободные векторы, которые можно свободно перемещать параллельным переносом.

Определение 3.1. ***Вектор*** *– это отрезок, на границах которого определены начальная и конечная точка (направленный отрезок).*

Обозначают: $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$ или $\mathbf{AB}$ (A – начальная, B – конечная точки), $\vec{a}$, $\bar{a}$ или $\mathbf{a}$.

Определение 3.2. ***Свободный вектор*** *– это вектор, точка приложения которого может быть выбрана произвольно.*

Свободные векторы можно параллельно перемещать.

Определение 3.3. ***Длина (модуль) вектора*** *– это число, равное длине отрезка, изображающего вектор.*

Обозначают: $\left|\overline{AB}\right|$ или AB, $|\vec{a}|$ или a.

Определение 3.4. ***Коллинеарные векторы*** *– это векторы, которые лежат на параллельных прямых или на одной прямой.*

Обозначают: $\vec{a} \,\square\, \vec{b}$.

Определение 3.5. ***Сонаправленные векторы*** *– это коллинеарные векторы, которые имеют одинаковое направление.*

Обозначают: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Определение 3.6. ***Противонаправленные векторы*** *– это коллинеарные векторы, которые имеют противоположные направления.*

Обозначают: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определение 3.7. ***Компланарные векторы*** *– это векторы, которые лежат в параллельных плоскостях или в одной плоскости.*

3.3. Линейные операции над векторами

Определение 3.8. ***Нулевой вектор (нуль-вектор)*** *– это вектор, начало и конец которого совпадают.*

Обозначают: $\vec{0}$ или **0**.

$$\left|\vec{0}\right| = 0$$

Направление вектора $\vec{0}$ считают произвольным. Поэтому он коллинеарен любому вектору.

Определение 3.9. ***Равные векторы*** *– это векторы, модули (длины) которых равны и направления совпадают.*

Обозначают: $\vec{a} = \vec{b}$.

Определение 3.10. ***Произведение*** $\lambda\vec{a}$ ***ненулевого вектора*** $\vec{a}$ ***на число*** λ *– это вектор* $\vec{b}$*, модуль (длина) которого* $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ *и направление совпадает с направлением вектора* $\vec{a}$ *при* $\lambda > 0$*, и противоположно ему при* $\lambda < 0$*.*

При $\lambda = 0 \qquad \lambda\vec{a} = \vec{0}$.

Свойства произведения вектора на число $(\lambda, \mu \in R)$:

1) $\lambda\left(\mu\vec{a}\right) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

2) $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a} = (\lambda + \mu)\vec{a}$;

3) $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\lambda$;

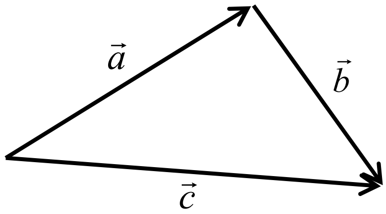
4) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$;

5) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

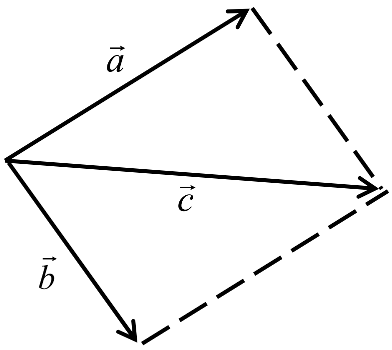
Определение 3.11. ***Противоположный вектор вектору*** $\vec{a}$ *– это вектор* $(-\vec{a}) = (-1) \cdot \vec{a}$*.*

Определение 3.12а. ***Сумма векторов*** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *– это вектор* $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$*, начало которого совпадает с началом вектора* $\vec{a}$*, а конец – с концом векто-*

ра $\vec{b}$ при условии, что конец $\vec{a}$ и начало $\vec{b}$ совпадают (правило треугольника).



Определение 3.12в. ***Сумма векторов*** *$\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а конец – с противоположной вершиной параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах при условии, что начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают (правило параллелограмма).*



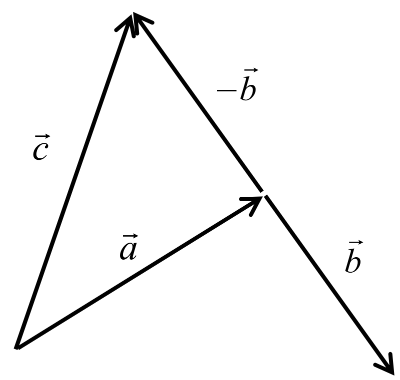
Свойства сложения векторов:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

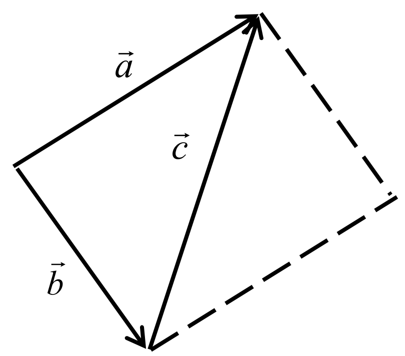
2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Определение 3.13а. ***Разность векторов*** *$\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\left(-\vec{b}\right)$ при условии, что конец $\vec{a}$ и начало $\left(-\vec{b}\right)$ совпадают (правило треугольника).*



Определение 3.13в. ***Разность векторов*** *$\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, начало которого совпадает с началом векторов $\vec{a}$ и $\left(-\vec{b}\right)$, а конец – с противоположной вершиной параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\left(-\vec{b}\right)$ как на сторонах при условии, что начала $\vec{a}$ и $\left(-\vec{b}\right)$ совпадают (правило параллелограмма).*



3.4. Координатная форма записи векторов

Пусть в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$ и каждой оси соответствует орт – вектор единичной длины – $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ осям Ox, Oy и Oz соответственно.

Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ – *базисные векторы*, а их совокупность – *базис пространства*. Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ задают направления и масштабы осей координат.

Произвольный пространственный вектор $\vec{a}$ можно единственным образом представить в виде

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \text{ где } a_i \in R,\ i = 1,2,3.$$

Определение 3.14а. ***Координаты вектора*** *$\vec{a}$ в системе координат $Oxyz$ – это коэффициенты a_1, a_2, a_3 в разложении вектора $\vec{a}$ по базисным орт-векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ системы координат $Oxyz$.*

Определение 3.14в. ***Координаты вектора*** *$\vec{a}$ в системе координат $Oxyz$ – это координаты a_1, a_2, a_3 конца вектора $\vec{a}$ при условии, что начало вектора $\vec{a}$ находится в начале системы координат $Oxyz$.*

Определение 3.15. ***Компоненты вектора*** *$\vec{a}$ в системе координат $Oxyz$ – это векторы $a_1\vec{e}_1$, $a_2\vec{e}_2$, $a_3\vec{e}_3$ такие, что $a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \vec{a}$.*

Из определений 3.9 и 3.14 следует теорема 3.1.

Теорема 3.1. *Векторы $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ и $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 = b_3$.*

3.5. Линейные операции над векторами в координатной форме

Теорема 3.2. *Если вектор $\vec{a}$ в координатной форме имеет вид $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, то произведением вектора $\vec{a}$ на число λ является вектор $\vec{c} = \lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2 + \lambda a_3\vec{e}_3$.*

Теорема 3.3. *Векторы $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ и $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ $(\mu \in R)$.*

Теорема 3.4. *Если* $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$ *и* $\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3$*, то суммой векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *является вектор*

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\overrightarrow{e_1}+(a_2+b_2)\overrightarrow{e_2}+(a_3+b_3)\overrightarrow{e_3}.$$

Теорема 3.5. *Если* $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$ *и* $\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3$*, то разностью векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *является вектор*

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1)\overrightarrow{e_1}+(a_2-b_2)\overrightarrow{e_2}+(a_3-b_3)\overrightarrow{e_3}.$$

3.6. Скалярное произведение векторов

Определение 3.16. ***Скалярное произведение векторов*** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *– это число* $p=\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$*, где* $\varphi=\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

Обозначают: $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi,\ \varphi=\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)$$

Свойства скалярного произведения двух векторов:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(\vec{a}\perp\vec{b},\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow(\vec{a}\cdot\vec{b}=0)$.

3) $\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$ – скалярный квадрат;

4) $\left(\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$;

5) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Сформулируем свойство 2 отдельно как теорему.

Теорема 3.6 (необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов). *Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно* 0.

$$(\vec{a}\perp\vec{b},\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow(\vec{a}\cdot\vec{b}=0).$$

Эта теорема эквивалентна двум теоремам.

Теорема 3.6 (необходимость). *Если два ненулевых вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно* 0.

$$(\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}) \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b} = 0).$$

Теорема 3.6 (достаточность) *Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно* 0*, то эти векторы перпендикулярны.*

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \ \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}) \Rightarrow (\vec{a} \perp \vec{b}).$$

Если иметь в виду, что нуль-вектор имеет произвольное направление, то случай $\vec{a}, \vec{b} = \vec{0}$ в условии теоремы можно не исключать.

Теорема 3.7. *Если* $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ *и* $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$*, то скалярным произведением векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *является число* $p = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Теорема 3.8. *Если* $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$*, то длину (модуль)* $\vec{a}$ *можно найти по формуле*

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} \text{ или в координатной форме } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

3.7. Вычисление угла между векторами

Теорема 3.9. *Если* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *и* $\vec{b} \neq \vec{0}$*, то косинус угла* φ *между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *вычисляют по формуле*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

или в координатной форме

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

3.8. Векторное произведение векторов

Правая и *левая* тройки векторов.

Тройку векторов называют правой или левой, если она ориентирована по правилу правого или левого винта соответственно.

Правую тройку обычно считают стандартной.

Определение 3.17. ***Векторное произведение*** *– это вектор $\vec{c}$, для которого*

1) $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\angle \vec{a}, \vec{b}\right)$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ неколлинеарны, то они образуют правую тройку векторов.

Записывают $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Векторное произведение в координатной форме:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл векторного произведения: модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях как на сторонах.

Свойства векторного произведения:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) ($\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow$ ($\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$);

3) $\left(\lambda\vec{a} \times \vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$;

4) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{c}\right) + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

Сформулируем свойство 2 как теорему.

Теорема 3.10 (признак коллинеарности двух векторов – необходимое и достаточное условия коллинеарности двух векторов). *Два ненулевых вектора* *коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нуль-вектору.*

$$(\vec{a} \parallel \vec{b}\,,\ \vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}).$$

Эта теорема эквивалентна двум теоремам.

Теорема 3.10 (необходимость). *Если два ненулевых вектора коллинеарны, то их векторное произведение равно* $\vec{0}$.

$$(\vec{a} \parallel \vec{b}\,,\ \vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}) \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}).$$

Теорема 3.10 (достаточность) *Если векторное произведение двух ненулевых векторов равно* $\vec{0}$*, то эти векторы коллинеарны.*

$$(\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0},\ \vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}) \Rightarrow (\vec{a} \parallel \vec{b}\,).$$

Если иметь в виду, что нуль-вектор имеет произвольное направление, то случай $\vec{a},\vec{b} = \vec{0}$ в условии теоремы можно не исключать.

3.9. Смешанное произведение векторов

Определение 3.18. ***Смешанное произведение векторов*** *– это скаляр* $p = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$.

Смешанное произведение в координатной форме:

$$p = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения: модуль смешанного произведения численно равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях как на сторонах.

Свойства смешанного произведения:

$$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=$$

$$=-\vec{c}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=-\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)=-\vec{a}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{b}\right).$$

Теорема 3.11 (признак компланарности векторов – необходимое и достаточное условия компланарности векторов). *Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.*

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ – компланарные векторы}) \Leftrightarrow \left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0\right).$$

Глава 4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

4.1. *n*-мерный вектор и векторное пространство

Определение 4.1. ***n*-мерный вектор** *– это упорядоченная совокупность n вещественных чисел.*

Любое i-е число в совокупности понимают как i-ю координату вектора.

Записывают $\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, x_i – i-я координата (i-й компонент) n-мерного вектора.

Определение 4.2. ***Равные векторы*** $\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ *и* $\mathbf{y}=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ *– это векторы, у которых равны соответствующие компоненты.*

$$(\mathbf{x}=\mathbf{y})\Leftrightarrow\left(x_i=y_i,\ \forall i=1,\ldots,n\right).$$

Определение 4.3. ***Сумма двух векторов*** *одинаковой размерности n – это вектор $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$, компоненты которого z_i равны сумме соответствующих компонентов слагаемых векторов $x_i + y_i$.*

$$(\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}) \Leftrightarrow \left(z_i = x_i + y_i,\ \forall i = 1,\ldots,n \right).$$

Определение 4.4. ***Произведение вектора на вещественное число*** *– это вектор $\mathbf{z}=\lambda\mathbf{x}$, компоненты которого z_i равны произведению числа λ на соответствующие компоненты x_i вектора $\boldsymbol{x}$.*

$$(\mathbf{z}=\lambda\mathbf{x}) \Leftrightarrow \left(z_i = \lambda x_i,\ \forall i = 1,\ldots,n \right).$$

Свойства линейных операций над векторами:

1) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ – коммутативное (переместительное) свойство суммы;

2) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ – ассоциативное (сочетательное) свойство суммы;

3) $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$ – ассоциативное относительно числового множителя свойство;

4) $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$ – дистрибутивное (распределительное) относительно суммы векторов свойство;

5) $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ – дистрибутивное относительно суммы числовых множителей свойство;

6) существование и особая роль нулевого вектора $\mathbf{0}=\{0,0,\ldots,0\}$: $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x}$;

7) существование противоположного вектора для любого вектора $\mathbf{x}$ (обозначение $(-\mathbf{x})$): $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$.

