Федеральное агентство Российской федерации по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА РАДИОФИЗИКИ

Л.А.Бабенко

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Курсовая работа. Часть 2.

С.-Петербург
Фундаментальная библиотека СПбГПУ
Отдел электронных публикаций

2010

Курсовая работа предназначена для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 223200 «Техническая физика», 210400 «Радиотехника» и соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины ОПД.Ф.04 «Электротехника и электроника» «Теория электрических цепей».

Целью курсовой работы является развитие навыков расчета линейных электрических цепей, в том числе с возможностью получения численных результатов при работе на компьютере.
Курсовая работа (часть 2) посвящена расчету линейной электрической цепи, находящейся под воздействием источников гармонических колебаний. Выполнение расчета предполагает использование метода комплексных амплитуд, метода наложения, метода контурных токов или метода узловых потенциалов, а также, теоремы об эквивалентном источнике.
Пособие, наряду с заданиями, содержит примеры решения таких задач с использованием указанных методов. В пособии приведен список источников, которые помогут преодолеть возможные затруднения.

Требования общего характера:

- титульный лист
- наличие текста задания и схема
- обязательное наименование пунктов
- анализ полученных результатов

Содержание

Расчет линейных электрических цепей, находящихся под воздействием источников гармонических колебаний.

Для определения токов, протекающих через элементы электрической цепи, при заданных параметрах источников энергии, включенных в цепь, и заданных значениях пассивных элементов цепи необходимо провести расчет, основой которого являются уравнения, составленные для исследуемой цепи с использованием законов Кирхгофа. Если в цепи действуют источники гармонических колебаний, для упрощения расчета можно перейти к решению задачи для комплексных токов и напряжений. При этом законы Кирхгофа в комплексной форме записываются следующим образом:

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$ - алгебраическая сумма комплексных амплитуд токов в ветвях, подключенных к узлу, равна 0. При сложении токи, направленные в узел, записываем с одним знаком, вытекающие из узла – с противоположным знаком.

2. $\sum\limits_{k=1}^{m} \dot{E}_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \dot{I}_k Z_k$ - в замкнутом контуре алгебраическая сумма комплексных амплитуд напряжений на участках контура равна алгебраической сумме комплексных амплитуд источников ЭДС, включенных в контур. Если направление напряжений на участках контура совпадает с направлением обхода контура, такие слагаемые записывают с одним знаком. С тем же знаком записывают комплексные амплитуды ЭДС источников, которые совпадают с направлением обхода контура. У остальных слагаемых знаки противоположные.

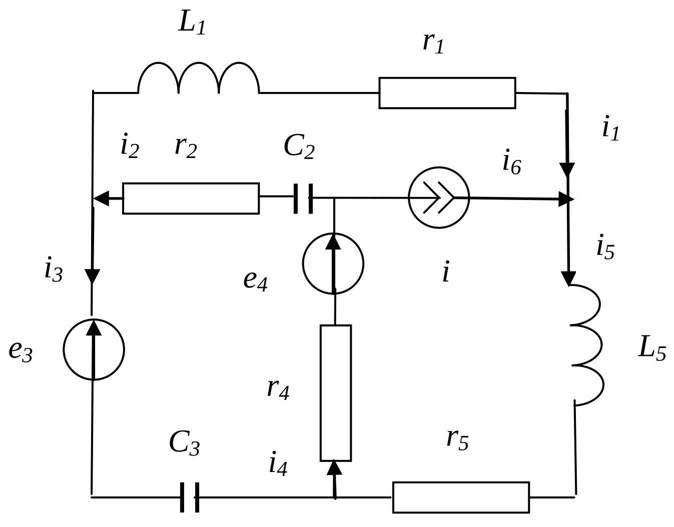
Если электрическая цепь содержит $N_в$ - ветвей, $N_у$ – узлов, то, используя первый закон Кирхгофа, можно написать ($N_у$ -1) независимых уравнений, а при использовании второго закона – ($N_в$ - $N_у$ + 1) независимых уравнений. Общее число уравнений равно числу ветвей в цепи $N_в$. Таким образом, решение $N_в$ уравнений, составленных на основании законов Кирхгофа, дает возможность определить токи во всех ветвях исследуемой электрической цепи.

При применении для расчета цепи метода контурных токов или метода узловых потенциалов число первоначально решаемых уравнений сокращается, а полученные при этом промежуточные результаты (найденные контурные токи или потенциалы узлов) дают возможность достаточно просто определить искомые величины – токи в ветвях цепи.

В том случае, если в линейную цепь включены источники, создающие колебания разных частот, задачу можно решить, применяя принцип суперпозиции (метод наложения), который при наличии в цепи нескольких источников энергии позволяет рассматривать по отдельности действие каждого из них и далее суммировать результаты.

Рассмотрим пример.

Требуется рассчитать токи, протекающие в ветвях электрической цепи, в которую включены источник тока и два источника напряжения.



$$i = I\cos(\omega t + \psi_i),$$

$$e_3 = E_3\sin(\omega t + \psi_3),$$

$$e_4 = E_4\cos(\omega_4 t + \psi_4)$$

Рис.1

Заметим, что частота колебаний ω_4 источника e_4 отлична от частоты колебаний ω, создаваемых источником тока i и источником напряжения e_3. Кроме того, мгновенные значения тока и ЭДС источников описаны разными тригонометрическими функциями.

Предварительно запишем выражение для мгновенного значения ЭДС источника e_3, используя тригонометрическую функцию cos:

$e_3(t) = E_3 \cos(\omega\, t + \psi_3 - \frac{\pi}{2})$. При такой записи в описании источников энергии использованы одинаковые тригонометрические функции.

При решении задачи для источников гармонических колебаний воспользуемся методом комплексных амплитуд.

В соответствии с принципом суперпозиции предстоит определить токи в двух электрических схемах. В первом случае при определении токов частоты ω необходимо отключить генератор напряжения e_4 (рис.2). Для определения токов частоты ω_4 в исходной схеме отключаются источник напряжения e_3 и источник тока (рис.3). Направления искомых токов в ветвях выбираем произвольно.

Окончательно токи в ветвях рассматриваемой цепи (за исключением ветви, содержащей идеальный источник тока) будут представлены в виде суммы двух токов разных частот ω и ω_4, найденных при решении двух задач для разных электрических цепей. $i_n(t) = I_n^{(1)} \cos(\omega t + \psi_n^{(1)}) + I_n^{(2)} \cos(\omega_4 t + \psi_n^{(2)})$

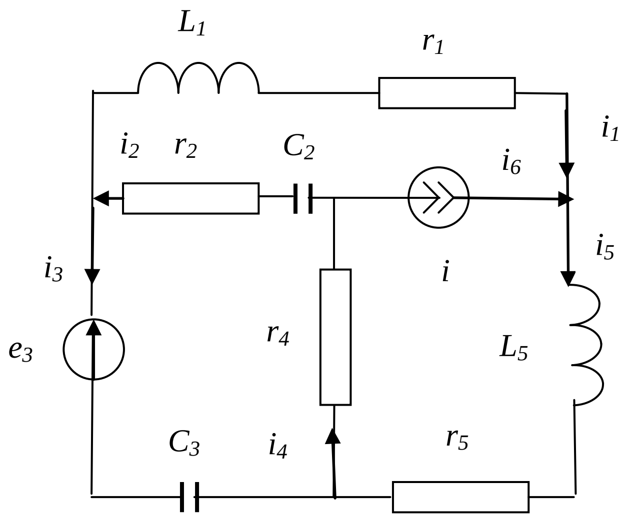


Рис. 2

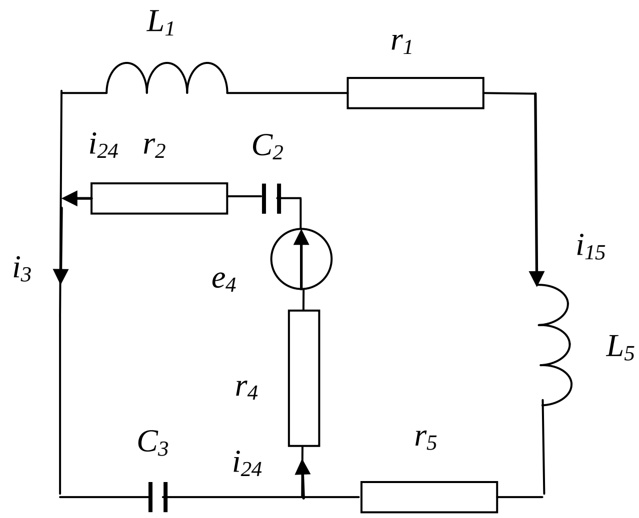
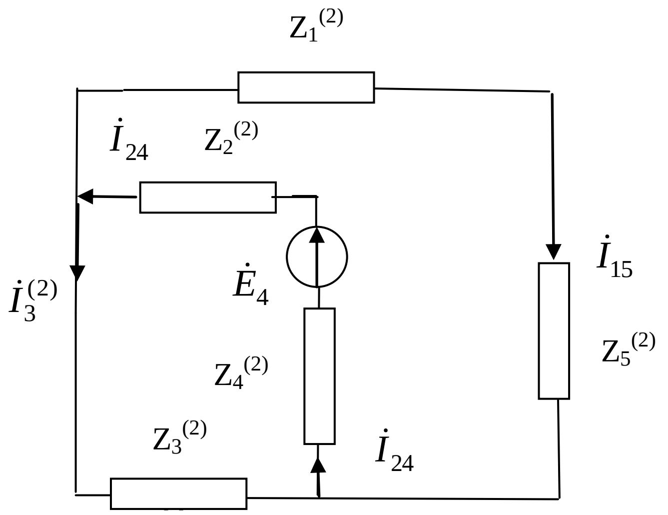


