Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

И.А. КОНСТАНТИНОВ В.В. ЛАЛИН И.И. ЛАЛИНА

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Расчет стержневых систем с использованием программы SCAD

Учебно-методический комплекс

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007

Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

И.А. Константинов В.В. Лалин И.И. Лалина

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Расчет стержневых систем с использованием программы SCAD

Учебно-методический комплекс

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007

УДК 624.04 (075.8)

К о н с т а н т и н о в И. А., Л а л и н В.В., Л а л и н а И.И. **Строительная механика**. **Расчет стержневых систем с использованием программы SCAD**: Учебно-методический комплекс. СПб**:** Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 450 с.

Учебно-методический комплекс (УМК) соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Строительная механика» инженерной подготовки по направлению «Строительство».

В УМК входят учебно-методические материалы, необходимые для изучения дисциплины «Строительная механика» с использованием в учебном процессе программы SCAD.

Предназначено для студентов всех форм обучения по специальности «Промышленные и гражданские сооружения» (ПГС) направления «Строительство», изучающих дисциплину «Строительная механика».

Табл. 41 . Ил. 202. Библиогр.: 23 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2007

Посвящается 100-летию
инженерно-строительного факультета

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время при проектировании строительных конструкций в проектных организациях значительная часть расчетов выполняется на персональных компьютерах (ПК) с помощью специальных проектно-вычислительных комплексов (ПВК), в которых отражаются и используются самые современные достижения по расчету и проектированию сооружений.

Подготовка инженеров строительных специальностей должна учитывать это обстоятельство и включать в себя и обучение методам компьютерного проектирования сооружений с использованием тех ПВК, которые доступны для внедрения в учебный процесс в настоящее время.

Необходимо учитывать и то, что многие студенты имеют компьютеры дома, часто хорошо информированы о возможностях современных программ и имеют возможность использовать их для выполнения своих расчетных работ, в частности по строительной механике.

Применяемые ПВК отличаются друг от друга методическими и сервисными разработками, но все они включают в себя статические и динамические расчеты конструкций и отдельных их частей, выполняемые методами строительной механики. Алгоритмы численных расчетов в этих программах в основном строятся на методе конечных элементов (МКЭ), реализуемом в форме метода перемещений.

Кафедра строительной механики и теории упругости успешно использует в учебном процессе по дисциплинам «Строительная механика стержневых систем (статика)»; «Теория упругости (статика)» и «Динамика сооружений» программу SCAD, являющуюся основной в одноименном вычислительном комплексе [19, 20].

Все это заставляет существенно и быстро изменять методику преподавания указанных дисциплин. Этому процессу отвечают учебные пособия авторов [1 – 6], облегчающие студентам, изучающим указанные дисциплины, использование ПК при выполнении ими самостоятельных расчетных работ и курсовых проектов по другим специальным дисциплинам.

Представленная работа названа учебно-методическим комплексом (УМК) потому, что она содержит комплекс учебно-методических материалов необходимых и преподавателям и студентам специальности ПГС для обеспечения всего учебного процесса по дисциплине «Строительная механика (статика)».

Этими материалами являются: рабочая программа дисциплины (приложение 4 к УМК); материалы, позволяющие реализовать ее в учебном процессе на лекциях,

упражнениях, вычислительных работах классе ПК (разделы 1 – 10 УМК); при выполнении студентами самостоятельных расчетных работ (приложения 1 – 3); при подготовке студентов к зачетам и экзаменам (приложения 5 – 6).

Учебно-методический комплекс объединяет пособия [1 – 6] авторов. Излагаемые в нем разделы строительной механики стержневых систем ориентированы на использование ПК с использованием программы SCAD для решения задач строительной механики стержневых систем.

Электронные аналоги предлагаемого УМК и пособия [1 – 6] имеются на сайте http://smitu.cef.spbstu.ru а также в сети классов ПК кафедр «Строительная механика и теория упругости» и отделения «Энергетические и промышленно-гражданские сооружения» кафедры «Гражданское строительство и прикладная экология».

При составлении УМК использованы и другие учебные пособия по расчету стержневых систем [7 – 18], подготовленные сотрудниками кафедры СМ и ТУ, а также пособия [19, 20] авторов вычислительного комплекса SCAD.

В список использованной литературы включены также действующие СНиП [21, 22] и работа [23] по расчету сооружений, расположенных на грунтовом основании.

Следует обратить внимание читателей УМК на два важных, с точки зрения авторов, момента при оценке представленного здесь материала.

Во-первых, авторы стремились к тому, чтобы студенты специальности ПГС, закончив изучение строительной механики в рамках учебного плана, получили возможность уверенно решать задачи строительной механики для линейно-деформируемых стержневых систем с использованием персональных компьютеров и современных вычислительных комплексов (на примере ПВК SCAD).

Во-вторых, авторы на простых примерах старались научить студентов понимать работу стержневых систем, как говорят иногда: понимать «игру сил» в различных стержневых строительных конструкциях. Для этой цели авторы использовали различные примеры расчетов стержневых систем, как с применением ПК, так и вручную (без применения ПК). При этом для наглядности использовались и простые графические способы, например, такие, как построение многоугольника сил при рассмотрении равновесия какой-либо части стержневой системы, или оригинальный графический способ С. С. Голушкевича по расчету неразрезных балок и рам.

Ряд разделов строительной механики, например, методы решения нелинейных задач, задач на устойчивость строительных конструкций и ряд других, не вошедших в данный УМК, предполагается рассмотреть отдельно.

Авторы выражают благодарность академику РАН К.С.Демирчану и член-корреспонденту РАН М.П.Федорову за помощь в издании этого учебно-методического комплекса.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

1.1. Основная задача строительной механики

Строительная механика – наука о принципах и методах расчета сооружений и конструкций на прочность, жесткость, устойчивость – на всех этапах своего развития связана с уровнем развития математики, механики и науки о сопротивлении материалов.

Основной задачей строительной механики является определение напряженно-деформируемого состояния (НДС) конструкций и сооружений от внешних воздействий (силовых, кинематических, температурных).

Под определением НДС понимают определение внутренних усилий, напряжений, соответствующих им деформаций и перемещений, возникающих в элементах сооружений.

В соответствии с результатами расчета НДС устанавливаются размеры отдельных элементов сооружений, необходимые для обеспечения их надежной работы на *прочность, жесткость и устойчивость* при минимальных затратах на строительные материалы и возведение (строительство).

Таким образом, без строительной механики невозможно проектирование рациональных конструкций и сооружений.

Строительная механика позволяет формировать знания, умения и навыки, необходимые будущим инженерам-строителям для работы в области проектирования и возведения строительных конструкций.

Целью обучения строительной механике студентов всех специальностей направления «Строительство» являются:

1. Знание принципов и методов расчета сооружений по определению НДС от заданных внешних воздействий (силовых, кинематических и температурных).

2. Умение составлять и анализировать расчетные схемы различных сооружений для их расчета на заданные воздействия.

3. Умение решать простейшие задачи строительной механики при помощи малых вычислительных средств (калькуляторов).

4. Умение рассчитывать сложные расчетные схемы на современных компьютерах (в настоящее время чаще всего используются персональные компьютеры (ПК)) с использованием соответствующих программ расчета,

построенных на основе методов строительной механики.

5. Умение оценивать правильность результатов расчета.

1.2. Расчетные схемы сооружений

Решение задачи определения НДС сооружения представляет собой сложную проблему. На практике она решается различными путями: ***натурными исследованиями*** в возводимых или уже построенных сооружениях; ***экспериментальными исследованиями на специально изготовленных моделях сооружения***; ***расчетом сооружений по специально разработанным расчетным схемам***.

В данном учебном пособии рассматривается третий путь решения задачи об определении НДС – расчетный.

Расчетная схема сооружения только приближенно отражает НДС сооружения. Степень точности отражения расчетной схемой реальной работы сооружения связана с возможностями расчетчиков:

1) по учету в расчетной схеме геометрии элементов сооружения и их соединения друг с другом;

2) по учету в расчетной схеме разнообразных физико-механических свойств материалов, используемых в сооружении.

3) по использованию вычислительной техники с достаточными техническими характеристиками, позволяющими выполнить расчет НДС с необходимой точностью.

Рассмотрим, как решаются эти вопросы при составлении расчетной схемы сооружений.

1) Для геометрического представления элементов сооружения в расчетной схеме обычно их делят на следующие три типа:

- ***Стержневые элементы***, которые отличаются от других значительным преобладанием длины элемента l над размерами b, h его поперечного сечения (рис. 1.1, *а*).

Если при исследовании изгибных деформаций стержня применима гипотеза плоских сечений, известная учащемуся из дисциплины «Сопротивление материалов», то стержень классифицируют как ***тонкий стержень***. Обычно эта гипотеза соблюдается при достаточно малом отношении h/l (см. рис. 1.1, *а*). Приближенно будем считать стержень тонким, если $h/l < 1/5$. Такой стержень в расчетной схеме изображается линией, представляющей ось стержня. Если гипотеза плоских сечений не применима, то стержень не считают тонким, а классифицируют как ***балка-стенка.***

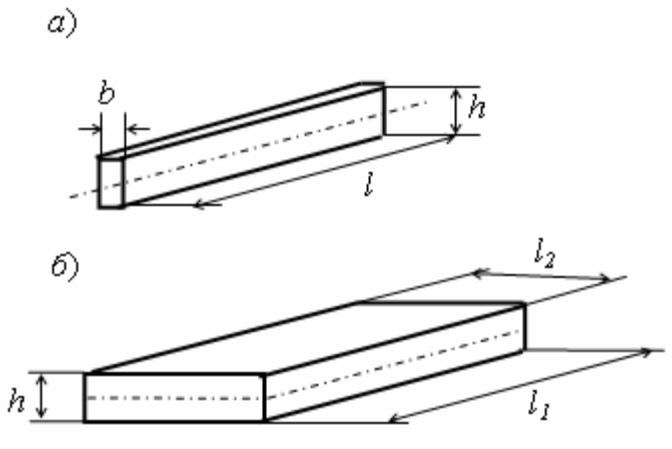


Рис. 1.1

- ***Элементы, один из размеров которых (толщина h) много меньше двух других размеров***. К таким элементам в строительной практике относят ***стенки***, ***тонкие плиты*** (рис. 1.1, *б*), ***тонкие оболочки.***

В расчетной схеме сооружения такие элементы представляются срединной плоскостью для стен и тонких плит (см. рис. 1.1, *б*) и срединной криволинейной поверхностью для тонкой оболочки.

- ***Массивные элементы***, которые имеют все три размера одного порядка. В расчетной схеме они и изображаются в виде пространственных тел заданных размеров.

Имеются сооружения, представляющие собой конструкцию только из стержневых элементов. Такую систему обычно называют **Стержневая система**.

2) Из разнообразных физико-механических свойств материалов сооружений чаще всего в расчетной схеме рассматривается физическая модель в виде ***линейно-деформируемого тела***. В этом случае искомые перемещения, напряжения и деформации (НДС сооружения) определяются из системы линейных уравнений и при их определении оказывается применимым ***принцип независимости действия сил*** (возможность сложения результатов расчета сооружения от любых внешних воздействий).

Нелинейные задачи строительной механики в данном пособии не рассматриваются.

3) В настоящее время для определения НДС сооружений используются персональные компьютеры с техническими характеристиками, позволяющими реализовать разработанные в строительной механике методы и получать достаточно точные для инженерной практики результаты. Однако проблема разработки и применения при расчетах НДС наиболее рациональных расчетных

схем всегда будет оставаться актуальной. Но обсуждение этих вопросов выходит за рамки данного учебного пособия.

1.3. Воздействия на сооружения

Воздействия можно классифицировать по различным признакам. Например, их можно разделить на ***силовые воздействия (нагрузки)***, ***температурные воздействия*** и ***кинематические воздействия*** (***заданные перемещения***).

Воздействия можно разделить на два класса: ***статические*** и ***динамические***.

К статическим относятся воздействия, которые не сообщают массам сооружения ускорений, или сообщают такие малые по значению ускорения, что, возникающими при этом силами инерции, при определении НДС можно пренебречь. Значения, направление и конфигурация статического воздействия не изменяются во времени. Возможно изменение координат воздействия (подвижная нагрузка), но оно происходит так медленно, что сохраняется статический характер воздействия.

При статическом воздействии сооружение деформируется, возникают перемещения его точек и соответствующие усилия и напряжения, которые при работе сооружения в упругой стадии не изменяются во времени.

К динамическим относятся воздействия, которые сообщают массам сооружения существенные ускорения и, следовательно, вызывают такие силы инерции, что их влияние на НДС сооружения должно быть учтено.

Значение, направление и конфигурация и координаты динамического воздействия (сразу все параметры или некоторые из них) изменяются во времени.

Примерами динамических воздействий являются ***ударные*** и ***вибрационные*** нагрузки, вызванные действием машин и механизмов; ***воздействия взрывных волн*** через грунтовую и воздушную среду; ***сейсмическое воздействие*** на сооружение и т. д.

Динамические воздействия вызывают колебания сооружения, при которых изменяются во времени как перемещения точек сооружения, так и связанные с перемещениями деформации, усилия и напряжения.

В данном пособии рассматриваются только статические воздействия на стержневые системы.

1.4. Структура курса «Строительная механика» в учебном плане

«Строительная механика» является логическим продолжением дисциплин «Теоретическая механика» и «Сопротивление материалов». В ней также используются знания, полученные студентами при изучении дисциплин «Высшая математика» и «Вычислительная математика».

В связи с только что приведенным представлением о работе сооружений при статическом и динамическом воздействиях строительную механику делят на две части (схема 1):

1. Статика сооружений.
2. Динамика сооружений.

При этом статика сооружений делится на два раздела: «Строительная механика стержневых систем» и «Теория упругости» (см. схему 1)

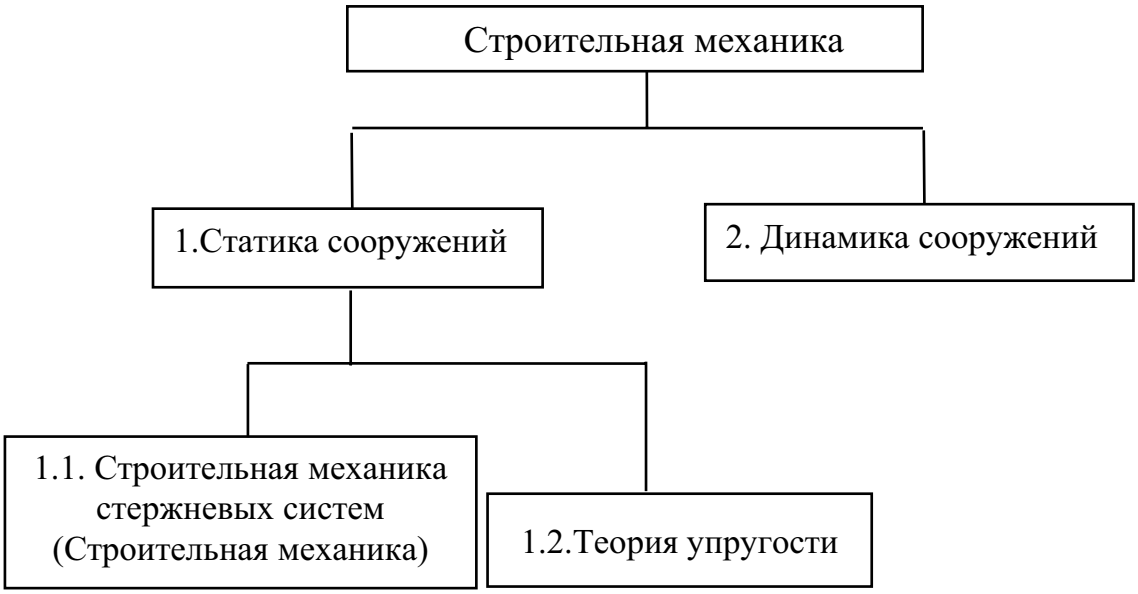


Схема 1

В статике сооружений раздел 1.1, в котором при статических воздействиях рассматриваются методы расчета стержневых систем, состоящих из тонких стержней, обычно называют просто «Строительная механика».

В разделе 1.2 статики сооружений (Теория упругости) рассматриваются постановки и методы расчета при статических воздействиях толстых балок (балок-стенок), пластин (плит), оболочек и пространственных массивных тел.

Динамика сооружений посвящена постановкам и методам решения динамических задач, как стержневых систем, так и сооружений, имеющих плоские и массивные элементы.

Данное учебное пособие посвящено разделу 1.1. строительной механики (см. схему 1).

Методы строительной механики и построенные на их основе программы расчета различных стержневых конструкций на персональных компьютерах (ПК) используются затем в специальных курсах «Металлические конструкции», «Железобетонные конструкции», «Основания и фундаменты» и специальных курсах по расчету и проектированию сооружений, читаемых выпускающими кафедрами.

1.5. Типы плоских стержневых систем и детали их расчетных схем

Все сооружения являются ***пространственными*** физическими телами. Но есть стержневые конструкции, расчетные схемы которых (в виде совокупности осей стержней) и действующая нагрузка оказываются расположенными в одной плоскости. Такие стержневые системы называются ***плоскими стержневыми системами***.

Принципиального различия в методах расчета пространственных и плоских стержневых систем нет. Однако, поскольку расчет плоских стержневых систем проще, то обычно в ученых пособиях по строительной механике методы расчета стержневых систем демонстрируются на плоских системах.

Дальнейшее обобщение методов на пространственные задачи затруднений не вызывает. Поэтому и в предлагаемом учебном пособии рассмотрены только плоские стержневые системы. При этом рассмотрены только наиболее часто встречающиеся в инженерной практике типы (примеры их схем приведены на рис. 1.2):

1. **Балки** (рис. 1.2, *а*);
2. **Рамы** (рис. 1.2, *б*);
3. **Арки** (рис. 1.2, *в*);
4. **Фермы** (рис. 1.2, *г*).

Обычно при расчете вся расчетная схема относится к какой-то ***общей системе координат*** (ОСК). Для пространственной стержневой системы ОСК является пространственной (штриховые линии на рис. 1.2, *ж*).

При рассмотрении плоских стержневых систем ее расчетная схема изображается на какой-то одной координатной плоскости, например, на плоскости *XOZ* [1– 6, 19, 20].

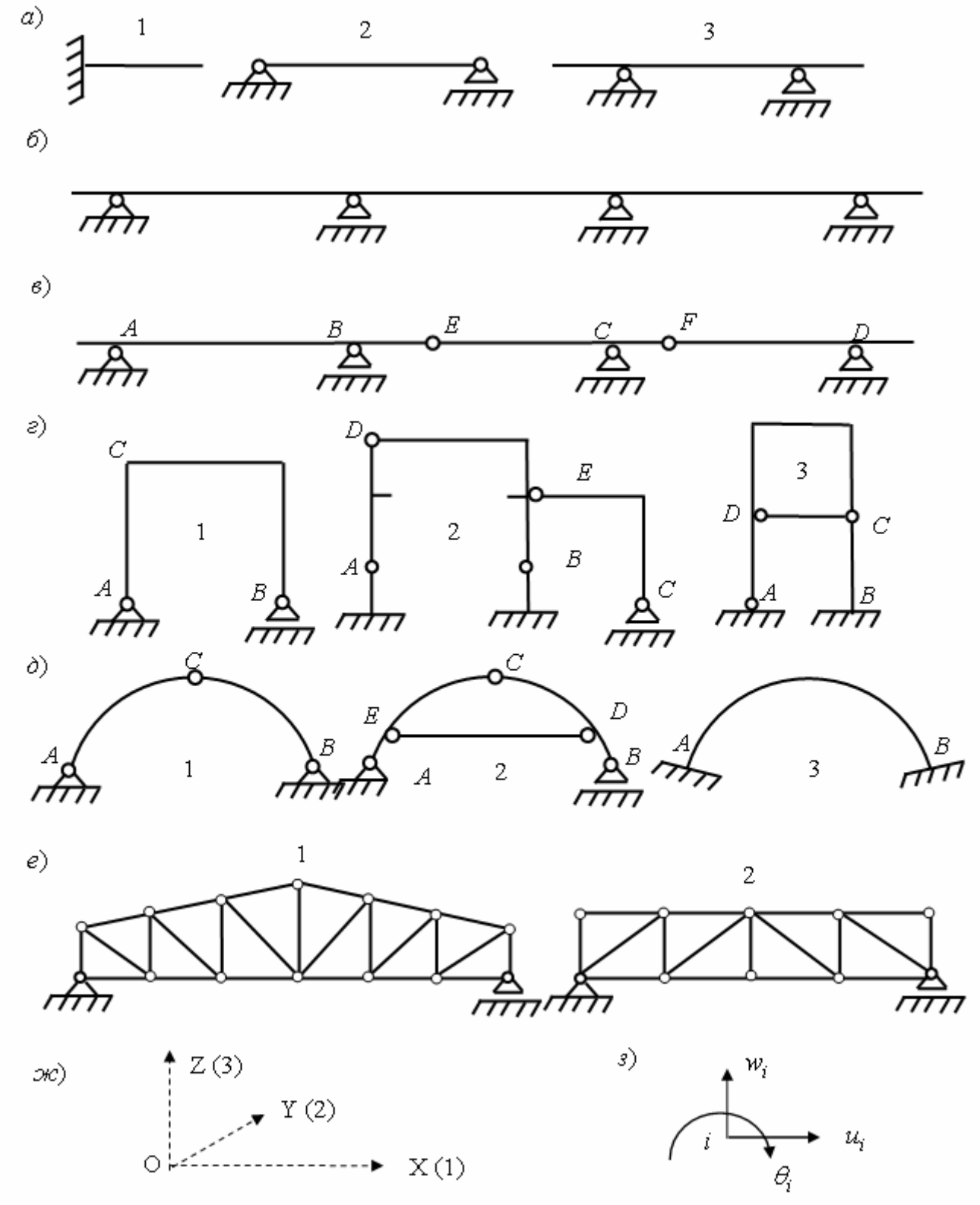


Рис. 1.2

Деталями расчетных схем стержневых систем (см. рис. 1.2) являются:

- **стержни** (прямолинейные и криволинейные);
- **узлы** (жесткие, шарнирные и комбинированные), в которых стержни соединяются друг с другом;

- **опоры** (опорные узлы).

Стержни в расчетной схеме изображаются линиями, совпадающими с его центральной осью.

Поперечное сечение стержней, характеризуется площадью S и моментом инерции I (для плоского стержня, изгибающегося в плоскости XOZ, $I = I_y$). При определении НДС плоской стержневой системы неизвестными величинами в любом сечении стержня, находящегося в условиях продольной и изгибной деформации, являются:

перемещения (линейные перемещения сечения u и w соответственно в направлении осей X и Z и угол поворота сечения $\theta = \theta_y$);

усилия (изгибающий момент M, поперечная сила Q и продольная сила N, действующие в той же плоскости);

деформации (изгиба κ («каппа»), сдвига γ и продольной ε - растяжения или сжатия).

Жесткие узлы соединяют подходящие к нему концевые поперечные сечения стержней так, что обеспечивают одинаковость линейных и угловых перемещений этих сечений в плоскости, в которой находится стержневая система.

При деформации плоской стержневой системы в плоскости *XOZ* любой ее жесткий узел с номером i имеет три степени свободы упругих перемещений, которые можно выразить вектором.

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \end{bmatrix}, \qquad (1.1)$$

где u_i, w_i – проекции полного линейного перемещения узла в плоскости XOZ соответственно на оси X и Z; θ_i – угол поворота жесткого узла вокруг оси Y.

Положительные направления перемещений узла такие же, как в сечении стержня. Они показаны на рис 1.2, *з*.

Шарнирные узлы обеспечивают равенство только линейных перемещений соединяемых концов стержней, но разрешают независимый свободный поворот каждого стержня на свой угол поворота.

При деформации упругой линейно-деформируемой плоской стержневой системы в плоскости *XOZ* любой шарнирный узел с номером i имеет две степени свободы упругих перемещений, проекции которых X и Z на соответствующие оси ОСК XOZ можно выразить вектором

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix}. \qquad (1.2)$$

Опоры, изображенные на расчетных схемах плоских стержневых систем (см. рис. 1.2), относятся к следующим типам жестких (недеформируемых) связей.

Шарнирная подвижная опора, эквивалентная одной жесткой связи сооружения с неподвижным жестким основанием (рис. 1.3, *а*). Связь (стержень с шарнирами по концам) и усилие в ней перпендикулярны плоскости качения опоры и проходят через центр шарнира. Такой опорный узел имеет две степени свободы: конец стержня, подходящего к опорному шарниру, может перемещаться в направлении параллельном плоскости качения и поворачиваться на какой-то угол.

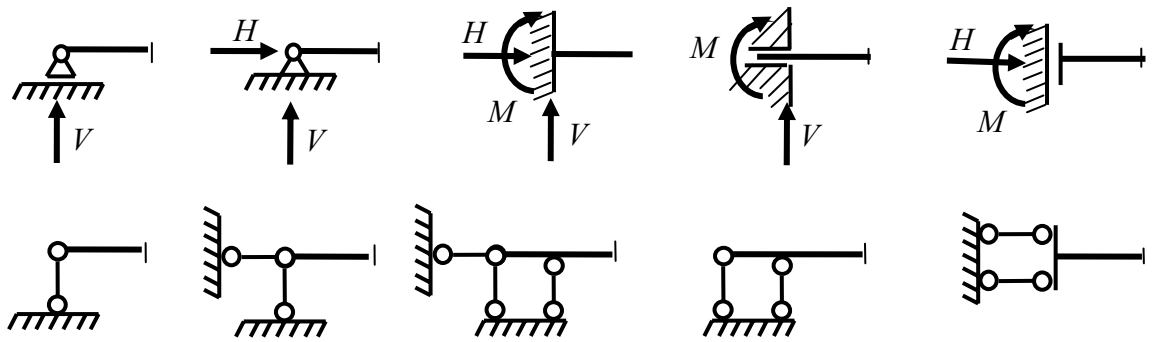


Рис. 1.3

Усилие в опорной связи действует на основание (передает на него силу давления со стороны сооружения) и на само сооружение (передает на сооружение силу давления основания на сооружение, называемую реакцией основания). Сила давления на основание и сила его реакции равны по значению, но направлены в разные стороны.