8) $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x}$ – особая роль числового множителя 1.

Определение 4.5. ***Векторное (линейное) пространство*** *L – это множество векторов с вещественными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие восьми свойствам линейных операций (рассматриваемым как аксиомы).*

Это определение означает, что в векторном (линейном) пространстве L для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ существуют вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \in L$ и вектор $\mathbf{d} = \lambda \mathbf{a} \in L$, $\lambda \in R$, а операции сложения и умножение на число обладают названными выше восемью свойствами.

4.2. Линейная зависимость/независимость векторов

Определение 4.6. ***Линейная комбинация векторов*** *векторного пространства R – это вектор, равный сумме произведений этих векторов на произвольные вещественные числа*

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_s \mathbf{a}_s .$$

Определение 4.7. ***Линейно зависимые векторы*** *векторного пространства R – это векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$, для которых существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, не равные одновременно нулю, что $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_s \mathbf{a}_s = \mathbf{0}$.*

Определение 4.8. ***Линейно независимые векторы*** *векторного пространства R – это векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$, для которых кроме случая $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0$ не существует других таких чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, что $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_s \mathbf{a}_s = \mathbf{0}$.*

Теорема 4.1. *Для того, чтобы совокупность векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ векторного пространства R была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ можно было выразить в виде линейной комбинации остальных.*

Некоторые свойства векторов линейного пространства *R*.

Теорема 4.2. *Если среди векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ есть нуль-вектор, то векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ линейно зависимы.*

Теорема 4.3. *Если часть векторов* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ *являются линейно зависимыми, то и все векторы* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ *линейно зависимые.*

4.3. Размерность и базис векторного пространства

Определение 4.9. ***n-мерное линейное пространство*** *R_n – это линейное пространство R, в котором существует n линейно независимых векторов, а любые $(n+1)$ векторов являются линейно зависимыми.*

Число n называют размерностью пространства R.

Обозначают: R_n или $\dim(R) = n$.

Определение 4.10. ***Базис n-мерного линейного пространства*** *R_n – это любая совокупность n линейно независимых векторов линейного пространства R_n.*

Теорема 4.4. *Если* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *– система линейно независимых векторов векторного пространства R и любой вектор* **a** *можно представить в виде линейной комбинации векторов* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n ,$$

то пространство R является n-мерным, а векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *– его базисом.*

Теорема 4.5. *Если* $\mathbf{x} \in R_n$ *и* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *– базис R_n, то вектор* **x** *можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$$

и притом единственным способом.

Равенство $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$ называют *разложением вектора* **x** по базису $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Числа $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ называют *координатами вектора* $\mathbf{x}$ относительно базиса $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

4.4. Переход к новому базису

Теорема 4.6. *Если в пространстве R_n есть два базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ («старый») и $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ («новый»), связанные коэффициентами a_{ij}, образующими матрицу перехода* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1^* = a_{11}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{1n}\mathbf{e}_n \\ \qquad\qquad \ldots \\ \mathbf{e}_n^* = a_{n1}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n \end{cases},$$

и разложения вектора $\mathbf{x}$ *по «старому»* $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\,\mathbf{e}_n$ *и «новому» базису* $\mathbf{x} = x_1^*\mathbf{e}_1^* + \ldots + x_n^*\mathbf{e}_n^*$ *соответственно, то координаты вектора* $\mathbf{x}$ *относительно «старого» и «нового» базиса связаны соотношениями*

$$X = AX^* \text{ и } X^* = A^{-1}X,$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \cdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$.

Обратите внимание, что матрица A – неособенная ($|A| \neq 0$).

Следует также обратить внимание на то, как матрица перехода составлена из коэффициентов a_{ij}, связывающих «старый» и «новый» базисы. Она составлена как транспонированная матрица (коэффициенты, стоящие в строках соотношений, связывающих $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$, образуют столбцы матрицы перехода A).

4.5. Евклидово пространство

Определение 4.11. ***Скалярное произведение*** *векторов* $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ *и* $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)$ *– это число* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+\ldots+x_ny_n=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$.

Свойства скалярного произведения:

1) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$ – коммутативное свойство;

2) $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$ – дистрибутивное свойство;

3) $\alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})=(\alpha\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}$ для любого вещественного числа α;

4) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}>0$, если $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ и $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0$, если $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Определение 4.12. ***Евклидово пространство*** *– это линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее указанным четырем свойствам, рассматриваемым как аксиомы.*

Определение 4.13. ***Длина (норма) вектора*** *в евклидовом пространстве – это корень квадратный из скалярного квадрата данного вектора.*

Обозначают: $|\mathbf{x}|=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$.

Свойства длины (нормы) вектора:

1) $|\mathbf{x}|=0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}=\mathbf{0}$;

2) $|\lambda\mathbf{x}|=|\lambda|\cdot|\mathbf{x}|$, λ – вещественное число;

3) $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leq|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|$ (неравенство Коши – Буняковского);

4) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|\leq|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$ (неравенство треугольника).

Определение 4.14. ***Угол*** *между векторами* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *в евклидовом пространстве – это число* φ ($0\leq\varphi\leq\pi$), *которое удовлетворяет равенству*

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}.$$

Определение 4.15. ***Ортогональные векторы*** *– это ненулевые векторы, скалярное произведение которых равно* 0.

$$(\mathbf{x} \perp \mathbf{y},\, \mathbf{x},\mathbf{y} \neq \mathbf{0}) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0).$$

Определение 4.16. ***Ортонормированный базис*** *– это базис в евклидовом пространстве, все векторы которого (базиса) попарно ортогональны и имеют единичные длины (нормы).*

Теорема 4.7. *Если R_n – n-мерное евклидово пространство, то в нём существует ортонормированный базис.*

4.6. Отображения, функции, операторы

Из школьной программы известно понятие *функция*.

Определение 4.17. ***Функция*** *– это закон (правило), по которому каждому числу x из множества X поставлено в соответствие одно и только одно число y из множества Y.*

В определении понятия функция подразумевается, что X и Y – числовые множества, т.е. их элементы – числа.

Обобщением понятия *функция* в математике является понятие *отображение*.

Определение 4.18. ***Отображение*** *множества X в множество Y – это закон (правило), по которому каждому элементу x из множества X поставлен в соответствие некоторый элемент y из множества Y.*

Понятие *отображение* – одно из основных в математике.

В определении отображения нет ограничений на природу элементов множеств X и Y. Эти множества могут состоять из объектов произвольной природы. В зависимости от этого отображение принято именовать тем или иным термином. Так, кроме термина *функция* известны термины *оператор* и *функционал*. Использование этих терминов как синонимов термина *отображение* ясно из рис. 4.1.

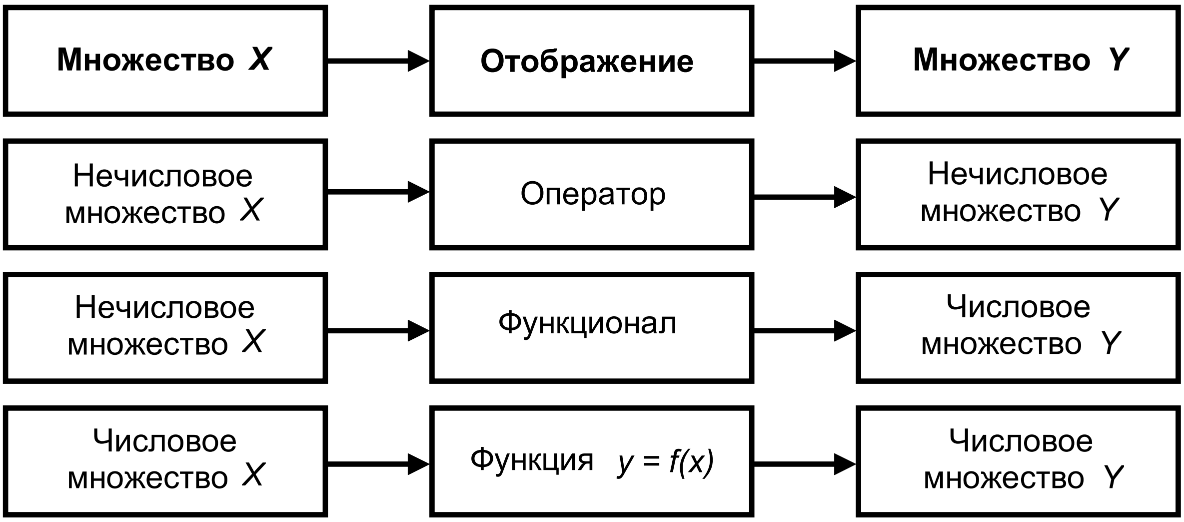


Рис. 4.1. *Схема использования терминов отображение, оператор, функционал, функция*

Определение 4.19. ***Оператор (преобразование, отображение)*** $A(\mathbf{x})$, *действующий из* R^n *в* R^m, *– это закон (правило), по которому каждому вектору* $\mathbf{x}$ *пространства* R^n *соответствует один и только один вектор* $\mathbf{y}$ *пространства* R^m.

Обозначают: $\mathbf{y} = \widetilde{A}(\mathbf{x})$.

Вектор $\mathbf{x}$ называют *прообразом* вектора $\mathbf{y}$, а вектор $\mathbf{y} = \widetilde{A}(\mathbf{x})$ – *образом* вектора $\mathbf{x}$.

4.7. Линейные операторы

Далее будем рассматривать только операторы, отображающие линейное пространство R^n в R^n (случай, когда пространство R^m из определения оператора совпадает с R^n).

Определение 4.20. ***Линейный оператор*** *– это оператор, который относительно любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пространства R^n и любого числа λ обладает свойствами:*

1) аддитивности $\widetilde{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\widetilde{A}(\mathbf{x})+\widetilde{A}(\mathbf{y})$;

2) однородности $\widetilde{A}(\lambda\mathbf{x})=\lambda\widetilde{A}(\mathbf{x})$.

Теорема 4.8. *Если $\widetilde{A}$ – любой линейный оператор и $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ – базис в пространстве R^n, то оператору $\widetilde{A}$ соответствует матрица n-го порядка в данном базисе.*

Если A – матрица n-го порядка, то ей соответствует линейный оператор n-мерного пространства.

Матрицу A называют *матрицей оператора* $\widetilde{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, а ранг r матрицы A – *рангом оператора* $\widetilde{A}$. Заметим, что ранг матрицы оператора (следовательно, и ранг оператора) не зависит от выбора базиса.

Связь между вектором $\mathbf{x}$ и его образом $\mathbf{y}=\widetilde{A}(\mathbf{x})$ можно выразить в матричной форме уравнением

$$Y = AX,$$

где A – матрица линейного оператора $\widetilde{A}$, X и Y – матрицы-столбцы, составленные из координат векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

4.8. Действия над линейными операторами

Определение 4.21. ***Равные операторы*** *– это операторы, в результате действия которых на любой один и тот же вектор $\mathbf{x}\in R^n$ получается один и тот же образ $\mathbf{y}\in R^n$:*

$$\left(\widetilde{A}(\mathbf{x})=\widetilde{B}(\mathbf{x}),\ \forall\mathbf{x}\in R^n\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}\widetilde{A}(\mathbf{x})=\mathbf{y}\\ \widetilde{B}(\mathbf{x})=\mathbf{y}\end{cases} \left(\forall\mathbf{x}\in R^n, \mathbf{y}\in R^n\right)\right)$$

Определение 4.22. ***Сумма двух линейных операторов*** *– это оператор* $\tilde{C}(\mathbf{x}) = (\tilde{A} + \tilde{B})(\mathbf{x}) = \tilde{A}(\mathbf{x}) + \tilde{B}(\mathbf{x})$.

Определение 4.23. ***Произведение линейного оператора на число*** *– это оператор* $\tilde{C}(\mathbf{x}) = (\lambda\tilde{A})(\mathbf{x}) = \lambda\tilde{A}(\mathbf{x})$.

Определение 4.24. ***Произведение линейных операторов*** *– это оператор* $\tilde{C}(\mathbf{x}) = (\tilde{A}\tilde{B})(\mathbf{x}) = \tilde{A}(\tilde{B}(\mathbf{x}))$.

Теорема 4.9. *Операторы* $(\tilde{A} + \tilde{B})(\mathbf{x})$, $(\lambda\tilde{A})(\mathbf{x})$, $(\tilde{A}\tilde{B})(\mathbf{x})$ *являются линейными (т.е. обладают свойствами аддитивности и однородности).*

Доказательство. Доказать самостоятельно. ☒

Определение 4.25. ***Нулевой оператор*** *– это оператор* $\widetilde{O}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ $(\forall \mathbf{x} \in R^n)$, *который переводит все векторы пространства* R^n *в нуль-векторы.*

Определение 4.26. ***Тождественный оператор*** *– это оператор* $\widetilde{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ $(\forall \mathbf{x} \in R^n)$, *который переводит все векторы пространства* R^n *в себя.*

4.9. Зависимость между матрицами оператора в разных базисах

Теорема 4.10. *Если линейному оператору* $\widetilde{A}$ *соответствуют матрицы* A *и* A^* *в базисах* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ *соответственно, то матрицы* A *и* A^* *связаны соотношением*

$$A^* = C^{-1}AC,$$

где C *– матрица перехода от старого базиса к новому.*

4.10. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Определение 4.27. ***Собственный вектор*** *линейного оператора* $\widetilde{A}$ *– это вектор* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$*, для которого существует такое число* λ*, что*

$$\widetilde{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

(В матричной форме $AX = \lambda X$ или $(A - \lambda E)X = \mathbf{0}$, где X – матрица-столбец, составленная из координат вектора $\mathbf{x}$, $\mathbf{0}$ – нуль-матрица.)