Рис. 3

Определим токи, создаваемые источником напряжения e_4. Напомним, что частота колебаний в рассматриваемой схеме равна ω_4. Перейдем к комплексным представлениям (рис.4): комплексная амплитуда ЭДС источника $\dot{E}_4 = E_4 e^{j\psi_4}$. Обозначим комплексные сопротивления элементов в соответствии с их расположением в ветвях исходной схемы:



$$Z_1^{(2)} = r_1 + j\omega_4 L_1,$$

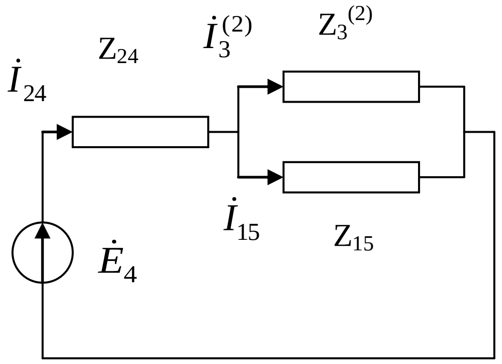
$$Z_2^{(2)} = r_2 - j\frac{1}{\omega_4 C_2},$$

$$Z_3^{(2)} = -j\frac{1}{\omega_4 C_3},$$

$$Z_4^{(2)} = r_4,$$

$$Z_5^{(2)} = r_5 + j\omega_4 L_5.$$

Можно изобразить рассматриваемую электрическую цепь иначе:



$$Z_{24} = Z_2^{(2)} + Z_4^{(2)},$$
$$Z_{15} = Z_1^{(2)} + Z_5^{(2)}.$$

Комплексная амплитуда тока $\dot{I}_{24}$ в ветви, содержащей источник колебаний

$\dot{I}_{24} = \dfrac{\dot{E}_4}{Z_{24} + Z_{II}}$. Здесь обозначено комплексное сопротивление параллельного

соединения ветвей $Z_{II} = \dfrac{Z_3^{(2)} \cdot Z_{15}}{Z_3^{(2)} + Z_{15}}$.

Комплексные амплитуды токов в ветвях параллельного соединения:

$I_3^{(2)} = \dfrac{U_{Z_{II}}}{Z_3^{(2)}} = \dfrac{\dot{I}_{24} \cdot Z_{II}}{Z_3^{(2)}} = \dot{I}_{24}\dfrac{Z_{15}}{Z_{15} + Z_3^{(2)}}$, $\quad \dot{I}_{15} = \dot{I}_{24}\dfrac{Z_3^{(2)}}{Z_{15} + Z_3^{(2)}}$. Итак, определены

комплексные амплитуды токов, создаваемых источником напряжения $\dot{E}_4$ в ветвях исходной электрической цепи. Можно записать мгновенные значения токов частоты ω_4 в ветвях, создаваемых источником e_4:

$$i_1^{(2)}(t) = Re\left(\dot{I}_{15}e^{j\omega_4 t}\right), i_2^{(2)}(t) = Re\left(\dot{I}_{24}e^{j\omega_4 t}\right), i_3^{(2)}(t) = Re\left(\ \dot{I}_3^{(2)}e^{j\omega_4 t}\right), \ldots.$$

$$i_4^{(2)}(t) = Re\left(\dot{I}_{24}e^{j\omega_4 t}\right) = i_2^{(2)}(t), \ldots i_5^{(2)}(t) = Re\left(\dot{I}_{15}e^{j\omega_4 t}\right) = i_1^{(2)}(t).$$

Ток $i_6^{(2)}(t) = 0$ - в ветви, содержащей идеальный источник тока, ток определяется значением тока источника.

Для определения токов частоты ω, создаваемых источниками e_3 и i, обратимся к схеме, изображенной на рис. 2. Переходя к комплексным представлениям, запишем комплексные амплитуды тока источника тока $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$ и ЭДС источника напряжения $\dot{E}_3 = E_3 e^{j(\psi_3 - \pi/2)}$. Комплексные сопротивления ветвей:

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1, \qquad Z_2 = r_2 - j\frac{1}{\omega C_2}, \qquad Z_3 = -j\frac{1}{\omega C_3}, \quad Z_4 = r_4, \quad Z_5 = r_5 + j\omega L_5.$$

Заметим, что комплексные сопротивления ветвей Z_1, Z_2, Z_3, Z_5 отличаются от комплексных сопротивлений, которые были определены при решении задачи для источника e_4, так как сопротивления емкостных и индуктивных элементов зависят от частоты.

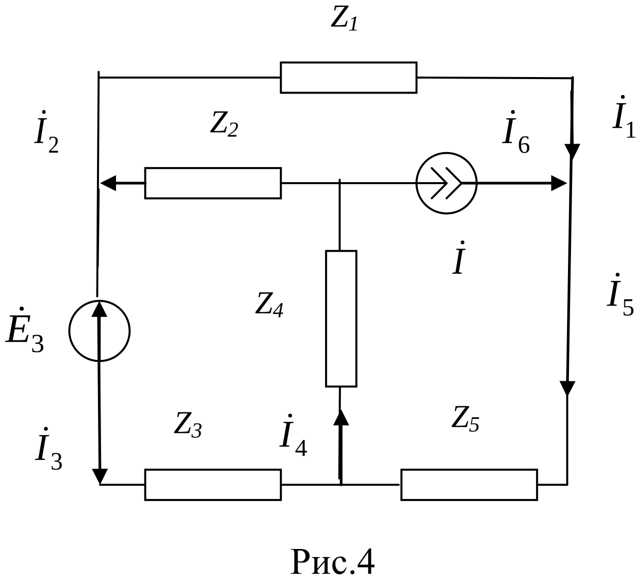


Рис.4

Для расчета комплексных токов в ветвях этой схемы можно воспользоваться методом контурных токов или методом узловых потенциалов. Приведем примеры расчета токов в ветвях электрической схемы, изображенной на рис. 4, с использованием обоих методов.

Метод контурных токов

Метод контурных токов заключается в том, что первоначально определяются вспомогательные – контурные токи. Искомые токи в каждой ветви являются алгебраической суммой контурных токов. Решение задачи методом контурных токов основано на решении уравнений, составленных для выбранных контуров с использованием второго закона Кирхгофа. Так как число независимых уравнений при этом равно ($N_в$ - $N_у$ + 1), предварительно в исследуемой цепи необходимо выбрать именно такое число контуров. Положительные направления искомых токов в ветвях задаются произвольно, так же как произвольно выбирается направление контурных токов (направление обхода контуров).

Говоря о том, что задача решается методом контурных токов, подразумевают, что будет использована система уравнений, записанных в формализованном виде: для электрической цепи, где необходимо выбрать n контуров

$$Z_{11}\dot{I}_{k1} + Z_{12}\dot{I}_{k2} + Z_{13}\dot{I}_{k3} + ... + Z_{1n}\dot{I}_{kn} = \sum_{(1)} \dot{E}_k$$

$$Z_{21}\dot{I}_{k1} + Z_{22}\dot{I}_{k2} + Z_{23}\dot{I}_{k3} + ... + Z_{2n}\dot{I}_{kn} = \sum_{(2)} \dot{E}_k$$

……………………………………………….

$$Z_{n1}\dot{I}_{k1} + Z_{n2}\dot{I}_{k2} + Z_{n3}\dot{I}_{k3} + ... + Z_{nn}\dot{I}_{kn} = \sum_{(n)} \dot{E}_k$$

Здесь $\dot{I}_{ks}$ - комплексная амплитуда контурного тока контура s.

Z_{ss} – сумма комплексных сопротивлений всех ветвей, образующих контур s. Z_{sm} – алгебраическая сумма комплексных сопротивлений ветвей, общих для контура s и контура m. Знак перед такими слагаемыми положительный, если направление контурных токов в контурах s и m в рассматриваемой ветви совпадает. Если между контурами s и m нет общей ветви, это сопротивление равно 0.

$\sum_{(s)} \dot{E}_k$ - алгебраическая сумма комплексных амплитуд ЭДС источников напряжения, включенных в контур s. Слагаемые положительные, если направление контурного тока $\dot{I}_{ks}$ и направление источника ЭДС совпадают.

Решение этой системы уравнений можно получить, например, с помощью компьютерных математических программ. Результатом решения системы являются комплексные амплитуды контурных токов $\dot{I}_{k1}, \dot{I}_{k2}, \ldots \dot{I}_{kn}$. Истинные токи в ветвях электрической цепи являются результатом алгебраического сложения контурных токов, протекающих через рассматриваемые ветви.

Если в цепи есть *идеальные источники тока*, то следует контуры выбирать так, чтобы через ветвь, содержащую такой источник, проходил только один контур. При таком выборе контуров можно утверждать, что контурные токи контуров, содержащих источники тока, равны токам этих источников (с учетом выбранного направления обхода контура).