При расчете сооружения расчетчика интересует сила реакции основания, а при расчете фундамента под опору – давление на основание.

Шарнирная неподвижная опора, эквивалентная двум связям, пересекающимся в центре шарнира (рис. 1.3, *б*). Такая опора имеет только одну степень свободы – поворачиваться вокруг шарнира. Полная опорная реакция, действующая на сооружение в центре шарнира, при расчетах обычно представляется ее двумя составляющими

Защемляющая опора (заделка), эквивалентная трем связям, не пересекающимся в одной точке (рис. 1.3, *в*). Такая опора не имеет ни одной степени свободы, т.е. закрепляет конец стержня от линейных и угловых перемещений. В этом случае на сооружение действуют три составляющих

полной опорной реакции (см. рис. 1.3, *в*).

Встречаются так называемые «Скользящие заделки», допускающие смещения конца стержня вдоль его оси (рис. 1.3, *г*) или – поперек (рис. 1.3, *д*).

1.6. Понятие о геометрически изменяемых и неизменяемых системах

В строительных стержневых конструкциях обычно используют ***геометрически неизменяемые*** **(*ГН*)** системы**.** К ним относятся конструкции, *в которых при пренебрежении упругими деформациями стержней, расстояние между любыми точками конструкции будет неизменным.*

Примером такой геометрически неизменяемой системы является рама, изображенная на рис. 1.4, *а*. Соединения стержней в ней между собой и с неподвижным жестким основанием – жесткие. Если считать стержни рамы недеформируемыми (жесткими), то при воздействии на нее нагрузки все ее точки будут неподвижными.

К ***геометрически изменяемым*** **(*ГИ*)** системам относятся такие конструкции, *которые допускают перемещение точек конструкции даже в том случае, когда ее стержни будут жесткими*.

Примером такой системы является конструкция, которая получится из рассмотренной на рис. 1.4, *а* рамы, если все жесткие соединения стержней станут шарнирными (рис. 1.4, *б*). Такая система геометрически изменяема, т.к. под действием любой малой горизонтальной нагрузки изменит свое положение на плоскости даже при отсутствии деформации стержней.

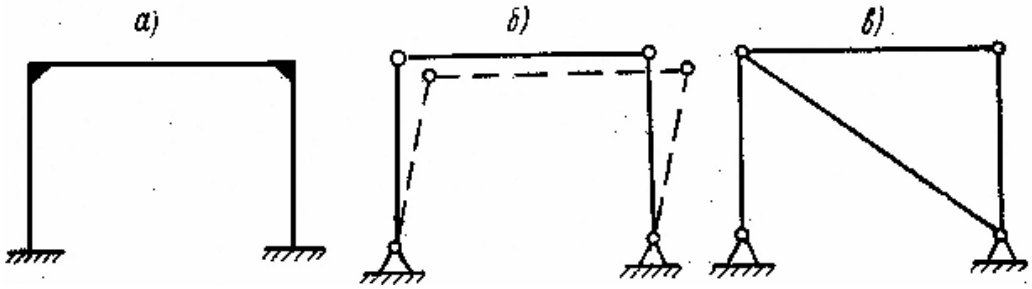


Рис. 1.4

Если в геометрически изменяемую шарнирно-стержневую систему, изображенную на рис.1. 4, *б*, поставить раскос, например, так, как это показано на рис. 1.4, *в*, то, несмотря на отсутствие жестких узлов, она станет геометрически неизменяемой.

Примечание. Именно поэтому, например, при конструировании строительных лесов у зданий, когда трудно обеспечить жесткость узлов, кроме вертикальных и горизонтальных стержней вводятся раскосы.

Таким образом, ***если стержневая система имеет только жесткие***

соединения в узлах, то она геометрически неизменяема.

Наличие шарнирных узлов уменьшает число связей в стержневой системе и при излишнем числе шарнирных соединений может привести к геометрически изменяемой системе. Такие системы в строительстве применять не следует.

Методика исследования геометрической неизменяемости стержневых систем в пособии будет рассмотрена в разделе 2.

1.7. Понятие о статически определимых и неопределимых системах

Для определения НДС стержневой системы необходимо найти в каждом сечении стержня:

- три внутренних усилия (M, Q, N);
- три соответствующих усилиям деформации ($\kappa, \gamma, \varepsilon$);
- три перемещения (u, w, θ).

Перечисленные величины связаны между собой и с внешней нагрузкой соотношениями (уравнениями), известными из дисциплины «Сопротивление материалов».

Для записи этих соотношений рассмотрим состояния бесконечно малого элемента dx, вырезанного из стержневой системы и отнесенного к системе координат XOZ (рис. 1.5).

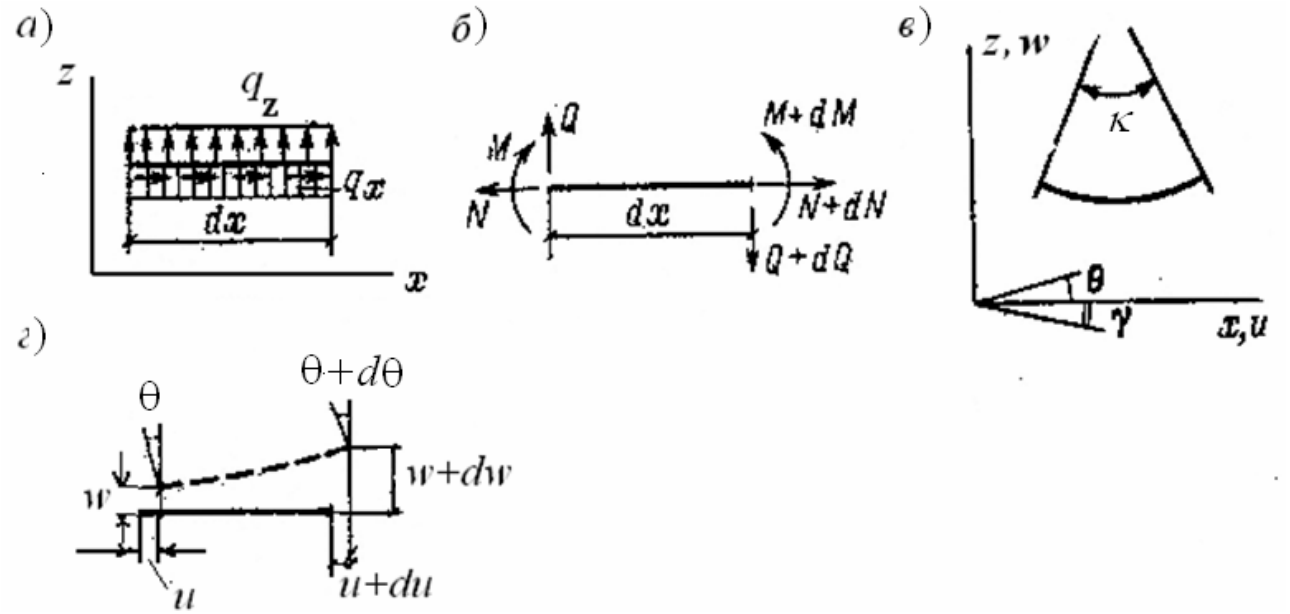


Рис. 1.5

На элемент действуют распределенные нагрузки вдоль (q_x) и поперек (q_z) оси стержня (рис. 1.5, *а*). На рис. 1.5 показаны положительные направления внешних нагрузок, усилий, деформаций и перемещений.

Указанные девять неизвестных характеристик НДС плоской линейно деформированной стержневой системы связаны между собой девятью уравнениями, образующими следующие три группы.

Уравнения равновесия элемента dx (уравнения статики)

$$\frac{dN}{dx} = -q_x; \quad \frac{dQ}{dx} = q_z; \quad \frac{dM}{dx} = Q; \tag{1.3}$$

Уравнения связи деформаций и перемещений

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}; \quad \gamma = \theta - \frac{dw}{dx}; \quad \kappa = \frac{d\theta}{dx}; \tag{1.4}$$

Уравнения, соответствующие закону Гука

$$\varepsilon = \frac{N}{ES}; \quad \gamma = \mu\frac{Q}{GS}; \quad \kappa = \frac{M}{EI}; \tag{1.5}$$

Здесь E и $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – соответственно модуль упругости при растяжении (сжатии) и модуль упругости при сдвиговых деформациях (модуль сдвига). В выражение последнего входит коэффициент Пуассона ν материала.

μ, S, I – соответственно коэффициент формы, площадь и момент инерции поперечного сечения стержня.

Шесть из девяти уравнений являются дифференциальными. Это означает, что для решения системы уравнений для стержня необходимо иметь шесть граничных условий – по три на каждом конце каждого стержня. Этими условиями могут быть перемещения и усилия на концах стержня: u или N; w или Q; θ или M.

При решении системы уравнений (1.3) – (1.5) для некоторых стержневых систем неизвестные внутренние усилия N, Q, M в сечениях любых стержней, в том числе и опорных, могут быть определены только из уравнений равновесия (1.3). Такие стержневые системы называются ***статически определимыми***.

Затем из уравнений, соответствующих закону Гука (1.5), определятся деформации и затем из уравнений (1.4) – перемещения.

Для многих стержневых систем определить усилия из решения только уравнений статики (1.3) без привлечения других уравнений системы (1.3) – (1.5) не удается. Такие стержневые системы называются ***статически неопределимыми***.

Пример. Рассмотрим два стержня (две балки), отличающиеся закреплением концов

(рис. 1.6).Здесь по сравнению с рис. 1.5 принято $q_x = q_1$ и $q_z = -q_2$.

Интегрируя уравнения равновесия (1.3), получим выражения для усилий в обеих балках:

$$N = -q_1 x + C_1; \quad Q = -q_2 x + C_2; \quad M = \int Q dx + C_3 . \qquad (1.6)$$

Покажем, что балка, изображенная на рис 1.6, *а* статически определима. Для доказательства запишем три граничных условия для усилий на левом конце балки: $N = 0_1; \quad Q = 0; \quad M = 0$. Подставив в (1.6) эти нулевые значения и $x = 0$, найдем постоянные величины: $C_1 = 0_1; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = 0$. Затем из (1.6) определятся и усилия:

$$N = -q_1 x; \quad Q = -q_2 x; \quad M = \int Q dx = -\int q_2 x dx = -0.5 q_2 x^2 \qquad (1.7)$$

Усилия M, Q, N определись только из уравнений статики (1.3). Эти выражения справедливы для любых сечений, в том числе и опорного сечения при $x = l$. Следовательно, балка статически определима.

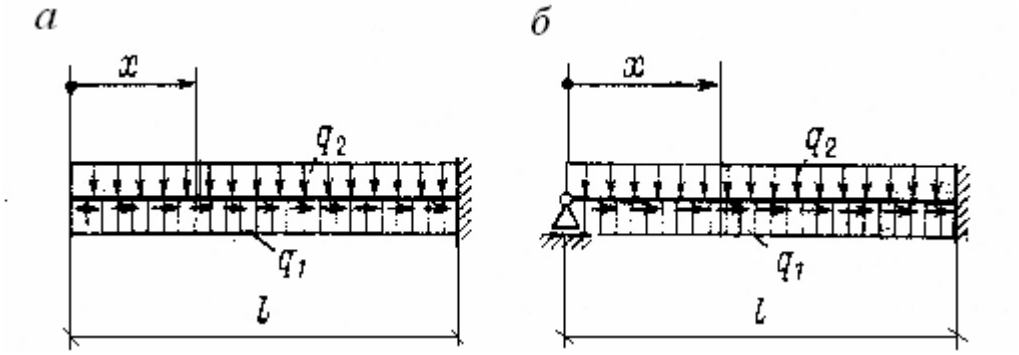


Рис. 1.6

Для второй балки (рис. 1.6, *б*) эти усилия не удается найти только из уравнений равновесия, так как неизвестны (и не могут быть найдены из уравнений равновесия) вертикальные усилия по концам балки. Балка статически неопределима. Для решения задачи необходимо рассмотреть и другие уравнения системы уравнений (1.3) – (1.5). Решение подобных задач в строительной механике стержневых систем будет рассмотрено в главе 6.

Два важных практических вывода можно сделать из рассмотренного примера по определению усилий в статически определимой системе:

1. ***При определении усилий в статически определимой системе из уравнений равновесия жесткость ее стержней никак не используется.***

2. Вместо процедуры интегрирования дифференциальных уравнений равновесия (1.3), записанных для бесконечно малого элемента dx с использованием граничных условий для стержней, ***искомые усилия*** M, Q, N ***в любом сечении стержней статически определимой системы можно определить из уравнений равновесия для части конструкции, расположенной слева или справа от рассматриваемого сечения.***

Первый вывод очевиден, потому что в уравнения равновесия не входят величины S, I, μ, E, G, входящие в физические уравнения закона Гука (1.5) и

(через деформации) в геометрические уравнения (1.4).

Это означает, что ***при определении усилий в статически определимых системах можно принимать любые численные значения этих параметров, в том числе и считать стержни абсолютно жесткими.***

Для пояснения второго вывода вернемся к рассмотрению статически определимой балки, изображенной на рис. 1.6, *а*. Рассечем балку в сечении с координатой x и используем очевидный факт, который был использован и при составлении уравнений равновесия для бесконечно малого элемента dx: ***если находится в равновесии вся балка, то находится в равновесии и любая выделенная из нее часть***. Тогда, например, для части балки, расположенной левее сечения (рис. 1.7), уравнения равновесия запишутся в виде:

$$\begin{aligned} &\sum X^{\text{слева}} = (q_1 x) + N = 0; \\ &\sum Z^{\text{слева}} = -Q - (q_2 x) = 0; \\ &\sum M_c^{\text{слева}} = M + (q_2 x)\cdot(0.5x) = 0. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Отсюда найдем те же усилия (1.7), которые в примере были найдены интегрированием уравнений (1.3):

$$N = -q_1 x; \quad Q = -q_2 x; \quad M = -0.5 q_2 x^2 \qquad (1.9)$$

Полученные отрицательные знаки усилий показывают, что действительные усилия в сечении имеют противоположные направления, по сравнению с теми, которые приняты на рис. 1.7.

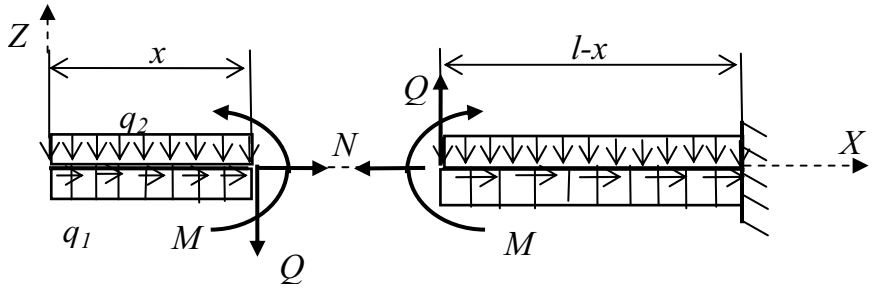


Рис. 1.7

Искомые усилия можно определить и из уравнений равновесия для правой части балки. Но в этом случае необходимо вначале найти опорные реакции в заделке, применив уравнения равновесия для всей балки.

Использование уравнений равновесия, как ко всей стержневой системе, так и к любой ее выделенной части, является одним из важнейших способов контроля усилий, полученных расчетом стержневых систем на ПК.

1.8. Методы расчета стержневых систем по определению их НДС

Решение задачи по расчету стержневой системы с целью определения ее

НДС начинается с выполнения следующих двух пунктов.

1. Прежде всего, выясняется принадлежность стержневой системы к статически определимым или к статически неопределимым системам. Для этого выполняются две процедуры:

1.1. Подсчитывается так называемая «***степень статической неопределимости***» стержневой системы.

1.2. Проводится исследование ***геометрической неизменяемости*** стержневой конструкции.

Решению этих вопросов в учебном пособии посвящен следующий раздел. В нем сначала рассматривается структурное образование геометрически неизменяемых статически определимых и статически неопределимых стержневых систем, а затем приводятся примеры выполнения указанной выше проверки.

2. Выбирается метод решения задачи по определению НДС стержневой системы.

Основными методами расчета НДС стержневых систем являются два метода:

2.1. ***Метод сил***.

2.2. ***Метод перемещени***й.

Предварительные сведения о методе сил

В методе сил (МС) сначала определяются усилия в опорных связях и внутренние усилия в любых сечениях стержней. Затем определяются деформации стержней и перемещения их сечений, интересующие расчетчика.

Если стержневая система статически определима, то любые опорные реакции и внутренние усилия могут быть определены только из уравнений равновесия, применяемых как для всей стержневой системы, так и для любой выделенной из нее части. При этом, как видно из системы уравнений (1.3) – (1.5), такие характеристики стержней как их жесткости при продольных ES, сдвиговых GS и изгибных EI деформациях при определении усилий не используются.

Методика рационального использования уравнений равновесия для определения усилий в статически определимых стержневых системах в зависимости их конструктивных особенностей рассмотрена в разделе 5 УМК.

Примечание. Следует отметить, что методику определения усилий в статически определимых стержневых системах с помощью уравнений равновесия обычно не называют «методом сил». Понятие «метод сил» относят только к статически неопределимым системам.

После определения усилий в статически определимой системе могут быть

определены деформации сечений стержневой системы и их перемещения.

Деформации определяются из уравнений закона Гука (1.5). Вопрос определения перемещений в статически определимых стержневых системах рассмотрен в разделе 6. *Решение этой части задачи определения НДС стержневой системы возможно только при назначении указанных выше жесткостей продольных ES, сдвиговых GS и изгибных EI деформаций.*

Если стержневая система статически неопределима, то уравнений равновесия для определения опорных реакций и внутренних усилий в ней недостаточно. Для определения «лишних» неизвестных составляются дополнительные уравнения, связанные с рассмотрением деформаций и перемещений стержневой системы как линейно деформируемой системы.

Идея метода сил расчета статически неопределимых систем и его алгоритм рассмотрены в разделе 7 УМК.

После определения «лишних» неизвестных с помощью уравнений равновесия можно найти любые опорные реакции и усилия стержневой системы. Затем можно определить интересующие расчетчика деформации и перемещения.

Предварительные сведения о методе перемещений

При расчете стержневой системы этим методом сначала определяются некоторые перемещения (о них будет сказано ниже).

В строительной механике стержневых систем метод перемещений (МП) встречается в двух методических разработках.

Первая методическая разработка метода перемещений появилась в период развития строительной механики, когда все расчеты, выполнялись, условно говоря, вручную (без использования электронных вычислительных машин (ЭВМ)).

Такой метод перемещений обычно называют «классическим». Он очень прост и нагляден, особенно для понимания алгоритма этого метода. С ним можно ознакомиться в учебниках по строительной механике, выпущенных до 2005 г. (см., например, [7]). Но классический МП имеет тот недостаток, что автоматизировать его с целью универсального применения для расчетов любых сложных стержневых систем на современных ПК оказалось невозможным.

Вторая, «современная», разработка метода перемещений для стержневых систем появилась в связи с развитием ЭВМ и развитием численного метода решения различных физико-математических задач, в том числе задач механики твердого деформируемого тела, который был назван

методом конечных элементов (МКЭ).

Применительно к рассматриваемой задаче расчета плоских стержневых систем *стержневая система рассматривается как совокупность стержневых элементов конечной длины, соединенных между собою и с основанием в узлах.*

При этом *МКЭ является численным методом решения системы уравнений (1.3) − (1.5) с заданными граничными условиями.*

Поскольку решение указанной системы уравнений можно представить в форме метода сил, в форме метода перемещений и в форме смешанного метода, когда за неизвестные принимаются и усилия и перемещения, то и численный метод решения этой системы уравнений МКЭ может быть представлен в этих же формах решения.

Во всех имеющихся в настоящее время программах автоматизированного расчета сооружений на ПК методом конечных элементов используется форма метода перемещений. При этом полученный «современный» метод расчета стержневой системы может быть представлен как «*Метод конечных элементов в форме метода перемещений»* или как «*Метод перемещений в форме метода конечных элементов»*.

Идея этого метода и его алгоритм на примере плоских стержневых систем демонстрируются в разделе 8 данного УМК. а также, например, в учебном пособии авторов [4] и в учебных пособиях, написанных на кафедре [10 – 13] другими авторами.

В МКЭ в форме МП за первоначальные неизвестные принимают перемещения узлов совокупности КЭ, на которые разбита стержневая система. Число неизвестных перемещений каждого узла равно числу его степеней свободы.

Неизвестные перемещения узлов в расчетной схеме стержневой системы для МКЭ определяются решением основной разрешающей системы алгебраических уравнений метода перемещений.

Затем по найденным перемещениям узлов определяются связанные с перемещениями усилия в сечениях по концам стержневых элементов и в других сечениях стержней.

Как указывалось в начале предыдущего подраздела, прежде чем приступить к выбору метода расчета стержневой системы необходимо выяснить ее принадлежность к статически определимым или статически неопределимым системам. При этом исследуется и геометрическая неизменяемость системы. Этому вопросу и посвящен следующий раздел УМК.

2. УСЛОВИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕИЗМЕНЯЕМОСТИ И СТАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

2.1. Понятие о жестких дисках. Способы их образования

Жестким диском (далее просто ***диском***) в строительной механике называется плоская стержневая система, *в которой предположение о недеформируемости материала приводит к полному отсутствию* ***относительных*** *перемещений всех точек принадлежащих системе*.

Будем рассматривать диски, находящиеся в плоскости XOZ (см. рис. 1.2, *ж*). Диск, не закрепленный на плоскости, называется ***свободным***. ***Он не имеет относительных степеней свободы элементов его составляющих***, ***но имеет три степени свободы***, ***связанных с его перемещением на плоскости как жесткого тела***. Такими степенями свободы являются линейные перемещения u и w диска в направлении осей X и Z и угол поворота θ относительно оси Y (см. рис. 1.2, *ж*).

Закрепленный диск не имеет степеней свободы. Такой диск можно считать ***неподвижным основанием*** (далее просто ***основанием***) для частичного или полного закрепления на нем с помощью опорных связей (см. рис. 1.6) любого свободного диска. Рассмотрим способы образования дисков (рис. 2.1).

Пример 1. Один и соединение любого числа стержней жесткими узлами создает новый диск .

Один стержень (схема 1 на рис. 2.1, а) является диском. Два или более стержней, соединенных жесткими узлами (схемы 2 – 5 на рис. 2.1, а), также образуют диск.

Замкнутая стержневая система, полученная последовательным соединением стержней (дисков) называется ***замкнутым контуром***. Если в замкнутом контуре стержни (диски) соединены жесткими узлами (схемы 4 и 5 на рис. 2.1, *а*), то замкнутый контур будет диском.

Пример 2. Замкнутый контур с одним, двумя и тремя шарнирами является диском.

Если два стержня (диска) соединить не жестким, а шарнирным узлом (схема 1 на рис. 2.1, *б*), то получится изменяемая система. Такая система представляет собой ***механизмом с одной относительной степенью свободы*** (взаимный угол поворота дисков θ_1 вокруг оси Y).

Соединение концов стержней этого механизма еще с одним стержнем с жесткими узлами (схема 2 на рис. 2.1, *б*); одним жестким, другим шарнирным узлами (схема 3 на рис. 2.1, *б*); ***или только шарнирными узлами,*** (схема 4 на рис. 2.1, *б*) исключает

возможность относительного угла поворота θ_1 и делает систему жестким диском.

Диск из трех стержней, соединенных шарнирами (схема 4 на рис. 2.1, *б*), ***является основой образования решетки простейших геометрически неизменяемых ферм*** (см., например, схемы 1 и 2 на рис. 1.2,).

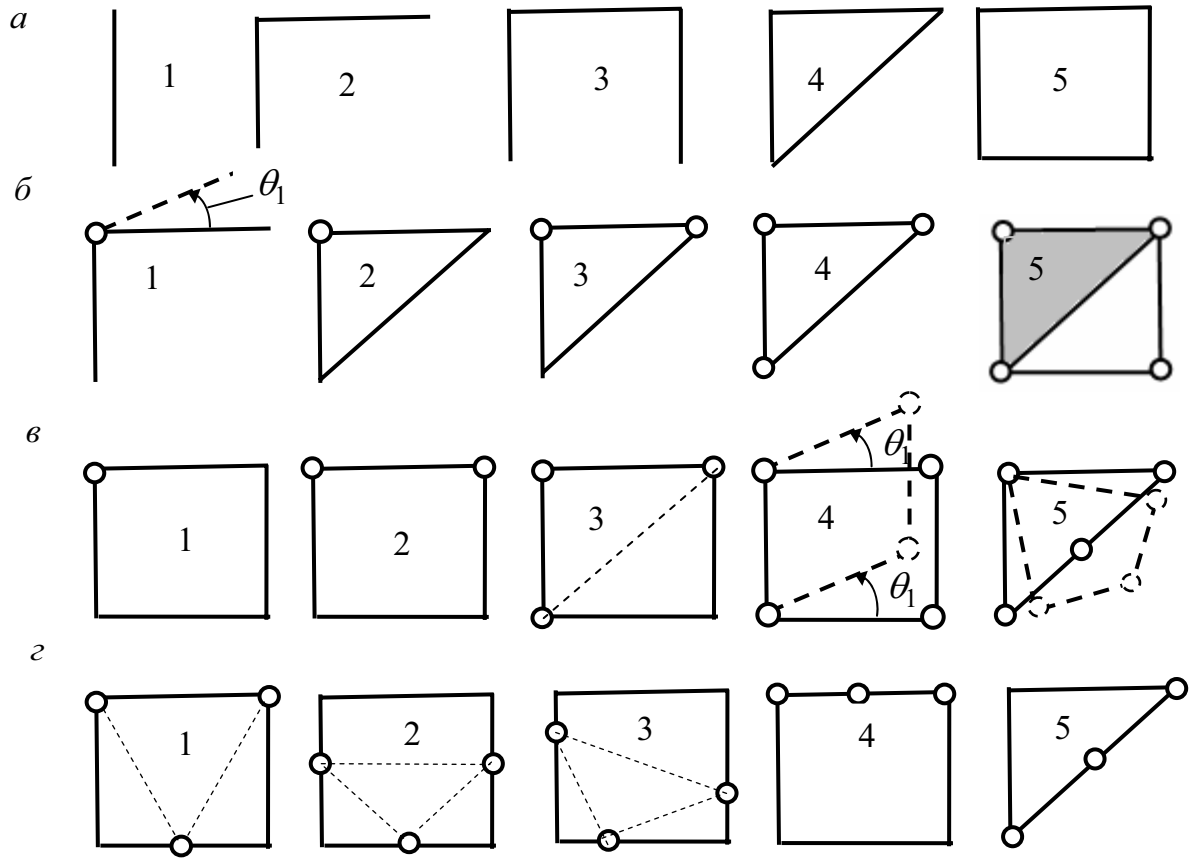


Рис. 2.1

Начальная стадия образования решетки фермы как диска продемонстрирована на схеме 5 рис. 2.1, *б*, где жесткий диск в виде треугольника (он затенен) является стороной нового треугольника. Стержневая система в виде двух треугольников представляет собой новый диск. Его «наращивание» подобным образом может быть продолжено.