Число λ называют *собственным значением* (*собственным числом*) оператора $\widetilde{A}$ или матрицы A, соответствующим вектору $\mathbf{x}$.

Определение 4.28. ***Характеристическое уравнение*** *линейного оператора* $\widetilde{A}$ *или матрицы* A *– это уравнение*

$$|A - \lambda E| = 0,$$

где E *– единичная матрица.*

Определитель $|A - \lambda E|$, являющийся многочленом степени n относительно λ, называют *характеристическим многочленом* линейного оператора $\widetilde{A}$ или матрицы A.

Теорема 4.11. *Если* $|A - \lambda E|$ *– характеристический многочлен линейного оператора* $\widetilde{A}$*, то вид характеристического многочлена не зависит от выбора базиса.*

Теорема 4.12. *Если A – матрица линейного оператора* $\widetilde{A}$*, то в базисе, состоящем из собственных векторов оператора, она является диагональной и имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Если матрица A линейного оператора $\tilde{A}$ в некотором базисе является диагональной, то все векторы этого базиса являются собственными векторами оператора.

Теорема 4.13. *Если линейный оператор имеет n попарно различных собственных значений, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы, а матрица этого оператора в базисе из собственных векторов имеет диагональный вид.*

Доказательство. Принимаем без доказательства.

$\boxtimes$

4.11. Квадратичные формы

Определение 4.29. ***Квадратичная форма*** *$L(x_1,\ldots,x_n)$ от n переменных $x_1,\ldots,x_n$ – это сумма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$:*

$$L(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j .$$

Коэффициенты квадратичной формы a_{ij} – вещественные числа.

Определение 4.30. ***Матрица квадратичной формы*** *– это матрица $A=(a_{ij})$ $(i,\, j=1,\ldots,n)$, составленная из коэффициентов квадратичной формы.*

Квадратичная форма в матричной записи:

$$L=X'AX ,$$

где X – матрица-столбец, составленная из переменных квадратичной формы $x_1,\ldots,x_n$.

Теорема 4.14. *Если* C *– невырожденная матрица линейного преобразования* $X = CY$, *где* X *и* Y *– матрицы-столбцы переменных, то матрица квадратичной формы в новых переменных имеет вид*

$$A^* = C'AC .$$

Определение 4.31. ***Каноническая квадратичная форма*** *– это квадратичная форма* $L(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, *у которой все коэффициенты* $a_{ij} = 0$ *при* $i \neq j$:

$$L(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots a_{nn}x_n^2 .$$

Матрица канонической квадратичной формы является диагональной.

Теорема 4.15. *Если* $L(x_1,\ldots,x_n)$ *– любая квадратичная форма, то с помощью невырожденного линейного преобразования переменных её можно привести к каноническому виду.*

Теорема 4.16 (закон инерции квадратичных форм). *Если* $L(x_1,\ldots,x_n)$ *– некоторая квадратичная форма, то число её слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами не зависит от способа приведения формы к данному виду.*

Определение 4.32. ***Ранг квадратичной формы*** *– это ранг матрицы квадратичной формы.*

Теорема 4.17. *Если* $L(x_1,\ldots,x_n)$ *– некоторая квадратичная форма, то её ранг равен числу отличных от нуля коэффициентов канонической формы и не меняется при линейных преобразованиях.*

Определение 4.33. ***Положительно (отрицательно) определённая квадратичная форма*** *– это квадратичная форма, которая при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, больше (меньше)* 0:

$$L(x_1,\ldots,x_n)>0 \qquad (L(x_1,\ldots,x_n)<0).$$

Теорема 4.18. *Для того чтобы квадратичная форма* $L = X'AX$ *была положительно (отрицательно) определённой, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения* λ_i *матрицы A были положительны (отрицательны).*

Теорема 4.19 **(**критерий Сильвестра). *Для того чтобы квадратичная форма была положительно определённой, необходимо и недостаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны:*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0,$$

где $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$, $k = 1,\ldots,n$, a_{ij} *– коэффициенты матрицы квадратичной формы.*

Для отрицательно определенных квадратичных форм

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0,\ \ldots\ .$$

Глава 5. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

5.1. Уравнение линии на плоскости

Определение 5.1. *Уравнение линии (кривой)* L *на плоскости – это уравнение* $F(x,y)=0$ *или (если возможно)* $y = f(x)$*, которому удовлетворяют координаты* x *и* y *каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.*

Это определение содержит два утверждения:

$$\left(\forall(\square) M\left(x_M, y_M\right) \in L\right) \Leftrightarrow \left(F\left(x_M, y_M\right) = 0\right)$$

$$\left(\forall(\square) N\left(x_N, y_N\right) \notin L\right) \Leftrightarrow \left(F\left(x_N, y_N\right) \neq 0\right)$$

Определение 5.2. ***Текущие координаты точки*** *на плоскости – это координаты* x *и* y *точки* $M(x, y)$, *изменяющиеся при передвижении точки.*

5.2. Две основные задачи аналитической геометрии

1. По заданному уравнению линии определить её геометрические свойства.
2. По заданным геометрическим свойствам линии (характеристическому свойству) определить её уравнение.

5.3. Уравнение прямой

5.3.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Теорема 5.1. *Если линия – прямая, то её уравнение* $y = k \cdot x + b$.

Доказательство. Принимаем без доказательства.

$\boxtimes$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = k \cdot x + b.$$

Коэффициент k – угловой коэффициент прямой.

5.3.2. Общее уравнение прямой и его исследование

Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0 \qquad \left(A^2 + B^2 \neq 0\right).$$

При любых значениях коэффициентов A, B (не равных одновременно 0) и C уравнение $Ax+By+C=0$ описывает некоторую прямую линию на плоскости.

Вектор $\vec{n}=\{A,B\}$ – это вектор нормали к прямой.

Исследование общего уравнения прямой.

1) $B\neq 0 \Rightarrow y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B} \Leftrightarrow y=k\cdot x+b$.

Если $A\neq 0$, $C\neq 0$, то $y=k\cdot x+b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Если $A\neq 0$, $C=0$, то $y=k\cdot x$ – уравнение прямой, проходящей через начало координат.

Если $A=0$, $C\neq 0$, то $y=b$ – уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.

Если $A=0$, $C=0$, то $y=0$ – уравнение оси абсцисс.

2) $B=0 \Rightarrow Ax+C=0 \ \left(A\neq 0\right) \Rightarrow x=-\dfrac{C}{A}$ – уравнение прямой, параллельной оси ординат.

5.3.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Уравнение прямой, проходящей через точку $M\left(x_1,\, y_1\right)$ в направлении прямой $y=kx+b$ (или $Ax+By+C=0$):

$$y-y_1=k\left(x-x_1\right) \text{ или } A\left(x-x_1\right)+B\left(y-y_1\right)=0.$$

5.3.4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\left(x_1,\, y_1\right)$ и $M_2\left(x_2,\, y_2\right)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

5.3.5. Уравнение прямой в отрезках

Если прямая проходит через точки $M_1(a, 0)$ и $M_2(0, b)$ (отсекает на осях координат отрезки длиной a и b), то её уравнение можно представить в форме *уравнения прямой в отрезках*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

5.4. Угол между двумя прямыми

Теорема 5.2. *Если уравнения двух прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то угол φ между ними можно найти из соотношения*

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2},$$

где через φ обозначен угол, «проходимый» первой прямой при её повороте ко второй против часовой стрелки.

5.5. Условия параллельности прямых

Теорема 5.3a. *Для того чтобы две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были равны:*

$$k_1=k_2.$$

Теорема 5.3b. *Для того чтобы две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при переменных в уравнениях прямых были пропорциональны:*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

5.6. Условия перпендикулярности прямых

Теорема 5.4a. *Для того чтобы две прямые* $y = k_1x + b_1$ *и* $y = k_2x + b_2$ *были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты удовлетворяли соотношению*

$$k_1k_2 = -1.$$

Теорема 5.4b. *Для того чтобы две прямые* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при переменных в уравнениях прямых удовлетворяли соотношению*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

5.7. Точка пересечения прямых

Теорема 5.5a. *Если две прямые заданы уравнениями* $y = k_1x + b_1$ *и* $y = k_2x + b_2$, *то координаты точки их пересечения являются решением системы уравнений* $\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2. \end{cases}$

Теорема 5.5b. *Если две прямые заданы уравнениями* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, *то координаты точки их пересечения являются решением системы уравнений* $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$

5.8. Расстояние от точки до прямой

Теорема 5.6. *Если заданы точка* $M\left(x_0, y_0\right)$ *и прямая* $Ax + By + C = 0$, *то расстояние* d *от точки до прямой составляет*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

5.9. Кривые второго порядка

Общий вид уравнения кривых второго порядка:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Общее уравнение окружности ($A = C$, $B = 0$):

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Общее уравнение кривой эллиптического типа ($A \cdot C > 0$, $B = 0$ – коэффициенты A и C имеют одинаковые знаки):

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Общее уравнение кривой гиперболического типа ($A \cdot C < 0$, $B = 0$ – коэффициенты A и C имеют различные знаки):

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Общее уравнение кривой параболического типа ($A = 0$, $C \neq 0$, $B = 0$):

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

5.10. Окружность

Определение 5.3. ***Окружность*** *– это линия на плоскости, все точки которой находятся на одном и том же расстоянии от некоторой точки – центра.*

Характеристическое свойство окружности: для любой точки окружности расстояние от неё до центра (точки O) – есть величина постоянная, равная радиусу окружности R.

Нормальное уравнение окружности (с центром в точке $O(x_0, y_0)$):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} + \frac{(y - y_0)^2}{R^2} = 1.$$

Для окружности с центром в начале координат ($x_0 = 0, y_0 = 0$)

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

5.11. Эллипс

Характеристическое свойство эллипса: для любой точки эллипса сумма расстояний от этой точки до двух заданных точек (фокусов эллипса) – есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{\left(x - x_0\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - y_0\right)^2}{b^2} = 1.$$

5.12. Гипербола

Характеристическое свойство гиперболы: для любой точки гиперболы модуль разности расстояний от этой точки до двух заданных точек (фокусов гиперболы) есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы с полуосями a и b:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{\left(x - x_0\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y - y_0\right)^2}{b^2} = 1.$$

5.13. Парабола

Характеристическое свойство параболы: для любой точки параболы расстояния от этой точки до заданной прямой (директрисы параболы) и заданной точки (фокуса параболы) есть величина постоянная.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

$$\left(y - y_0\right)^2 = 2p\left(x - x_0\right).$$

5.14. Общее уравнение плоскости в пространстве

Общее уравнение плоскости в пространстве:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{n} = \left(A, B, C\right)$:

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0.$$

5.15. Условие параллельности плоскостей в пространстве

Теорема 5.7. *Для того чтобы две плоскости* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *в пространстве были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при соответствующих переменных в уравнениях плоскостей были пропорциональны:*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

5.16. Условие перпендикулярности плоскостей в пространстве

Теорема 5.8. *Для того чтобы две плоскости* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *в пространстве были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при переменных в уравнениях плоскостей удовлетворяли соотношению*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

5.17. Уравнения линии в пространстве

Прямую в пространстве задают как линию пересечения двух плоскостей, т.е. как множество точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

5.18. Канонические уравнения прямой линии в пространстве

Если прямая проходит через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = (m, n, k)$ (направляющему вектору), то она может быть описана *каноническими уравнениями прямой линии в пространстве*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}.$$

Раздел 2. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Глава 6. КОМПЛЕ́КСНЫЕ ЧИСЛА

6.1. Понятие компле́ксного числа

Невозможность решения в множестве вещественных чисел R уравнений вида $x^2+1=0$ или $x^2+2x+3=0$ приводит к необходимости расширения понятия числа и к введению множества компле́ксных чисел – множества C.

Определение 6.1. ***Множество компле́ксных чисел*** *– это множество чисел вида* $a+bi$, *где* $a, b \in R$, $i^2=-1$.

Множество компле́ксных чисел обозначают C.

$z=a+bi$ – алгебраическая форма компле́ксного числа.

Вещественное число a называют *вещественной частью* компле́ксного числа z и обозначают $a=\mathrm{Re}(z)$.

Вещественное число b называют *мнимой частью* компле́ксного числа z и обозначают $b=\mathrm{Im}(z)$.

Если вещественная часть компле́ксного числа $a=0$, то $z=bi$. Такое число называют *чисто мнимым*.

Если мнимая часть компле́ксного числа $b = 0$, то $z = a$ совпадает с вещественным числом $(R \subset C)$.

Отношение включения между основными числовыми множествами можно иллюстрировать кругами Эйлера (рис. 6.1).

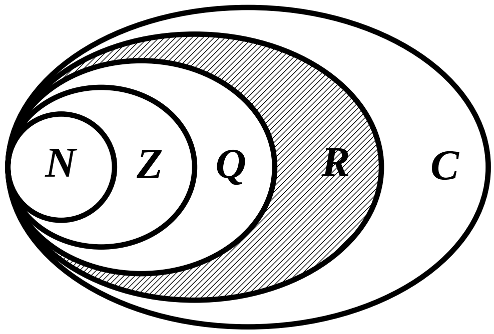


Рис. 6.1. *Диаграмма Эйлера структуры числовой системы, иллюстрирующая отношение включения между основными числовыми множествами (заштриховано множество иррациональных чисел I, дополняющее множество рациональных чисел Q до множества вещественных чисел R:* $Q \bigcup I = R$*)*

Компле́ксное число можно интерпретировать как точку на координатной плоскости (рис. 6.2). Координатную плоскость, рассматриваемую как модель множества комплексных чисел, называют *компле́ксной плоскостью*.