Электрическая цепь, изображенная на рис. 4, содержит 6 ветвей и 4 узла. Следовательно, при решении задачи с использованием метода контурных токов, необходимо выбрать 3 контура: $N_в - N_у + 1 = 3$. Именно такое число независимых уравнений можно составить для рассматриваемой схемы, используя второй закон Кирхгофа. В схеме есть идеальный источник тока. Следовательно, один из контуров должен проходить через ветвь, содержащую этот источник. Ток в этом контуре будет равен току источника тока. Два другие контура выбираем произвольно, но так, чтобы они не содержали ветвь с источником тока.

На рис. 5 обозначены три контура и указаны выбранные направления искомых контурных токов.

Падение напряжения на комплексном сопротивлении Z_1 создает контурный ток первого контура, на участке с сопротивлением Z_2 – контурный ток второго контура. Через элемент Z_3 протекают навстречу контурные токи первого и второго контуров, через элемент Z_4 – контурные токи второго и третьего контуров, направления которых совпадают. Падение напряжения на участке с сопротивлением Z_5 создают контурные токи первого и третьего контуров, причем направления этих контурных токов совпадают.

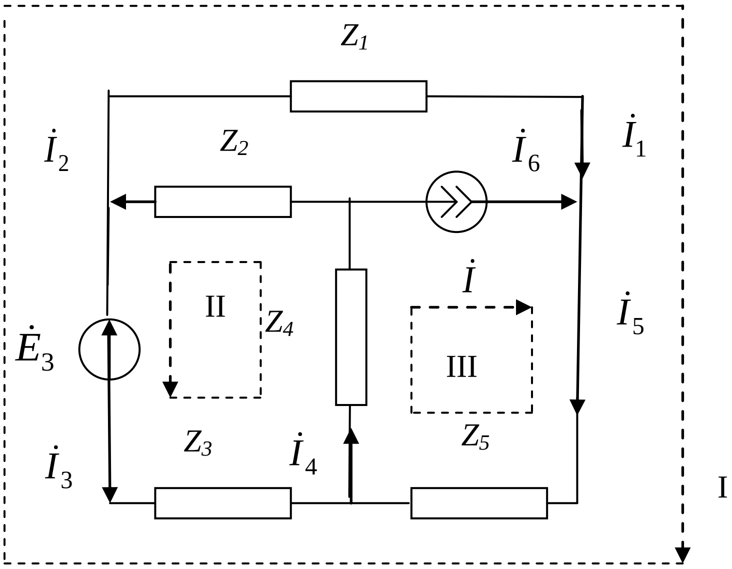


Рис. 5

Запишем для каждого контура уравнение, используя второй закон Кирхгофа.

Для первого контура: $\dot{I}_1 Z_1 + (\dot{I}_I + \dot{I}_{III})Z_5 + (\dot{I}_I + \dot{I}_{II})Z_3 = \dot{E}_3$.

Для второго контура: $\dot{I}_{II} Z_2 + (\dot{I}_{II} - \dot{I}_I)Z_3 + (\dot{I}_{II} + \dot{I}_{III})Z_4 = -\dot{E}_3$.

Для третьего контура: $\dot{I}_{III} = \dot{I}$.

Здесь обозначено: $\dot{I}_I, \dot{I}_{II}, \dot{I}_{III}$ - комплексные амплитуды контурных токов, протекающих в соответствующих контурах.

Перегруппируем слагаемые в первых двух уравнениях:

$$(Z_1 + Z_3 + Z_5)\dot{I}_I + (-Z_3)\dot{I}_{II} + Z_5\dot{I}_{III} = \dot{E}_3,$$

$$(-Z_3)\dot{I}_I + (Z_2 + Z_3 + Z_4)\dot{I}_{II} + Z_4\dot{I}_{III} = -\dot{E}_3.$$

$$\dot{I}_{III} = \dot{I}$$

В первом уравнении, написанном для контура I, сомножитель $(Z_1 + Z_3 + Z_5)$ - это сумма комплексных сопротивлений всех ветвей контура I. (Напомним, сопротивление идеального источника ЭДС равно 0). Множитель (- Z_3) перед комплексной амплитудой тока $\dot{I}_{II}$ - комплексное сопротивление ветви, общей для контуров I и II, а знак (-) говорит о том, что контурные токи I и II контуров в этой ветви направлены встречу. Множитель Z_5 перед $\dot{I}_{III}$ - это комплексное сопротивление ветви, общей для контуров I и III. В правой части уравнения стоит комплексная амплитуда ЭДС источника, входящего в контур I.

Во втором уравнении, составленном для контура II, множителем контурного тока $\dot{I}_{II}$ этого контура является $(Z_2 + Z_3 + Z_4)$ - комплексное сопротивление всех ветвей, образующих контур II, а множители у контурных токов других контуров – комплексные сопротивления ветвей, общих для контура II и контура I или контура III. Правая часть уравнения равна комплексной амплитуде ЭДС источника, включенного во II контур, знак (-) соответствует выбранному направлению контурного тока II контура.

В таком виде уравнения соответствуют формализованной форме записи системы уравнений для решения задачи методом контурных токов.

Комплексный контурный ток третьего контура известен: $\dot{I}_{III} = \dot{I}$. Следовательно, в данной задаче для нахождения контурных токов первого и второго контуров необходимо решить систему из двух уравнений.

Комплексные токи в ветвях определяем через найденные контурные токи с учетом выбранных для них направлений:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_I, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{II}, \quad \dot{I}_3 = -\dot{I}_I + \dot{I}_{II}, \quad \dot{I}_4 = \dot{I}_{II} + \dot{I}_{III}, \quad \dot{I}_5 = \dot{I}_I + \dot{I}_{III}, \quad \dot{I}_6 = \dot{I}.$$

Мгновенные значения токов в ветвях $i_n^{(1)}(t) = \mathrm{Re}(\dot{I}_n e^{j\omega t})$.

Метод узловых потенциалов.

При решении задачи с использованием этого метода первоначально находят потенциалы узлов, а затем вычисляют токи в ветвях электрической цепи. Формализованная система уравнений для потенциалов узлов получается в результате применения первого закона Кирхгофа. Число уравнений, которые следует записать в этом случае, определяется разностью ($N_у$ - 1). Один из узлов электрической цепи принимается за опорный (базовый), его потенциал полагается равным 0, потенциалы остальных узлов будут определены относительно потенциала опорного узла.

Предположим, что в электрической цепи (n+1) узел. Тогда необходимо, определив постоянные коэффициенты, решить систему n уравнений для нахождения потенциалов n узлов. Один из узлов принимают за опорный (в данном случае – узел (n+1)) и считают потенциал этого узла равным 0.

$$Y_{11}\dot{\varphi}_1 - Y_{12}\dot{\varphi}_2 - Y_{13}\dot{\varphi}_3 - \ldots - Y_{1n}\dot{\varphi}_n = \sum_{(1)} \dot{E}_k Y_k + \sum_{(1)} \dot{\Im}_k$$

$$-Y_{21}\dot{\varphi}_1 + Y_{22}\dot{\varphi}_2 - Y_{23}\dot{\varphi}_3 - \ldots - Y_{2n}\dot{\varphi}_n = \sum_{(2)} \dot{E}_k Y_k + \sum_{(2)} \dot{\Im}_k$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-Y_{n1}\dot{\varphi}_1 - Y_{n2}\dot{\varphi}_2 - Y_{n3}\dot{\varphi}_3 - \ldots + Y_{nn}\dot{\varphi}_n = \sum_{(n)} \dot{E}_k Y_k + \sum_{(n)} \dot{\Im}_k$$

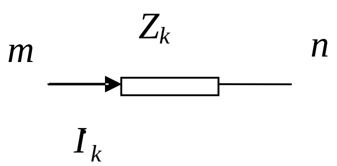
Здесь $\dot{\varphi}_s$ - комплексная амплитуда потенциала узла s,

Y_{ii} –сумма комплексных проводимостей ветвей, сходящихся в узле s,

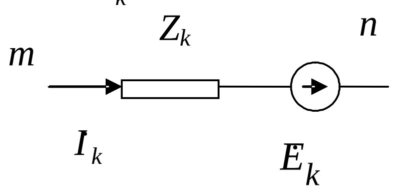
Y_{sm} – комплексная проводимость ветви между узлом s и m.

$\sum\limits_{(i)} \dot{E}_k Y_k + \sum\limits_{(i)} \dot{\Im}_k$ - алгебраическая сумма комплексных амплитуд токов источников, расположенных в ветвях, сходящихся в узле s. Положительными считаются токи источников, втекающие в рассматриваемый узел.

В результате решения системы будут определены комплексные амплитуды потенциалов узлов. Токи в ветвях, расположенных между узлами m и n, можно рассчитать следующим образом:



$$\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_n = \dot{U}_{mn} = \dot{I}_k Z_k, \quad \dot{I}_k = Y_k(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_n)$$



$$\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_n = \dot{U}_{mn} = \dot{I}_k Z_k - \dot{E}_k, \dot{I}_k = Y_k(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_n + \dot{E}_k)$$

Следует заметить, что, если в одной из ветвей электрической цепи находится *идеальный источник напряжения*, опорным следует считать узел, из которого направлен этот источник. Тогда потенциал другого узла источника будет равен его ЭДС. В этом случае число неизвестных сокращается.

Получим решение задачи, приведенной на рис. 4, методом узловых потенциалов.

Для рассматриваемого примера, в котором отсутствует ветвь с идеальным источником ЭДС, нумерация узлов, в частности, выбор опорного узла – произвольны. На рис. 6 показано, как пронумерованы узлы электрической цепи.