Обратим внимание на стержневую систему, изображенную на схеме 3 рис. 2.1, *в*. По своему образованию она аналогична треугольнику на схеме 4 рис. 2.1, *б* и также представляет собой «треугольник», так как состоит из трех дисков, соединенных между собой шарнирными узлами: два диска представляют собой прямые стержни, а один – диск в виде двух стержней, соединенных жестким узлом. Штриховая прямая на этой схеме показывает, что условно можно представить угловой диск как прямой стержень, соединяющий те же два шарнира. Никаких относительных перемещений трех дисков, образующих эту систему, нет.

Прямоугольные диски с одним и двумя шарнирами (схемы 1 и 2 на рис. 2.1, *в*) соответственно аналогичны дискам треугольной формы (см. схемы 2 и 3 на рис. 2.1, *б*).

Приведем примеры образования стержневой системы в виде замкнутого контура не представляющего собой диск, а являющейся механизмом.

Пример 3. Замкнутый контур в виде шарнирного соединения из четырех стержней (дисков) не является диском.

На схеме 4 рис. 2.1, *в* показана стержневая система из четырех стержней, соединенных шарнирными узлами. Видно, что попарно четыре стержня (диска) системы имеют возможность совершать относительное перемещение в виде взаимного угла поворота по отношению друг к другу. Поэтому такая система диском не является.

Обратим внимание еще на одну систему, также не являющуюся диском (схема 5 на рис. 2.1, *в*). Внешне она имеет вид треугольника. Но с точки зрения образования дисков она таковым не является, так как состоит из четырех дисков, соединенных шарнирными узлами. Она представляет собой механизм. На схеме 5 рис. 2.1, *в* штриховой линией показано возможное относительное перемещение ее стержней (дисков).

Пример 4. Три шарнира в замкнутом контуре не должны располагаться на одной прямой (схемы 4 и 5 на рис. 2.1, *г*), **так как в таком случае образуется мгновенно изменяемая система.**

Как уже было показано в предыдущем примере, стержневая система в виде замкнутого контура из трех дисков, соединенных тремя шарнирами, является диском. При этом шарниры могут устанавливаться в контуре как угодно (см.: схему 4 на рис. 2.1. *б*; схему 3 на рис. 2.1, *в*; схемы 1, 2, 3 на рис. 2.1, *г*), лишь бы они не располагались на одной прямой (см. схемы 4 и 5 на рис. 2.1, *г*).

Для пояснения этого рассмотрим стержневую систему в виде диска – «треугольника», состоящего из трех дисков, соединенных шарнирами (см., например диск на схеме 4 рис. 2.1, *б*). Предположим, что один из дисков представляет собой неподвижное жесткое основание с закрепленными на нем шарнирами A и B (рис. 2.2, *а*). Третий шарнирный узел *C* также неподвижен и к нему приложена сосредоточенная сила P.

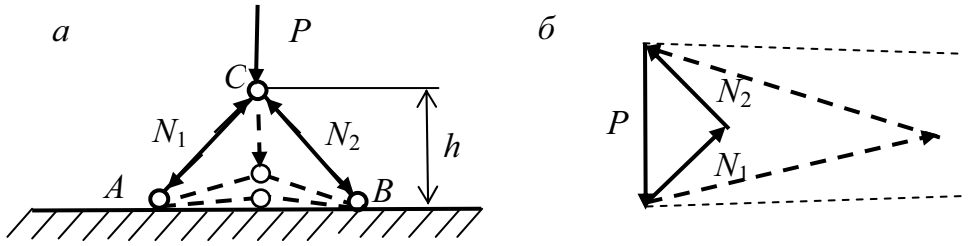


Рис. 2.2

Система в целом геометрически неизменяема (отсутствуют как относительные перемещения точек диска, так и перемещения его как жесткого целого). По сути узел *C* можно рассматривать как шарнирно-неподвижную опору, рассмотренную на рис. 1.3, *б* в первом разделе.

Система является статически определимой, так как продольные усилия N_1, N_2 в стержнях при заданной нагрузке определяются из уравнений равновесия. На рис. 2.2, *б* равновесие узла *C* системы отражено графически (равнодействующая всех сил, действующих на узел равна нулю, поэтому треугольник сил должен быть замкнут).

Если параметр h уменьшать, то узел *C* будет приближаться к прямой *AB*. Тогда стороны треугольника сил, отражающего равновесие узла, представляющие значения

продольных сил N_1, N_2 будут увеличиваться и в пределе (при попадании узла на прямую AB) станут бесконечно большими. Такая система называется ***мгновенно изменяемой***. При отклонении узла C на малую величину h система снова становится неизменяемой, но значения усилий N_1, N_2 будут хотя и не бесконечными, но очень большими.

Мгновенно изменяемые и близкие к ним стержневые системы в строительных конструкциях применять не следует.

2.2. Условия закрепления диска на основании и условия статической определимости опорных реакций

Свободный диск обладает на плоскости тремя степенями свободы.

Прикрепление диска к основанию одной опорной связью (см. рис.1.3, *а*) уменьшает число степеней свободы на одну (лишает диск возможности перемещаться в направлении поставленной связи). Поэтому вариант

$$n_{\text{оп}} < 3, \tag{2.1}$$

где $n_{\text{оп}}$ – число опорных связей, показывает, что опорных связей не достаточно для прикрепления диска к неподвижному основанию. Вариант

$$n_{\text{оп}} > 3 \tag{2.2}$$

показывает, что опорных связей больше требуемых трех. С точки зрения минимально необходимого числа опорных связей при условии (2.2) имеются «лишние» связи.

Обратим внимание на опорные связи, прикрепляющие диск, с точки зрения статической определимости усилий в них (опорных реакций).

Усилия в опорных связях, прикрепляющих диск к основанию, будут статически определимыми, если их не более трех, т.е. не более числа уравнений равновесия, которые отражают равновесие диска.

Хотя условие (2.1) удовлетворяет этому требованию, рассматривать такую систему не будем, так как она имеет недостаточное число связей для ее закрепления на основании, т.е. является геометрически изменяемой системой.

Условие (2.2) показывает, что число опорных реакций больше имеющихся трех уравнений равновесия. Усилия в условно «лишних» связях также условно называют «лишними» неизвестными. Такая система является ***внешне статически неопределимой***. Методика расчета статически неопределимых систем будет рассмотрена после ознакомления учащихся с расчетом статически определимых систем.

Таким образом, ***необходимым условием*** геометрической неизменяемости системы из одного диска и его статической определимости относительно опорных реакций и является условие

$$n_{\text{оп}} = 3 \qquad (2.3)$$

Однако это условие ***необходимо, но недостаточно*** как для закрепления диска, так и для определения опорных реакций из трех уравнений равновесия.

И в том и в другом варианте трактовки условия (2.3) необходимо выполнение еще следующего дополнительного требования.

Оси опорных связей и, следовательно, линии действия усилий в них не должны пересекаться в одной точке и не должны быть параллельными. (2.3)*

Это дополнительное требование к условию (2.3) отмечено тем же номером (2.3) со звездочкой сверху.

Три связи, которые закрепляют диск на основании и имеют статически определимые усилия (реакции), могут быть реализованы в виде одной защемляющей опоры (см. схему 1 на рис. 1.2, *а*) или в виде шарнирно неподвижной и шарнирно подвижной опор, поставленных так, как показано на схемах 2 и 3 на рис. 1.2, *а*).

Рассмотрим варианты неправильной расстановки необходимых для закрепления диска трех опорных связей, когда дополнительное условие (2.3)* не выполнено. Тогда, несмотря на выполнение необходимого условия (2.3), диск не будет неподвижно закреплен на основании, а получится мгновенно изменяемая система. *При этом три опорные реакции не могут быть определены из трех уравнений равновесия.*

Пример 1. Рассмотрим раму, изображенную на рис. 2.3, *а*.

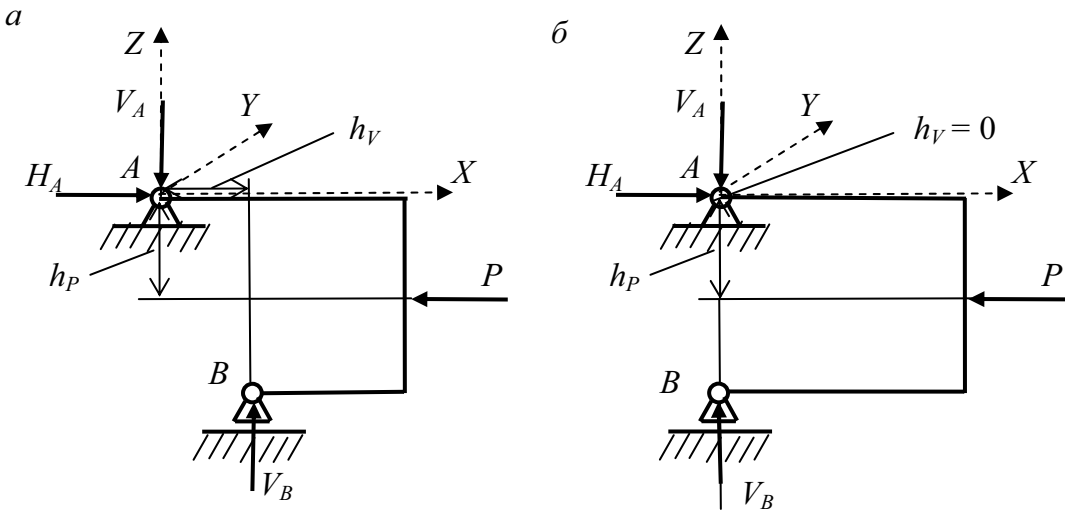


Рис. 2.3

Она представляет собой единый диск, неподвижно прикрепленный к основанию тремя опорными связями. Действительно, две опорные связи пересекаются в опорном шарнире *A* и лишают диск двух степеней свободы (перемещений диска по направлению координатных осей X и Z). Третья (вертикальная) связь в шарнире *B* лишает диск и третьей

степени свободы в виде поворота диска вокруг оси Y, проходящей через шарнир *A*. Полученная конструкция не имеет ни относительных перемещений точек диска, ни перемещений диска как жесткого целого.

Система является статически определимой, так как любые усилия в ней могут быть определены только с помощью уравнений равновесия.

Для пояснения важности правильной постановки опорных связей рассмотрим уравнение равновесия для определения вертикальной опорной реакции V_B и его решение:

$$\sum M_A = -P \cdot h_P + V_B \cdot h_V = 0. \tag{2.8}$$

$$V_B = P\frac{h_P}{h_V}. \tag{2.9}$$

Если плечо h_V опорной реакции V_B относительно опоры *A* будет уменьшаться (опора *B* будет приближаться к оси Z), то реакция V_B будет увеличиваться. В пределе, когда плечо h_V будет равно нулю, искомая опорная реакция станет бесконечно большой (см. (2.9)).

Такой вариант изображен на рис. 2.3, *б*. Он соответствует случаю, когда все три опорные связи пересекаются в одной точке (в данном примере – в опоре *A*). Эта точка, как известно из курса теоретической механики, называется ***мгновенным центром вращения*** рассматриваемой системы. Сама система является мгновенно изменяемой системой.

Как и в предыдущем примере, в строительных конструкциях не допускается применение не только таких систем, но и близких к ним.

Не следует допускать и варианта, когда точка пересечения связей находится в бесконечности, т.е. когда опорные связи параллельны. Такой вариант прикрепления диска показан на рис. 2.4, *а, б* (на рис. 2.4, *б* вертикальные связи представлены шарнирно подвижными (катковыми) опорами)).

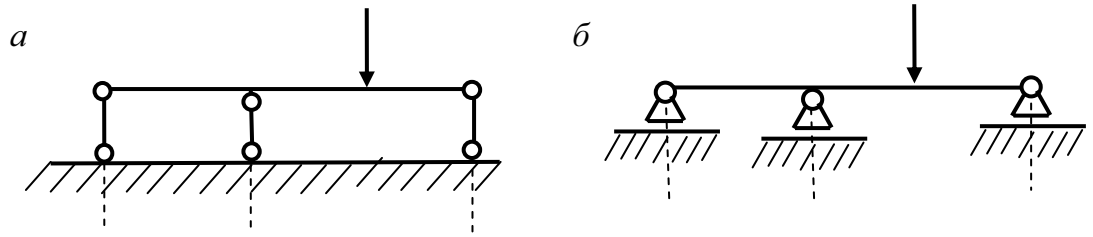


Рис. 2.4

Хотя опорных реакций в опорных связях и уравнений равновесия по-прежнему по три, найти опорные реакции из уравнений равновесия не удастся. Такая система мгновенно изменяема до того момента, пока какая либо связь не будет отклонена от вертикали. Если такое отклонение будет малым, система хотя и не будет изменяемой, но будет иметь большие реакции даже при сравнительно малом значении нагрузки.

2.3. Условия геометрической неизменяемости и статической определимости диска в виде одного замкнутого контура

Рассмотрим диск в виде замкнутого контура без шарниров (см. схему 5 на рис. 2.1, *а*). Будем считать, что условия его закрепления на основании и условия ***внешней статической определимости*** такого диска выполнены (рис. 2.5, *а*) и три опорные реакции (H_A, V_B, V_A) определены соответственно из трех

уравнений равновесия $\sum X = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum Z = 0$.

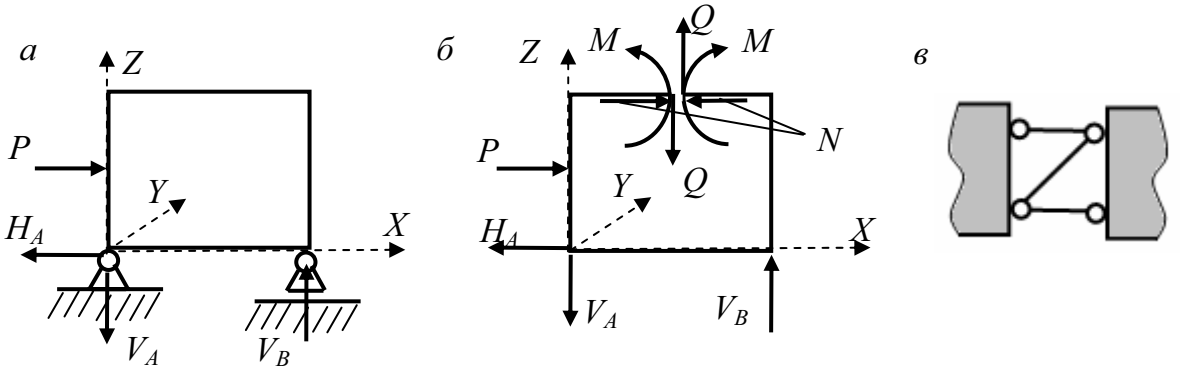


Рис. 2.5

Однако определить усилия M, Q, N в любом сечении такого замкнутого контура с помощью уравнений равновесия невозможно. Действительно (см. рис. 1.7), для определения усилий M, Q, N в сечении, разрезающем систему на две части (слева и справа от сечения), используются уравнения равновесия вида (1.8). В любом сечении замкнутого контура понятие «слева» (или «справа») от сечения стержня не имеют смысла, так как равные неизвестные усилия войдут в каждое такое уравнение дважды: со знаком «плюс» и со знаком «минус» (рис. 2.5, *б*). Иными словами, уравнения равновесия тождественно удовлетворяются при любых значениях усилий в рассматриваемом сечении.

Таким образом, ***замкнутый контур без разрезающих его шарниров трижды статически неопределим.***

Можно рассматривать внутренние усилия M, Q, N как усилия в трех внутренних связях, лишающие левую и правую стороны сечения взаимных перемещений по направлению осей X и Z и взаимного угла поворота относительно оси Y. Один из вариантов схематичного изображения этих связей приведен на рис. 2.5, *в*. При таком представлении усилий статическую неопределимость замкнутого контура называют ***внутренней статической неопределимостью***.

Обратим внимание на то, что разрез стержня контура сечением удаляет эти три связи и делает контур незамкнутым. Однако он по-прежнему остается диском (см. рис. 2.9, *б*). С точки зрения образования диска удаленные связи являются «лишними». «Лишними» с точки зрения их статической определимости оказываются и усилия в этих трех связях.

При постановке в каком-либо сечении стержневого диска в виде замкнутого контура ***одного*** шарнира (см. схему 1 на рис. 2.1, *в*) происходит

удаление ***одной*** внутренней связи, мешающей двум сторонам сечения взаимно поворачиваться вокруг оси Y, контур при этом остается диском. При этом статическая неопределимость контура уменьшится ***на одну*** единицу, поскольку появляется ***одно дополнительное уравнение равновесия*** вида

$$M_C = \sum M_C^{\text{справа}} = 0 \ (\text{или} \sum M_C^{\text{слева}} = 0), \qquad (2.10)$$

записываемого относительно поставленного шарнира C. Такой шарнир в дальнейшем будем называть ***одиночным шарниром***.

Таким образом, при установке в стержневом замкнутом контуре одиночного шарнира контур останется диском, но уже только с двумя «лишними» связями и двумя внутренне статически неопределимыми усилиями в них.

Аналогично, при введении в контур второго и третьего шарниров, система по-прежнему останется диском (для трех шарниров должно выполняться условие о нерасположении их на одной прямой). Диск соответственно становится один раз внутренне статически неопределимым при двух шарнирах и статически определимым – при трех.

Если в замкнутом контуре поставлено больше трех шарниров, система становится геометрически изменяемой (см., например, схемы 4 и 5 на рис. 2.1, в).

Число «лишних» связей в диске – контуре, равное числу «лишних» (статически неопределимых) неизвестных можно подсчитать по формуле

$$n_{\text{л}}^{\text{к}} = 3 - n_{1\text{ш}}^{\text{к}} . \qquad (2.11)$$

При использовании этой формулы для подсчета числа лишних связей и лишнихусилий, входящие в нее величины имеют следующий смысл: 3 – три лишних связи (три лишних усилия) в замкнутом диске без шарниров; $n_{1\text{ш}}^{\text{к}}$ – число одиночных шарниров в замкнутом диске, каждый из которых уменьшает число «лишних» связей (усилий) на единицу.

При вычислении по формуле (2.11) могут получиться три варианта: 1) $n_{\text{л}}^{\text{к}} < 0$; 2) $n_{\text{л}}^{\text{к}} = 0$; 3) $3 > n_{\text{л}}^{\text{к}} > 0$.

Первый вариант показывает, что число шарниров в контуре больше трех ($n_{1\text{ш}} > 3$), т.е. ***удалены не только три «лишних» связи, но и необходимые связи***, удаление которых приводит к геометрической изменяемости диска в виде замкнутого контура. ***Система в виде замкнутого контура при наличии более трех шарниров явно геометрически изменяема***.

Третий вариант показывает, что ***система в виде замкнутого контура***

при наличии одного или двух шарниров $(n_{1ш} < 3)$ ***явно статически неопределима***.

Второй вариант показывает, что число шарниров в диске в виде замкнутого контура равно трем $(n_{1ш} = 3)$. «Лишних» связей и, следовательно, «лишних» усилий в диске нет.

Таким образом, вариант расчета 2 является ***необходимым условием геометрической неизменяемости и статической определимости диска в виде свободного замкнутого контура***.

Для диска в виде одного прикрепленного к основанию замкнутого контура ***необходимым условием геометрической неизменяемости и статической определимости, кроме соблюдения условия (2.3) и дополнительного требования (2.3)* правильной установки опорных связей, является также соблюдение условия***

$$n_{л}^{к} = 0 \text{ или } n_{1ш}^{к} = 3 \qquad (2.12)$$

и дополнительного требования:

три шарнира в замкнутом контуре не должны располагаться на одной прямой. (2.12)*

2.4. Условия геометрической неизменяемости и статической определимости стержневой системы как системы дисков, соединенных шарнирами

Условия геометрической неизменяемости

Будем рассматривать стержневые системы (см., например рис. 1.2), как системы дисков, соединенных между собой ***одиночными шарнирами*** (каждый из них эквивалентен двум связям), а с основанием – опорными связями.

Число дисков, одиночных шарниров, соединяющих диски между собой и опорных связей составляет соответственно $n_{д}$, $n_{1ш}^{д}, n_{оп}$.

Сопоставление суммарного числа $(n_{оп} + 2n_{1ш}^{д})$ опорных связей и связей, соединяющих диски между собой, с числом $3n_{д}$ степеней свободы всех дисков, когда они являются свободными, т.е. отделенными друг от друга и от основания, приведет к трем вариантам оценки геометрической неизменяемости системы. Первый вариант в виде

$$(n_{оп} + 2n_{1ш}^{д}) < 3n_{д} \qquad (2.13)$$

показывает, что связей в системе недостаточно для уничтожения всех степеней свободы свободных дисков и ***система явно геометрически изменяема***.

Необходимому условию геометрической неизменяемости системы отвечает условие

$$(n_{\text{оп}} + 2n_{1\text{ш}}^{\text{д}}) \geq 3n_{\text{д}}. \qquad (2.14)$$

Однако ***это условие необходимо, но недостаточно для окончательного суждения о геометрической неизменяемости системы.*** Должно также соблюдаться требование о правильной постановке шарниров и опорных связей, в том числе и выполнение условий (2.3) и (2.3)*.

Условия статической определимости при нахождении усилий в опорных связях и в связях, соединяющих диски между собой

Рассмотрим два варианта постановки задачи по определению усилий в стержневых системах.

Задача 1. Ставится задача определения усилий ***во всех*** $(n_{\text{оп}} + 2n_{1\text{ш}}^{\text{д}})$ связях. Это означает, что диски отрезаны от основания и друг от друга (связи удалены) и действие связей на основание и на диски заменено действием пока неизвестных усилий в связях общим числом $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 2n_{1\text{ш}}^{\text{д}})$.

Эти усилия и требуется определить для дальнейшего расчета от их действия каждого свободного диска отдельно и фундаментов опор.

Так как диски отделены друг от друга, то равновесие каждого диска под действием приложенных к нему нагрузок и усилий в удаленных связях описывается тремя уравнениями равновесия. Для всех дисков числом $n_{\text{д}}$ получится система $n_{\text{ур}} = 3n_{\text{д}}$ уравнений равновесия.

Сопоставление суммарного числа $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 2n_{1\text{ш}}^{\text{д}})$ неизвестных усилий в опорных связях и в связях, соединяющих диски между собой, с числом $n_{\text{ур}} = 3n_{\text{д}}$ уравнений равновесия всех дисков, когда они являются свободными, т.е. отделенными друг от друга и от основания, приведет к трем вариантам оценки статической определимости системы. Первый вариант в виде

$$(n_{\text{оп}} + 2n_{1\text{ш}}^{\text{д}}) > 3n_{\text{д}} \qquad (2.15)$$

показывает, что число неизвестных усилий в связях больше числа уравнений равновесия для системы свободных от связей дисков и ***система явно статически неопределима***.

Необходимому условию статической определимости системы отвечает условие

$$(n_{\text{оп}} + 2n_{1\text{ш}}^{\text{д}}) \leq 3n_{\text{д}}. \qquad (2.16)$$

Сопоставляя выражения (2.13) – (2.16), видим, что ***необходимым условием и геометрической неизменяемости и статической определимости системы будет равенство***

$$(n_{\text{оп}} + 2n_{1\text{ш}}^{\text{д}}) = 3n_{\text{д}}. \qquad (2.17)$$

Однако ***это условие необходимо, но недостаточно для окончательного суждения о геометрической неизменяемости и статической определимости системы.*** Должно также соблюдаться требование о правильной постановке шарниров и опорных связей, в том числе и выполнение условий (2.3) и (2.3)*.

Задача 2. Иногда при решении задачи определения усилий в стержневых системах ставится цель определения усилий не сразу во всех связях, соединяющих диски между собой и с основанием, а ***только в опорных связях***. Это означает, что в отличие от задачи 1 определения усилий система дисков не разделяется по шарнирам на отдельные диски.

Система дисков в задаче 2 отделяется только от основания: опорные стержни числом $n_{\text{оп}}$ удаляются и заменяются усилиями в них, т.е. опорными реакциями. Число неизвестных усилий при расчете приравнивается числу опорных реакций: $n_{\text{н}} = n_{\text{оп}}$.

Число уравнений равновесия $n_{\text{ур}}$, которые можно записать для описания равновесия системы дисков, соединенных шарнирами и отделенных от основания, определится из выражения в виде:

$$n_{\text{ур}} = (3 + n_{1\text{ш}}^{\text{д}}), \qquad (2.18)$$

где 3 – три уравнения равновесия, которые можно записать для всей системы дисков, отделенной от основания, если бы она была единым диском (диски были бы соединены между собой жесткими узлами); $n_{1\text{ш}}^{\text{д}}$ – число дополнительных уравнений равновесия вида (2.10), равное числу ***одиночных шарниров***, ***поставленных в узлах соединения дисков между собой***.

Необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости в задаче 2 вместо условия (2.17) выразится уравнением

$$n_{\text{оп}} = (3 + n_{1\text{ш}}^{\text{д}}). \qquad (2.19)$$

Также как и в задаче 1 ***это условие необходимо, но недостаточно для окончательного суждения о геометрической неизменяемости и статической определимости системы.*** Должно также соблюдаться требование о правильной постановке шарниров и опорных связей, в том числе и

выполнение условий (2.3) и (2.3)*.

Примечание. Число уравнений равновесия в задаче 2, представленное формулой (2.18), и условие (2.19) можно получить и непосредственно из уравнения (2.17), если перенести величину $2n_{1ш}^{д}$ из левой части уравнения в правую и учесть, что число дисков в системе больше числа соединяющих их шарниров на одну единицу: $n_{д} = n_{1ш}^{д} + 1$.

Условия геометрической неизменяемости и статической определимости при учете в системе замкнутых контуров

Предположим, что в системе соединенных друг с другом дисков имеются замкнутые контуры числом $n_{к}$. Тогда они должны быть учтены при оценке геометрической неизменяемости и статической определимости (или неопределимости) системы.

Этот учет производится в соответствии с выражением (2.11) добавлением соответственно в левую и правую часть равенства (2.19) числа $3n_{к}$ «лишних» неизвестных в $n_{к}$ замкнутых контурах и числа $n_{1ш}^{к}$ дополнительных уравнений равновесия вида (2.10) относительно одиночных шарниров ***во всех*** $n_{к}$ ***замкнутых контурах***.

В результате получим ***необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости системы*** в виде

$$(n_{оп} + 3n_{к}) = (3 + n_{1ш}^{д} + n_{1ш}^{к}).$$

Выполним преобразование этой формулы с учетом следующих двух замечаний.

1. В расчетных схемах стержневых систем (см., например, рис. 1.2 и рис. 2.1) изображение одиночных шарниров, относящиеся к замкнутым контурам, ничем не отличаются от одиночных шарниров, соединяющих диски между собой и поэтому трудно разделить их при подсчете на шарниры соединяющие диски и шарниры, поставленные внутри дисков.

2. В расчетных схемах стержневых систем кроме ***одиночных шарниров,*** соединяющих в узле только два диска (рис. 2.6, *а*), могут быть шарниры ***двойные*** (два одиночных)***, тройные*** (три одиночных) и т.д., соединяющие в узле соответственно три диска (рис. 2.6, *б*), четыре диска (рис. 2.6, *в*) и т.д.

Так как подсчитывается число одиночных шарниров, то нужно быть внимательным: двойные, тройные и другие шарниры следует заменять соответствующим числом одиночных шарниров.

В связи с этими замечаниями запишем предыдущее ***необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости***

стержневой системы в виде

$$(n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) = (3 + n_{1\text{ш}}), \qquad (2.20)$$

где $n_{1\text{ш}} = n_{1\text{ш}}^{\text{д}} + n_{1\text{ш}}^{\text{к}}$ – суммарное число одиночных шарниров, к которым приводятся ***все*** двойные, тройные и т.д. шарниры стержневой системы.

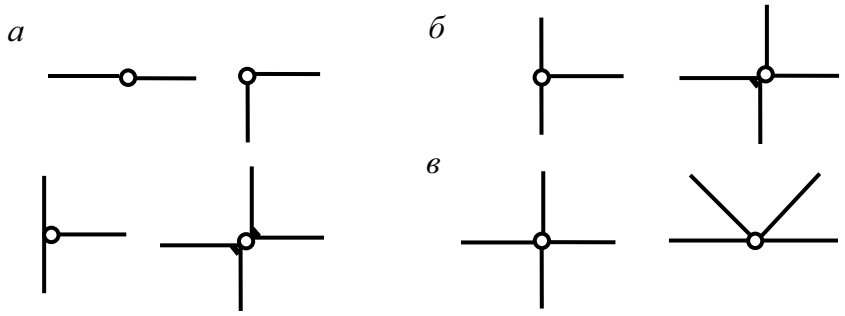


Рис. 2.6

Условие (2.20) необходимо, но недостаточно для окончательного суждения о геометрической неизменяемости и статической определимости системы. Дополнительным условием является требование правильной расстановки шарниров и получения действительно ***геометрически неизменяемой системы***. Геометрическая неизменяемость системы, удовлетворяющей условию (2.20), устанавливается ***структурным анализом*** стержневой системы или специальным исследованием.

Структурный анализ стержневой системы связан с выявлением имеющихся дисков в стержневой системе и проверкой правильности соединения их опорными связями с основанием и шарнирными узлами между собой. При этом учитываются рассмотренные в этом подразделе рекомендации (2.3) и (2.3)*, (2.12) и (2.12)* по установке опорных связей и шарниров, которые не приводят к образованию геометрически неизменяемых частей стержневой системы и всей системы в целом.

Специальные методы исследования ГН будут рассмотрены в дальнейшем.

2.5. Выяснение принадлежности стержневой системы к статически определимым или статически неопределимым системам

Прежде чем приступить к расчету стержневой системы по определению ее НДС выясняют, является она статически определимой или статически неопределимой.

Для этого выполняются следующие два действия (обозначения и смысл действий должен быть понятен из предыдущих объяснений):

- 1. Подсчитывается степень статической неопределимости стержневой системы

$$n = n_{н} - n_{ур} = (n_{оп} + 3n_{к}) - (3 + n_{1ш}) \qquad (2.21)$$

и делается вывод, соответствующий полученному результату расчета.

- 2. Выполняется исследование геометрической неизменяемости стержневой системы.

В первом пункте проверки получается один из следующих трех вариантов результатов.

Вариант 1: $n < 0$. Как показано выше, ***для такой системы выполняется необходимое условие статической определимости*** т.к. число неизвестных усилий $n_{н} = (n_{оп} + 3n_{к})$ меньше числа $n_{ур} = (3 + n_{1ш})$ уравнений равновесия, имеющихся для определения указанных усилий, ***но не выполняется необходимое условие геометрической неизменяемости,*** т.к. число связей в системе будет меньше числа степеней свободы ее дисков.

Иными словами, при получении результата расчета по формуле (2.21) в виде варианта $n < 0$ необходимо сделать вывод, что ***такая система явно геометрически изменяема***.

Вариант 2: $n = 0$. ***Выполняется необходимое условие статической определимости стержневой системы***, т.к. число неизвестных усилий $n_{н} = (n_{оп} + 3n_{к})$ равно числу $n_{ур} = (3 + n_{1ш})$ уравнений равновесия, имеющихся для определения указанных усилий.

Вариант 3: $n > 0$. ***Система явно статически неопределима***, т.к. число неизвестных усилий $n_{н} = (n_{оп} + 3n_{к})$ больше числа $n_{ур} = (3 + n_{1ш})$ уравнений равновесия, имеющихся для определения указанных усилий.

Во втором пункте проверки выполняется структурный анализ стержневой системы. Если система имеет достаточное число связей, соединяющих диски между собой и с основанием (второй и третий варианты первого пункта), и связи в ней правильно поставлены (с точки зрения данных выше рекомендаций), то вся конструкция образует единый неподвижный диск и является геометрически неизменяемой системой.

Различие геометрически неизменяемых систем, которым в пункте 1 соответствует второй и третий варианты, состоит в том, что при выполнении условия второго варианта стержневая система будет статически определима, а при выполнении третьего варианта – статически неопределима.

В получении таких выводов и состоит смысл выполняемой проверки стержневой системы перед расчетом ее НДС.

Рассмотрим примеры проверки статической определимости или

неопределимости расчетных схем различных стержневых систем, изображенных на рис. 1.2. Процедуру проверки будем выполнять в виде указанных выше двух пунктов.

Пример 1. ***Простейшие балки (рис.1.2, а)***

1. Для всех изображенных балок при выполнении пункта 1 с использованием формулы (2.21) имеем: $n_{оп} = 3$, $n_к = 0$, $n_н = (n_{оп} + 3n_к) = 3$; $n_{1ш} = 0$, $n_{ур} = (3 + n_{1ш}) = 3$ и $n = n_н - n_{1ш} = 0$. ***Выполняется необходимое условие статической определимости этих балок***, записанное в виде $n_{оп} = 3$ (2.3) или в виде $n = 0$.

2. Структурный анализ изображенных расчетных схем показывает, что все приведенные варианты присоединения балки к основанию тремя связями удовлетворяют и требованию (2.3)*: связи не параллельны друг к другу и не пересекаются в одной точке. Поэтому ***все простейшие балки, изображенные на рис. 1.2, а, геометрически неизменяемы***.

Общий вывод на основании пунктов 1 и 2: ***все простейшие балки, изображенные на рис. 1.2, а, статически определимы***.

Пример 2. ***Неразрезная балка (рис.1.2, б)***

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{оп} = 5$, $n_к = 0$, $n_н = (n_{оп} + 3n_к) = 5$; $n_{1ш} = 0$, $n_{ур} = (3 + n_{1ш}) = 3$ и $n = n_н - n_{1ш} = 2 > 0$.. ***Трех уравнений равновесия, которые можно записать для балки, недостаточно для определения пяти неизвестных опорных реакций.***

2. Структурный анализ конструкции показывает, что пять связей, прикрепляющие балку к основанию, не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу. ***Балка является геометрически неизменяемой системой.***

Общий вывод на основе пунктов 1 и 2: ***балка геометрически неизменяема и два раза статически неопределима.***

Пример 3. ***Шарнирная балка (рис.1.2, в)***

1. В соответствии с формулой (2.21):. $n_{оп} = 5$, $n_к = 0$, $n_н = (n_{оп} + 3n_к) = 5$; $n_{1ш} = 2$, $n_{ур} = (3 + n_{1ш}) = 5$ и $n = n_н - n_{1ш} = 0$. ***Выполняется необходимое условие статической определимости балки***.

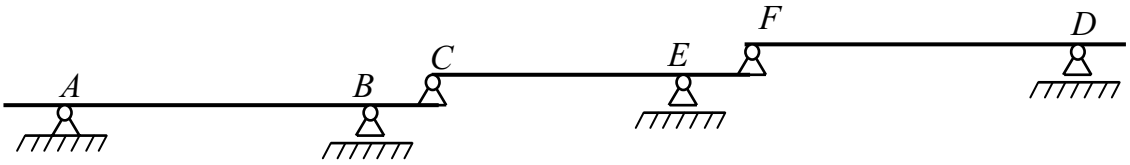


Рис. 2.7

2. Структурный анализ заданной расчетной схемы балки выполняется в виде построения так называемой *этажной схемы* (рис. 2.7) или *схемы образования геометрически неизменяемой конструкции*.

Построение схемы начинается со звена AB балки, которое, как показано в первом

примере, является геометрически неизменяемым и статически определимым и диском, прикрепленным к основанию. Поэтому он может считаться основанием для следующего диска. EC В связи с этим, шарнир E балки может считаться шарнирно неподвижной опорой E (см. рис. 2.7).

Диск EC, соединенный двумя связями в шарнире E с неподвижным диском AB, оказывается тоже закрепленным, так как он имеет третью связь в виде опоры балки C. Поэтому этот диск может рассматриваться как неподвижное основание для диска FD. По отношению к нему проводятся рассуждения аналогичные приведенным выше. И делается вывод, что и этот диск закреплен. ***Балка геометрически неизменяема***.

Таким образом, можно сделать общий вывод, что ***балка статически определима***.

Пример 4. ***Рама, изображенная на схеме 1 рис. 1.2, г.***

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{\text{оп}} = 3$, $n_{\text{к}} = 0$, $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) = 3$; $n_{1\text{ш}} = 0$, $n_{\text{ур}} = (3 + n_{1\text{ш}}) = 3$ и $n = n_{\text{н}} - n_{1\text{ш}} = 0$. ***Выполняется необходимое условие статической определимости рамы***.

2. ***Рама является геометрически неизменяемой системой***, так как она представляет собой один диск, присоединенный к основанию тремя связями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными друг другу.

Общий вывод: ***рама статически определима.***

Пример 5. ***Рама, изображенная на схеме 2 рис. 1.2, г.***

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{\text{оп}} = 3 + 3 + 1 = 7$, $n_{\text{к}} = 0$, $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) = 7$; $n_{1\text{ш}} = 1 \cdot 4 = 4$, $n_{\text{ур}} = (3 + n_{1\text{ш}}) = 3 + 4 = 7$ и $n = n_{\text{н}} - n_{1\text{ш}} = 0$. ***Выполняется необходимое условие статической определимости рамы***.

2. Структурный анализ расчетной схемы рамы позволяет отметить следующее.

В схеме 2 рамы на рис.1.2, *в*, шарниры A и B неподвижны, так как они принадлежат неподвижным дискам-стержням, расположенным ниже шарниров и жестко связанным с основанием.

Диски AC и BC вместе с неподвижным диском основания образуют неподвижный диск, который условно можно представить как «треугольник» ABC (см. схемы 1 – 3 на рис. 2.1, *г*).

Жесткий диск DE присоединен шарниром D (две связи) к неподвижной части рамы и имеет третью вертикальную связь в опоре E. Такой диск тоже неподвижен.

Таким образом, ***вся рама представляет собой единый неподвижный диск, т.е. является системой геометрически неизменяемой.***

Общий вывод: ***рама статически определима***.

Пример 6. ***Рама, изображенная на схеме 3 рис. 1.2, г.***

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{\text{оп}} = 2 + 3 = 5$, $n_{\text{к}} = 1$, $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) = (5 + 3) = 8$; $n_{1\text{ш}} = 1 + 2 = 3$, $n_{\text{ур}} = (3 + n_{1\text{ш}}) = 3 + 3 = 6$ и $n = n_{\text{н}} - n_{1\text{ш}} = 8 - 6 = 2 > 0$. ***Недостает двух уравнений равновесия для определения всех указанных неизвестных усилий. Рама дважды статически неопределима***. Выполнением структурного анализа выясним ее геометрическую неизменяемость.

2. В схеме 3 рамы на рис.1.2, *г* шарнир C относится к неподвижному диску. Диск ADC тоже неподвижен, так как он прикреплен к основанию двумя связями в опоре A и двумя связями в шарнире C. Кроме того, этот диск связан с неподвижным шарниром C диском-стержнем DC. Делаем вывод, что рама геометрически неизменяема.

Общий вывод: ***рама геометрически неизменяема и дважды статически неопределима***.

Пример 7. ***Рама, изображенная на рис. 2.8, а***

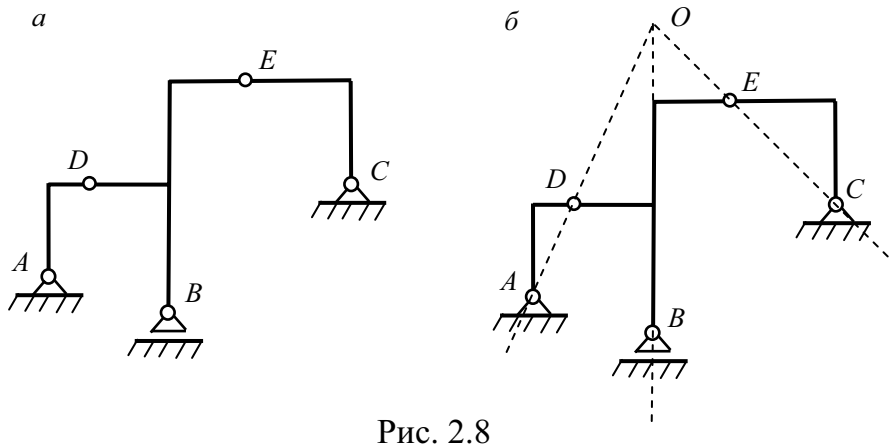


Рис. 2.8

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{оп} = 2+1+2 = 5$, $n_к = 0$, $n_н = (n_{оп} + 3n_к) = (5+0) = 5$; $n_{1ш} = 1+1 = 2$, $n_{ур} = (3 + n_{1ш}) = 3+2 = 5$ и $n = n_н - n_{1ш} = 0$. ***Выполняется необходимое условие статической определимости рамы***.

2. Структурный анализ расчетной схемы рамы показывает, что она является ***мгновенно изменяемой системой***. Действительно, при рассмотрении диска DBE можно считать его присоединенным к основанию тремя связями, пересекающимися в точке *O*, являющейся мгновенным центром вращения диска (рис. 2.8, *б*).

Общий вывод: ***Несмотря на соблюдение необходимого условия статической определимости, система таковой не является.*** Аналогичный случай уже был рассмотрен в подразделе 2.4 (см. рис. 2.3).

Пример 8. ***Рама, изображенная на рис. 2.9***

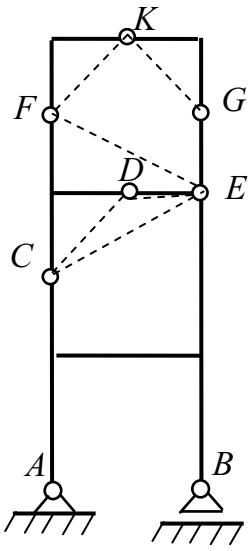


Рис. 2.9

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{оп} = 2+1 = 3$, $n_к = 2$, $n_н = (n_{оп} + 3n_к) = (3+6) = 9$; $n_{1ш} = 5+2 = 7$, $n_{ур} = (3 + n_{1ш}) = 3+7 = 10$ и $n = n_н - n_{1ш} = -1 < 0$.

Получили первый вариант результата при подсчете степени статической неопределимости рамы. Ему соответствует вывод: ***рама явно геометрически изменяема.*** Проверку этого выполним с помощью структурного анализа расчетной схемы.

2. Сначала рассмотрим диск $ABCE$, который прикреплен к основанию тремя опорными связями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными друг другу. Такой диск будет неизменяемой системой. Его можно рассматривать как неподвижное основание для части системы выше шарниров C и E.

Диски CDF и DE вместе с неподвижным диском $ABCE$ образуют «треугольник». На схеме он условно показан штриховыми линиями. В результате такого структурного анализа устанавливаем, что вся часть конструкции, лежащая ниже шарниров F и E может рассматриваться как неподвижный диск – основание для выше лежащей части.

Оставшаяся конструкция может рассматриваться как система четырех дисков, три из которых, в том числе неподвижный диск – основание, условно показаны штриховыми линиями. Так как диски соединены друг с другом только шарнирными узлами, то очевидно, что такая система геометрически изменяема (см. схемы 4 и 5 на рис. 2.1, *г*).

Пример 9. ***Трехшарнирная арка без затяжки (см. схему 1 на рис. 1.2, д)***

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{оп} = 4$, $n_к = 0$, $n_н = (n_{оп} + 3n_к) = 4$; $n_{1ш} = 1$, $n_{ур} = (3 + n_{1ш}) = 3 + 1 = 4$ и $n = n_н - n_{1ш} = 0$. ***Выполняется необходимое условие статической определимости рамы***.

2. Трехшарнирная арка, изображенная на схеме 1 рис. 1.2, *г*, ***геометрически неизменяема,*** так как три жестких диска (две полуарки и жесткий неподвижный диск основания) соединены шарнирами в «треугольник», который в данном примере неподвижен.

Пример 10. ***Трехшарнирная арка с затяжкой (см. схему 2 на рис. 1.2, д)***

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{оп} = 3$, $n_к = 1$, $n_н = (n_{оп} + 3n_к) = 6$; $n_{1ш} = 3$, $n_{ур} = (3 + n_{1ш}) = 3 + 3 = 6$ и $n = n_н - n_{1ш} = 0$. ***Выполняется необходимое условие статической определимости рамы***.

2. Трехшарнирная арка, изображенная на схеме 2 рис. 1.2, *г*, ***геометрически неизменяема,*** Действительно, три жестких диска (две полуарки и жесткий диск в виде затяжки) соединены шарнирами в «треугольник» и образуют единый диск. Этот диск прикреплен к основанию тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными друг другу.

Общий вывод: трехшарнирная арка с затяжкой статически определима.

2.6. Подсчет степени статической неопределимости ферм

Формула (2.21) для подсчета степени статической неопределимости применима ко всем стержневым системам, приведенным на рис. 1.2.

Однако при использовании этой формулы для ферм возрастает трудоемкость подсчета числа одиночных шарниров, поскольку в расчетной схеме фермы (см., например, схемы на рис. 1.2,*е*) встречаются шарниры разной кратности одиночному шарниру.

Оказывается возможным получения для ферм более простой формулы. Это делается на основе использования следующего основного свойства ферм.

Если нагрузка на ферму, имеющую прямолинейные стержни, приложена к узлам фермы, то все узлы расчетных схем ферм считаются шарнирными и в ее стержнях возникают только продольные силы.

Действительно, любой стержень с номером i, выделенный из фермы с узловой нагрузкой, имеет шарниры по концам (рис. 2.10), а значит – находится в равновесии только при действии продольных сил N_i, действующих в этих шарнирах на стержень. Стержни с нулевыми усилиями называются «нулевыми».

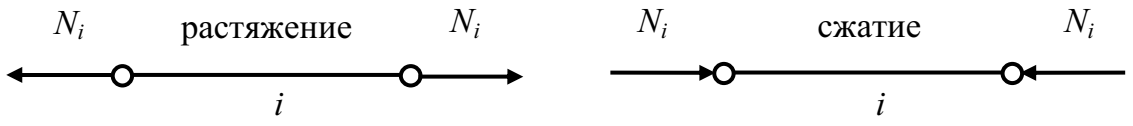


Рис. 2.10

Таким образом, в ферме имеется $n_{\text{с}}$ неизвестных усилий в стержнях фермы и $n_{\text{оп}}$ неизвестных усилий в опорных стержнях фермы. Всего при решении задачи об НДС фермы будем иметь $n_{\text{н}} = n_{\text{с}} + n_{\text{оп}}$ неизвестных усилий. Все эти усилия действуют на узлы фермы числом $n_{\text{у}}$.

Для каждого узла i фермы можно составить два уравнения равновесия. В системе ОСК, которая изображена на рис. 1.2, *ж*, они могут быть представлены в виде (2.22).

В центре узла пересекаются линии действия всех сил, действующих на узел. Поэтому третье уравнение равновесия узла, имеющее вид равенства нулю моментов относительно центра узла, удовлетворяется тождественно и не может быть использовано для определения усилий в фермах.

$$\sum_{i=1}^{n_{\text{у}}} X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n_{\text{у}}} Z_i = 0. \tag{2.22}$$

Всего для $n_{\text{у}}$ узлов фермы будем иметь $n_{\text{ур}} = 2n_{\text{у}}$ уравнений равновесия. Таким образом, кроме формулы (2.21) степень статической неопределимости ферм можно найти также по формуле

$$n = n_{\text{н}} - n_{\text{ур}} = (n_{\text{с}} + n_{\text{оп}}) - 2n_{\text{у}}. \tag{2.23}$$

При использовании этой формулы получаются те же варианты результатов расчета, которые описаны для формулы (2.21).

Необходимому условию статической определимости фермы будет соответствовать условие $n = 0$***, которому соответствует равенство числа*** $n_{\text{н}} = n_{\text{с}} + n_{\text{оп}}$ ***неизвестных усилий в стержнях фермы числу*** $n_{\text{ур}} = 2n_{\text{у}}$ ***уравнений равновесия узлов вида (2.22).***

Для того чтобы при выполнении необходимого условия $n = 0$ ферма была действительно статически определимой необходимо соблюдение дополнительного условия о геометрической неизменяемости фермы. Для

простейших по образованию ферм это ГН доказывается структурным анализом фермы с помощью процедуры последовательного наращивания диска, представляющего ферму, образованием новых «треугольных» дисков (см. рис. 2.1, *б*, 5).

Пример 11. ***Ферма, изображенная на рис. 1.2, е, 2***

1. В соответствии с формулой (2.23) имеем:

$n_{н} = (n_{с} + n_{оп}) = (4 \cdot 2 + 4 + 5) + 3 = 20$ $\quad n_{ур} = 2n_{у} = 2 \cdot 10 = 20$ и .

$n = n_{н} - n_{ур} = (n_{с} + n_{оп}) - 2n_{у} = 0.$

Выполняется необходимое условие статической определимости фермы.

2. Структурный анализ фермы, выполненный по процедуре наращивания диска (см. рис.2.1, *б*, 5) показывает, что ферма представляет собой единый диск. Он неподвижно прикреплен к основанию тремя связями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными друг другу. Общий вывод: ***ферма статически определима.***

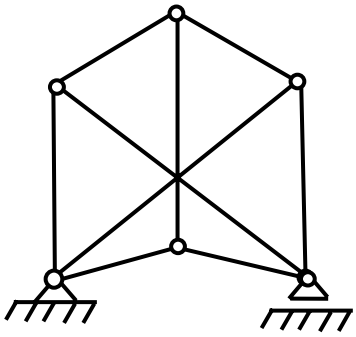


Рис. 2.11

Рассмотренные простые приемы структурного анализа иногда не позволяют провести анализ геометрической неизменяемости стержневой системы, если она образована более сложным способом.

Примером такой системы является на первый взгляд простая ферма, изображенная на рис. 2.11.

Однако, начать структурный анализ этой фермы путем образования диска в виде треугольника не удается. Здесь необходимо прибегнуть к специальным методам исследования геометрической неизменяемости стержневых систем, один из которых будет рассмотрен в подразделе 4.8 части 2 учебного пособия, после изучения способов определения усилий в стержнях ферм.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О РАСЧЕТЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

3.1. Представление расчетных схем стержневых систем как систем конечных стержневых элементов.

При решении основной задачи строительной механики (определение перемещений, усилий и деформаций от заданных внешних воздействий) для стержневых систем методом конечных элементов (МКЭ) их представляют как системы типовых стержневых конечных элементов (КЭ), соединенных между собой и с основанием в жестких и шарнирных узлах. Это продемонстрировано в большом числе работ, например [7-13], где показано, что КЭ могут представлять собой как систему нескольких соединенных друг с другом стержней, так и иметь вид одного прямолинейного стержня.