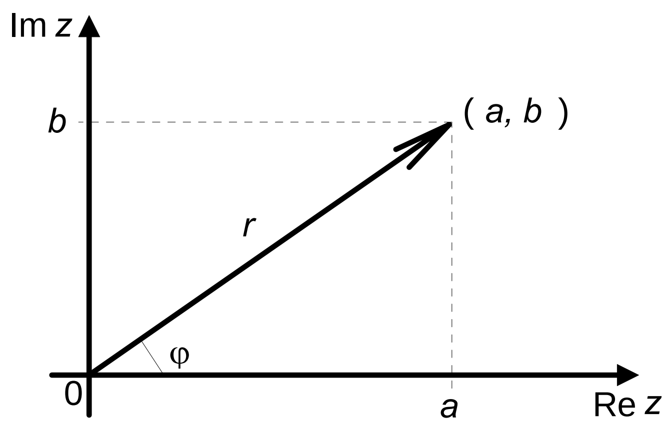


Рис. 6.2. *Компле́ксное число как точка координатной (комплексной) плоскости*

Компле́ксную плоскость можно рассматривать как модель множества компле́ксных чисел, так как между точками плоскости и элементами множества компле́ксных чисел имеет место взаимно однозначное соответствие. Это означает, что каждому компле́ксному числу соответствует одна и только одна точка компле́ксной плоскости и, наоборот, каждой точке компле́ксной плоскости соответствует одно и только одно компле́ксное число.

Ось абсцисс комплексной плоскости, на которой откладывают вещественные части комплексных чисел, называют *вещественной осью*. Ось ординат, на которой откладывают мнимые части комплексных чисел, называют *мнимой осью*.

Число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ называют *модулем компле́ксного числа* $z = a + bi$ и обозначают $|z|$: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$.

Очевидно, модуль компле́ксного числа численно равен длине (модулю) соответствующего этому числу радиуса-вектора.

Угол φ, образованный радиусом-вектором с положительным направлением вещественной оси, называют *аргументом компле́ксного числа* и обозначают $\operatorname{Arg} z$. Аргументу комплексного нуля можно приписать произвольное значение.

Очевидно, $-\infty < \operatorname{Arg} z < +\infty$.

Наименьшее по модулю значение $\operatorname{Arg} z$ называют главным значением аргумента и обозначают $\arg z$.

$$\arg z = \varphi \ (-\pi < \arg z \le \pi).$$

6.2. Действия над компле́ксными числами

Определение 6.2. ***Равные компле́ксные числа*** *– это компле́ксные числа* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *и* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *, у которых* $\begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$

Действия над компле́ксными числами:

если $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, то

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Определение 6.3. *Компле́ксно сопряжённые числа – это компле́ксные числа* $z = a + bi$ *и* $\overline{z} = a - bi$.

Свойства компле́ксно сопряжённых чисел:

$$1)\ |z| = |\overline{z}|; \qquad 2)\ z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2.$$

Операцию деления при помощи компле́ксно сопряжённых чисел можно записать так:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)\ (a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Операции над компле́ксными числами выполняют по тем же правилам, что и операции над вещественными числами.

Свойства операций над компле́ксными числами:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения);

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность сложения);

3) существует число (его обозначают 0) такое, что для $\forall z$ выполнено равенство $z + 0 = z$ (существование нулевого элемента);

4) для $\forall z_1$ и $\forall z_2$ $\exists z$ такое, что $z_1 + z = z_2 \Rightarrow z = z_2 - z_1$ (существование разности компле́ксных чисел);

5) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (коммутативность умножения);

6) $z_1(z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ (ассоциативность умножения);

7) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);

8) существует число (его обозначают 1) такое, что для $\forall z$ выполнено равенство $z \cdot 1 = z$ (существование единичного элемента);

9) для $\forall z_2$ и $z_1 \neq 0$ $\exists z$ такое, что $z_1 \cdot z = z_2 \Rightarrow z = z_2 / z_1$ (существование частного компле́ксных чисел).

Следует обратить внимание на следующие свойства степени числа i:

$$i^1 = i;$$

$$i^2 = -1;$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i;$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i; \text{ и т.д.}$$

Вообще $i^{4k+m} = i^m$, так как $i^{4k+m} = i^{4k} \cdot i^m = \left(i^4\right)^k \cdot i^m = 1^k \cdot i^m = 1 \cdot i^m = i^m$.

Например: $i^{22} = i^{20+2} = i^2 = -1$.

6.3. Показательная форма записи компле́ксных чисел

Кроме алгебраической, существуют *тригонометрическая* и *показательная* формы записи компле́ксных чисел.

Тригонометрическая форма записи компле́ксных чисел:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Формулы перехода от тригонометрической к алгебраической форме записи:

$$\begin{cases} a = r \cdot \cos\varphi; \\ b = r \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

Формулы перехода от алгебраической к тригонометрической форме записи:

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2}; \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

Последняя формула требует детализации:

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(b/a) & (a > 0), \\ \pi/2 & (a = 0,\ b > 0), \\ -\pi/2 & (a = 0,\ b < 0), \\ \operatorname{arctg}(b/a) + \pi & (a < 0,\ b > 0), \\ \operatorname{arctg}(b/a) - \pi & (a < 0,\ b < 0). \end{cases}$$

Тригонометрическая форма возникла исторически в процессе развития понятия *компле́ксное число* и в настоящее время имеет лишь вспомогательное значение. Однако в упрощённых курсах математики ей уделяют достаточно много внимания, так как не вводят показательную форму записи, которая существенно более удобна. Дело в том, что для обоснованного введения показательной формы записи необходимы представления из теории функций компле́ксной переменной. Однако мы введём показательную форму записи чисто формально, приняв «на веру» тождество Эйлера

$$e^{i\varphi} \equiv \cos\varphi + i\sin\varphi .$$

Тогда из тригонометрической формы легко получается

показательная форма записи компле́ксных чисел:

$$z = r \cdot e^{i\varphi} .$$

Формулы перехода от показательной к алгебраической форме записи и обратно такие же, как в случае тригонометрической формы:

$$\begin{cases} a = r \cdot \cos\varphi; \\ b = r \cdot \sin\varphi \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2}; \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a} . \end{cases}$$

Тригонометрическая форма записи является переходной, вспомогательной и не находит широкого применения. Показательную же форму записи широко используют, так как умножение и деление компле́ксных чисел в этой форме записи естественным образом сводится к умножению, делению и сложению вещественных чисел.

Пусть $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$. Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 \cdot e^{i\varphi_1}\right) \cdot \left(r_2 \cdot e^{i\varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

6.4. Извлечение корня из комплéксного числа

Возведение комплéксного числа в степень и извлечение из него корня достаточно легко выполнять в показательной форме записи.

Пусть $z = r \cdot e^{i\varphi}$. Тогда

$$z^n = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot \left(e^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{in\varphi};$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot e^{i(\varphi + 2\pi k)}} = \sqrt[n]{r} \cdot \sqrt[n]{e^{i(\varphi + 2\pi k)}} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(e^{i(\varphi + 2\pi k)}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}},$$

$$k = 0, \ldots, (n-1).$$

Обратим внимание, что согласно последней формуле корень степени n из комплéксного числа имеет ровно n значений.

☑ **Пример.** Вычислить $\sqrt[3]{-1}$ и $\sqrt[4]{1}$.

Решение. Комплéксное число -1 имеет модуль, равный 1 ($|-1| = 1$), и аргумент (главное значение аргумента), равный π ($\arg z = \pi$). Следовательно, $-1 = 1 \cdot e^{i\pi} = e^{i\pi} = e^{i(\pi + 2\pi k)}$.

Тогда $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1 \cdot e^{i(\pi + 2\pi k)}} = \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{e^{i(\pi + 2\pi k)}} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{3}} = e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$

В результате имеем:

$$\sqrt[3]{-1} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & (k = 0); \\ e^{i\frac{3\pi}{3}} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 & (k = 1); \\ e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & (k = 2). \end{cases}$$

Комплексное число $+1$ имеет модуль, равный 1 ($|+1|=1$), и аргумент (главное значение аргумента), равный 0 ($\arg z = 0$). Следовательно, $+1 = 1 \cdot e^{i0} = e^{i0} = e^{i(0+2\pi k)} = e^{i2\pi k}$.

Тогда $\sqrt[4]{+1} = \sqrt[4]{1 \cdot e^{i2\pi k}} = \sqrt[4]{1} \cdot \sqrt[4]{e^{i2\pi k}} = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi k}{4}} = e^{i\frac{\pi k}{2}}$, $\quad k = 0, 1, 2, 3$.

В результате имеем:

$$\sqrt[4]{+1} = \begin{cases} e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i0 = 1 & (k=0); \\ e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i & (k=1); \\ e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 - i0 = -1 & (k=2); \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 + i \cdot (-1) = -i & (k=3). \end{cases}$$

Глава 7. МНОГОЧЛЕНЫ И ИХ КОРНИ

7.1. Основные понятия

Теория многочленов является развитием той части школьного курса алгебры, которая начинается решением уравнения первой степени с одной неизвестной и находит своё продолжение в теории квадратных уравнений и в решении некоторых видов уравнений более высоких степеней.

Общий вид уравнения n-й степени (n – натуральное число) есть

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Обыкновенно изучение уравнений сводят к их решению. Однако представляет интерес более общая задача изучения левой части этого уравнения. При этом нам пригодятся компле́ксные числа.

Определение 7.1. ***Многочлен** (**полином**) n-й степени от переменной x – это выражение вида*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 . \qquad (1)$$

В определении нет ограничений на вид коэффициентов a_i. В общем случае они могут быть и комплéксными числами ($a_i \in C$). То же самое можно сказать о переменной *x*.

Многочлен (1) записан по убывающим степеням неизвестной *x*. При необходимости можно использовать и другие формы записи, например, по возрастающим степеням *x*.

Из определения следует, что любое число (кроме 0) можно рассматривать как *многочлен нулевой степени* ($a_0 \neq 0$ можно трактовать как коэффициент при x^0). Число 0 также можно рассматривать как многочлен, но это единственный многочлен, степень которого не определена.

Для сокращённой записи многочленов используют обозначения $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ и т.п. При необходимости указать в сокращённой записи степень многочлена, пишут $P_n(x)$, $Q_n(x)$, $R_n(x)$ и т.п. В этой форме записи отражён тот факт, что многочлен можно рассматривать и как функцию переменной *x*.

Определение 7.2. ***Равные многочлены** – это многочлены, у которых равны коэффициенты при соответствующих степенях переменной x.*

Определение 7.3. ***Корень многочлена** $P(x)$ – это такое число c (в общем случае комплéксное), при подстановке которого вместо переменной x многочлен $P(x)$ обращается в нуль.*

Иными словами, ($c \in C$ – корень $P(x)) \Leftrightarrow (P(c) = 0)$.

Теорема 7.1 (Безу). *Если многочлен $P(x)$ разделить на линейный многочлен $(x-a)$, то остаток от деления будет равен значению многочлена $P(x)$ при $x = a$, т.е. $r = P(a)$.*

Доказательство. Принимаем без доказательства.

☒

Математически:

$$P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x) + r, \text{ где } r = P_n(a).$$

Важное следствие из теоремы Безу: число c тогда и только тогда является корнем многочлена, когда этот многочлен делится на $(x-c)$, т.е. когда остаток $r = P_n(a) = 0$.

7.2. Основная теорема алгебры и следствия из неё

Теорема 7.2 (*основная теорема алгебры*). *Всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.*

Доказательство. Эту теорему, впервые доказанную Гауссом в конце XVIII века, мы принимаем без доказательства.

☒

Рассмотрим следствия из основной теоремы.

Следствие 1. *Если* α_1 *– корень многочлена* $P_n(x)$ $(n \geq 1)$, *то многочлен* $P_n(x)$ *можно разложить на произведение линейного множителя* $(x-\alpha_1)$ *и многочлена (n – 1)-й степени:*

$$P_n(x) = (x-\alpha_1) \cdot Q_{n-1}(x).$$

Следствие 2. *Если* $P_n(x)$ *многочлен n-й степени, то его можно разложить на произведение n линейных множителей (*a_n *– коэффициент при* x^n*):*

$$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots(x-\alpha_n)\ . \tag{2}$$

Доказательство можно провести, применяя последовательно n раз следствие 1 к многочленам $Q(x)$, возникающим при выделении линейных множителей.

Среди корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ могут быть равные корни и, следовательно, среди множителей $(x-\alpha_1), (x-\alpha_2), \ldots, (x-\alpha_n)$ – равные множители. Объединим равные множители. Тогда разложение (2) можно переписать в виде

$$P_n(x) = a_n (x-\alpha_1)^{k_1} (x-\alpha_2)^{k_2} \ldots (x-\alpha_r)^{k_r}, \tag{3}$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$ и среди корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ уже нет равных. Говорят, что k_i – кратность корня α_i в многочлене $P_n(x)$.