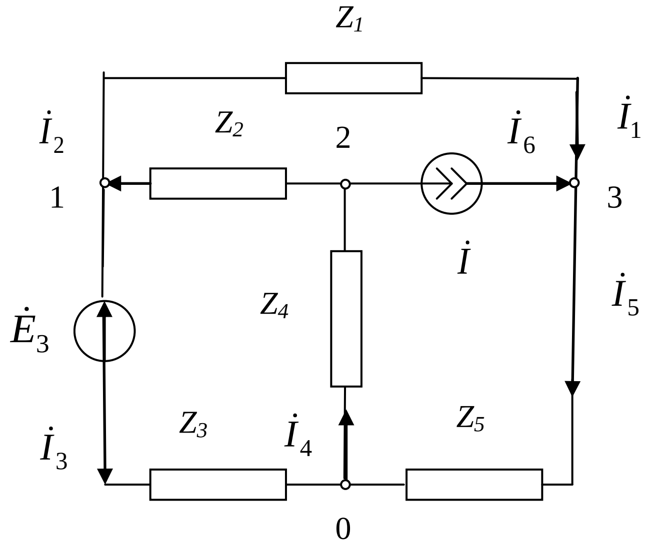


Рис. 6

Положительные направления токов в ветвях выбираем произвольно. Первый закон Кирхгофа позволяет для рассматриваемой задачи составить три независимых уравнения.

Запишем для первого узла $\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$,

для второго узла $\dot{I}_2 - \dot{I}_4 + \dot{I}_6 = 0, \quad \dot{I}_6 = \dot{I}$ - ток источника тока.

Для третьего узла $\dot{I}_1 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 = 0$.

Комплексные амплитуды напряжения на ветвях и комплексные амплитуды токов в ветвях выразим через комплексные амплитуды потенциалы узлов:

$$\dot{U}_{13} = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3 = \dot{I}_1 Z_1 \qquad \Rightarrow \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3}{Z_1}$$

$$\dot{U}_{21} = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 = \dot{I}_2 Z_2 \qquad \Rightarrow \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1}{Z_2}$$

$$\dot{U}_{10} = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0 = \dot{I}_3 Z_3 + \dot{E}_3 \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0 - \dot{E}_3}{Z_3}$$

$$\dot{U}_{02} = \dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_2 = \dot{I}_4 Z_4 \qquad \Rightarrow \quad \dot{I}_4 = \frac{\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_2}{Z_4}$$

$$\dot{U}_{30} = \dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_0 = \dot{I}_5 Z_5 \qquad \Rightarrow \quad \dot{I}_5 = \frac{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_0}{Z_5}$$

Положим $\dot{\varphi}_0 = 0$. Тогда уравнения, написанные для узлов, можно представить в виде:

$$\frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3}{Z_1} - \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1}{Z_2} + \frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{E}_3}{Z_3} = 0 \text{ (узел 1),}$$

$$\frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1}{Z_2} + \frac{\dot{\varphi}_2}{Z_4} + \dot{I} = 0 \qquad \text{(узел 2),}$$

$$\frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3}{Z_1} - \frac{\dot{\varphi}_3}{Z_5} + \dot{I} = 0 \qquad \text{(узел 3)}$$

или в виде системы уравнений относительно потенциалов узлов:

$$\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{Z_2}\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{Z_1}\dot{\varphi}_3 = \frac{\dot{E}_3}{Z_3},$$

$$-\frac{1}{Z_2}\dot{\varphi}_1 + \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_4}\right)\dot{\varphi}_2 = -\dot{I},$$

$$-\frac{1}{Z_1}\dot{\varphi}_1 + \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_5}\right)\dot{\varphi}_3 = \dot{I}$$

Эта запись полностью соответствует формализованной системе уравнений, которую можно использовать, говоря о решении задачи методом узловых потенциалов.

Первое уравнение написано для узла 1. Сомножителем при $\dot{\varphi}_1$ (потенциале этого узла) является сумма комплексных проводимостей ветвей, сходящихся в узле 1. Сомножитель при $\dot{\varphi}_2$- комплексная проводимость ветви между рассматриваемым узлом и узлом 2, сомножитель при $\dot{\varphi}_3$- комплексная проводимость ветви между узлами 1 и 3. В правой части уравнения – ток источника, находящегося в одной из ветвей, сходящихся в узле 1 (источник ЭДС заменен эквивалентным ему источником тока $\dot{\mathfrak{I}}_3 = \dfrac{\dot{E}_3}{Z_3}$).

Второе уравнение написано для узла 2. Сомножитель комплексной амплитуды потенциала этого узла – сумма комплексных проводимостей всех ветвей, сходящихся в узле 2. Сомножитель у $\dot{\varphi}_1$ - комплексная проводимость ветви, расположенной между узлами 2 и 1. Ветвь между узлами 2 и 3 содержит идеальный источник тока, внутреннее сопротивление которого бесконечно, следовательно, проводимость этой ветви равна нулю. В правой части уравнения – ток источника тока, расположенного в ветви, сходящейся в узле 2. Знак минус перед комплексной амплитудой тока $\dot{I}$ говорит о том, что ток этого источника вытекает из рассматриваемого узла.

В третьем уравнении, составленном для узла 3, сомножитель $\left(\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_5}\right)$- это комплексные проводимости ветвей, сходящихся в узле 3, а множитель $\dfrac{1}{Z_1}$ - комплексная проводимость ветви, расположенной между узлами 1 и 3.

Решение последней системы уравнений позволяет определить комплексные амплитуды потенциалов узлов, следовательно, и токи в ветвях.

Сопоставляя решения задачи двумя рассмотренными методами, можно заметить, что для определения токов в ветвях электрической цепи, изображенной на рис.4, предпочтительным является метод контурных токов, при использовании которого первоначально необходимо решить систему двух, а не трех уравнений, как этого требует метод узловых потенциалов. Конечно, говорить о предпочтении имеет смысл только в том случае, если вычисления, связанные с арифметикой комплексных чисел, будут проводиться вручную.

Для полноты обсуждения использования метода узловых потенциалов рассмотрим еще один пример. Изменим цепь, изображенную на рис. 4, так, чтобы одна из ветвей содержала *идеальный источник напряжения*. (Предположим, что комплексное сопротивление Z_3 равно нулю).

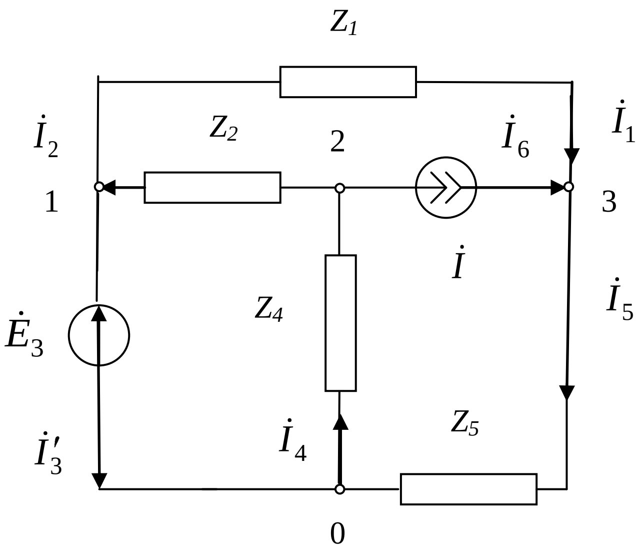


Рис. 7

Для такой электрической цепи разность потенциалов узлов 1 и 0 известна. $\dot\varphi_1 - \dot\varphi_0 = \dot E_3$. Поэтому естественно принять нулевой узел за опорный (базовый), полагая $\dot\varphi_0 = 0$. $\dot\varphi_1 = \dot E_3$. Далее, используя первый закон Кирхгофа, можно составить два уравнения для узлов 2 и 3.

Для второго узла $\dot I_2 - \dot I_4 + \dot I_6 = 0,\quad \dot I_6 = \dot I$ - ток источника тока.

Для третьего узла $\dot I_1 - \dot I_5 + \dot I_6 = 0$.