В данном учебном пособии при расчете стержневых систем МКЭ рассматривается его реализация в форме метода перемещений на ПК с помощью программы SCAD [19], в которой используются только прямолинейные стержневые элементы.

В плоских стержневых системах в программе SCAD используются прямолинейные стержневые КЭ двух типов:

1. Стержень, работающий только в условиях продольных деформаций. В его сечениях возникают только продольные усилия N.

В таких условиях находятся стержни в расчетной схеме фермы, которая имеет шарнирные узлы (см. подраздел 2.6). Поэтому КЭ типа 1 называют элементом типа «***стержень плоской фермы***».

Однако такой элемент (внешним признаком его в расчетной схеме стержневой системы является наличие шарниров по его концам и отсутствие поперечной нагрузки на него) может встретиться в расчетной схеме МКЭ и шарнирной балки и рамы (см., например, схему 3 на рис. 1.2).

2. Стержень, в сечениях которого в общем случае могут возникнуть изгибные, поперечные и продольные деформации и соответствующие им усилия M, Q, N.

В таких условиях в общем случае работают стержни плоской рамы. Поэтому КЭ типа 2 называют элементом типа «***стержень плоской рамы***».

На расчетной схеме МКЭ для рам и балок такой элемент встречается в различном виде, который характеризуется числом внутренних связей,

прикрепляющих его к намеченным в расчетной схеме узлам. Далее это продемонстрировано на примере плоской рамы (рис. 3.1, *а*), взятой из книги [19] авторов вычислительного комплекса SCAD. Рама геометрически неизменяема и один раз статически неопределима (см. формулу (2.21), из которой следует, что $n = (4 + 3 \cdot 1) - (3 + 3) = 1$).

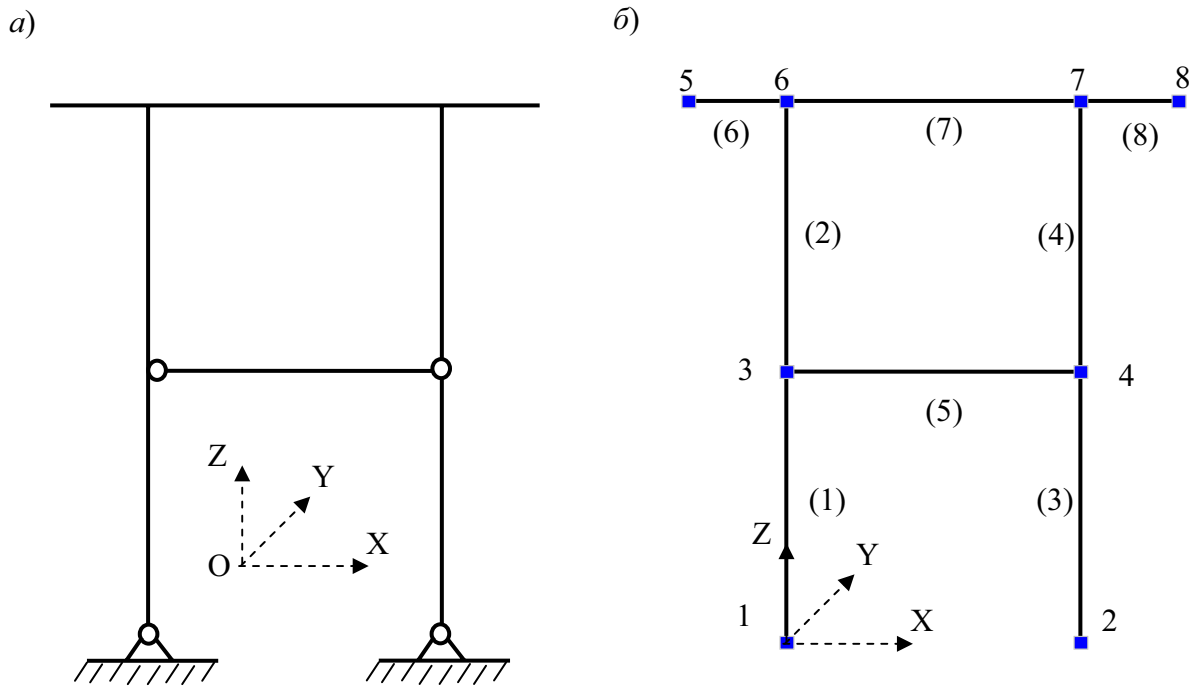


Рис. 3.1

При построении алгоритма МКЭ в программе SCAD стержневая система соотносится с правой декартовой системой координат XYZ (см. рис. 3.1, а). Такую систему координат называют общей системой координат (ОСК) для всей стержневой системы.

Плоская стержневая система считается расположенной в плоскости XOZ (см. рис. 3.1,*а*).

В принципе каждый из стержней рамы, приведенной на рис. 3.1, *а*, может быть разделен на любое конечное число стержневых элементов отличающихся от аппроксимируемого стержня только длиной и характером прикрепления элементов к узлам.

Поэтому при построении расчетной схемы МКЭ необходимо, прежде всего, выбрать рациональное для решения задачи число конечных стержневых элементов, аппроксимирующих стержни заданной рамы и наметить на раме узлы, в которых КЭ соединяются друг с другом и с основанием.

При рассмотрении вопроса о построении расчетной схемы стержневой

системы для ее расчета МКЭ на персональном компьютере с помощью программы SCAD будем учитывать следующее (см. методические указания в книге [19] и в справке к программе, а также в приложении 1 к данному УМК).

1. *Конечные элементы в расчетной схеме МКЭ для стержневой системы считаются соединенными друг с другом и с основанием в намеченных на расчетной схеме узлах.*

2. *За основные неизвестные величины, которые в МКЭ в форме метода перемещений определяются в первую очередь, принимают компоненты линейных и угловых перемещений* ***всех намеченных узлов*** *расчетной схемы по направлению их степеней свободы.*

3. *По найденным перемещениям узлов каждого конечного элемента стержневой системы, определяются усилия в связях, присоединяющих конечные элементы к узлам.*

Компоненты искомых перемещений узлов в МКЭ обозначаются в соответствии с осями общей системы координат, к которой относится расчетная схема.

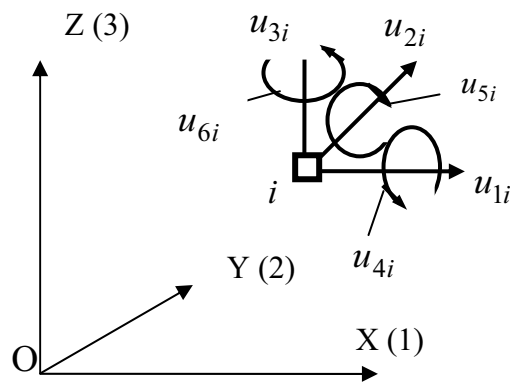


Рис. 3.2

В программе SCAD, где используется правая система осей координат XYZ (рис. 3.1), в таблицах с результатами расчетов компоненты перемещений ***любого жесткого узла*** *i* ***пространственной стержневой системы*** обозначаются соответственно X_i, Y_i, Z_i, UX_i, UY_i UZ_i.

Этим направлениям компонентов перемещений соответствует нумерация: 1, 2. 3, 4, 5, 6, использованная при обозначении соответствующих компонентов перемещений в УМК (рис 3.2).

На рис. 3.2 показаны положительные направления компонентов перемещений, принятые в УМК при рассмотрении алгоритма МКЭ.

Для плоской стержневой системы, находящейся в плоскости XOZ, положение плоского жесткого узла *i* определяется компонентами линейных перемещений X_i, Z_i (или u_{1i}, u_{3i}) и углом поворота UY_i (или u_{5i}) вокруг оси параллельной оси Y (см. рис. 3.2).

Поскольку трудоемкость численной реализации алгоритма МКЭ зависит от числа неизвестных перемещений во всех намеченных узлах расчетной схемы стержневой системы, желательно намечать наименьшее число узлов, а значит

разделять стержневую систему на наименьшее число стержневых конечных элементов.

Наименьшее число стержневых конечных элементов получится тогда, когда узлы в расчетной схеме МКЭ назначены в заданной стержневой системе в узлах (в том числе шарнирных) соединения прямых стержней между собой и с основанием, а также на свободных (консольных) концах стержней..

Однако иногда, например, в местах приложения сосредоточенных сил и моментов, или в других сечениях стержней с целью получения дополнительной информации о перемещениях и усилиях в них, приходится назначать в расчетной схеме дополнительное число узлов.

С целью выбора наименьшего числа неизвестных перемещений в расчетной схеме МКЭ рамы, изображенной на рис. 3.1, *а*, примем вариант ее разбиения на минимальное число стержневых КЭ, когда каждый стержень рассматривается как один КЭ типа 2.

Продемонстрируем особенности процедуры построения расчетной схемы МКЭ рамы с использованием программы SCAD. При этом будем руководствоваться указаниями авторов вычислительного комплекса SCAD, приведенных в книге [19] и справке к программе, а также методическими указаниями, данными в приложении 1 настоящего УМК.

3.2. Построение расчетной схемы МКЭ на этапах постановки опорных связей и одиночных шарниров на конечных элементах

Первоначально для рассматриваемой рамы с помощью программы SCAD строится промежуточная расчетная схема МКЭ с назначением только жестких узлов (рис. 3.1, *б*). При этом на схеме в программе SCAD указывается и нумерация узлов и конечных элементов.

Всем конечным элементам в этой схеме назначается тип 2 «Стержень плоской рамы» (см. [19], справку к программе и методические указания в приложении 1 к УМК).

Затем, продолжая построение расчетной схемы МКЭ, последовательно введем в узлах 1 и 2 промежуточной схемы жесткие связи в виде стержней с шарнирами по концам в направлении параллельном оси X и оси Z (рис. 3.3, *а*).

Постановка жестких опорных связей в узлы 1 и 2 привязывает расчетную схему к жесткому основанию. В такой системе перемещения намеченных восьми жестких узлов будут происходить от внешних воздействий (нагрузки, осадки опор и изменения температуры стержневых КЭ) только как упругие перемещения.

Общее число $n_н$ компонентов упругих перемещений всех $n_у$ узлов промежуточной расчетной схемы ***при отсутствии их закреплений внешними связями по направлению их степеней свободы*** будет равно

$$n_н = 3n_у, \tag{3.1}$$

Для промежуточной схемы на рис. 3.1, *б* получим $n_н = 3 \cdot 8 = 24$.

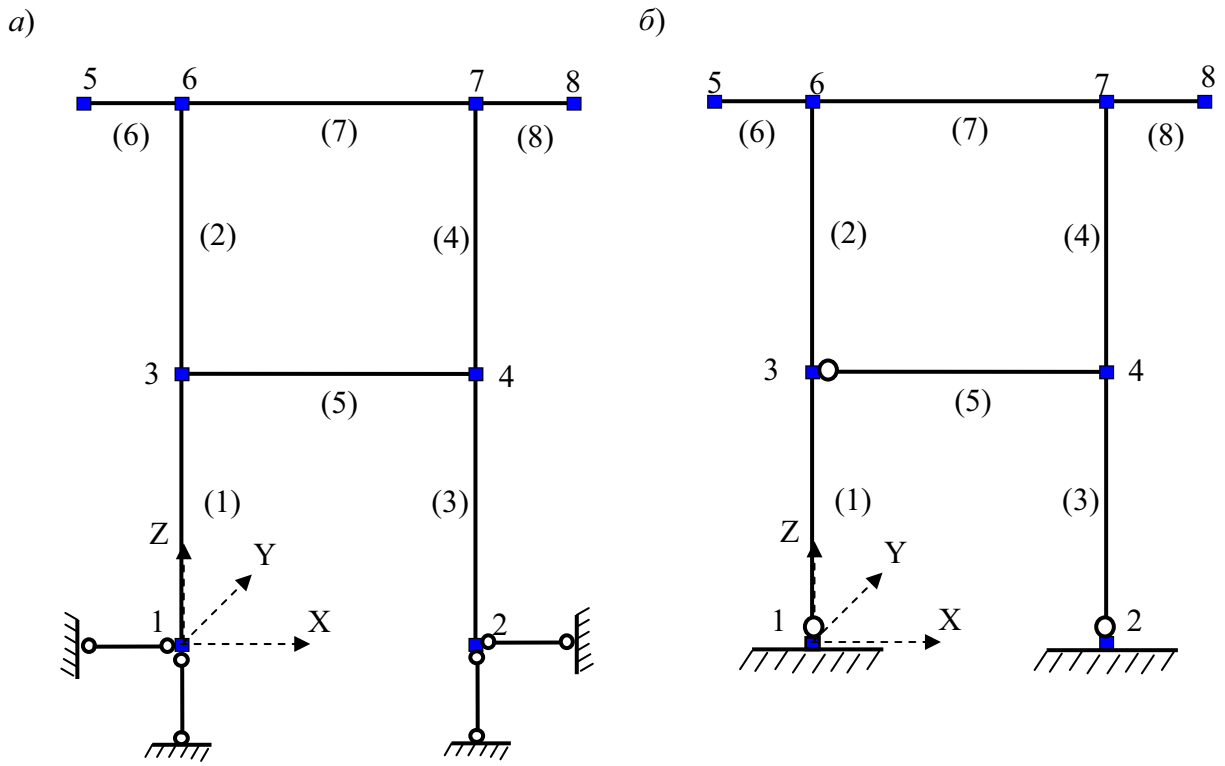


Рис. 3.3

Введение в узлы 1 и 2 промежуточной расчетной схемы (см. рис. 3.1, *б*) внешних связей в горизонтальном и вертикальном направлениях лишают эти узлы упругих линейных перемещений в направлениях введенных связей, но не лишают упругих углов поворота (см. рис. 3.3, *а*).

Это позволяют записать формулу для подсчета общего числа $n_н$ компонентов упругих перемещений для всех $n_у$ жестких узлов в расчетной схеме МКЭ при введении в эти узлы $n_с$ жестких связей по направлению степеней свободы узлов:

$$n_н = 3n_у - n_с. \tag{3.2}$$

По этой формуле для полученной новой промежуточной схемы (см. рис. 3.3, *а*) будем иметь $n_н = 3 \cdot 8 - 4 = 20$ упругих перемещений этих узлов.

Если не ставить целью определение углов поворота нижних сечений

стержней рамы, подходящих к шарнирным опорам, то в полученной промежуточной расчетной схеме (см. рис. 3.3, *а*) нужно исключить из числа неизвестных углы поворота узлов 1 и 2.

С этой целью можно полностью закрепить узлы 1 и 2 в промежуточной расчетной схеме на рис. 3.1, *б* введением в опорах трех связей, лишающих узлы смещений по всем трем направлениям (X, Z и UY). Затем, для обеспечения возможности нижних концов стоек свободно поворачиваться относительно осей параллельных оси Y, дополнительно поставить шарниры на нижних концах стоек. Тогда опорные узлы на строящейся расчетной схеме МКЭ можно изобразить так, как это показано на рис. 3.3, *б*.

При этом варианте представления шарнирно неподвижных опор в расчетной схеме МКЭ рассматриваемой рамы из общего числа неизвестных упругих перемещений узлов полностью исключатся все шесть компонентов перемещений жестких опорных узлов 1 и 2 и останется $n_{\text{н}} = 3 \cdot 8 - 6 = 18$ неизвестных компонентов перемещений намеченных в расчетной схеме жестких узлов.

Процедуры введения жестких опорных связей и постановки шарниров путем удаления на промежуточной схеме МКЭ нужных связей по концам стержневых КЭ типа 2 легко выполняются в программе SCAD (см. [19] и методические указания в приложении 1 к УМК).

Примечание. В процедуре постановки шарниров на конечный элемент типа 2 он рассматривается в виде, когда на каждом его конце имеются все три связи для жесткого соединения с соответствующим жестким узлом.

При этом каждый КЭ соотносится с местной системой координат (МСК) X1Y1Z1, которая, как и ОСК, считается правой. Ее ось X1 совпадает с осью стержневого КЭ и этим определяет и направление осей Y1 и Z1. Начало осей совпадает с узлом КЭ, который обозначается номером 1 в МСК (второй узел КЭ обозначается цифрой 2).

МСК считается «привязанной» к КЭ. Поэтому при расположении оси КЭ в плоской стержневой системе с наклоном на угол φ по отношению к оси X общей системы координат для всей стержневой системы, положение осей МСК на плоскости XOZ также определяется этим углом (рис. 3.4).

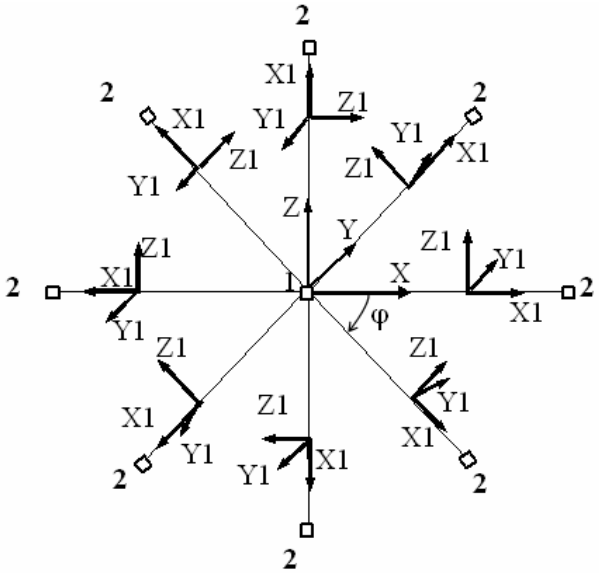


Рис. 3.4

Обратим внимание, что при $\varphi = 90^{\circ}$

и $\varphi = 270^{o}$ МСК X1Y1Z1 поворачивается относительно оси X1 еще на угол $\psi = 180^{o}$ (см. [19] и методические указания в приложении 1 к УМК).

С учетом обозначений в приведенном примечании постановка одиночных шарниров на КЭ с номерами *1*, *3*, *5* сводится к удалению связей UY в узлах *1* этих КЭ (нумерация узлов в МСК). В результате на строящейся с помощью программы SCAD расчетной схеме МКЭ внизу конечных элементов *1* и *3* и на левом конце КЭ *5* появятся одиночные шарниры (см. рис. 3.3, *б*).

3.3. Представление на расчетной схеме МКЭ стержневой системы шарнирных узлов

В рассматриваемой раме (см. рис. 3.1,*а*) узел примыкания нижнего ригеля рамы к правой стойке является полностью шарнирным. В то же время, на построенной промежуточной схеме (см. рис. 3.6, *б*) узел *4* является жестким.

Так как шарнир в рассматриваемом шарнирном узле на заданной раме является двойным, то при установке эквивалентных ему двух одиночных шарниров на три, сходящихся в узле конечных элемента, возможны следующие три варианта.

1. Два одиночных шарнира ставятся соответственно в узлах *1* и *2* конечных элементов *3* и *4*. В этом варианте узел *4* будет иметь вид, изображенный на рис. 3.5, а, что означает соединение концов КЭ, сходящихся в узле *4*, связями, показанными на рис. 3.5, *б*.

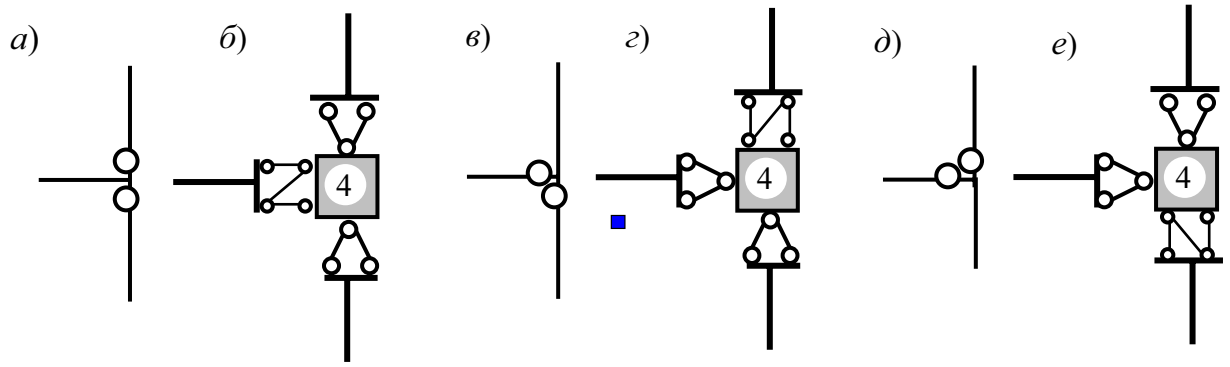


Рис. 3.5

В этом варианте на промежуточной расчетной схеме (рис. 3.3, *б*) с помощью программы SCAD выполняется процедура удаления связи UY в узлах *1* и *2* (в местной системе координат) КЭ *3* и *4*. В результате получится расчетная схема МКЭ для рассматриваемой рамы в виде, изображенном на рис. 3.6, *а*.

2. Два одиночных шарнира поставлены соответственно в узлах *2* КЭ *3* и *5*. В этом варианте узел *4* на расчетной схеме МКЭ будет иметь вид,

изображенный на рис. 3.5, *в*, что означает соединение концов КЭ, сходящихся в узле *4*, связями, изображенными на рис. 3.5, *г*.

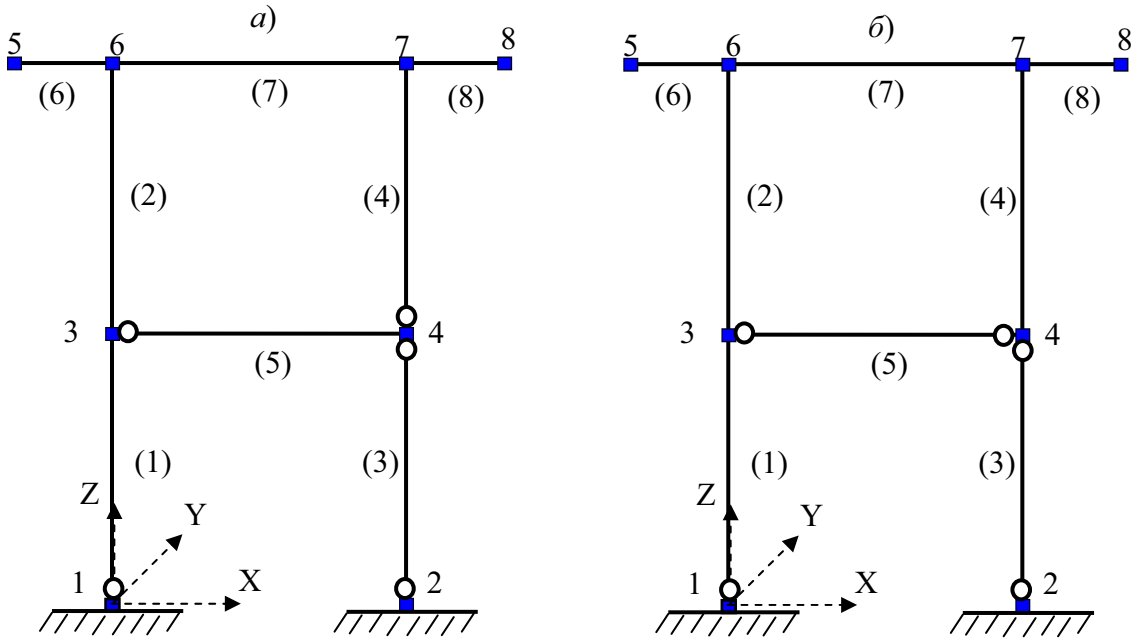


Рис. 3.6

В этом варианте на промежуточной расчетной схеме (рис. 3.3, *б*) с помощью программы SCAD выполняется процедура удаления связи UY в узлах *2* (МСК) КЭ *3* и *5*. В результате получится расчетная схема МКЭ для рассматриваемой рамы в виде, изображенном на рис. 3.6, *б*.

3. Одиночные шарниры поставлены в узлах *2* и *1* соответственно конечных элементов *5* и *4*. В этом варианте узел *4* на расчетной схеме МКЭ будет иметь вид, изображенный на рис. 3.5, *д*. Это означает соединение концов конечных элементов, сходящихся в узле *4*, связями, изображенными на рис. 3.5, *е*.

В этом варианте на промежуточной расчетной схеме (рис. 3.3, *б*) с помощью программы SCAD выполняется процедура удаления связи UY в узлах *2* и *1* соответственно КЭ *5* и *4*. В результате получится расчетная схема МКЭ для рассматриваемой рамы в виде, изображенном на рис. 3.7, *а*.

Постановка шарниров в любом из рассмотренных вариантов не уменьшает число неизвестных в узле *4*. Во всех вариантах он будет иметь три степени свободы, а значит три неизвестных компонентов перемещений (два линейных и один угол поворота).

Однако, в рассмотренных вариантах *1, 2, 3* имеются в виду различные углы поворота: соответственно узла *2* КЭ *5,* узла *1* КЭ *4*, узла *2* КЭ *3*.

Обычно при использовании МКЭ для стержневых систем углы поворотов

сечений КЭ, подходящих к шарнирным узлам, не принимают за неизвестные величины, как это было сделано применительно к шарнирным опорным узлам.