Следствие 3. *Если* $P_n(x) = a_n (x-\alpha_1)^{k_1} (x-\alpha_2)^{k_2} \ldots (x-\alpha_r)^{k_r}$ *– разложение многочлена на линейные множители, то с точностью до порядка сомножителей это единственное разложение такого типа.*

Следствие 4. *Если* $P_n(x)$ *– многочлен n-й степени* $(n \geq 1)$*, то он имеет n корней (если каждый корень считать столько раз, какова его кратность).*

7.3. Формулы Виета

Рассмотрим многочлен

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{4}$$

Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – его корни, то $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_n). \tag{5}$$

Перемножая линейные множители и сравнивая коэффициенты в (4) и (5), получаем *формулы Виета*:

$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$;

$a_{n-2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n$;

$$a_{n-3} = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1 = (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n + \ldots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n);$$
$$a_0 = (-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

При $n=2$ эти формулы Виета для многочлена $x^2 + a_1x + a_0$ приобретают привычный со школы вид (x_1 и x_2 – корни многочлена):

$$a_1 = -(x_1 + x_2); \quad a_0 = x_1x_2.$$

При $n=3$ получим формулы Виета для кубического многочлена $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$:

$$a_2 = -(x_1 + x_2 + x_3); \quad a_1 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \quad a_0 = -x_1x_2x_3.$$

7.4. Многочлены с вещественными коэффициентами

Всё, что было сказано выше, справедливо для многочленов, у которых коэффициенты a_i произвольные числа, в частности, и комплексные. Перейдём к рассмотрению более узкого, но практически важного класса многочленов, – многочленов с вещественными коэффициентами.

Определение 7.4. ***Многочлен с вещественными коэффициентами*** *– это многочлен, у которого все коэффициенты $a_i \in R$ – вещественные числа.*

Теорема 7.3. *Если компле́ксное число $\alpha \in C$ – корень многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами, то сопряжённое число $\overline{\alpha}$ также является корнем данного многочлена.*

Иными словами, компле́ксные корни многочлена попарно сопряжены.

Доказательство. Принимаем без доказательства.

⊠

Теорема 7.4. *Если комплéксные числа* $\alpha, \overline{\alpha} \in C$ *– корни многочлена* $P(x)$ *с вещественными коэффициентами, то их кратности равны.*

Доказательство. Принимаем без доказательства.

☒

Теорема 7.5. *Если* $P(x)$ *– многочлен с вещественными коэффициентами, то его можно представить (и притом единственным с точностью до порядка множителей образом) в виде произведения старшего коэффициента* a_n*, линейных* $(x-\alpha)$ *и квадратичных* $(x^2+\beta x+\gamma)$ *множителей:*

$$P_n(x)=a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}\ldots(x^2+\beta_s x+\gamma_s)^{l_s}. \quad (6)$$

Доказательство. Принимаем без доказательства.

☒

Достаточно очевидно, что в этом разложении линейные множители соответствуют вещественным корням α_i многочлена $P(x)$ (k_i – кратность корня α_i). Квадратичные множители соответствуют парам сопряжённых комплексных корней α_j и $\overline{\alpha}_j$, причём в соответствии с формулами Виета $\beta_j=-(\alpha_j+\overline{\alpha}_j)$, $\gamma_j=\alpha_j\overline{\alpha}_j$ (l_j – кратность корней α_j и $\overline{\alpha}_j$). Очевидно, что $k_1+\ldots k_r+2(l_1+\ldots l_s)=n$.

Определение 7.5. ***Неприводимый многочлен*** *– это многочлен с вещественными коэффициентами, который невозможно разложить на произведение многочленов с вещественными коэффициентами меньшей степени.*

Среди многочленов с вещественными коэффициентами и с $a_n=1$ *неприводимыми* являются лишь линейные и частично квадратные многочлены. Среди квадратных многочленов неприводимыми являются те, которые не имеют вещественных корней. Например, многочлен (6) представлен в виде произведения неприводимых многочленов.

7.5. Разложение алгебраической дроби на простейшие

Определение 7.6. ***Рациональная алгебраическая дробь*** *– это выражение вида $P(x)/Q(x)$, где числитель $P(x)$ и знаменатель $Q(x)$ являются многочленами.*

Далее прилагательные *рациональная* и *алгебраическая* для краткости будем опускать.

Определение 7.7. ***Правильная дробь*** *– это дробь, у которой степень многочлена, стоящего в числителе, строго меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе.*

Например: $\dfrac{a}{x+b}$, $\dfrac{3}{x^2+3x+5}$, $\dfrac{2x-3}{x^2+3x+5}$.

Теорема 7.6. *Если $P_n(x)/Q_m(x)$ – рациональная дробь и $n \geq m$, то её можно представить (причём единственным образом) в виде суммы многочлена и правильной дроби.*

Доказательство. Принимаем без доказательства.

⊠

Определение 7.8. ***Простейшая правильная дробь*** *– это правильная дробь, у которой знаменатель является степенью неприводимого многочлена.*

Теорема 7.7. *Если $P(x)/Q(x)$ – правильная рациональная дробь, то её можно разложить (причём единственным образом) в сумму простейших дробей.*

Доказательство. Принимаем без доказательства.

⊠

Покажем на примере, как «работают» эти теоремы.

☑ **Пример.** Разложить в сумму простейших дробей дробь $\dfrac{x^3+x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$.

Решение. Многочлен, стоящий в знаменателе можно представить в виде произведения неприводимых многочленов (легко проверить перемножением)

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1=(x-1)^2(x^2+1).$$

Тогда разложение дроби на простейшие должно иметь вид:

$$\frac{x^3+x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим

$$\frac{x^3+x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Далее будем сравнивать числители дробей слева и справа, которые должны быть равны.

После очевидных преобразований числителя правой дроби получим:

$$x^3+x+2=(A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(A+C-2D)x+(-A+B+D).$$

Коэффициенты в обеих частях равенства должны быть равны. Приравнивая их, мы получаем систему четырёх линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} A+C=1 \\ -A+B-2C+D=0 \\ A+C-2D=1 \\ -A+B+D=2 \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений следует, что $D=0$. Тогда система упрощается и мы имеем:

$$\begin{cases} A+C=1 \\ -A+B-2C=0 \\ -A+B=2 \\ D=0 \end{cases}$$

Теперь из второго и третьего уравнений следует, что $C = 1$, и система ещё более упрощается:

$$\begin{cases} A + 1 = 1 \\ -A + B = 2 \\ C = 1 \\ D = 0 \end{cases}$$

Теперь не составляет труда вычислить все оставшиеся коэффициенты: $A = 0$, $B = 2$.

Итак, мы получили, что разложение данной в условии задачи дроби на простейшие имеет вид:

$$\frac{x^3 + x + 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Справедливость этого разложения легко проверить, выполнив действия в правой части.

⊠

Глава 8. МНОЖЕСТВА

8.1. Виды теорем. Необходимое и достаточное условия

Математические теоремы чаще всего формулируют с помощью языковой конструкции *если ..., то ...* . В логике этой конструкции соответствует операция импликации. Поэтому структуру математической теоремы в обозначениях логики можно записать в виде $A \to B$ (чаще используют обозначение $A \Rightarrow B$). Здесь A – условие (обычно находится между словами *если* и *то*), B – заключение (обычно следует за словом *то*).

Если теорему $A \to B$ назвать *прямой* теоремой, то теорему $B \to A$ следует назвать *обратной* теоремой к теореме $A \to B$.

Если прямая теорема верна, то из этого не следует, что будет верна обратная теорема.

В математике различают два вида условий истинности того или иного суждения: необходимые и достаточные.

Необходимое условие – это условие, без истинности которого некоторое суждение ни в каком случае не может быть истинным. Иными словами, для истинности некоторого суждения необходимое условие обязательно должно быть выполнено (быть истинным).

Например, для того чтобы $x = 0$, необходимо, чтобы $xy = 0$.

Достаточное условие – это условие, истинность которого гарантирует истинность некоторого суждения.

Например, для того чтобы $xy = 0$, достаточно, чтобы $x = 0$.

Итак, необходимое условие – это условие, без истинности которого данное суждение *не может быть* истинным.

Достаточное условие – это условие, при истинности которого данное суждение *обязательно* истинно.

Рассмотрим теорему $A \to B$. Если эта теорема верна, то A – достаточное условие для B, а B – необходимое условие для A.

Рассмотрим два суждения A = «$x = 0$» и B = «$xy = 0$».

Теорема *если* «$x = 0$», *то* «$xy = 0$» верна.

Обратная теорема *если* «$xy = 0$», *то* «$x = 0$» неверна.

Следовательно, условие «$x = 0$» является достаточным для «$xy = 0$», а «$xy = 0$» является необходимым для «$x = 0$».

Вместе с тем, «$xy = 0$» не является достаточным для «$x = 0$» (может быть $y = 0$). Конечно, и «$x = 0$» не является необходимым для «$xy = 0$» (может быть $y = 0$).

Часто теоремы формулируют как необходимые и/или достаточные условия.

Необходимое условие для *A*:

для того чтобы A, необходимо, чтобы B

(необходимому условию соответствует теорема $A \to B$, т.е. *если A*, *то B*).

Достаточное условие для *A*:

для того чтобы A, достаточно, чтобы B

(достаточному условию соответствует теорема $B \to A$, т.е. *если B*, *то A*).

Если суждения *A* и *B* таковы, что сложные суждения $A \to B$ и $B \to A$ истинны (соответствующие теоремы верны), это записывают $A \leftrightarrow B$ и говорят, что *B* является необходимым и достаточным условием для *A* или, соответственно, *A* является необходимым и достаточным условием для *B*.

Необходимые и достаточные условия формулируют так:

для того чтобы A, необходимо и достаточно, чтобы B.

Этой формулировке соответствуют две теоремы (обе надо доказывать): 1) $A \to B$, то есть *если A*, *то B* (необходимость); 2) $B \to A$, то есть *если B*, *то A* (достаточность).

☑ **Пример.**

Теорема. *Для того чтобы вписанный в окружность треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы одна из его сторон была диаметром окружности.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы распадается на две части.

1) Необходимость. *Если треугольник вписан в окружность и он прямоугольный, то одна из его сторон является диаметром окружности.*

2) Достаточность. *Если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром окружности, то этот треугольник прямоугольный.*

Принимаем без доказательства. ☒

Поскольку с точки зрения логики, отвлекающейся от содержания суждений, суждения A и B совершенно равноправны, то обе формулировки (B необходимое и достаточное условие для A или A необходимое и достаточное условие для B) также совершенно равноправны.

Однако на практике суждения A и B обычно имеют различную ценность. Это обстоятельство определяет названия теорем.

Например, рассмотрим теорему, которую называют необходимым условием существования экстремума функции и формулируют так: «если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$ или не существует».

В этой теореме суждения 1) «функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0» и 2) «$f'(x_0) = 0$ или не существует» неравноценны: первое из них говорит непосредственно об интересующем нас свойстве (наличие экстремума). Поэтому и данную теорему называют необходимым условием существования экстремума, а не «достаточным условием равенства нулю или несуществования производной функции в точке x_0».

8.2. Понятие ‘*множество*’

Теория множеств – язык современной математики. Понятие ‘*множество*’ настолько универсально, что элементы этого языка проникли в другие, подчас далёкие от математики, области знания.

Основное понятие теории множеств – ‘*множество*’. Это понятие обычно относят к исходным, «неопределяемым» математическим понятиям. Однако если бы люди вообще не могли определять такие понятия, то они не смогли бы и договориться, не смогли бы рассуждать – в таком случае отсутствовал бы предмет рассуждения. Поэтому существует множество различных видов определений (в словаре по логике их можно насчитать около двух десятков). Одна из возможностей – описать понятие, оперируя интуитивно ясными, но строго не определёнными словами естественного языка.

Таким образом, хотя математически строго определить понятие *множество* нельзя, можно его «описать». Приведём описание, данное основоположником теории множеств Георгом Кантором.

Множество *S есть любое собрание определённых и различимых между собой объектов нашей интуиции и интеллекта, мыслимое как единое целое. Эти объекты называют* ***элементами*** *множества S.*

Если элемент x является элементом множества S, то записывают $x \in S$ и говорят: *x принадлежит S*. Если элемент x не является элементом множества S, то записывают $x \notin S$ и говорят: *x не принадлежит S*.

Очень полезным является понятие *пустое множество*.

Определение 8.1. ***Пустое множество*** *– это множество, которое не содержит элементов.*

Пустое множество обозначают символом $\varnothing$.

☑ **Примеры** множеств:

$A = \{a, b, c, d\}$ – множество, состоящее из четырёх элементов – букв a, b, c и d;

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множество, состоящее из всех натуральных чисел (множество натуральных чисел).

☒

Выделяют два основных способа задания (описания) множества:

1) перечислением всех элементов множества;
2) указанием характеристического свойства элементов множества.

Ясно, что первый способ пригоден только для конечных множеств, да и то с небольшим числом элементов. Например, $A = \{1,3,5\}$ – множество, состоящее из трёх элементов (один, три и пять).

Второй способ задания множества – характеристическим свойством – более универсален. Например, приведённое выше множество $A = \{1,3,5\}$ в этом случае можно задать так: $A = \{x \mid x = 2k+1,\ k \in N,\ 1 \le x \le 5\}$.

☑ **Примеры**.

Множество натуральных чисел $N = \{ n \; | n = 1, 2, 3, \ldots \}$. (На первый взгляд N задано перечислением элементов. Но мы не можем перечислить все элементы бесконечного множества, поэтому в приведённой записи неявно подразумеваем характеристическое свойство: $n_{i+1} = n_i + 1$ – каждый следующий элемент получается из предыдущего добавлением 1.)