Окончательно, система уравнений примет вид:

(для 2 узла) $$-\frac{1}{Z_2}\dot\varphi_1 + \left(\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_4}\right)\dot\varphi_2 = -\dot I, \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_4}\right)\dot\varphi_2 = -\dot I + \frac{\dot E_3}{Z_2}.$$

(для 3 узла) $$-\frac{1}{Z_1}\dot\varphi_1 + \left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_5}\right)\dot\varphi_3 = \dot I, \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_5}\right)\dot\varphi_3 = \dot I + \frac{\dot E_3}{Z_1}.$$

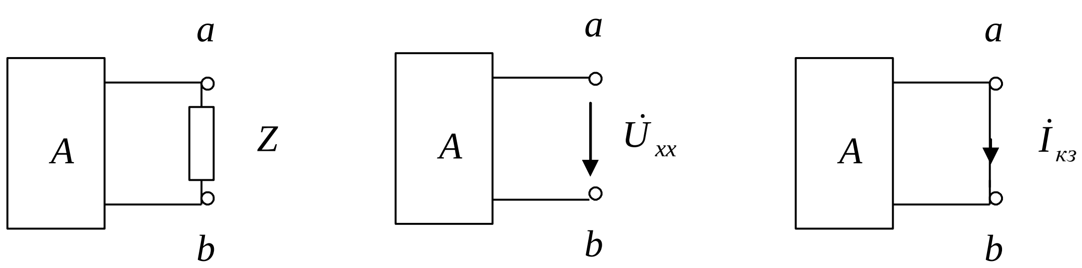
После определения комплексных амплитуд потенциалов узлов $\dot\varphi_2$ и $\dot\varphi_3$ находим комплексные амплитуды токов в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_3 - \dot{\varphi}_3}{Z_1}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{E}_3}{Z_2}, \quad \dot{I}_4 = \frac{-\dot{\varphi}_2}{Z_4}, \quad \dot{I}_5 = \frac{\dot{\varphi}_3}{Z_5}, \quad \dot{I}_6 = \dot{I}.$$

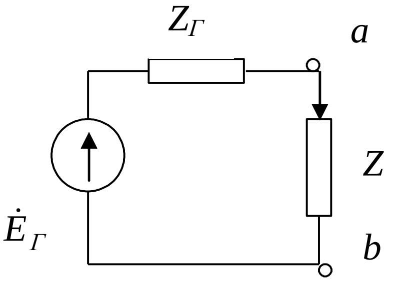
Ток $\dot{I}_3'$ в ветви, содержащей идеальный источник напряжения, можно определить, используя первый закон Кирхгофа для первого или нулевого узла, например $\dot{I}_3' = \dot{I}_2 - \dot{I}_1$.

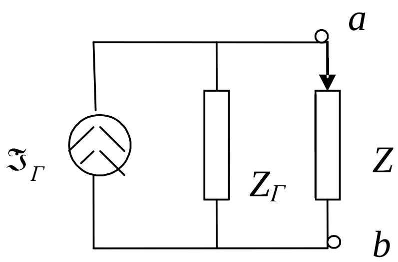
Применение теоремы об эквивалентном источнике к расчету электрических цепей.

В том случае, когда необходимо рассчитать ток в одной ветви электрической цепи, может оказаться полезной теорема об эквивалентном источнике. Суть этого метода решения заключается в следующем. Вся электрическая цепь *A* с существующими в ней соединениями пассивных элементов и источников энергии заменяется относительно узлов *a* и *b*, к которым подключена исследуемая ветвь, эквивалентным источником с его внутренним сопротивлением. Это может быть источник ЭДС (теорема Тевенена), либо источник тока (теорема Нортона). Первоначальная задача состоит в определении параметров этого эквивалентного источника. *ЭДС эквивалентного источника напряжения* равна напряжению на разомкнутых зажимах *a* и *b* рассматриваемой цепи - напряжению холостого хода. *Ток эквивалентного источника тока* равен току на короткозамкнутом участке между узлами *a* и *b* - току короткого замыкания.



Когда найдены значения $\dot{E}_Г$ или $\dot{\mathfrak{I}}_Г$, ток в ветви между узлами *a* и *b* определяется для той или иной электрической цепи:





$$\dot{I}_Z = \frac{\dot{E}_Г}{Z + Z_Г} \qquad\qquad \dot{I}_Z = \dot{\mathfrak{J}}_Г \frac{Z_Г}{Z + Z_Г}$$

Внутреннее сопротивление источника $Z_Г$ - это входное сопротивление пассивной электрической цепи *A*, определенное со стороны разомкнутых зажимов *a* и *b*. В пассивной цепи источники энергии выключены: идеальные источники ЭДС замкнуты накоротко, ветви с источниками тока разомкнуты. Расчет $\dot{E}_Г$ или $\dot{\mathfrak{J}}_Г$ можно провести, используя уже рассмотренные методы контурных токов или узловых потенциалов.

Рассмотрим пример.

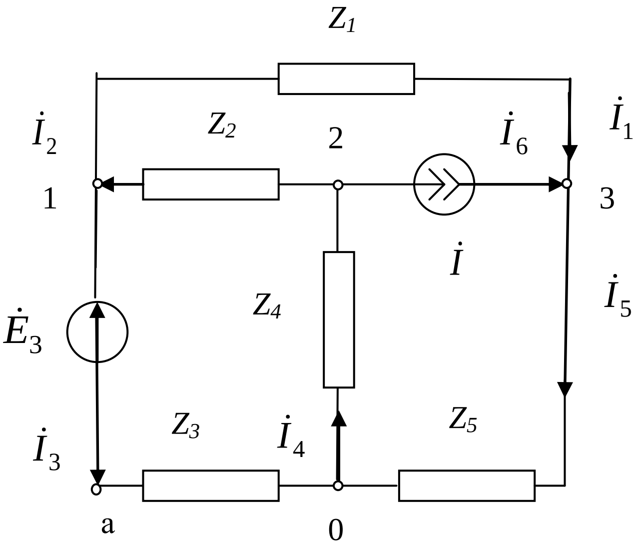


Рис. 8

Определим ток, протекающий через сопротивление Z_3, используя теорему об эквивалентном источнике.
Расчет проведем двумя способами – применяя теорему Нортона и теорему Тевенена.

При использовании *теоремы Нортона* первоначально необходимо определить ток на короткозамкнутом участке 0 – а в ветви, расположенной между узлами 1 и 0, т.е. при условии, что участок, обладающий сопротивлением Z_3, замкнут накоротко. Найденный при этом ток будет током генератора тока $\dot{\mathfrak{I}}_Г$. Если заменить сопротивление Z_3 короткозамкнутым участком, мы придем к электрической схеме, изображенной на рис. 7. Пример расчета такой цепи приведен выше при обсуждении метода узловых потенциалов. Ток эквивалентного источника $\dot{\mathfrak{I}}_Г = \dot{I}_3'$.

Для определения внутреннего сопротивления эквивалентного источника $Z_Г$ необходимо цепь сделать пассивной и найти сопротивление между разомкнутыми точками 0 и а. В отсутствии источника ЭДС узлы а и 1 совпадают – рис. 9.

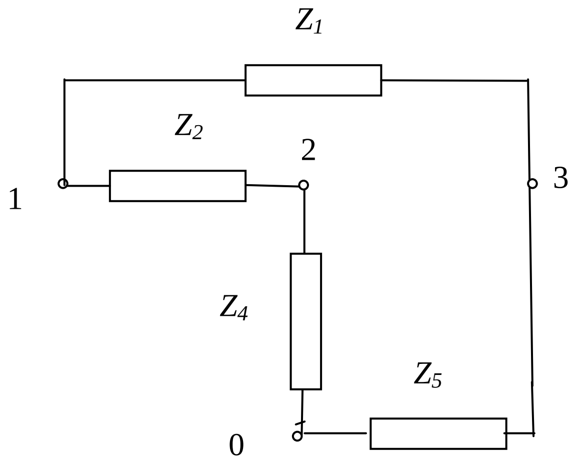


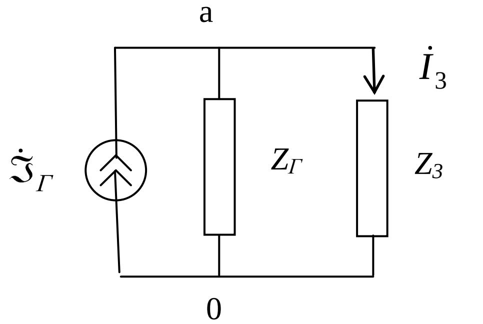
Рис. 9

При выключении источника тока ветвь, содержащая такой источник, размыкается (ветвь между узлами 2 и 3).

Сопротивление между узлами 0 и 1 для рассматриваемой цепи – это сопротивление участка с параллельным соединением двух ветвей:

$Z_Г = \dfrac{Z_{24} \cdot Z_{15}}{Z_{24} + Z_{15}}$, где обозначено $Z_{24} = Z_2 + Z_4$, $Z_{15} = Z_1 + Z_5$- комплексные сопротивления этих ветвей.

Теперь можно определить комплексную амплитуду тока, протекающего через сопротивление Z_3.



$$\dot{I}_3 = \dot{\mathfrak{I}}_Г \frac{Z_Г}{Z_Г + Z_3}.$$

При решении примера с использованием *теоремы Тевенена* необходимо найти ЭДС и внутреннее сопротивление эквивалентного источника. Найдем параметры эквивалентного источника ЭДС для ветви, расположенной между узлами 0 и 1 (рис.8). ЭДС совпадает с напряжением холостого хода – напряжением на разомкнутых зажимах исследуемой ветви, т.е. это напряжение между узлами 0 и 1 в схеме при отсутствии ветви между этими узлами (рис. 10).

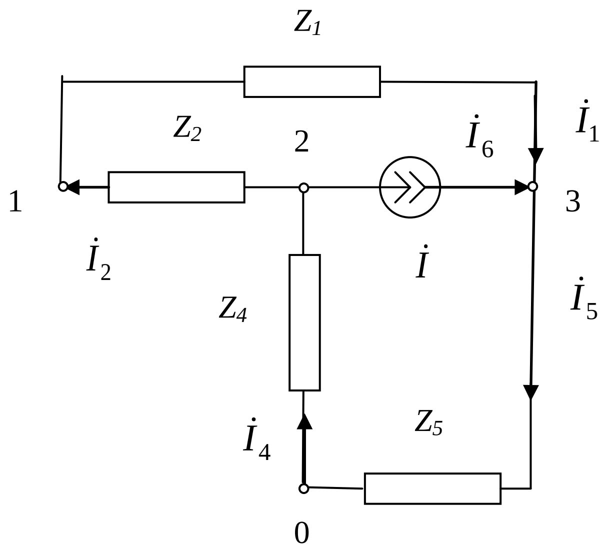


Рис. 10

Напряжение между узлами 0 и 1 легко определяется, если известны токи $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_4$.