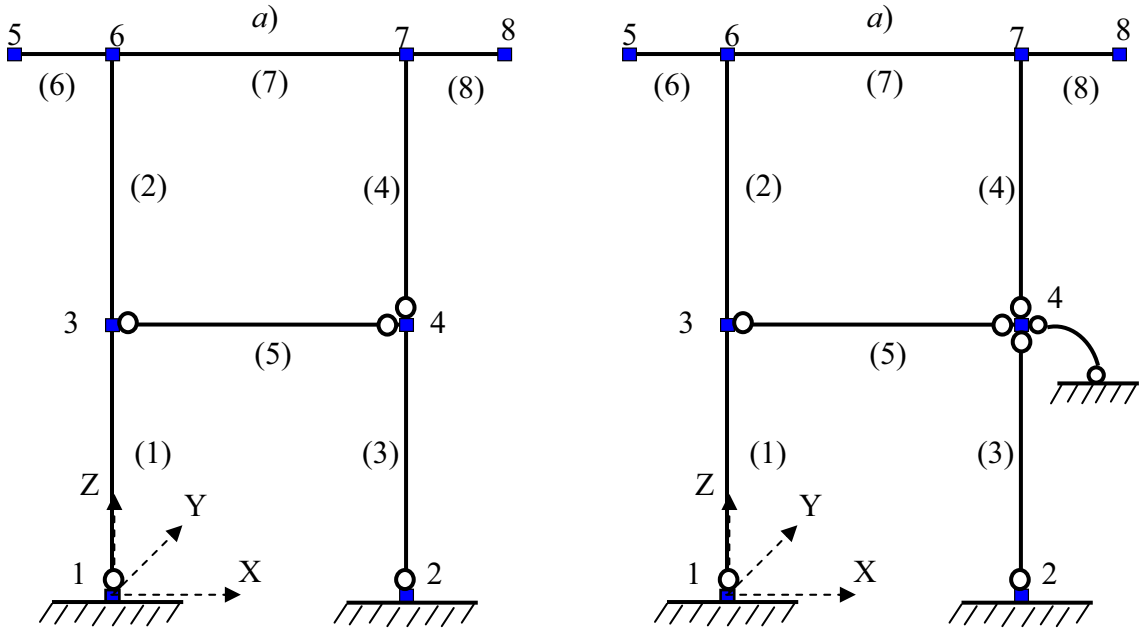


Рис. 3.7

Поэтому принятый за неизвестную величину угол поворота узла *4* можно вообще исключить из числа неизвестных, выполнив процедуру, аналогичную той, которая была выполнена для опорных узлов *1* и *2*.

Это означает, что узел *4* можно сделать не поворачивающимся постановкой дополнительной ***внешней*** связи, делающей поворот узла *4* в направлении UY невозможным. Такая связь в узле 4 условно изображена на строящейся с помощью программы SCAD расчетной схеме (см. рис. 3.7, *б*) и на отдельном изображении схемы узла 4 в виде рис. 3.8, *а* и рис. 3.8, б.

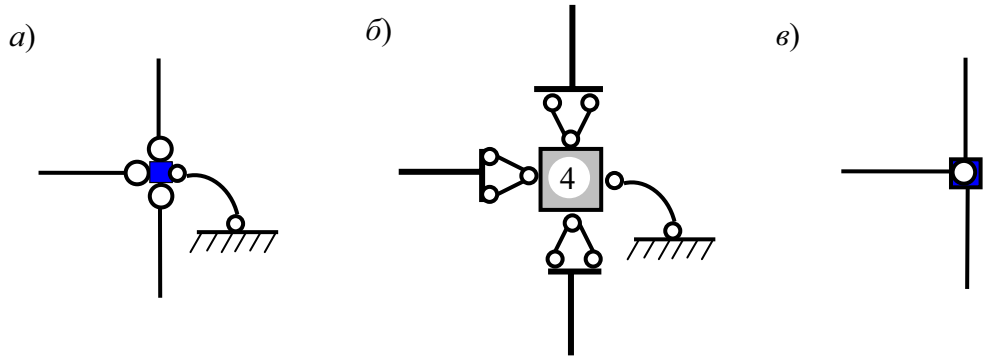


Рис. 3.8

Линейные перемещения узла *4* в направлениях X и Z при этом остаются возможными.

Одновременно в расчетной схеме МКЭ необходимо удалить связь UY на

том КЭ, подходящем к узлу *4*, на котором эта связь с жестким узлом *4* есть. Эта операция аналогична постановке в узле *4* третьего шарнира на третьем конечном элементе, подходящем к узлу *4*, на котором в рассматриваемом узле шарнира нет. При этом на строящейся с помощью программы SCAD расчетной схеме МКЭ для рассматриваемой рамы появится шарнир и на третьем стержне (рис. 3.7, *б*).

Схема шарнирного соединения всех трех КЭ, подходящих к узлу *4*, изображена и на отдельно вырезанном узле (рис. 3.8, *а* и рис. 3.8, б).

Обычно на расчетной схеме МКЭ (не в программе SCAD) такой узел, имеющий только две линейных степени свободы и не имеющий в числе неизвестных угла поворота обозначается в виде, приведенном на рис. 3.8, *в*.

Число неизвестных компонентов перемещений в расчетной схеме, изображенной на рис. 3.7, *б* будет равно $n_{\text{н}} = 3 \cdot 8 - 6 - 1 = 17$.

3.4. Особенность учета на расчетной схеме МКЭ консольных стержней

Эта особенность связана с узлами МКЭ, намеченными на концах консолей, например, в рассматриваемой раме (см. рис. 3.1, *а*).

Дело в том, что при построении с помощью программы SCAD начальной схемы МКЭ стержневой системы жесткие узлы назначаются и на концах консолей. Это означает, что при решении задачи расчета, например, рассматриваемой рамы, МКЭ в форме метода перемещений в общее число $n_{\text{н}} = 17$, подсчитанных выше неизвестных, вошли и шесть неизвестных перемещения концов консолей ($n_{\text{н},5} + n_{\text{н},8} = 6$).

Иногда перемещения концов консолей могут расчетчика не интересовать.

Тогда при расчете рамы с консолями можно применить прием по исключению неизвестных перемещений концов консолей из общего числа неизвестных величин в расчетной схеме МКЭ, который был применен выше при исключении углов поворота узлов 1, 2, 4.

Поступим следующим образом (рис. 3.9):

1) полностью закрепим узлы 5 и 8 расчетной схемы МКЭ, введя в каждый из

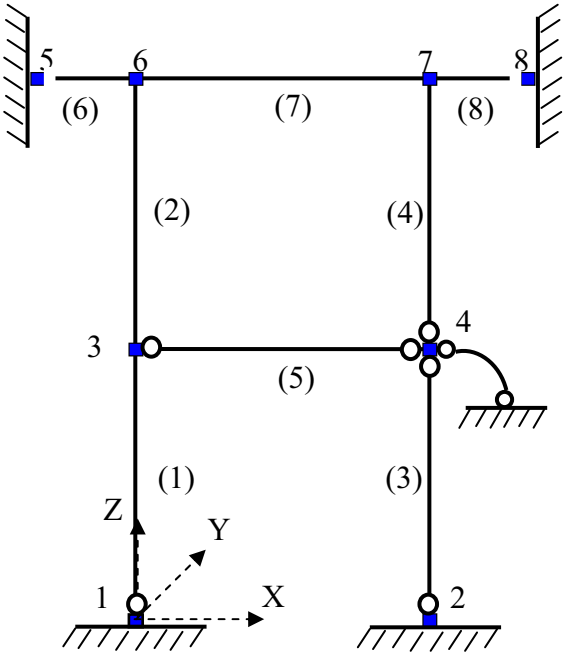


Рис. 3.9

этих узлов по три ***внешних жестких связи*** по направлению степеней свободы этих узлов (связи в направлениях X, Z, UY);

2) удалим по три ***внутренних связи***, соединяющие узлы *1* и *2* (нумерация узлов в местной системе координат) конечных элементов *6* и *8* соответственно с жесткими только что закрепленными (см. п. 1)) узлами *5* и *8*.

В результате этих действий на расчетной схеме МКЭ рамы (см. рис. 3.9) при подсчете неизвестных величин $n_{\text{н}}$ в формуле (3.2) получим $n_{\text{н}} = 3 \cdot 8 - 6 - 1 - 6 = 11$.

Обратим внимание, что при расчете рамы МКЭ по расчетной схеме, приведенной на рис. 3.9, эпюры усилий M, Q, N на консоли будут построены даже при исключении из числа неизвестных перемещений узлов 5 и 8,.

Исключение узлов 5 и 8 из расчетной схемы МКЗ рамы может быть получено и приемом исключения вообще консолей из рассматриваемой рамы.

Действительно, консоли являются статически определимыми частями рассматриваемой рамы (см. рис. 3.1, *а*). Поэтому для определения усилий в любом сечении консолей их можно отделить от рамы и рассматривать отдельно как консольные балки с защемляющими опорами в сечениях, где консоли присоединяются к раме (см. например, схему 1 на рис. 1.2).

Затем, составляющие M, Q, N опорных реакций, полученные в защемляющих опорах консолей, прикладываются на оставшуюся после удаления консолей часть рамы в виде внешней нагрузки на соответствующие узлы рамы.

Построение расчетной схемы МКЭ рамы без консолей остается прежним. Она будет иметь вид, приведенный на рис. 3.9, но без консольных конечных элементов. Соответственно изменится и нумерация узлов и конечных элементов расчетной схемы. Однако изменение нумерации узлов и конечных элементов не влияет на результаты ее расчета МКЭ.

3.5. Внутренние усилия в концевых сечениях КЭ типа 2 и правило знаков для них

После того, как в МКЭ будут определены компоненты перемещений ***всех намеченных узлов*** расчетной схемы МКЭ стержневой системы, определяются усилия в концевых сечениях стержневых конечных элементов.

Это означает, что применительно к рассматриваемой статически неопределимой раме (см. рис. 3.1, *а*) в общем случае от внешнего воздействия на нее сначала определятся $n_{\text{н}} = 17$ компонентов перемещений для схемы, изображенной на рис. 3.7, *б*, или $n_{\text{н}} = 11$ для схемы, изображенной на рис. 3.9.

Затем находятся внутренние усилия M_k, Q_k, N_k в концевых сечениях k стержневых конечных элементов типа 2, входящих в рассматриваемую расчетную схему.

Эти усилия определяются в местной системе координат (МСК) для каждого конечного элемента, поэтому $k = 1$ для концевого сечения, в котором находится начало осей координат и $k = 2$ для второго концевого сечения.

Примечание. Иногда сечение в начале и конце конечного элемента в местной системе координат обозначают не цифрами 1 и 2, а буквами «н» и «к». В дальнейшем будут использоваться оба вида обозначений.

Число и вид определяемых усилий на любом конце элемента зависит от числа условных связей, прикрепляющих его к соответствующему жесткому опорному узлу в расчетной схеме МКЭ (см. например, рис. 3.3).

На рис. 3.10, *а, б* изображены соответственно горизонтальный и вертикальный конечные элементы типа 2 в вырезанном из стержневой системы виде, для варианта, когда элементы имеют по три связи на каждом конце. При этом разрезанные связи, присоединяющие элемент к соответствующим узлам стержневой системы, удалены и заменены усилиями M_k, Q_k, N_k ($k = 1$, 2 или $k = \text{н}, \text{к}$).

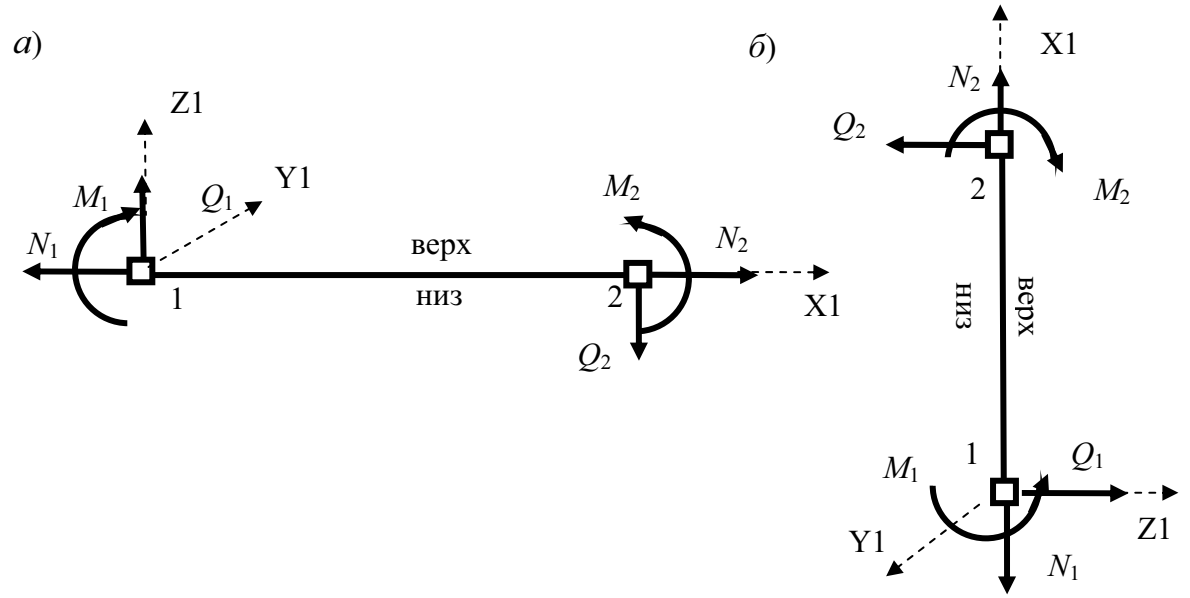


Рис. 3.10

На рис. 3.10 и рис. 3.11 показаны положительные направления действия внутренних усилий в узлах элементов. При этом использованы следующие правила, принятые в программе SCAD.

Продольное усилие в узле считается положительным, когда оно растягивает стержень.

Поперечная сила положительна, когда ее вектор в узле 1 совпадает по направлению с положительным направлением оси Z1 местной системы координат, а в узле 2 – имеет противоположное направление.

Изгибающий момент положителен, если он растягивает «нижнюю» (по отношению к направлению оси Z1) сторону стержня. На рис. 3.10 и 3.11 «низ» и «верх» стержней (в том числе и для вертикального) обозначен соответствующими надписями.

Если направление оси X1 МСК будет изменено на обратный (такая возможность в программе SCAD предусмотрена), то изменятся номера узлов конечного элемента в местной системе координат (рис. 3.11, *а, б*).

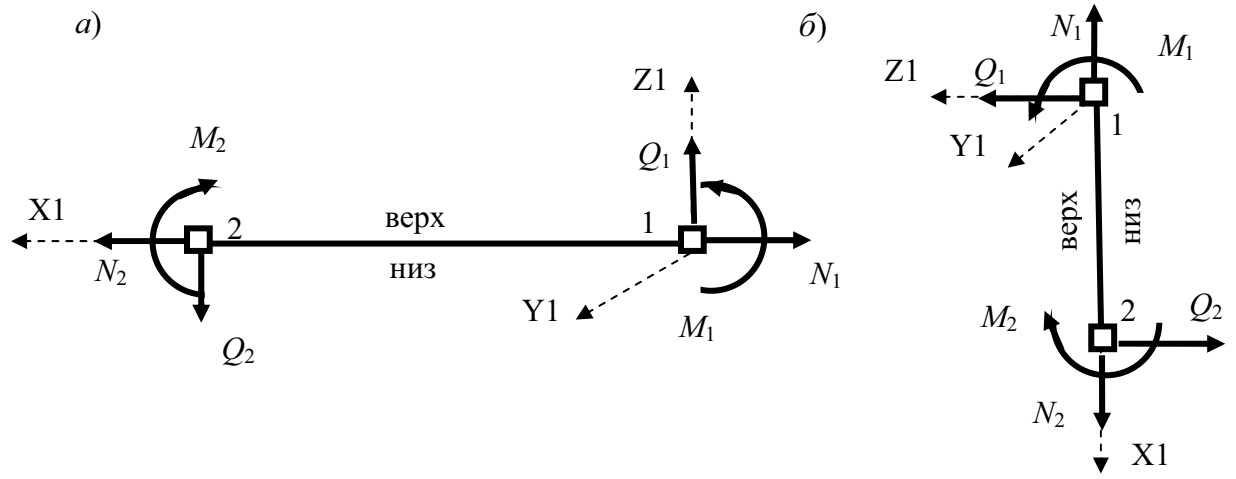


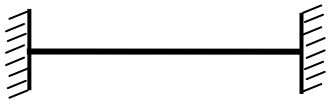
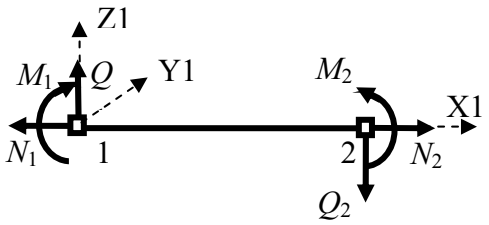
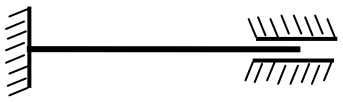
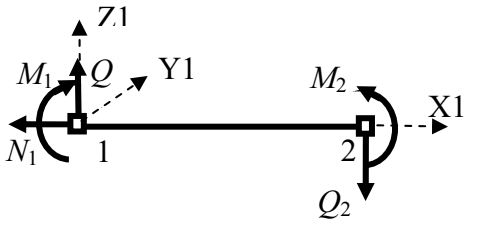
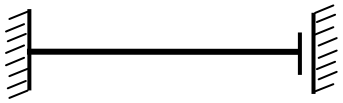
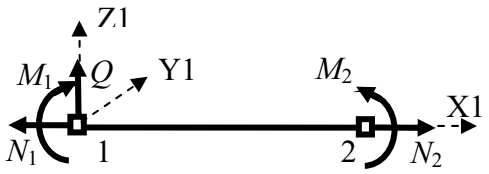
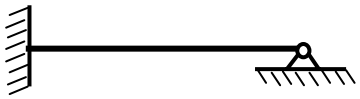
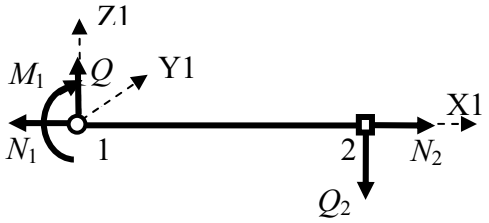
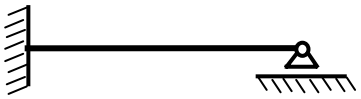
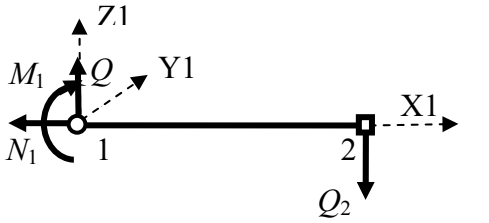
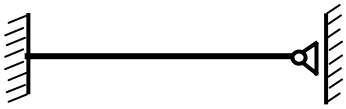
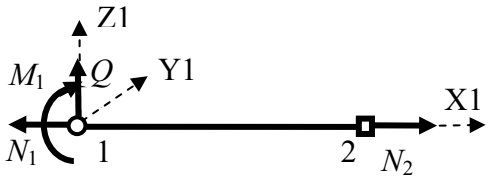
Рис. 3.11

Другие варианты конечного элемента типа 2 (табл. 3.1) получаются удалением из жестких узлов 1 и 2 рассмотренного конечного элемента тех или иных связей. При этом элемент должен оставаться геометрически неизменяемым.

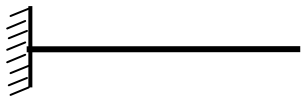
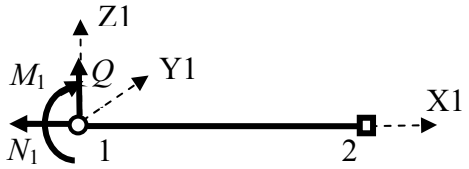
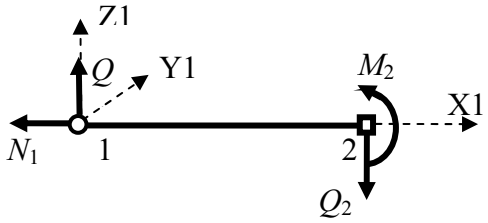
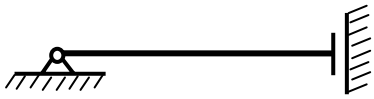
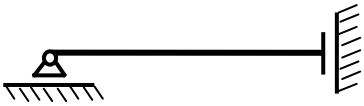
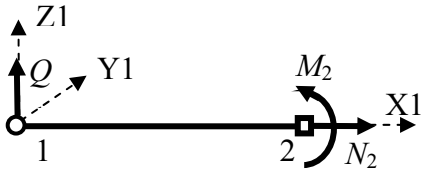
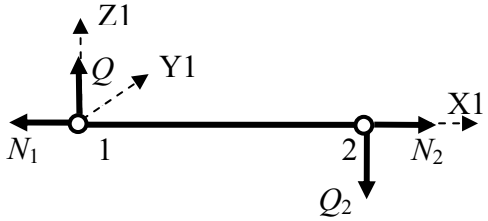
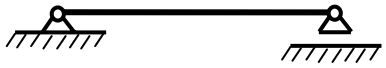
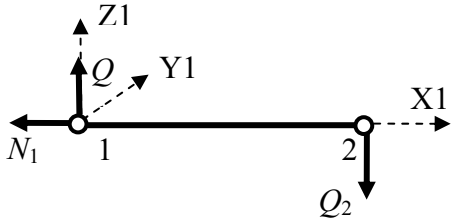
Во втором столбце табл. 3.1 отражен характер опирания концов стержневого конечного элемента типа 2 в расчетной схеме МКЭ. Вид опор определяется числом и видом опорных связей (см. рис. 1.3),. Варианты конечных элементов, которые получаются из приведенных путем перемены опор местами, в таблице не приводятся.

В третьем столбце таблицы показаны положительные направления внутренних усилий, действующих в его опорных связях, на элемент.

Таблица 3.1

№ варианта	Вид прикрепления конечных элементов к узлам расчетной схемы МКЭ	Внутренние усилия в опорных связях конечных элементов
1	2	3
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Продолжение таблицы 3.1

№ варианта	Вид прикрепления конечных элементов к узлам расчетной схемы МКЭ	Внутренние усилия в опорных связях конечных элементов
1	2	3
7		
8		
9		
10		
11		
12		

3.6. Назначение жесткостей конечных элементов в расчетной схеме МКЭ стержневой системы

В подразделе 1.7 при анализе системы уравнений (1.3) – (1.5) для определения неизвестных перемещений, усилий и деформаций в стержневых системах может быть отмечена следующая важная информация:

1. При определении усилий M, Q, N в статически определимых стержневых системах из уравнений равновесия (1.3) (или уравнений равновесия в виде (1.8)) не требуется задавать значения жесткостей стержней (см. подраздел 1.7).

2. При определении действительных (реальных) перемещений u, w, θ сечений тонких стержней (без учета сдвиговых деформаций) в статически определимой системе требуется задание действительных (реальных) продольных EA и изгибных EI жесткостей стержней (см. разделы 6, 7 и 8).

Однако, ***при использовании для расчета стержневых систем программы SCAD, реализующей МКЭ в форме метода перемещений, задание жесткостей стержней требуется даже при определении только усилий в статически определимых системах*** (см. идею и алгоритм МКЭ в разделе 8).

Правда, учитывая п.1, заметим, что, ***если в статически определимой стержневой системе требуется определить только усилия, то при расчете с помощью программы SCAD можно задать произвольные значения жесткостей стержней. Например, можно принять*** $EF = EI_y = 1$.

Если же стержневая система статически определима, но в ней требуется определить перемещения, или она статически неопределима, то при назначении жесткостей стержней необходимо использовать реальные значения жесткостей стержней.

Примечание. Этот вопрос будет понятен после изучения разделов 6–8 УМК. Процедура задания жесткостей стержней при использовании программы SCAD рассмотрена в примерах расчета конкретных стержневых систем в приложении 1 УМК.

3.7. Загружение расчетной схемы МКЭ

Загружением в программе SCAD называют систему одновременно действующих нагрузок.

Одна и та же стержневая система может быть рассчитана от нескольких загружений. Поэтому предусмотрена их нумерация.

Программа SCAD позволяет сразу выполнить расчет от нескольких вариантов загружений и от любых их комбинаций.

В соответствии с видом нагрузок, которые встречаются в учебных работах, в УМК рассмотрено: задание сосредоточенных сил и моментов, действующих в узлах расчетной схемы и в любом сечении по длине элемента типа 2, и равномерно распределенной нагрузки, приложенной на участке длины элемента типа 2.

Процедура задания этого вида нагрузок в программе SCAD продемонстрирована на конкретных примерах, которые будут рассмотрены далее, например, в приложении 1 к УМК. Здесь рассмотрим только некоторые общие вопросы.

Задание узловой нагрузки. Прежде всего, отметим, что узловая нагрузка задается в общей системе координат.

Для плоской стержневой системы, расчетная схема которой находится в плоскости XOZ, узловая нагрузка представляется сосредоточенными силами в направлении осей X и Z и моментом, действующим вокруг оси Y (рис. 3.12, *а*). На этом рисунке показаны положительные направления узловых усилий.

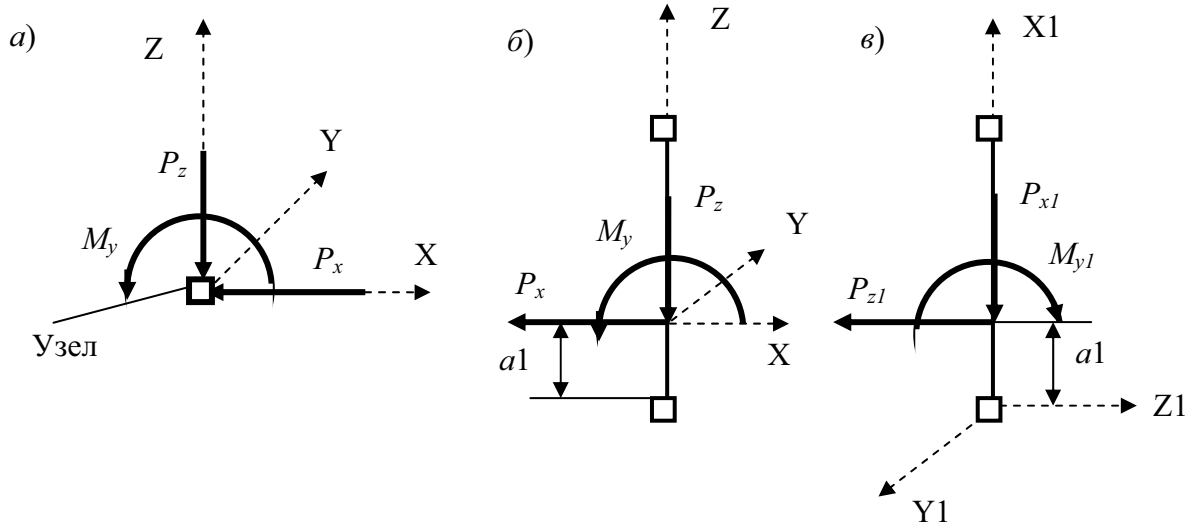


Рис. 3.12

Задание нагрузки на элемент. Нагрузка на сам элемент может задаваться как в общей (рис. 3.12, *б*), так и в местной (рис. 1.12, *в*) системах координат. При этом надо быть внимательным, так как одна и та же нагрузка будет относиться к разным осям координат.