Множество целых чисел

$$Z = \{ m \mid m = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}.$$

Множество чётных чисел $E = \{ n \mid n = 2k, k \in Z \}$.

Множество нечётных чисел $D = \{ n \mid n = 2k + 1, k \in Z \}$.

Множество рациональных чисел

$$Q = \{ x \mid x = m/n, m \in Z, n \in N \}.$$

Открытый промежуток (интервал) (a, b) в множестве действительных чисел $A = \{ x \mid x \in R, a < x < b \}$.

Закрытый промежуток (отрезок) $[a, b]$ в множестве действительных чисел $A = \{ x \mid x \in R, a \le x \le b \}$.☒

8.3. Подмножества. Отношение включения

Подмножества. Рассмотрим два множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Каждый элемент множества A принадлежит и множеству B. Такое множество A называют *подмножеством* множества B и записывают $A \subset B$. Говорят также, что множество A *включено в* B или B *включает* A, что A *содержится в* B или B *содержит* A, что между множествами A и B установлено *отношение включения*.

Пустое множество есть подмножество любого непустого множества.

Отношение включения между множествами удобно для наглядности изображать графически с помощью диаграмм (кругов) Эйлера (рис. 8.1).

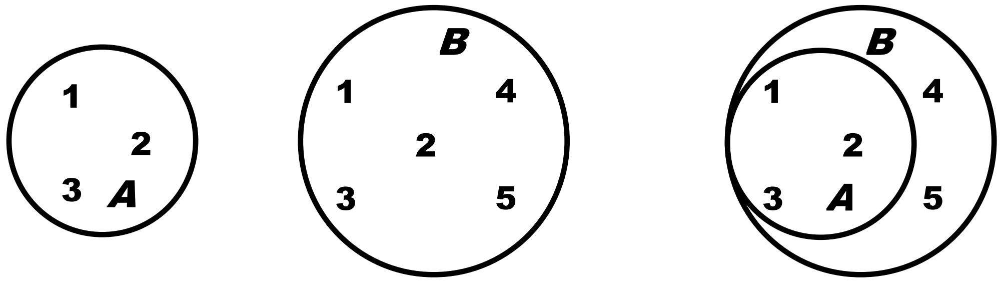


Рис. 8.1. *Диаграмма Эйлера, иллюстрирующая понятие* подмножество*:* $A \subset B$

Определение 8.2. ***Подмножество множества A*** *– это множество, все элементы которого являются элементами множества A.*

Рассмотрим множество $C = \{1, 2, 3, 6\}$. Не все его элементы принадлежат множеству $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (элемент $6 \notin B$). Следовательно, *C* не является подмножеством множества *B*: $C \not\subset B$ (рис. 8.2).

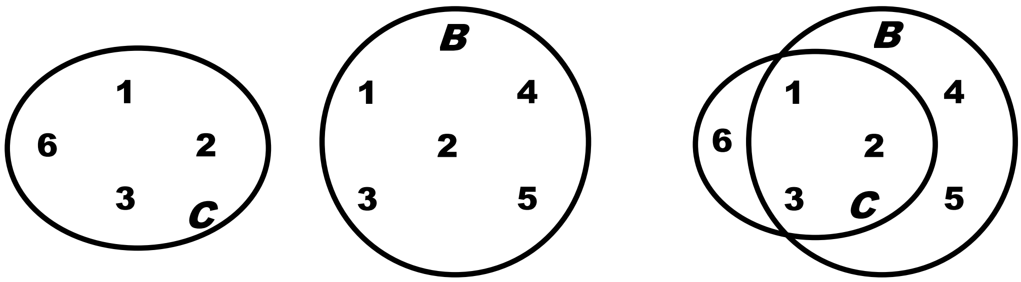


Рис. 8.2. *Диаграмма Эйлера, иллюстрирующая понятие* подмножество*:* $C \not\subset B$

Различают отношения строгого и нестрогого включения. Нестрогое включение обозначают знаком $\subseteq$. Различие строгого и нестрогого включения вполне аналогично различию между строгим и нестрогим неравенством $(>, \geq)$: при нестрогом включении возможен случай совпадения (равенства) обоих множеств; при строгом включении такой случай исключён (табл. 8.1).

В том, что отношения строгого и нестрогого неравенства чисел обладают аналогичными свойствами, предлагаем убедиться читателю в качестве самостоятельного упражнения.

Таблица 8.1

Основные свойства отношения включения множеств

Отношение строгого включения $\subset$	**Отношение нестрогого включения** $\subseteq$
$A \not\subset A$ (антирефлексивность)	$A \subseteq A$ (рефлексивность) (любое непустое множество есть подмножество самого себя)
Если $A \subset B$, то $B \not\subset A$ (асимметричность)	Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$ (антисимметричность)
Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность)	Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (транзитивность)

8.4. Операции над множествами

Прежде чем давать определения операций над множествами, необходимо определить отношение равенства множеств.

Определение 8.3. ***Равные множества*** *– это множества, каждое из которых является подмножеством другого.*

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

Можно указать на аналогию отношения равенства множеств с отношением равенства чисел: $(a = b) \Leftrightarrow (a \geq b \wedge b \geq a)$.

Отношение равенства множеств довольно трудно пояснить с помощью диаграммы Эйлера, так как на ней пришлось бы наглядно изобразить совпадающие круги.

Несложно доказать теорему: если множества равны, то они состоят из одинаковых (или одних и тех же) элементов.

Основные свойства отношения равенства множеств:

1. Любое множество равно самому себе: $A = A$ (рефлексивность).
2. Если $A = B$, то и $B = A$ (симметричность).
3. Если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$ (транзитивность).

Теперь дадим определения *пересечения* и *объединения* – основных операций над множествами.

Определение 8.4. ***Пересечение*** *двух множеств – это множество всех общих элементов данных множеств.*

Пересечение обозначают знаком $\bigcap$: $A \bigcap B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B \}$ или

$$A \bigcap B = \{ x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B \} .$$

Операции над множествами также удобно иллюстрировать диаграммами (кругами) Эйлера. На рис. 8.3 заштрихованная область представляет собой пересечение множеств $A \bigcap B$.

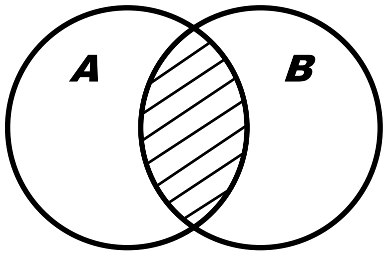


Рис. 8.3. *Пересечение множеств A и B (заштрихованная область кругов Эйлера)*

☑ **Пример.** Найти пересечение множеств $A = \{1,2,3,4\}$ и $B = \{2,4,6\}$.

Решение. Общими элементами обоих множеств являются 2 и 4. Поэтому $A \bigcap B = \{2,4\}$ (рис. 8.4). ☒

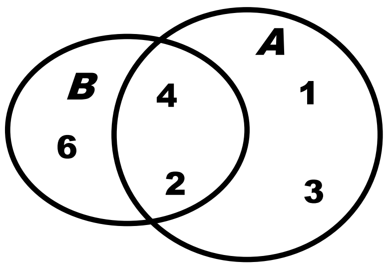


Рис. 8.4. *Диаграмма Эйлера: общие элементы множеств – 2 и 4*

☑ **Пример.** Найти пересечение множеств $A=\{a,b,c\}$ и $B=\{m,n,k\}$.

Решение. Данные в условии множества не имеют одинаковых элементов. Поэтому $A\bigcap B=\varnothing$ (рис. 8.5). ☒

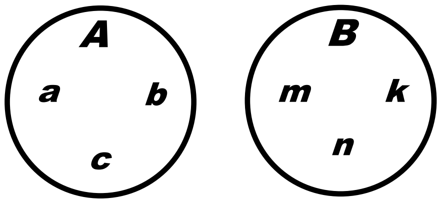


Рис. 8.5. *Диаграмма Эйлера: общих элементов у множеств нет*

☑ **Пример.** Найти пересечение множеств $A = \{x \mid x\in R, 1\le x\le 5\}$ и $B = \{x \mid x\in R, 3<x<6\}$.

Решение. Понятно, что задача сводится к нахождению пересечения двух промежутков – отрезка [1, 5] и интервала (3, 6). Общие точки обоих промежутков принадлежат полуинтервалу (3, 5] (рис. 8.6).

Следовательно, $A\bigcap B=\{x \mid x\in R,\ 3<x\le 5\}$. ☒

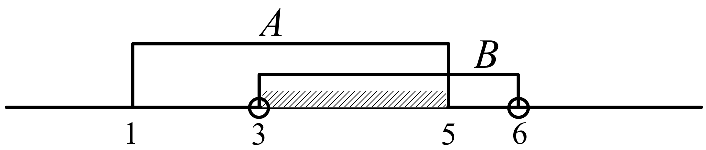


Рис. 8.6. Пересечение промежутков: общий промежуток – полуинтервал $(3;5]$

Свойства операции пересечения:

1. Коммутативность: $A\bigcap B=B\bigcap A$.
2. Ассоциативность: $(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$.
3. $A\bigcap\varnothing=\varnothing$.
4. Если $A\subset B$, то $A\bigcap B=A$.

Определение 8.5. ***Объединение*** *двух множеств – это множество всех элементов двух данных множеств.*

Объединение обозначают знаком $\bigcup$:

$$A \bigcup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \} \text{ или}$$

$$A \bigcup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \} .$$

На рис. 8.7 заштрихованная область представляет собой объединение множеств $A \bigcup B$.

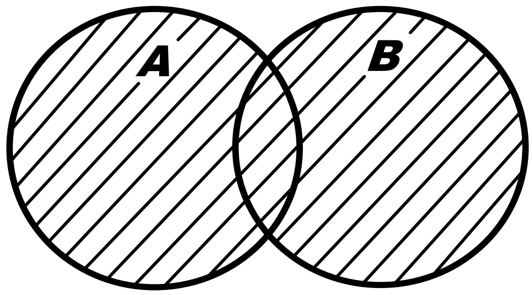


Рис. 8.7. *Объединение множеств A и B (заштрихованная область кругов Эйлера)*

☑ **Пример.** Найти объединение множеств $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$.

Решение. Объединению множеств принадлежат все элементы обоих множеств. Поэтому $A \bigcup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Обратите внимание, что одинаковые элементы включены в объединение множеств только один раз (рис. 8.8). ☒

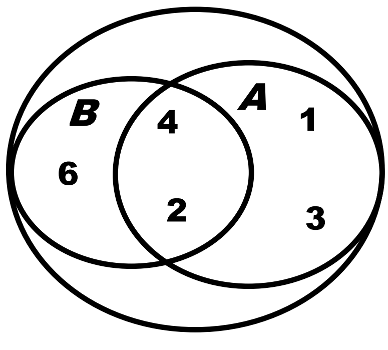


Рис. 8.8. *Диаграмма Эйлера: в объединение множеств входят все элементы обоих множеств*

☑ **Пример.** Найти объединение множеств $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{m, n, k\}$.

Решение. $A \bigcup B = \{a, b, c, m, n, k\}$ (рис. 8.9). ☒

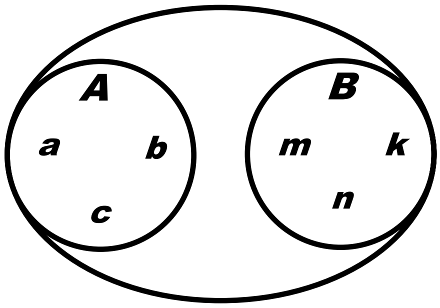


Рис. 8.9. *Диаграмма Эйлера к примеру 8.6: в объединение множеств входят все элементы обоих множеств*

☑ **Пример.** Найти объединение множеств $A = \{x \mid x \in R,\ 1 \le x \le 5\}$ и $B = \{x \mid x \in R,\ 3 < x < 6\}$.

Решение. Все точки обоих промежутков принадлежат полуинтервалу [1, 6). Следовательно, $A \bigcup B = \{x \mid x \in R,\ 1 \le x < 6\}$ (рис. 8.10). ☒

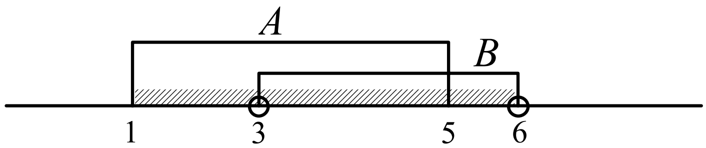


Рис. 8.10. *Объединение промежутков – полуинтервал* $[1;6)$

Свойства операции объединения:

1. Коммутативность: $A \cup B = B \cup A$.
2. Ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. $A \cup \varnothing = A$.
4. Если $A \subset B$, то $A \cup B = B$.

Отметим, что первые три свойства операции пересечения и первые три свойства операции объединения вполне аналогичны свойствам операций над числами. При этом объединение аналогично сложению, пересечение – умножению, а пустое множество – нулю (табл. 8.2).

Таблица 8.2

Сравнение свойств операций над множествами и над числами

Операции над множествами	Операции над числами
$A \cap B = B \cap A$	$a \cdot b = b \cdot a$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
$A \cap \varnothing = \varnothing$	$a \cdot 0 = 0$
$A \cup B = B \cup A$	$a + b = b + a$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(a + b) + c = a + (b + c)$
$A \cup \varnothing = A$	$a + 0 = a$

Вследствие такой аналогии операции над множествами иногда называют *алгеброй множеств*. Вообще, термин *алгебра* имеет в математике более широкий смысл, чем можно вынести из школьной программы. Алгебра не только математическая наука, в которой изучают общие законы действий с числами, решение уравнений и т.п. *Алгеброй* (*алгебраической структурой*) называют множество объектов любой природы, на котором определены некоторые операции. Поэтому говорят об *алгебре множеств*, *векторной алгебре*, *алгебре высказываний*, *матричной алгебре* и т.п.