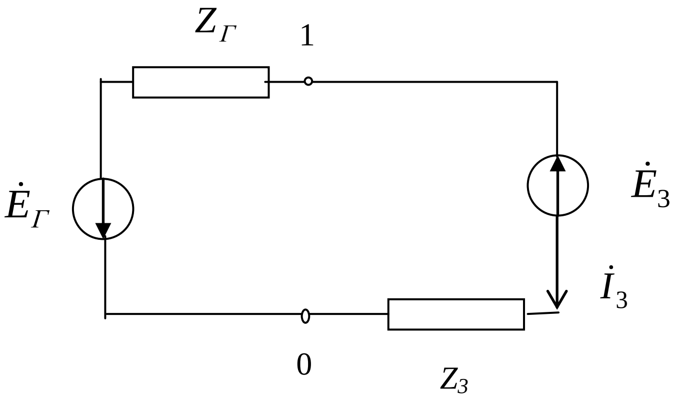
Комплексная амплитуда тока $\dot{I}_2 = \dot{I}_1$, а $\dot{I}_4 = \dot{I}_5$ - это токи в двух ветвях, включенных параллельно источнику тока $\dot{I}$.

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}\,\frac{Z_{45}}{Z_{12} + Z_{45}}, \quad \dot{I}_4 = \dot{I}\,\frac{Z_{12}}{Z_{12} + Z_{45}},$$

где $Z_{12} = Z_1 + Z_2$, $Z_{45} = Z_4 + Z_5$ - комплексные сопротивления ветвей, соединенных параллельно.

Напряжение между узлами 0 и 1 в схеме на рис. 10 $\dot{U}_{01} = \dot{I}_4 Z_4 + \dot{I}_2 Z_2$. Это напряжение и есть ЭДС эквивалентного источника. $\dot{E}_Г = \dot{U}_{01}$. Внутреннее сопротивление генератора $Z_Г$ уже найдено при обсуждении решения задачи с использованием теоремы Нортона.

Следовательно, ток, протекающий в ветви, содержащей комплексное сопротивление Z_3, можно вычислить, проведя расчет для следующей схемы (рис.11). К ветви, расположенной между узлами 0 и 1 и содержащей сопротивление $\dot{Z}_3$ и источник ЭДС $\dot{E}_3$, подключен эквивалентный источник напряжения, параметры которого только что определены.



$$\dot{I}_3 = -\frac{\dot{E}_3 + \dot{E}_Г}{Z_3 + Z_Г}$$

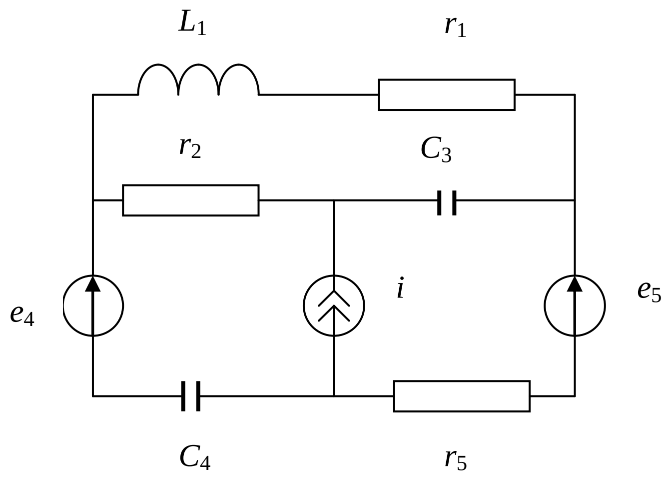
Рис.11

Очевидно, что найденный результат решения задачи не должен зависеть от метода, использованного при решении.

Литература.

1. Зайцев Э.Ф., Черепанов А.С., Ферсман Г.А. Электротехника и электроника. Теория электрических цепей. Ч1. - СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2005.
2. Новиков Ю.Н. Электротехника и электроника. Теория цепей и сигналов, процессы в сложных электрических цепях.- СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2008
3. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа. 2000
4. Афанасьев Б.П. и др. Теория линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа. 1973

Задание 2 – 1



В электрическую цепь включены источники гармонических колебаний.

$$i = 5 \sin(\omega_1 t) \text{ А},$$
$$e_4 = 50 \cos(\omega_4 t) \text{ В},$$
$$e_5 = 50 \sin(\omega_5 t) \text{ В}.$$

Элементы цепи:

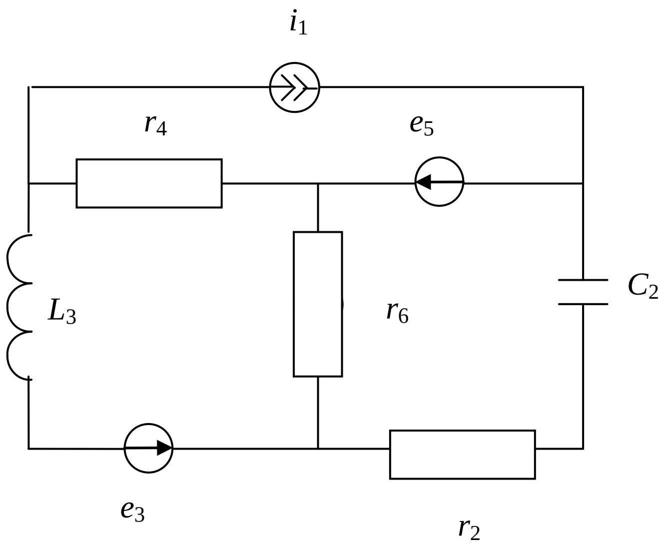
$$r_1 = 10 \text{ Ом},\ r_2 = 5 \text{ Ом},\ r_5 = 10 \text{ Ом},$$
$$L_1 = 25 \text{ мГн},\ C_3 = 250 \text{ мкФ},\ C_4 = 500 \text{ мкФ}.$$

1. Полагая, что $\omega_1 = \omega_4 = 200$ рад / с, $\omega_5 = 250$ рад / с, определите токи во всех ветвях цепи. Напишите мгновенные значения токов.

2. Для колебаний частоты ω_5 составьте уравнение баланса мощностей.

3. Полагая $\omega_1 = \omega_4 = \omega_5 = 200$ рад / с, определите ток в ветви с емкостным элементом C_3, используя метод эквивалентного источника напряжения.

Задание 2 - 2



В электрическую цепь включены источники гармонических колебаний.

$$i_1 = 2\cos(\omega_1 t)\ \text{А},$$
$$e_3 = 30\cos(\omega_3 t)\ \text{В},$$
$$e_5 = 20\sin(\omega_5 t)\ \text{В}.$$

Элементы цепи:

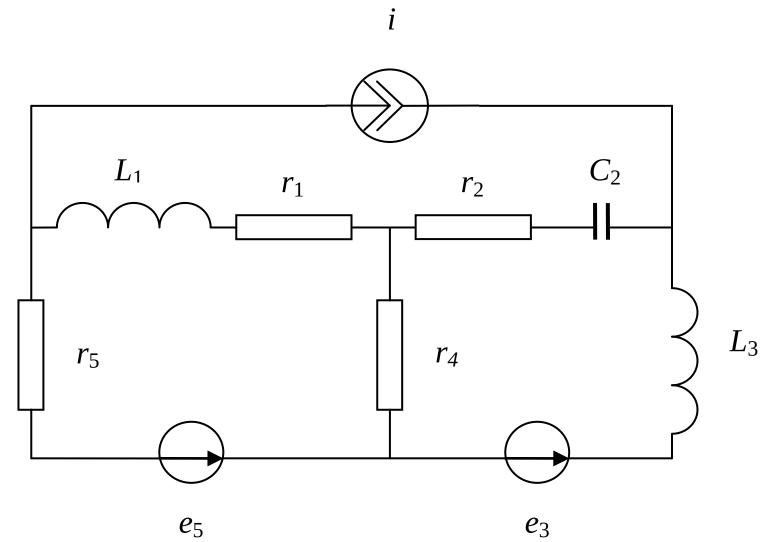
$$r_2 = 10\ \text{Ом},\ r_4 = 30\ \text{Ом},\ r_6 = 20\ \text{Ом},$$
$$L_3 = 20\ \text{мГн},\ C_2 = 100\ \text{мкФ}.$$

2. Полагая, что $\omega_3 = \omega_5 = 1000$ рад / с, $\omega_1 = 800$ рад / с, определите токи во всех ветвях цепи. Напишите мгновенные значения токов.

2. Для колебаний частоты ω_1 составьте уравнение баланса мощностей.

3. Полагая $\omega_1 = \omega_3 = \omega_5 = 1000$ рад / с, определите ток в ветви с резистивным элементом r_4, используя метод эквивалентного источника тока.

Задание 2 – 3



В электрическую цепь включены источники гармонических колебаний.

$i = 10 \sin (\omega_1 t)$ А,

$e_3 = 125\sin (\omega_3 t)$ В,

$e_5 = 150 \cos (\omega_5 t)$ В.