В качестве примера на рис. 3.12, *в* изображен один и тот же вертикальный элемент.

Но на рис. 3.12, *б* нагрузка отнесена к общей системе координат. Поэтому горизонтальная составляющая P_x соотносятся с осью X общей

системы координат, а вертикальная P_z – с осью Z. Момент действует относительно оси Y. Все указанные составляющие положительны.

На рис. 3.12, *в* нагрузка отнесена к осям местной системы координат: горизонтальная составляющая является проекцией на ось Z1; вертикальная – на ось X1; момент задается действующим вокруг оси Y1.

Как видим, чтобы момент был положительным, в местной системе координат он должен иметь противоположное направление по сравнению с его заданием в общей системе координат (см. рис. 3.12, *б*).

Аналогичное правило знаков используется и при распределенной вдоль стержня нагрузке (равномерно распределенная на элементе 3 нагрузка (рис. 1.10) положительна).

При задании сосредоточенной нагрузки на элемент указывается не только ее значение и знак, но и расстояние $a1$ от узла 1 до точки приложения сосредоточенной нагрузки.

В локальном окне задания нагрузки на стержневой элемент в программе SCAD предусмотрено задание линейно изменяющейся распределенной нагрузки на любом участке стержня.

После задания нагрузок в конкретном загружении надо сохранить его под соответствующим этому загружению номером (см. далее примеры расчета).

4. ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ M, Q, N НА СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

4.1. Эпюра изгибающих моментов M

В строительной механике при наличии на стержнях плоской стержневой системы всех трех указанных эпюр усилий принято считать эпюру изгибающих моментов основной и, как правило, изображать ее первой.

Второй изображают эпюру поперечных сил Q, связанных с изгибающими моментами зависимостью $Q = dM / dx$, где ось X направлена вдоль оси каждого стержня.

Затем изображают эпюру продольных сил на стержнях.

Такая последовательность удобна, например, при расчете статически определимых, рам вручную, так как, построив эпюру M, можно построить по ней эпюру Q, а затем по эпюрам M и Q построить эпюру N. Это будет продемонстрировано в дальнейшем.

Правило построения эпюры M

Для построения ординаты эпюры M в каком либо сечении k стержня необходимо выполнить следующие две операции.

1. Подсчитать в сечении k численное значение изгибающего момента M_k

2. Отложить найденное численное значение в виде ординаты перпендикулярно оси стержня ***с растянутой изгибающим моментом стороны стержня*** (***со стороны растянутого изгибающим моментом волокна стержня***).

Численное значение изгибающего момента M_k *в сечении* k *равно численному значению алгебраической суммы* $\sum_i M_{k,i}$ *моментов* $M_{k,i}$ ***всех сил*** P_i***,*** *действующих на стержневую систему* ***с любой одной из сторон сечения****, взятых относительно точки на оси сечения* k:

$$M_k = \sum_i M_{ki}, \tag{4.1}$$

Растянутая сторона стержня в сечении, может быть установлена из физических соображений (см. рис. 1.7).

Предположим, что с помощью этого правила на статически определимой

стержневой системе в виде консоли ломаного очертания (рис. 4.1) построены три эпюры M соответственно для трех вариантов загружения консоли сосредоточенным моментом, сосредоточенной силой и равномерно распределенной нагрузкой.

Ординаты соответствующих трех эпюр M построены на растянутой стороне стержней, образующих консоль.

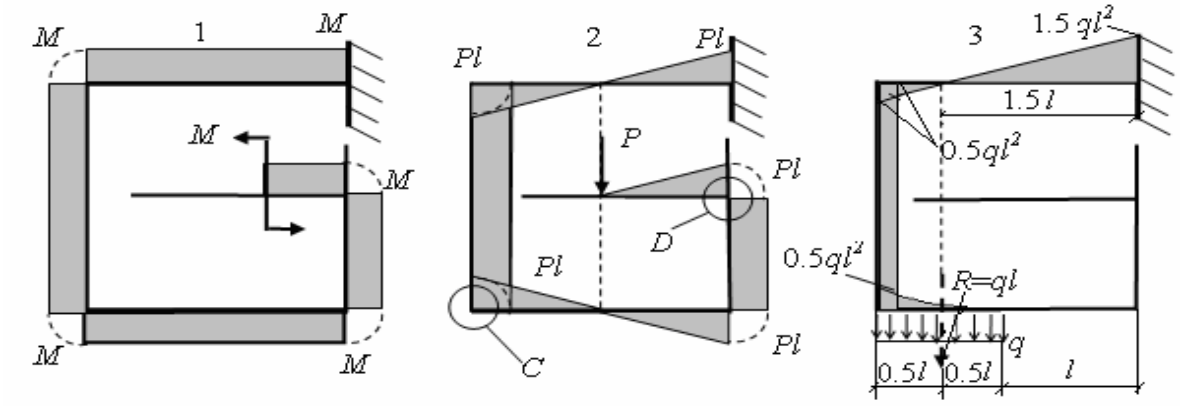


Рис. 4.1

Вид эпюры M, ординаты которой отложены от оси стержня с растянутой стороны стержня (см. рис. 4.1) позволяет отметить следующие признаки правильного вида эпюр изгибающих моментов на стержневых системах.

Признаки правильного вида эпюры M

При построении эпюры M на растянутой стороне стержня она имеет следующие свойства.

1. На участке прямого стержня, свободном от нагрузки, эпюра прямолинейна.

2. На участке распределенной нагрузки она очерчена кривой линией, выпуклой в сторону действия нагрузки. Когда нагрузка равномерно распределена вдоль длины стержня, кривая является параболой второй степени.

3. В точке приложения сосредоточенной силы эпюра имеет излом, острие которого направлено в сторону действия силы.

4. В точке приложения сосредоточенного момента эпюра имеет скачок в ординатах, равный величине момента.

5. В сечении, находящемся на границе незагруженного участка стержня и участка, загруженного распределенной нагрузкой, кривая линия эпюры плавно (без излома) переходит в прямолинейную эпюру, которая является касательной к криволинейному участку.

Эти признаки будем использовать как при построении эпюры M

вручную, так и для контроля уже построенных эпюр, например, с помощью персонального компьютера, реализующего МКЭ с использованием программы SCAD. Это далее будет продемонстрировано на примерах.

Правило знаков для ординат эпюр M

При построении ординат эпюры M вручную, как это было продемонстрировано на рис. 4.1, растянутая сторона стержня в каком-либо сечении может быть определена из чисто физического представления об изгибе сечения стержня приложенным к нему моментом (см. рис. 1.7).

Однако *при численном расчете каждой ординате эпюры M присваивается знак. Используется знак эпюры M и при построении по ней эпюры Q с использованием зависимости $Q = dM / dx$.*

В дальнейшем при назначении знака ординаты эпюры M, отложенной с растянутой стороны стержня, будем использовать понятия «низ» и «верх» стержня, которые были даны по отношению к конечному элементу стержня.

Они были определены в соответствии с положительным направлением оси Z1 местной системы координат конечного элемента (см. рис. 3.10 и рис. 3.11). Но эти понятия относятся к любому участку прямого стержня, на котором строится эпюра (см. рис. 1.7), даже если этот участок не разделен на конечные элементы.

Если растянуто «нижнее» волокно стержня, то ордината откладывается от оси стержня «вниз» и ей присваивается знак «+» (рис. 4. 2).

Если же растянуто «верхнее» волокно стержня, то ордината откладывается от оси стержня «вверх» и ей присваивается знак « – » (рис. 4.3).

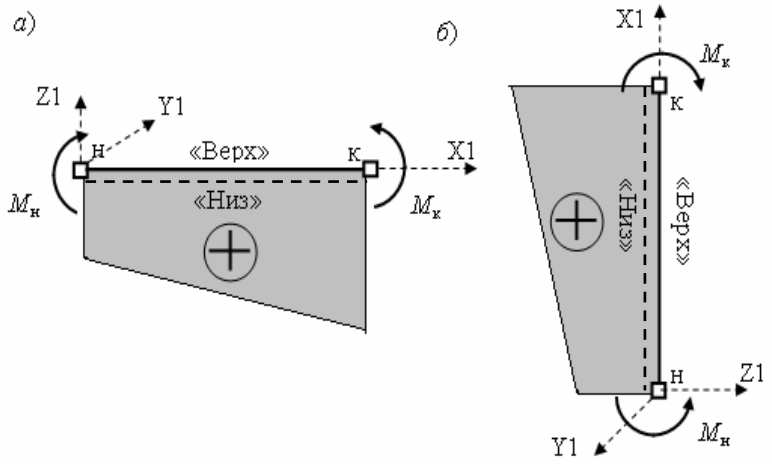


Рис. 4.2

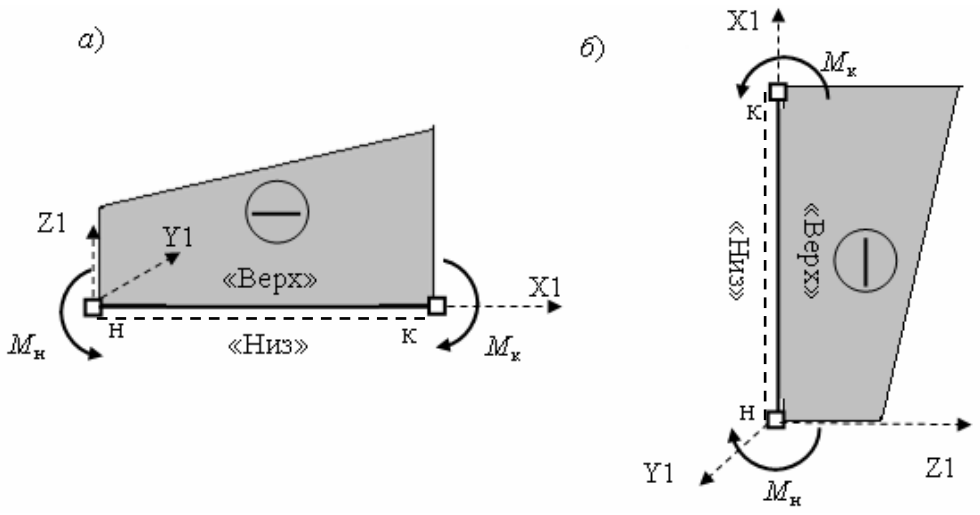


Рис. 4.3

Использование пунктира для обозначения «низа» стержня и направления оси X1 местной системы координат для указания начала и конца конечного элемента

На расчетной схеме стержневой системы, когда изображена вручную вся расчетная схема МКЭ, неудобно рисовать оси местной системы координат на каждом ее элементе. Удобнее нижнюю сторону конечных элементов отметить пунктиром так, как это показано на рис. 4.2, рис. 4.3.

Как известно (см. рис. 3.4), на одном и том же конечном элементе, расположенном в стержневой системе горизонтально, наклонно или вертикально ось X1 МСК может быть направлена и в обратную сторону. Однако при этом ось Z1 на конечном элементе может остаться направленной в ту же сторону (см. горизонтальный конечный элемент соответственно на рис. 3.10 и рис. 3.11). Тогда на изображенной расчетной схеме конечного элемента не понятно, какой его узел представляет начало конечного элемента, какой – конец.

Для того, чтобы пунктир указывал не только на направление оси Z1, но и направление оси X1 и, таким образом, указывал начало (н) и конец (к) конечных элементов, ***условимся для всех горизонтальных и наклонных конечных элементов ось X1 направлять вдоль оси стержня слева – направо, как она направлена для конечных элементов при*** $0^o \le \varphi < 90^o$ ***и*** $270^o < \varphi \le 360^o$ (см. рис. 3.4).

При этом пунктир, поставленный с нижней стороны стержня, будет показывать не только направление оси Z1 вверх от оси стержня, но и направление оси X1 вдоль стержня вправо (см. рис. 4.2 и рис. 4.3).

Условимся также, на вертикальном конечном элементе нижний его узел считать началом осей правой МСК и направлять ось X1 вверх. Тогда ***левая сторона вертикального стержня будет условно считаться нижней стороной конечного элемента*** (см. рис. 4.2 и рис. 4.3).

Построение эпюры М на элементе стержня свободном от нагрузки

Из приведенных выше свойств эпюры M (признаков правильной эпюры) известно, что, е*сли на конечном элементе стержня нет внешней нагрузки, то эпюра изгибающих моментов на нем будет прямолинейной.* Для ее построения достаточно вычислить ординаты только в конечных сечениях такого элемента.

Рассмотрим пример использования этого свойства при построении эпюры M вручную и приведем методическое указание по использованию этого свойства в программе SCAD.

П р и м е р 1. Если для построения эпюр изгибающих моментов для стержневой системы при трех вариантах ее загружения (см. схемы 1, 2 и 3 на рис. 4.1) построены расчетные схемы МКЭ (схемы 1, 2 и 3 на рис. 4.4), то их можно использовать и для построения соответствующих эпюр M вручную.

Пунктиром на этих схемах отмечена нижняя сторона конечных элементов. При этом пунктир указывает также направление оси X1 местной системы координат и на начало (н) и конец (к) конечного элемента (см. рис. 4.2 и рис. 4.3).

Эпюра изгибающих моментов на каждом свободном от нагрузки элементе прямолинейна. Она может быть построена по двум ординатам, подсчитанным для сечений (н) и (к) по концам конечных элементов, подходящих к жестким узлам соответствующих расчетных схем МКЭ.

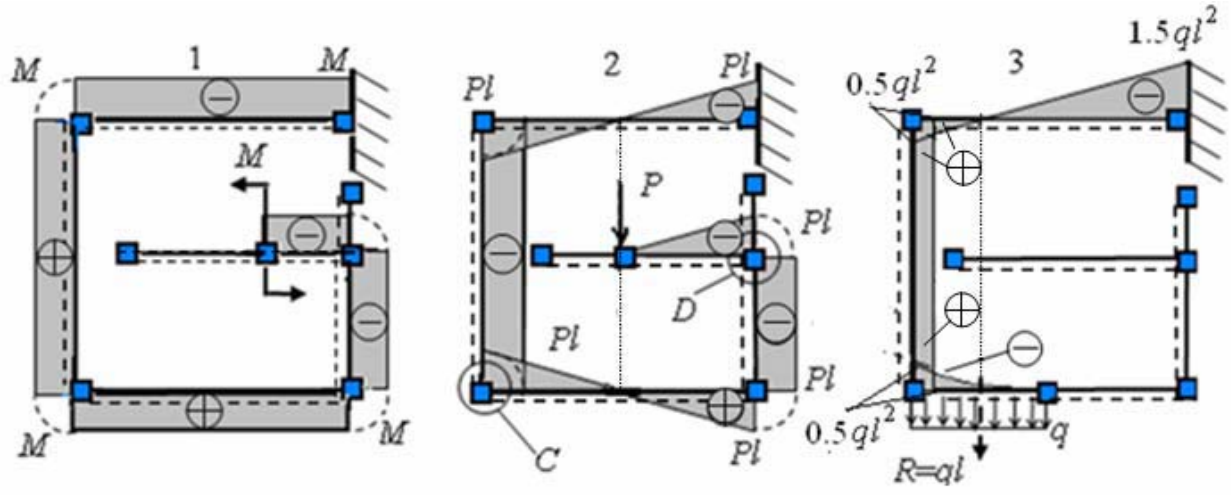


Рис. 4.4

Каждая из таких ординат при ручном расчете вычисляется из уравнения равновесия составленного относительно рассматриваемого сечения стержня для части стержневой системы, расположенной с любой стороны от сечения. Для рассматриваемой системы консольного вида проще составить уравнение равновесия для свободной от заделки части.

Методическое указание при подсчете ординат вручную. Для определения изгибающего момента в сечении стержня, при ручном подсчете алгебраической суммы моментов всех сил с одной стороны от сечения (4.1), рекомендуется сразу ставить знаки слагаемых моментов M_k^r в соответствии с этим правилом знаков.

Затем величина M_k^r в виде ординаты откладывается от оси стержня на растянутой стороне стержня, которая отмечается знаком: при знаке «плюс» ордината откладывается «вниз» (со стороны пунктира); при знаке «минус» – «вверх» (со стороны обратной пунктиру).

В результате в узлах (н) и (к) всех свободных от нагрузки элементов будут получены и отложены в соответствии с принятым правилом ординаты эпюры M. соединяя эти ординаты на каждом конечном элементе прямыми линиями построим часть эпюры M с линейными участками (см. рис. 4.4).

Методическое указание при расчете с помощью программы SCAD. При использовании программы SCAD для построения эпюры изгибающих моментов необходимо использовать возможность этой программы назначать на конечном элементе необходимое число сечений.

Для конечного элемента, без нагрузки на его пролете, с целью уменьшения численной информации, выдаваемой программой SCAD после расчета стержневой системы МКЭ, необходимо назначить только два сечения по концам элемента (см. [2, 19] и методические указания, приведенные в приложении 1 к УМК).

Построение эпюры на конечном элементе с равномерно распределенной нагрузкой выполняется с использованием второго из перечисленных выше свойств эпюр изгибающих моментов. Рассмотрим практические рекомендации по построению этой эпюры вручную и с помощью программы SCAD.

Построение эпюры М на элементе стержня при действии по его длине равномерно распределенной нагрузки

Если по всей длине КЭ расположена равномерно распределенная нагрузка, то эпюра изгибающих моментов на нем будет иметь вид параболы второй степени с выпуклостью направленной в сторону действия нагрузки.

Для приближенного построения эпюры изгибающих моментов указанного параболического очертания достаточно вычислить только три ее ординаты: сначала в сечениях (н) и (к) конечного элемента, а затем в его среднем сечении (с).

Покажем простой и удобный, приближенный способ вычисления средней ординаты по ординатам в крайних сечениях КЭ.

П р и м е р 2. Вырежем (по узлам «н» (1) и «к» (2) МСК) из стержневой системы элемент, загруженный равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 4.5, *а*). Рассмотрим его, как балку на двух опорах, под действием внутренних усилий по концам элемента и распределенной нагрузки (рис. 4.5, *б*).

Добавление указанных трех опорных связей не влияет на усилия в элементе, так как в

вырезанном состоянии он находится в равновесии, поэтому в добавленных связях усилия (реакции) будут нулевыми.

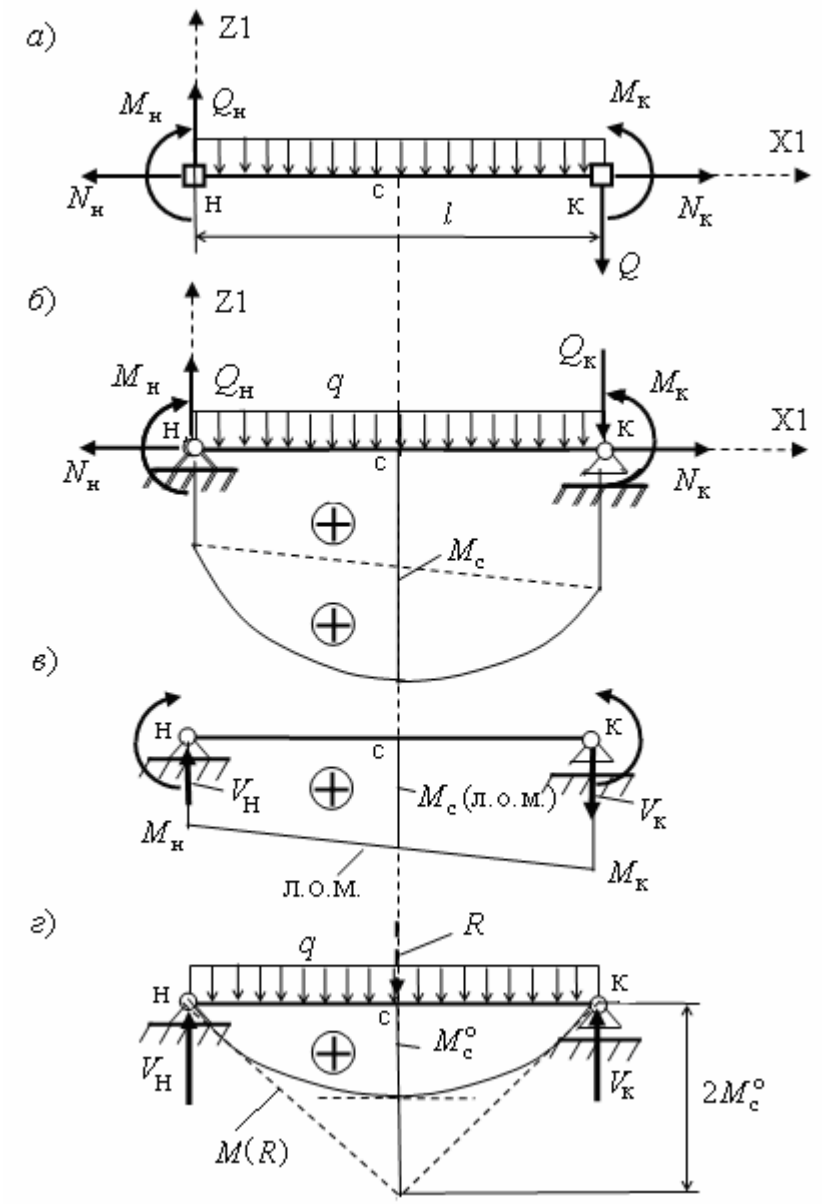


Рис. 4.5

Изгибающий момент M_c в среднем сечении элемента (см. рис. 4.5, *б*) можно вычислить как сумму средней ординаты $M_{\text{с}}(\text{лом}) = 0.5(M_{\text{н}} + M_{\text{к}})$ (рис. 4.5, *в*) линейной эпюры моментов (линии опорных моментов, или «л.о.м») и средней ординаты $M_c^o = ql^2/8$ параболической эпюры в простой балке на двух опорах от равномерно распределенной нагрузки (рис. 4.5, *г*):

$$M_{\text{с}} = 0.5(M_{\text{н}} + M_{\text{к}}) + M_{\text{с}}^o . \qquad (4.2)$$

Обе суммируемые ординаты в рассмотренном примере положительны, так как они расположены снизу от оси балки.

На рис. 4.6 показан вариант, когда ордината $M_{\text{с}}(\text{лом}) = 0.5(M_{\text{н}} + M_{\text{к}})$ отрицательна

(ордината $M_c^o = ql^2/8$ при указанном направлении нагрузки q положительна).

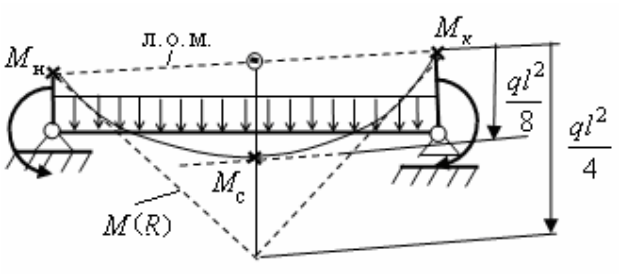


Рис. 4.6

На рис. 4.5 и рис. 4.6 продемонстрирован графоаналитический способ построения параболической эпюры по трем ее суммарным ординатам ($M_н, M_с, M_к$) и по трем касательным к параболе в соответствующих точках на концах ординат (отмечены крестиком).

Смысл этого графоаналитического способа будет понятен, если рассмотреть на указанных рисунках эпюру $M(R)$ треугольной формы, показанную штриховыми линиями.

Эпюра $M(R)$ является эпюрой в балке от равнодействующей $R = ql$ распределенной нагрузки. Ордината эпюры в месте приложения равнодействующей ровно в два раза больше ординаты $M_с^о$ от равномерно распределенной нагрузки (см. рис. 4.5, *г* и рис. 4.6). Кроме того, видно, что линии ординат этой эпюры, в точках опор являются касательными к эпюре в виде параболы. Третья касательная к криволинейной эпюре $M^о$ проводится через конец ординаты $M_с^о$ (см. рис. 4.5, *г* и рис. 4.6).

Поскольку при суммировании ординат в среднем сечении стержня ***ордината*** $M_с^о$ ***откладывается от л.о.м перпендикулярно оси стержня***, то касательная к криволинейной эпюре в этом сечении должна быть параллельна л.о.м (см. рис. 4.6).

При использовании формулы (4.1) моменты подставляются в нее со своим знаком. В примере на рис. 4.7 предполагается, что ордината $M_с(\text{л.о.м.}) = 0.5(M_н + M_к)$ отрицательна, а ордината $M_с^о = ql^2/8$ положительна численно больше ординаты $M_с(\text{л.о.м.})$. В результате суммарная ордината $M_с$ будет положительной величиной.

В схеме 3 на рис. 4.4 конечный элемент, на который действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q, изгибающие моменты на левом (н) и правом (к) концах при вычислении с помощью уравнения равновесия (4.1) оказались соответственно равными:

$$M_н^r = R \cdot (0.5l) = 0.5ql^2; \quad M_к^r = 0 \qquad (4.3)$$

Применение указанного графоаналитического приема для этого случая продемонстрировано на рис. 4.7.

Так как рассматриваемый на схеме 3 рис. 4.4 элемент является консольным, то изгибающий момент в среднем сечении консоли просто вычисляется по формуле (4.1):

$M_c^r = -(\frac{ql}{2}) \cdot (\frac{l}{4}) = -\frac{ql^2}{8} = -0.125ql^2$.

Методическое указание при расчете с помощью программы SCAD. При использовании программы SCAD для построения эпюры изгибающих моментов необходимо использовать возможность этой программы назначать на конечном элементе необходимое число сечений.