Определение 8.6. ***Разность*** *двух множеств A \ B – это множество всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.*

Разность обозначают знаком \: $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \}$ или

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B \}.$$

На рис. 8.11 заштрихованная область представляет собой разность множеств $A \setminus B$.

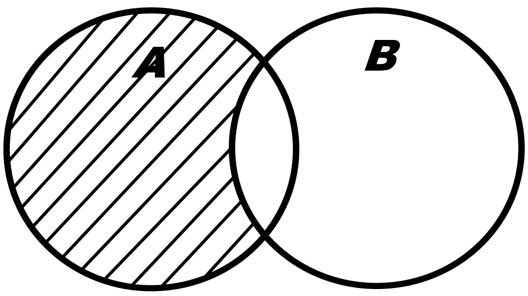


Рис. 8.11. *Разность множеств A и B (заштрихованная область кругов Эйлера)*

☑ **П р и м е р .** Найти разность множеств $A=\{1,2,3,4\}$ и $B=\{2,4,6\}$.

Решение. Разности множеств принадлежат все элементы множества *A*, не принадлежащие множеству *B*. Поэтому $A\setminus B=\{1,3\}$ (рис. 8.12).☒

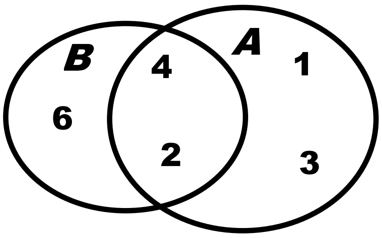


Рис. 8.12. *Диаграмма Эйлера: в разность множеств входят все элементы «уменьшаемого», не принадлежащие «вычитаемому»*

☑ **П р и м е р .** Найти разность множеств $A=\{a,b,c\}$ и $B=\{m,n,k\}$.

Решение. $A\setminus B=\{a,b,c\}$ (рис. 8.13). ☒

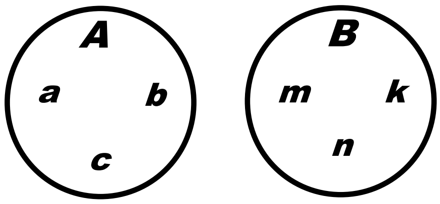


Рис. 8.13. *Диаграмма Эйлера: в разность множеств входят все элементы множества A, так как среди них нет элементов, принадлежащих множеству B*

☑ **П р и м е р .** Найти разность множеств $A=\{x \mid x\in R,\ 1\le x\le 5\}$ и $B=\{x \mid x\in R,\ 3<x<6\}$.

Решение. Среди множества точек отрезка *A* существуют точки, принадлежащие интервалу *B* – точки полуинтервала (3, 5] (рис. 8.14, штриховка ниже числовой оси). Следовательно, $A\setminus B=\{x \mid x\in R,\ 1\le x\le 3\}$ (рис. 8.14, штриховка выше числовой оси). ☒

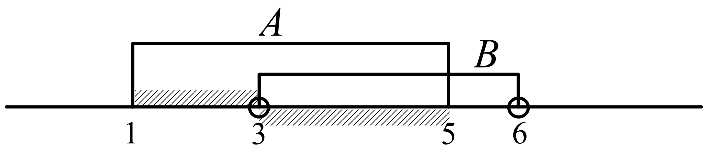


Рис. 8.14. *Разность промежутков – отрезок* $[1;3]$

В процессе рассуждений часто можно выделить некоторое множество, к которому можно отнести в с е объекты рассматриваемого класса. Такое множество называют *универсальным* и обозначают U.

Например, множество вещественных чисел R можно рассматривать как универсальное множество для числовых промежутков.

Если известно универсальное множество U, можно определить понятие *дополнение множества A* (до множества U).

Определение 8.7. ***Дополнение множества*** *A (до множества U) – это множество всех элементов множества U, которые не принадлежат множеству A.*

Дополнение множества A обозначают $\overline{A}$.

$$\overline{A}=\{\, x \mid x\in U \text{ и } x\notin A \,\}=\{\, x \mid x\in U \wedge x\notin A \,\}.$$

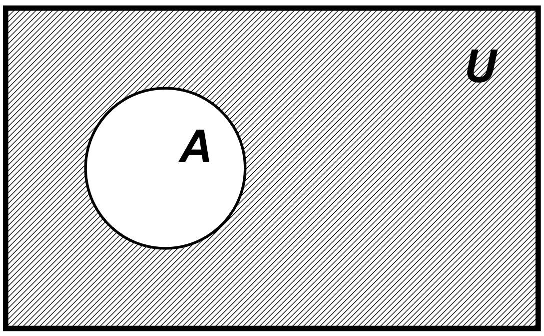


Рис. 8.15. $\overline{A}$ *– дополнение множества A (до множества U) (множество* $\overline{A}$ *на диаграмме заштриховано)*

8.5. Числовые множества. Структура числовой системы

В рамках курса математики предмет особого интереса – **числовые множества**, то есть *множества, элементами которых являются числа*.

Определение 8.8. ***Числовое множество*** *– это множество, элементами которого являются числа*.

☑ **Примеры** числовых множеств:

- множество натуральных чисел N;
- множество целых чисел Z;
- множество рациональных чисел Q;
- множество иррациональных чисел I;
- множество вещественных (действительных) чисел R;
- множество компле́ксных чисел C. ☒

В приведённом примере названы основные множества числовой системы. Между этими множествами существует отношение строгого включения:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C \text{ и } I \subset R \subset C\,.$$

Диаграмма Эйлера структуры числовой системы представлена на рис. 8.16.

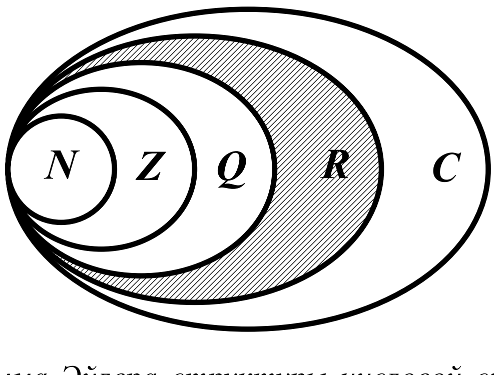


Рис. 8.16. *Диаграмма Эйлера структуры числовой системы (заштриховано множество иррациональных чисел I, которое дополняет множество рациональных чисел Q до множества вещественных чисел R)*

8.6. Геометрические модели числовых множеств

Геометрической моделью множества вещественных (действительных) чисел R является хорошо известная *числовая прямая* (рис. 8.17), на которой выбрано направление, начало отсчёта (0) и масштаб (единица измерения) – длина отрезка [0, 1].

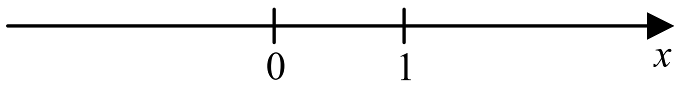


Рис. 8.17. *Числовая прямая с выбранными на ней направлением, началом отсчёта и масштабом*

Между множеством вещественных чисел и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие: каждому вещественному числу соответствует одна и только одна точка на числовой прямой, и наоборот, каждой точке на числовой прямой соответствует одно и только одно вещественное число.

Геометрическая модель множества вещественных чисел настолько наглядна и так широко используется в математике, что это нашло отражение в языке математики. Например, вместо слов *число x* часто говорят *точка x*.

В дальнейшем нам понадобятся понятия *отрезок* (*сегмент*), *интервал*, *полуинтервал*, *промежуток*.

Определение 8.9. ***Отрезок (сегмент)*** *– это числовое множество X, элементы которого – вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам* $a \le x \le b$.

Обозначают: [*a, b*].

$$([a,b]) \Leftrightarrow (X = \{x | x \in R,\ a \le x \le b\}).$$

Определение 8.10. ***Интервал*** *– это числовое множество X, элементы которого – вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам* $a < x < b$.

Обозначают: (*a, b*).

$$((a,b)) \Leftrightarrow (X = \{x | x \in R,\ a < x < b\}).$$

Определение 8.11. ***Полуинтервал*** *– это числовое множество X, элементы которого – вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам* $a \le x < b$ *или* $a < x \le b$.

Обозначают: $[a, b)$ или $(a, b]$.

$$\left(\left[a,b\right)\right) \Leftrightarrow \left(X = \left\{x | x \in R,\ a \le x < b\right\}\right) \text{ или}$$

$$\left(\left(a,b\right]\right) \Leftrightarrow \left(X = \left\{x | x \in R,\ a < x \le b\right\}\right).$$

Определение 8.12. ***Промежуток*** *– это отрезок, интервал или полуинтервал.*

В математике рассматривают также бесконечные промежутки:

– интервал $\left(-\infty; b\right)$ – множество $X = \left\{x \mid x \in R,\ x < b\right\}$;

– полуинтервал $\left(-\infty; b\right]$ – множество $X = \left\{x \mid x \in R,\ x \le b\right\}$;

– интервал $\left(-\infty; +\infty\right)$ – множество $X = \left\{x \mid x \in R\right\}$;

– интервал $\left(a; +\infty\right)$ – множество $X = \left\{x \mid x \in R,\ a < x\right\}$;

– полуинтервал $\left[a; +\infty\right)$ – множество $X = \left\{x \mid x \in R,\ a \le x\right\}$.

8.7. Абсолютная величина вещественного числа

Определение 8.13. ***Абсолютная величина (модуль) вещественного числа*** x *– это такое вещественное число* $|x|$, *что*

$$|x| = \begin{cases} x & (x \ge 0), \\ -x & (x < 0). \end{cases}$$

Свойства абсолютной величины (модуля) вещественного числа:

$$|x| \ge 0; \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$$

$$|x + y| \le |x| + |y|; \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

$$|x - y| \ge |x| - |y|;$$

8.8. Понятие ε-окрестности точки

Геометрический смысл абсолютной величины вещественного числа $|x|$ – расстояние на числовой оси от точки x до начала отсчёта (точки 0).

Геометрический смысл выражения $|x-a|$ – расстояние на числовой оси от точки x до точки a.

Рассмотрим неравенство $|x-a|<\varepsilon$.

Раскроем знак модуля:

если $(x-a)\geq 0$, то $x-a<\varepsilon$;

если $(x-a)<0$, то $-(x-a)<\varepsilon$ или $x-a>-\varepsilon$.

Следовательно,

$$-\varepsilon<x-a<\varepsilon$$

или

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon.$$

Иными словами, точка x находится от точки a на расстоянии, не превышающем ε.

Определение 8.14. *ε-окрестность **точки** a – это интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ или множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенству* $|x-a|<\varepsilon$.

В приложениях часто необходима ε-окрестность точки a без самой точки a (с исключённой («выколотой») точкой a). Такую ε-окрестность определяют следующим образом.

Определение 8.15. *ε-окрестность **точки** a – это интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ или множество вещественных чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству* $0<|x-a|<\varepsilon$.

Глава 9. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

9.1. Предел функции в точке (по Коши)

Определение 9.1. ***Предел функции в точке*** (по Коши) – *это такое число A, что для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого значения переменной x из δ-окрестности точки x_0* ($0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$) *соответствующее значение функции $f(x)$ принадлежит ε-окрестности точки A ($|f(x) - A| < \varepsilon$).*

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

9.2. Предел функции в бесконечности (по Коши)

Определение 9.2. ***Предел функции в бесконечности*** (по Коши) – *это такое число A, что для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого значения переменной x, превосходящего по модулю $M(\varepsilon)$* ($|x| > M(\varepsilon)$), *соответствующее значение функции $f(x)$ принадлежит ε-окрестности точки A ($|f(x) - A| < \varepsilon$).*

$$\left(\lim_{x \to \infty} f(x) = A\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists M = M(\varepsilon) > 0 : \ \forall x : |x| > M(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

9.3. Предел числовой последовательности

Определение 9.3. ***Числовая последовательность*** *– это ряд последовательных значений* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *функции* $a_n = f(n)$, *определённой на множестве натуральных чисел* N, *которая каждому натуральному числу* $n \in N$ *ставит в соответствие одно и только одно число* $a_n \in A$ *из некоторого числового множества* A.

Коротко говорят: числовая последовательность – это функция натурального аргумента:

$$a_n = f(n) \qquad (n \in N).$$

Обозначают: $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$ или $\{x_n\}$ и т.п.

Определение 9.4. ***Предел числовой последовательности*** $\{a_n\}$ *– это такое число* A, *что для любого сколь угодно малого значения* $\varepsilon > 0$ *существует номер* $N(\varepsilon)$ *такой, что для всех номеров* $n > N(\varepsilon)$ *соответствующие члены последовательности* $\{a_n\}$ *принадлежат* ε*-окрестности точки* A ($|a_n - A| < \varepsilon$).

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = A\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \colon \ \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |\, a_n - A \,| < \varepsilon\right).$$

9.4. Предел функции (по Гейне)

Определение 9.5. ***Предел функции в точке*** (по Гейне) *– это такое число* A, *что для любой числовой последовательности* $\{x_n\}$, *имеющей предел* x_0, *соответствующая числовая последовательность значений функции* $\{f(x_n)\}$ *имеет предел* A.