Элементы цепи:

$r_1 = 10$ Ом, $r_2 = 15$ Ом, $r_4 = 10$ Ом, $r_5 = 10$ Ом,

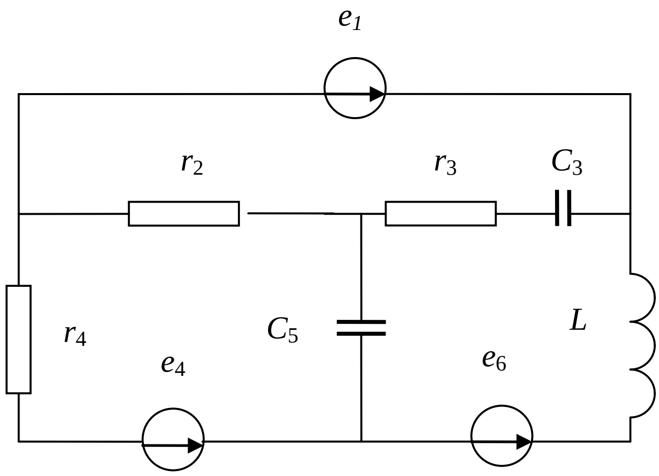
$L_1 = 20$ мГн, $L_3 = 20$ мГн, $C_2 = 250$ мкФ,

3. Полагая, что $\omega_1 = \omega_3 = 250$ рад / с, $\omega_5 = 300$ рад / с, определите токи во всех ветвях цепи. Напишите мгновенные значения токов.

2. Для колебаний частоты ω_5 составьте уравнение баланса мощностей.

3. Полагая $\omega_1 = \omega_3 = \omega_5 = 250$ рад / с, определите ток в ветви с резистивным элементом r_5, используя метод эквивалентного источника тока.

Задание 2 - 4



В электрическую цепь включены источники гармонических колебаний.

$e_1 = 25 \cos (\omega_1 t)$ В,

$e_4 = 25 \sin (\omega_4 t)$ В,

$e_6 = 120 \cos (\omega_6 t)$ В.

Элементы цепи:

$r_2 = 20$ Ом, $r_3 = 5$ Ом, $r_4 = 20$ Ом,

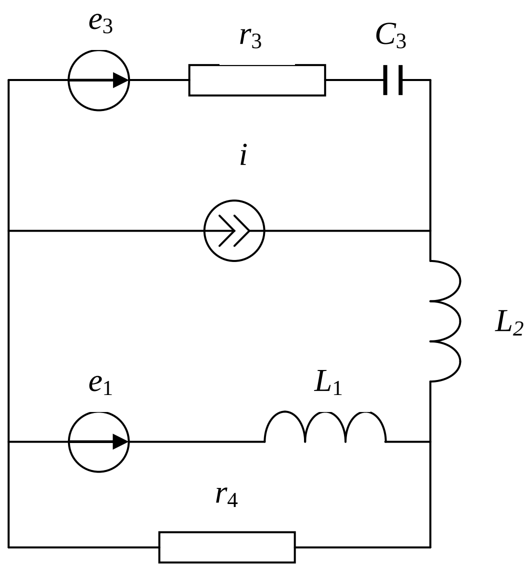
$L_6 = 10$ мГн, $C_3 = 50$ мкФ, $C_5 = 5$ мкФ.

4. Полагая, что $\omega_6 = \omega_4 = 1000$ рад / с, $\omega_1 = 800$ рад / с, определите токи во всех ветвях цепи. Напишите мгновенные значения токов.

2. Для колебаний частоты ω_1 составьте уравнение баланса мощностей.

3. Полагая $\omega_1 = \omega_4 = \omega_6 = 1000$ рад / с, определите ток в ветви с емкостным элементом C_3, используя метод эквивалентного источника напряжения.

Задание 2 - 5



В электрическую цепь включены источники гармонических колебаний.

$i = 2 \sin(\omega_2 t)$ А,
$e_1 = 80 \cos(\omega_1 t)$ В,
$e_3 = 50 \sin(\omega_3 t)$ В.

Элементы цепи:

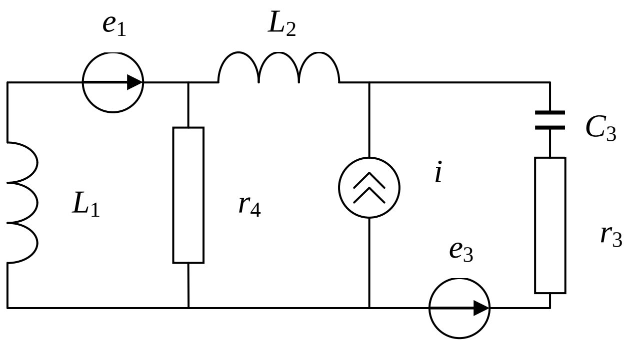
$r_3 = 15$ Ом, $r_4 = 20$ Ом,
$L_1 = 100$ мГн, $L_2 = 50$ мГн, $C_3 = 100$ мкФ.

5. Полагая, что $\omega_2 = \omega_3 = 200$ рад / с, $\omega_1 = 250$ рад / с, определите токи во всех ветвях цепи. Напишите мгновенные значения токов.

2. Для колебаний частоты ω_1 составьте уравнение баланса мощностей.

3. Полагая $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 200$ рад / с, определите ток в ветви с резистивным элементом r_4, используя метод эквивалентного источника напряжения.

Задание 2 - 6



В электрическую цепь включены источники гармонических колебаний.

$$i = 2\cos(\omega_2 t)\ \text{А},$$
$$e_1 = 160\sin(\omega_1 t)\ \text{В},$$
$$e_3 = 60\sin(\omega_3 t)\ \text{В}.$$

Элементы цепи:

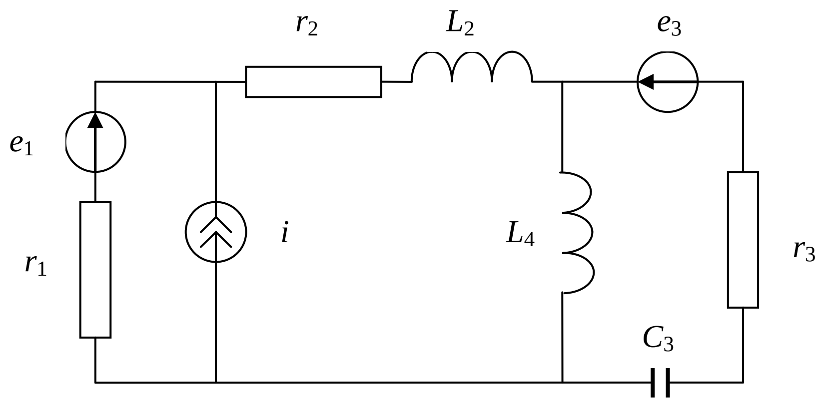
$$r_3 = 10\ \text{Ом},\ r_4 = 40\ \text{Ом},$$
$$L_1 = 40\ \text{мГн},\ L_2 = 50\ \text{мГн},\ C_3 = 100\ \text{мкФ}.$$

6. Полагая, что $\omega_1 = \omega_3 = 1000$ рад / с, $\omega_2 = 800$ рад / с, определите токи во всех ветвях цепи. Напишите мгновенные значения токов.

2. Для колебаний частоты ω_2 составьте уравнение баланса мощностей.

3. Полагая $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1000$ рад / с, определите ток в ветви с резистивным элементом r_4, используя метод эквивалентного источника напряжения.

Задание 2 - 7



В электрическую цепь включены источники гармонических колебаний.

$i = 2 \sin(\omega_2 t)$ А,

$e_1 = 30 \sin(\omega_1 t)$ В,

$e_3 = 20 \cos(\omega_3 t + \pi)$ В.

Элементы цепи:

$r_1 = 2$ Ом, $r_2 = 5$ Ом, $r_3 = 20$ Ом,

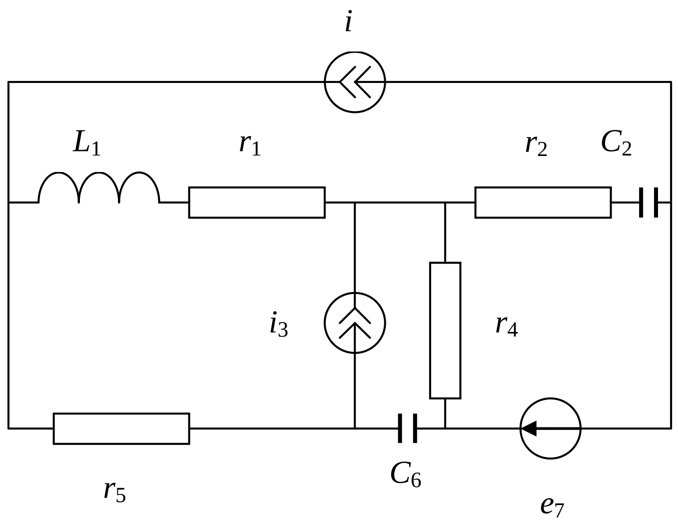
$L_2 = 10$ мГн, $L_4 = 15$ мГн, $C_3 = 100$ мкФ.

7. Полагая, что $\omega_1 = \omega_2 = 1000$ рад / с, $\omega_3 = 900$ рад / с, определите токи во всех ветвях цепи. Напишите мгновенные значения токов.

2. Для колебаний частоты ω_3 составьте уравнение баланса мощностей.