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=A\right)\Leftrightarrow\left(\forall\{x_n\}:\ \lim_{n\to\infty}x_n=x_0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}f(x_n)=A\right).$$

Определение 9.6. ***Предел функции в бесконечности*** (по Гейне) – *это такое число* A*, что для любой числовой последовательности* $\{x_n\}$, *имеющей предел* ∞, *соответствующая числовая последовательность значений функции* $\{f(x_n)\}$ *имеет предел* A.

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=A\right)\Leftrightarrow\left(\forall\{x_n\}:\ \lim_{n\to\infty}x_n=\infty\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}f(x_n)=A\right).$$

9.5. Бесконечно малые функции

Определение 9.7. ***Бесконечно малая функция*** *при* $x\to x_0$ (*при* $x\to\infty$) – *это функция* $\alpha(x)$, *предел которой при* $x\to x_0$ (*при* $x\to\infty$) *равен* 0*:* $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ ($\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$).

Определение 9.8. ***Бесконечно малая функция*** *при* $x\to x_0$ *– это функция* $\alpha(x)$, *для которой по любому, даже сколь угодно малому числу* $\varepsilon>0$ *найдётся такое число* $\delta(\varepsilon)>0$, *что для всех x, удовлетворяющих условию* $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$, *выполнено неравенство* $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Определение 9.9. ***Бесконечно малая функция*** *при* $x\to\infty$ *– это функция* $\alpha(x)$, *для которой по любому, даже сколь угодно малому числу* $\varepsilon>0$ *найдётся такое число* $S=S(\varepsilon)>0$, *что для всех x, удовлетворяющих условию* $|x|>S(\varepsilon)$, *выполнено неравенство* $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Бесконечно малые функции иногда называют *бесконечно малыми величинами*.

9.6. Теорема о связи бесконечно малой функции и предела функции

Теорема 9.1. *Функция* $f(x)$ *имеет при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ *предел A тогда и только тогда, когда функцию* $f(x)$ *можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой* $\alpha(x)$ *при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$: $f(x) = A + \alpha(x)$.

Эта теорема эквивалентна двум теоремам, выражающим необходимое и достаточное условия равенства предела функции числу *A*.

Теорема 9.1а (необходимость). *Если функция* $f(x)$ *имеет при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ *предел A, то функцию* $f(x)$ *можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой* $\alpha(x)$ *при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$: $f(x) = A + \alpha(x)$.

Теорема 9.1б (достаточность). *Если функцию* $f(x)$ *можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой* $\alpha(x)$ *при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$: $f(x) = A + \alpha(x)$, *то функция* $f(x)$ *имеет при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ *предел A:* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$.

9.7. Свойства бесконечно малых функций

Теорема 9.2а. *Если* $\alpha_1(x)$, ... , $\alpha_n(x)$ *– бесконечно малые функции при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, *то* $\alpha(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = \alpha_1(x) + \ldots \alpha_n(x)$ *есть также бесконечно малая функция при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$.

Теорема 9.2б. *Если* $\alpha(x)$ *– бесконечно малая функция при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ *и* $f(x)$ *– ограниченная при* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ *функция, то их произ-*

ведение $\beta(x)=\alpha(x)\cdot f(x)$ *– бесконечно малая функция при* $x\to x_0$ ($x\to\infty$).

Теорема 9.2в. *Если* $\alpha(x)$ *– бесконечно малая функция при* $x\to x_0$ ($x\to\infty$) *и* $f(x)$ *– такая функция, что* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)\neq 0$, *то их частное* $\beta(x)=\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}$ *– бесконечно малая функция при* $x\to x_0$ ($x\to\infty$).

9.8. Сравнение бесконечно малых функций

Определение 9.10. ***Бесконечно малые функции одного порядка малости*** *при* $x\to x_0$ ($x\to\infty$) *– это бесконечно малые функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$, *предел отношения которых* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$, *где* A *– некоторое число* $(A\neq 0)$.

Определение 9.11. ***Эквивалентные бесконечно малые функции*** *при* $x\to x_0$ ($x\to\infty$) *– это бесконечно малые функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$, *предел отношения которых равен* 1, *т.е.* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Обозначают: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Определение 9.12. ***Бесконечно малая функция более высокого порядка малости*** *относительно другой бесконечно малой функции при* $x\to x_0$ ($x\to\infty$) *– это бесконечно малая функция* $\alpha(x)$, *предел отношения которой к бесконечно малой функции* $\beta(x)$ *равен* 0, *т.е.* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

Обозначают: $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Определение 9.13. ***Бесконечно малая функция менее высокого порядка малости*** *относительно другой бесконечно малой функции при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$) *– это бесконечно малая функция* $\alpha(x)$, *предел отношения которой к бесконечно малой функции* $\beta(x)$ *равен бесконечности, т.е.* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$.

Обозначают: $o(\alpha(x)) = \beta(x)$.

9.9. Бесконечно большие функции

Определение 9.14. ***Бесконечно большая функция*** *при* $x \to x_0$ *– это функция* $\beta(x)$, *для которой по любому, даже сколь угодно большому числу* $M > 0$ *найдётся такое число* $\delta = \delta(M) > 0$, *что для всех x, удовлетворяющих условию* $0 < |x - x_0| < \delta(M)$, *выполнено неравенство* $|\beta(x)| > M$.

Обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$.

Определение 9.15. ***Бесконечно большая функция*** *при* $x \to \infty$ *– это функция* $\beta(x)$, *для которой по любому, даже сколь угодно большому числу* $M > 0$ *найдётся такое число* $S = S(M) > 0$, *что для всех x, удовлетворяющих условию* $|x| > S(M)$, *выполняется неравенство* $|\beta(x)| > M$.

Обозначают: $\lim\limits_{x \to \infty} \beta(x) = \infty$.

Бесконечно большие функции иногда называют *бесконечно большими величинами*.

9.10. Свойства бесконечно больших функций

Теорема 9.3а. *Если* $\beta(x)$ *– бесконечно большая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$) *и* $f(x)$ *– такая функция, что* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) \neq 0$, *то их произведение* $\gamma(x) = \beta(x) \cdot f(x)$ *– бесконечно большая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Теорема 9.3б. *Если* $\beta(x)$ *– бесконечно большая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$) *и* $f(x)$ *– ограниченная при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$) *функция, то их сумма* $\gamma(x) = \beta(x) + f(x)$ *– бесконечно большая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Теорема 9.3в. *Если* $\beta(x)$ *– бесконечно большая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$) *и* $f(x)$ *– такая функция, что* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$, *то их частное* $\gamma(x) = \dfrac{\beta(x)}{f(x)}$ *– бесконечно большая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Бесконечно большая функция обязательно является неограниченной функцией, но неограниченная функция не обязательно является бесконечно большой функцией.

9.11. Теорема о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций

Теорема 9.4а. *Если функция* $\alpha(x)$ *– бесконечно малая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$), *то функция* $\beta(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ *есть бесконечно большая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Теорема 9.4б. *Если* $\beta(x)$ *– бесконечно большая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$), *то функция* $\alpha(x) = \dfrac{1}{\beta(x)}$ *есть бесконечно малая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

9.12. Основные теоремы о пределах

Теорема 9.5. *Если функция* $f(x)$ *при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$) *имеет предел, то этот предел единственный*.

Теорема 9.6 (о пределе суммы). *Если функции* $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$ *имеют пределы при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$) A_1, ..., A_n *соответственно, то*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \left[f_1(x) + \ldots + f_n(x) \right] =$$

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f_1(x) + \ldots + \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f_n(x) = A_1 + \ldots + A_n$$

В частности, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \left[f_1(x) + f_2(x) \right] = A_1 + A_2$.

Кратко формулируют:

Предел алгебраической суммы конечного количества функций равен алгебраической сумме пределов этих функций.

Теорема 9.7 (о пределе произведения). *Если функции* $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$ *имеют пределы при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$) A_1, ..., A_n *соответственно, то*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \left[f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) \right] = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f_1(x) \cdot \ldots \cdot \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f_n(x) = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n.$$

В частности, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=A_1\cdot A_2$.

Кратко формулируют:

Предел произведения конечного количества функций равен произведению пределов этих функций.

Теорема 9.8 (о пределе частного). *Если функции* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *имеют пределы при* $x\to x_0$ ($x\to\infty$) A_1 *и* A_2 *соответственно и* $A_2\neq 0$, *то*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f_1(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f_2(x)}=\frac{A_1}{A_2}.$$

Кратко формулируют:

Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций (предел делителя не равен 0).

Теорема 9.9 (о пределе сложной функции). *Если функции* $f(u)$ *и* $\varphi(x)$ *имеют пределы* $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ *соответственно, то предел сложной функции* $\lim\limits_{x\to x_0}f\left[\varphi(x)\right]=A$.

Теорема 9.10. *Если в некоторой окрестности точки* x_0 *(или при всех достаточно больших* x*)* $f(x)<\varphi(x)$, *то* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\le\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\varphi(x)$.

9.13. Признаки существования предела

Теорема 9.11. *Если числовая последовательность монотонна и ограниченна, то она имеет предел.*

Теорема 9.12. *Если в некоторой окрестности точки* x_0 *(или при всех достаточно больших x) выполнено неравенство* $\varphi_1(x) \le f(x) \le \varphi_2(x)$ *и* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \varphi_1(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \varphi_2(x) = A$*, то и* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = A$.

9.14. Замечательные пределы

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

9.15. Два определения непрерывности функции

Определение 9.16 (первое определение непрерывности). ***Непрерывная функция*** *в точке* x_0 *– это функция* $f(x)$*, которая удовлетворяет следующим условиям: 1)* $f(x)$ *определена в точке* x_0 *(существует* $f(x_0)$*); 2)* $f(x)$ *имеет конечный предел при* $x \to x_0$ *(существует* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$*); 3)* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Коротко: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 9.17 (второе определение непрерывности). ***Непрерывная функция*** *в точке* x_0 *– это функция* $y = f(x)$*, которая удовлетворяет следующим условиям: 1) определена в точке* x_0 *(существует* $y_0 = f(x_0)$*); 2) бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции* $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x) = 0$.

Коротко: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

9.16. Эквивалентность определений непрерывности

Два определения непрерывности эквивалентны. Этот факт необходимо доказать. Поскольку сущность первого определения – равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, а второго – $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$, сформулируем теорему об эквивалентности определений.

Теорема 9.13. *Для того, чтобы* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Эта теорема распадается на две: необходимость и достаточность.

Теорема 9.13а (необходимость).

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема 9.13б (достаточность).

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *то* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$.

Эквивалентность определений непрерывности означает: если принять одно из определений, второе можно доказать как теорему о свойстве функции, непрерывной в точке.

9.17. Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 9.14. *Если функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны в точке* x_0, *то их сумма* $f(x) + \varphi(x)$, *произведение* $f(x) \cdot \varphi(x)$ *и частное* $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *(при условии* $\varphi(x_0) \neq 0$*) также являются функциями, непрерывными в точке* x_0.

Теорема 9.15. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *и* $f(x_0) > 0$, *то существует некоторая окрестность* x_0, *в которой* $f(x) > 0$.

Теорема 9.16. *Если функция* $y = f(u)$ *непрерывна в точке* u_0 ($u_0 = \varphi(x_0)$), *а функция* $u = \varphi(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *то сложная функция* $y = F(x) = f[\varphi(x)]$ *непрерывна в точке* x_0.

9.18. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 9.17 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то она ограничена на этом отрезке.*

Теорема 9.18 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то она достигает на этом отрезке наименьшего и наибольшего значений.*

Теорема 9.19 (теорема Больцано – Коши) (о нуле непрерывной функции). *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и* $f(a)\cdot f(b) < 0$, *то существует точка* $\xi \in (a,b)$ *такая, что* $f(\xi) = 0$.

Теорема 9.20 (теорема Коши) (о промежуточных значениях непрерывной функции). *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, $f(a) = A$ *и* $f(b) = B$, *то для любого* $C \in (A, B)$, *существует точка* $\xi \in (a,b)$ *такая, что* $f(\xi) = C$.

Библиографический список

1. Курс высшей математики для гуманитарных специальностей: Учеб. пособие / Ю.Д. Максимов, О.И. Недзвецкий, М.Ф. Романов, Ю.А. Хватов, А.В. Ястребов. Под общ. ред. Ю.Д. Максимова. СПб.: СпецЛит, 1999.

2. *Турецкий В.Я.* Математика и информатика. 3-е изд. М.: ИНФРА-М, 2000.

3. *Леванков В.А.*, *Максимов Ю.Д.*, *Романов М.Ф.* Математика и её приложения для гуманитарных специальностей: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2001.

4. *Демидович Б.П.*, *Кудрявцев В.А.* Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов. М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2001.

Сурыгин Александр Игоревич
Шаглина Наталья Дмитриевна

Математика и информатика. Практикум по математике

Для студентов гуманитарных направлений подготовки и специальностей

Редактор *О.Е. Сафонова*
Технический редактор *А.И. Колодяжная*

Оригинал-макет подготовлен авторами

Директор Издательства Политехнического университета *А.В. Иванов*

Свод. темплан 2005 г.

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97
Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать Формат 60×84/16
Уч.-изд.л. 7,5 Усл.печ.л. 7,5 Тираж 100 Заказ

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.
Издательство Политехнического университета,
член Издательско-полиграфической ассоциации
университетов России.
Адрес университета и издательства:
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.