3. Полагая $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 200$ рад / с, определите ток в ветви с индуктивным элементом L_4, используя метод эквивалентного источника напряжения.

Задание 2 - 8



В электрическую цепь включены источники гармонических колебаний.

$$i = 5\cos(\omega_1 t) \text{ А},$$
$$i_3 = 5\sin(\omega_3 t) \text{ А},$$
$$e_7 = 120\cos(\omega_7 t - \pi/4) \text{ В}.$$

Элементы цепи:

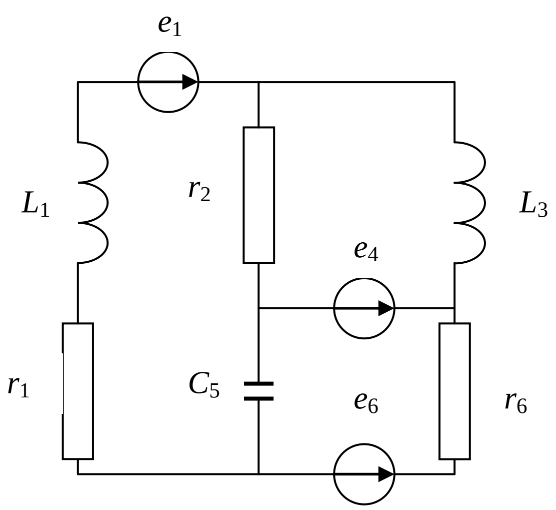
$$r_1 = 30 \text{ Ом}, r_2 = 20 \text{ Ом}, r_4 = 10 \text{ Ом}, r_5 = 40 \text{ Ом},$$
$$L_1 = 100 \text{ мГн}, C_2 = 30 \text{ мкФ}, C_6 = 20 \text{ мкФ}.$$

8. Полагая, что $\omega_1 = \omega_7 = 1000$ рад / с, $\omega_3 = 900$ рад / с, определите токи во всех ветвях цепи. Напишите мгновенные значения токов.

2. Для колебаний частоты ω_3 составьте уравнение баланса мощностей.

3. Полагая $\omega_1 = \omega_3 = \omega_7 = 1000$ рад / с, определите ток в ветви с резистивным элементом r_4, используя метод эквивалентного источника тока.

Задание 2 - 9



В электрическую цепь включены источники гармонических колебаний.

$e_1 = 60 \cos (\omega_1 t)$ В,
$e_4 = 40 \sin (\omega_4 t)$ В,
$e_6 = 50 \cos (\omega_6 t)$ В.

Элементы цепи:

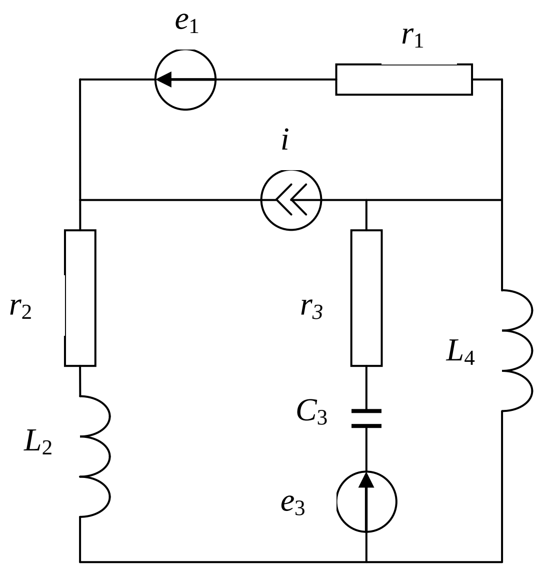
$r_1 = 4$ Ом, $r_2 = 30$ Ом, $r_6 = 15$ Ом,
$L_1 = 15$ мГн, $L_3 = 10$ мГн, $C_5 = 100$ мкФ.

9. Полагая, что $\omega_6 = \omega_4 = 1000$ рад / с, $\omega_1 = 800$ рад / с, определите токи во всех ветвях цепи. Напишите мгновенные значения токов.

2. Для колебаний частоты ω_1 составьте уравнение баланса мощностей.

3. Полагая $\omega_1 = \omega_4 = \omega_6 = 1000$ рад / с, определите ток в ветви с резистивным элементом r_2, используя метод эквивалентного источника напряжения.

Задание 2 - 10



В электрическую цепь включены источники гармонических колебаний.

$$i = 2\sin(\omega_2 t)\ \text{А},$$
$$e_1 = 80\sin(\omega_1 t)\ \text{В},$$
$$e_3 = 30\cos(\omega_3 t)\ \text{В}.$$

Элементы цепи:

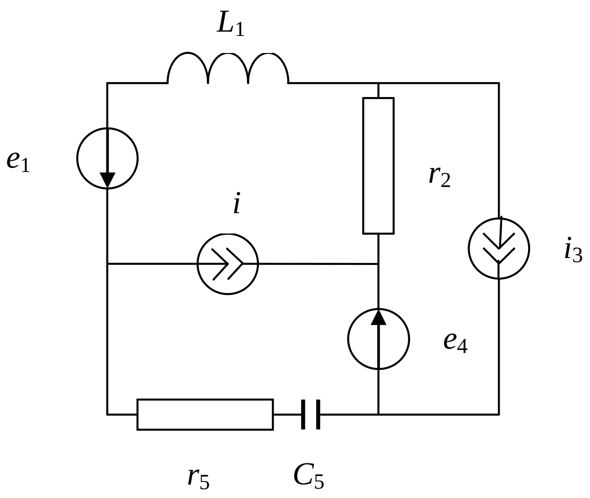
$$r_1 = 6\ \text{Ом},\ r_2 = 60\text{Ом},\ r_3 = 20\ \text{Ом},$$
$$L_2 = 25\ \text{мГн},\ L_4 = 25\ \text{мГн},\ C_3 = 250\ \text{мкФ}.$$

1. Полагая, что $\omega_1 = \omega_3 = 500$ рад / с, $\omega_2 = 400$ рад / с, определите токи во всех ветвях цепи. Напишите мгновенные значения токов.

2. Для колебаний частоты ω_2 составьте уравнение баланса мощностей.

3. Полагая $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 500$ рад / с, определите ток в ветви с индуктивным элементом L_4, используя метод эквивалентного источника напряжения.

Задание 2 - 11



В электрическую цепь включены источники гармонических колебаний.

$$i = 2\sin(\omega_2 t)\ \text{А},$$
$$i_3 = 2\cos(\omega_3 t)\ \text{А},$$
$$e_1 = 40\cos(\omega_1 t)\ \text{В},$$
$$e_4 = 25\sin(\omega_4 t)\ \text{В}.$$

Элементы цепи:

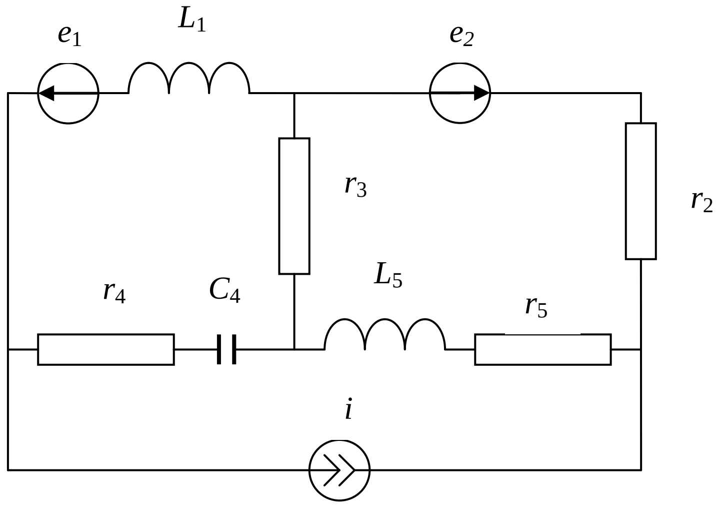
$$r_2 = 30\ \text{Ом},\ r_5 = 2\ \text{Ом},$$
$$L_1 = 20\ \text{мГн},\ C_5 = 200\ \text{мкФ}.$$

2. Полагая, что $\omega_1 = \omega_2 = \omega_4 = 500$ рад / с, $\omega_3 = 400$ рад / с, определите токи во всех ветвях цепи. Напишите мгновенные значения токов.

2. Для колебаний частоты ω_3 составьте уравнение баланса мощностей.

3. Полагая $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 500$ рад / с, определите ток в ветви с резистивным элементом r_2, используя метод эквивалентного источника тока.

Задание 2 - 12



В электрическую цепь включены источники гармонических колебаний.

$i = 10 \sin(\omega_3 t)$ А,

$e_1 = 25 \sin(\omega_1 t)$ В,

$e_2 = 25 \cos(\omega_2 t)$ В.

Элементы цепи:

$r_2 = 20$ Ом, $r_3 = 15$ Ом, $r_4 = 15$ Ом, $r_5 = 20$ Ом,

$L_1 = 50$ мГн, $L_5 = 50$ мГн, $C_4 = 250$ мкФ.

3. Полагая, что $\omega_1 = \omega_3 = 400$ рад / с, $\omega_2 = 350$ рад / с, определите токи во всех ветвях цепи. Напишите мгновенные значения токов.

2. Для колебаний частоты ω_2 составьте уравнение баланса мощностей.

3. Полагая $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 400$ рад / с, определите ток в ветви с резистивным элементом r_2, используя метод эквивалентного источника тока.