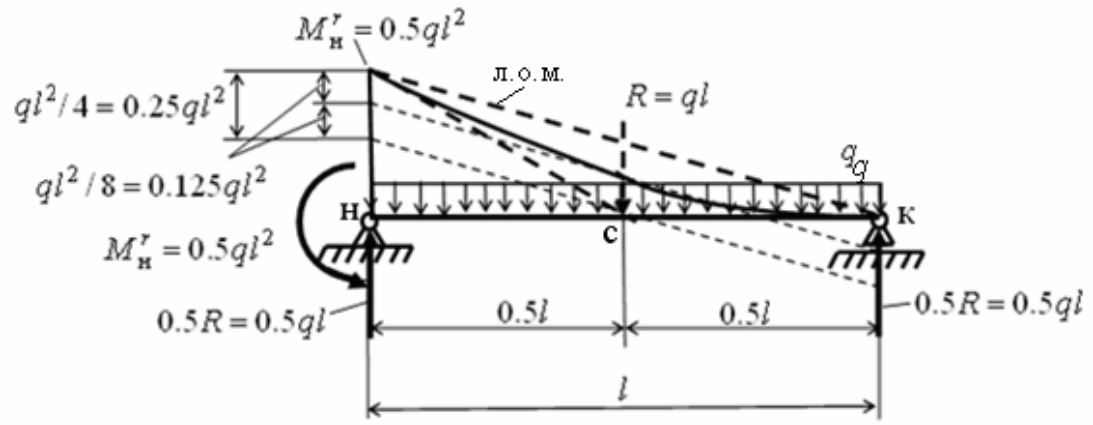


Рис. 4.8

Для конечного элемента, с равномерно распределенной нагрузкой на его пролете, с целью уменьшения численной информации, выдаваемой программой SCAD после расчета стержневой системы МКЭ, достаточно назначить только по длине элемента только три сечения: два по концам элемента и одно по его середине (см. [2, 19] и методические указания, приведенные в приложении 1 к УМК).

Рассмотренный прием может быть использован и при другого вида нагрузке. Это будет продемонстрировано в дальнейшем при решении практических задач.

4.2. Эпюра поперечных сил Q

Правила построения ординат эпюры Q

Для построения ординаты эпюры Q в каком – либо сечении необходимо:

1. Одним из приведенных ниже способов определить численное значение поперечной силы в сечении и ее знак.

2. Отложить найденное численное значение в виде ординаты перпендикулярно оси стержня с одной из сторон стержня в соответствии со знаком Q.

Численное значение поперечной силы в сечении и ее знак можно определить двумя способами.

Способ 1. Определение поперечной силы в сечении стержня из уравнения равновесия части стержневой системы слева или справа от сечения

Численное значение поперечной силы Q_k *в любом сечении* k *стержня равно численному значению алгебраической суммы* $\sum_i P_{n,i}$ *проекций* ***всех внешних сил*** P_i***,*** *действующих на стержневую систему* ***с любой одной из сторон сечения****, на нормаль* n *к оси стержня в сечении* k:

$$Q_k = \sum_i P_{n,i}\,, \tag{4.4}$$

Нормалью на прямолинейном стержневом конечном элементе является ось Z1 его местной системы координат, поэтому $P_{n,i} = P_{\mathrm{Z1},i}$. Знак проекции $P_{n,i} = P_{\mathrm{Z1},i}$ силы P_i с номером i в уравнении (4.4) принимаем положительным, когда направление проекции совпадает с отрицательным направлением оси Z1.

Знак поперечной силы Q_k определяется по направлению ее вектора в сечении k (см. рис. 1.7).

Применяя это правило к конечному элементу можно сформулировать его в следующем виде.

Вектор поперечной силы считается положительным, если он на левом конце (н) *конечного элемента стержня совпадает по направлению с осью Z1, а на правом конце* (к) *– противоположен направлению оси Z1* (см. рис. 4.8).

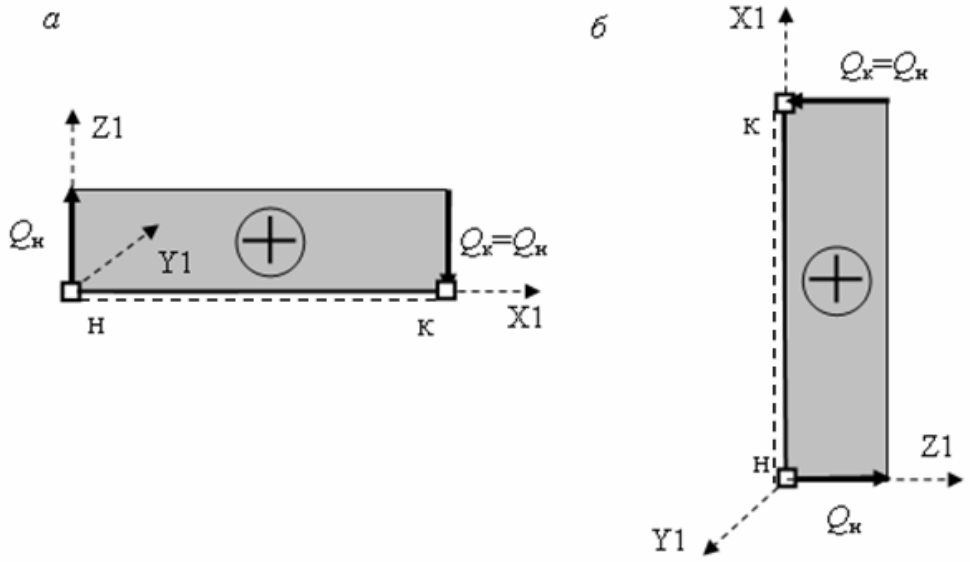


Рис. 4.8

Вектор поперечной силы считается отрицательным, если он на левом конце (н) *конечного элемента стержня по направлению не совпадает с*

направлением оси Z1, а на правом конце (к) – *совпадает с направлением оси Z1* (см. рис. 4.9).

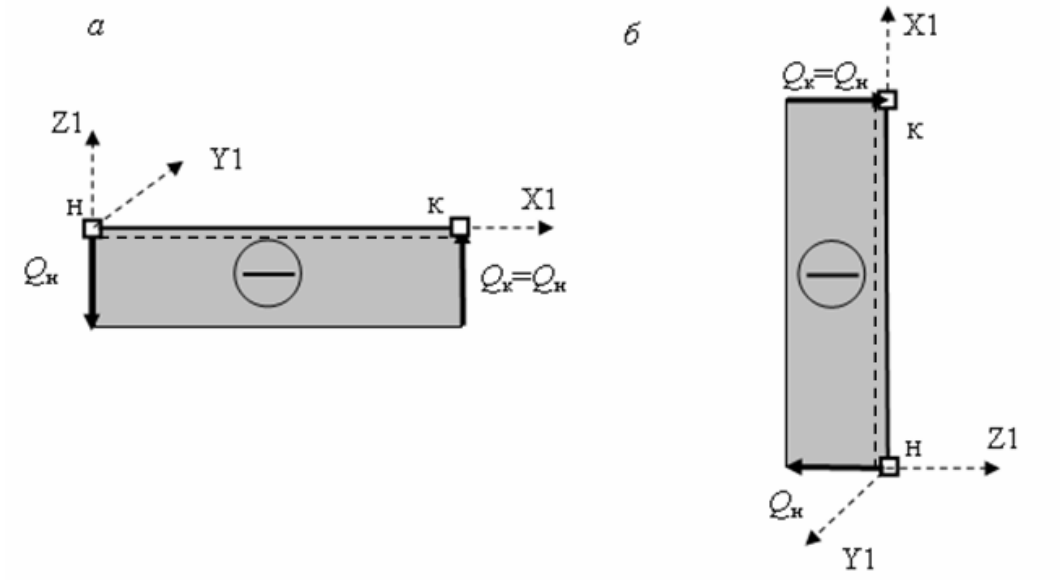


Рис. 4.9

Положение сечений «н» и «к» стержня определяется по направлению оси X1 МСК и может быть установлено также с помощью пунктира, поставленного на «нижней» стороне стержня (см. рис. 3.4, рис. 4.8 и рис. 4.9).

На рис. 4.8 и рис. 4.9 приведены эпюры Q с положительными и отрицательными ординатами для конечного элемента, в пределах которого нет нагрузки, При этом в сечениях «н» (1) и «к» (2) КЭ в МСК показаны направления векторов положительных и отрицательных поперечных сил.

Направление поперечной силы *в любом сечении* можно найти по правилу «тупого угла»: *если идти по эпюре моментов, построенной на растянутой стороне стержня, в направлении сечения стержня, то вектор поперечной силы в этом сечении образует тупой угол с эпюрой М (или с касательной к ней, если эпюра М криволинейна)* (рис. 4.10).

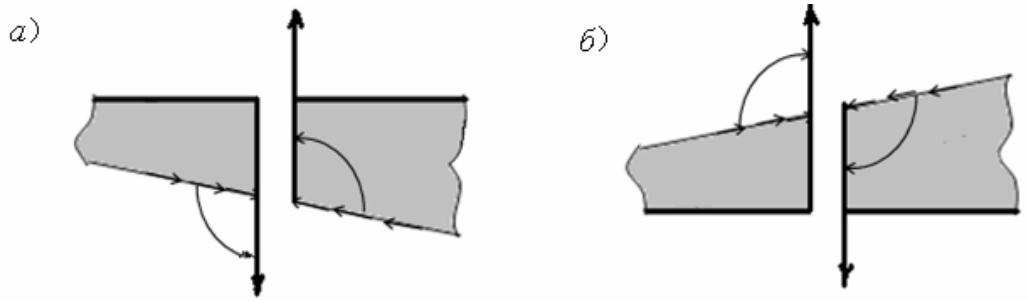


Рис. 4.10

Направление движения по эпюре моментов к сечению показано на

рис. 4.10 стрелками. Полученное направление вектора зависит указывает и на его знак в соответствии с направлением на стержне оси Z1.

Способ 2. Определение поперечной силы в сечении стержня по эпюре моментов из уравнения равновесия $Q = dM / dx$ *для бесконечно малого элемента* dx

Численное значение Q получается из того условия, что $Q = dM / dx = \mathrm{tg}\,\alpha$, где α – угол наклона касательной к эпюре M в рассматриваемом сечении к оси стержня. При линейной эпюре M угол α равен углу наклона самой эпюры к оси стержня (рис. 4.11, рис. 4.12):

$$Q = \frac{dM}{dx} = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{M_к - M_н}{l}. \qquad (4.5)$$

Знак Q определяется по знаку производных dx и dM.

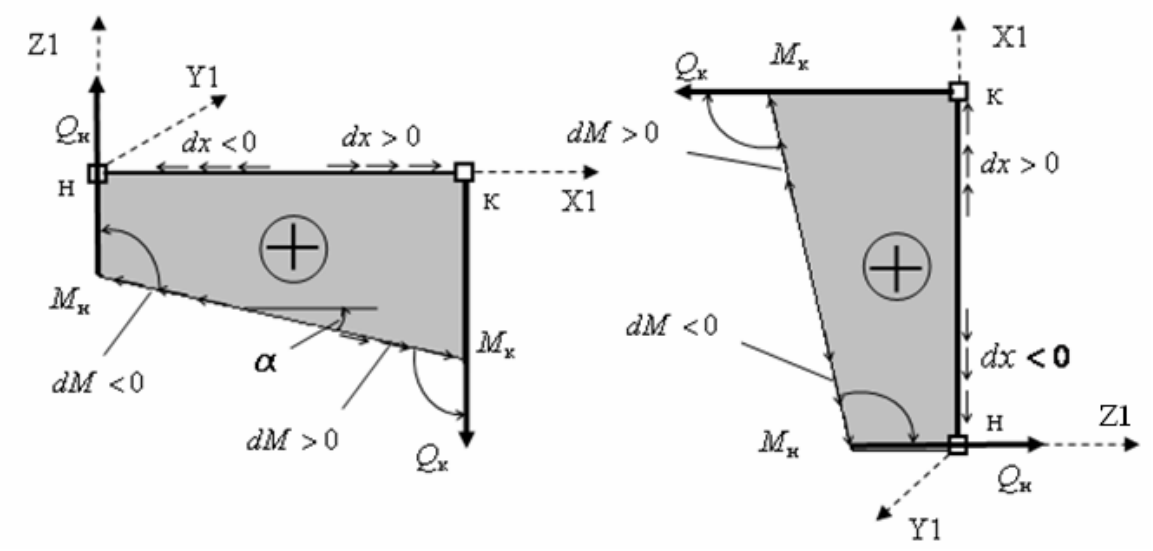


Рис. 4. 11

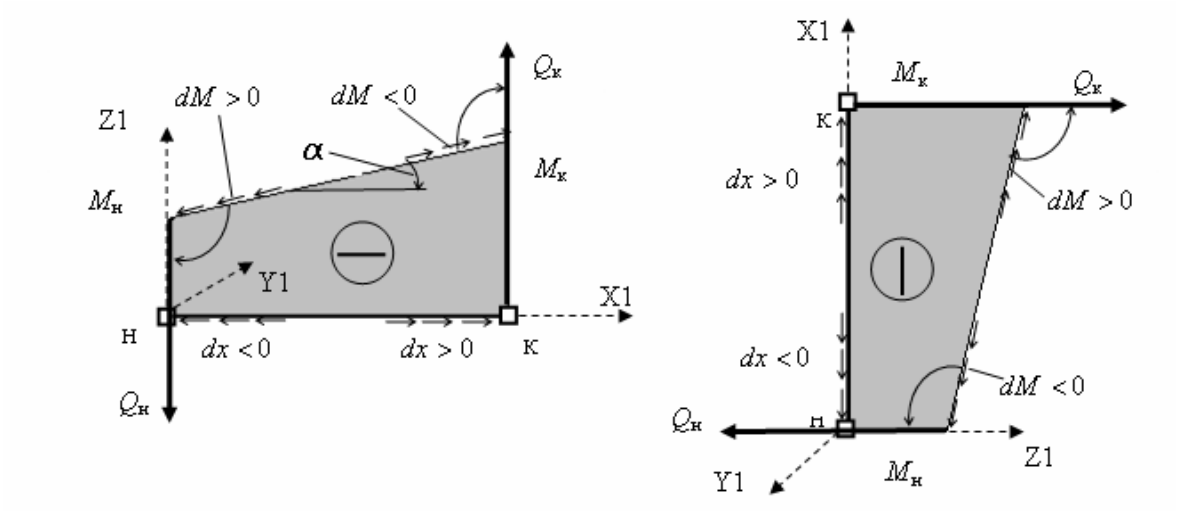


Рис. 4.12

На рис.4.11, 4.12 приведены эпюры M на горизонтальном и вертикальном конечных элементах соответственно с положительными и отрицательными знаками ординат. Показаны направления, по которым происходит положительное или отрицательное приращение производных dx и dM.

На рис. 4.11 и рис. 4.12 показан и способ получения направления векторов поперечных сил (а значит и знака Q в соответствии с осью Z1) в начальном (н) и концевом (к) сечениях конечных элементов по правилу «тупого узла».

П р и м е р 1. Построим эпюры Q для трех расчетных схем, для которых на рис. 4.1 и 4.4 были построены эпюры M, первым способом. Эпюры Q для приведенных примеров первым способом строятся просто вручную. Они приведены на рис. 4.13.

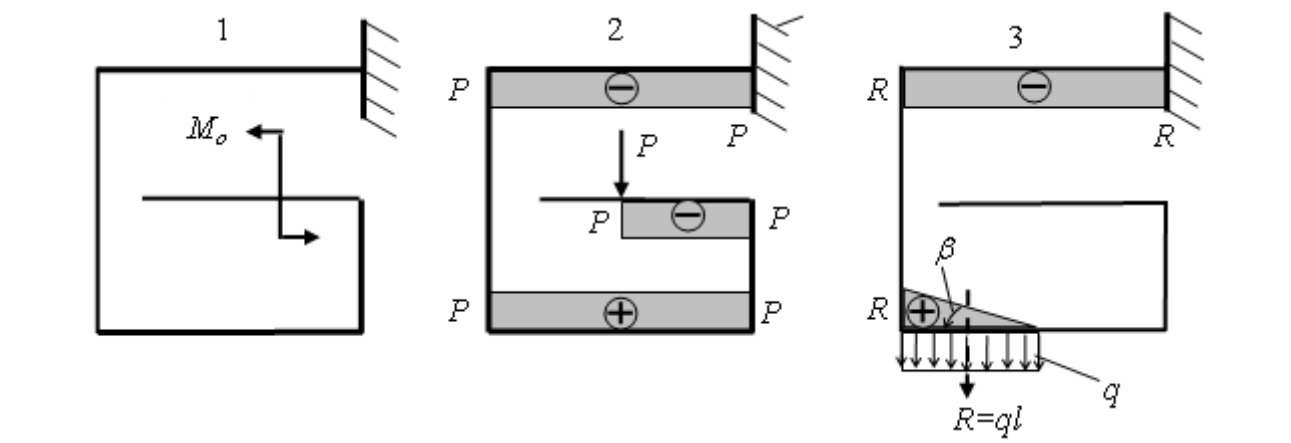


Рис. 4.13

Анализируя эти эпюры, можно отметить следующие свойства эпюры Q, являющиеся признаками ее правильного вида, которые будем далее использовать при контроле эпюры Q.

Признаки правильного вида эпюры Q

1. На прямом элементе без нагрузки по его длине поперечная сила постоянна и эпюра Q имеет прямоугольную форму.

2. В сечении, которое совпадает с действующей поперек оси стержня сосредоточенной силой, ординаты эпюры Q слева и справа от силы имеют скачок, равный величине этой силы.

3. На участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра Q прямолинейна и имеет наклон к оси стержня (рис. 3.11, 3), тангенс угла которого равен интенсивности нагрузки $q = dQ / dx = tg\,\beta$. Нулевому значению на эпюре Q на участке с равномерно распределенной нагрузкой соответствует экстремальное значение на эпюре M.

Приведем способ построения эпюры Q на участке стержня с равномерно распределенной нагрузкой.

Вырежем участок стержня с равномерно распределенной нагрузкой и представим его в виде конечного элемента, отнесенного к местной системе координат (см. рис. 4.5, *а*).

Представив этот элемент, находящийся в равновесии под действием нагрузки и усилий по его концам, как балку на двух опорах (см. рис. 4.5, *б*), используем принцип независимости действия сил рассмотрим балку отдельно от действия только опорных моментов (см. рис. 4.5, *в*) и только от нагрузки (см. рис. 4.5, *г*).

При действии на балку только равномерно распределенной нагрузки эпюра $Q^{\text{о}}$ поперечной силы приведена на рис. 4.14, *а*. Ее ординаты в начальном и конечном сечении балки равны опорным реакциям:

$$Q^{\text{о}}_{\text{н,к}} = \pm 0.5ql\,. \tag{4.6}$$

Эпюра поперечных сил от действия на балку опорных моментов в любом сечении балки имеет постоянную ординату (рис. 4.14, *б*), равную

$$Q_{\text{оп}} = \text{tg}\,\alpha = \frac{M_{\text{к}} - M_{\text{н}}}{l}\,. \tag{4.7}$$

Знак ординаты зависит от соотношения опорных моментов $M_{\text{н}}$ и $M_{\text{к}}$ в выражении (4.?). Если $M_{\text{к}} > M_{\text{н}}$, то знак величины $Q_{\text{оп}}$ будет положительным (см. рис, 4.14, *б*), в противном случае – отрицательным (см. рис, 4.14, *г*).

Суммарная эпюра Q получится линейной, поэтому для ее построения достаточно вычислить ординаты только в начальном (н) и конечном (к) сечениях рассматриваемого участка стержня (конечного элемента):

$$Q_{\text{н,к}} = Q^{\text{о}}_{\text{н,к}} + Q_{\text{оп}} = \pm 0.5ql + \frac{M_{\text{к}} - M_{\text{н}}}{l}\,. \tag{4.8}$$

Суммарные эпюры Q для вариантов, когда $Q_{\text{оп}} > 0$ и $Q_{\text{оп}} < 0$, построены соответственно на рис. 4.14, *в* и рис. 4.14, *д*.

Вычислим по формуле (4.8) ординаты эпюры Q на участке с равномерно распределенной нагрузкой на схеме 3 рис. 4.13.

При назначенной МСК (см. рис. 4.4) для конечного элемента с равномерно распределенной нагрузкой имеем $M_{\text{н}} = -0.5ql^2$, $M_{\text{к}} = 0$. Тогда по формуле (4.8) для этого же элемента получаем ординаты эпюры перерезывающих сил в начальном (н) и конечном (к) сечениях:

$$Q_{н,к} = \pm 0.5ql + \frac{0-(-0.5ql^2)}{l} = \pm 0.5ql + 0.5ql = \begin{cases} ql \\ 0 \end{cases}. \qquad (4.9)$$

Результат расчета рассмотренным способом совпадает с результатом расчета этих ординат первым способом (см. схему 3 на рис. 4.13).

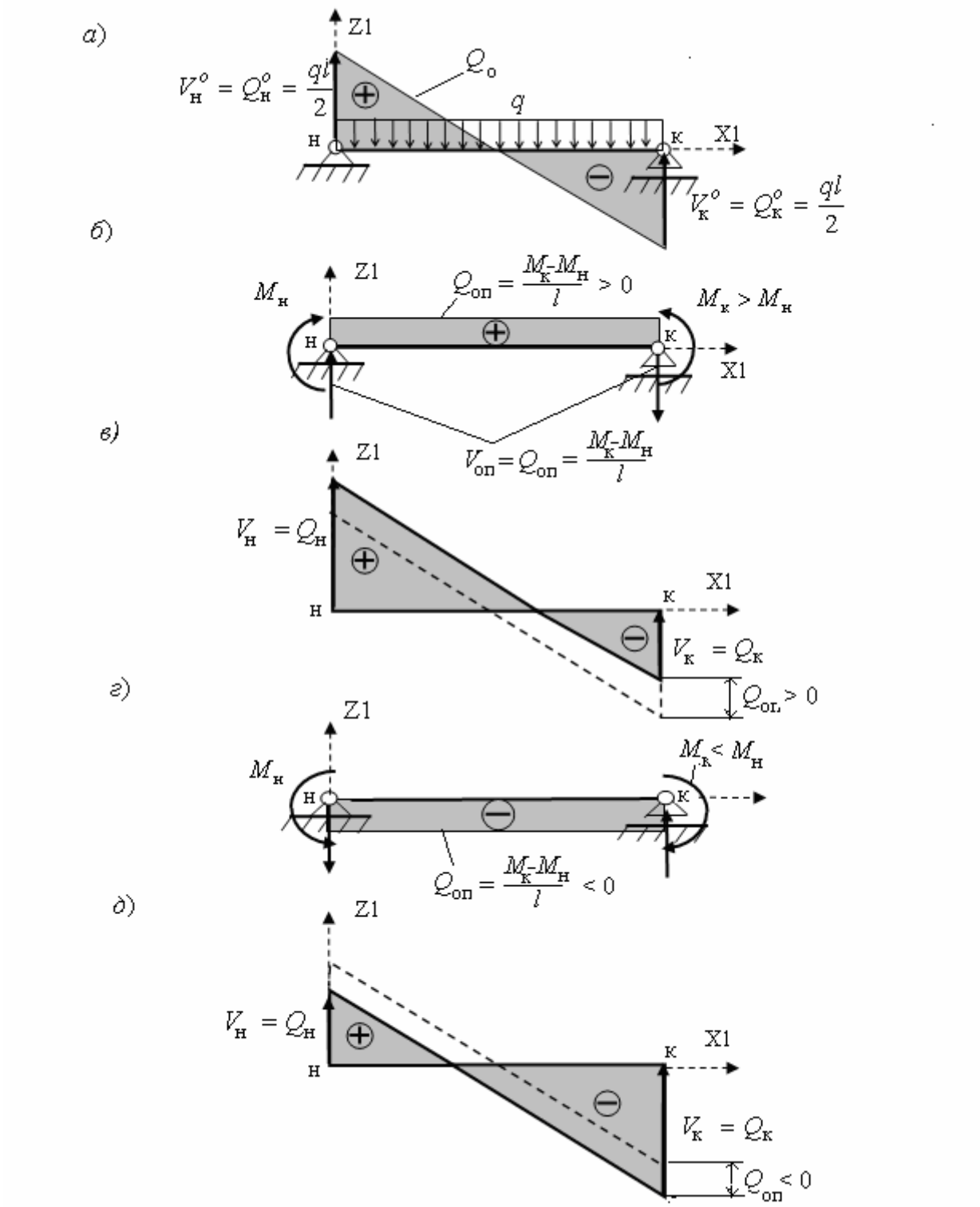


Рис. 4.14

4.3. Эпюра продольных сил N

Правила построения ординат эпюры N

Для построения ординаты эпюры N в каком – либо сечении необходимо:

1. Одним из приведенных ниже способов определить ***численное значение продольной силы в сечении и ее знак.***

2. Отложить найденное численное значение N в виде ординаты перпендикулярно оси стержня ***с одной из сторон стержня в соответствии со знаком*** N**.**

Способ 1. Определение продольной силы в сечении стержня из уравнения равновесия части стержня слева или справа от сечения

Численное значение продольной силы N_k *в любом сечении* k *стержня равно численному значению алгебраической суммы проекций* ***всех внешних сил*** P_i***,*** *действующих на стержневую систему* ***с любой одной из сторон сечения****, на касательную к оси стержня в сечении* k*:*

$$N_k = \sum_i^{\text{слева}} P_{\text{кас},i} = \sum_i^{\text{справа}} P_{\text{кас},i} \qquad (4.10)$$

Касательная к оси прямолинейного стержневого КЭ совпадает с осью X1 его МСК, поэтому $P_{\text{кас},i} = P_{\text{X1},i}$. Знак проекции $P_{\text{кас},i} = P_{\text{X1},i}$ силы P_i с номером i в уравнении (4.10) принимаем положительным, когда направление проекции совпадает с отрицательным направлением оси X1. Знак продольной силы N_k определяется по направлению ее вектора в сечении k (см. рис. 1.7):

Растягивающая продольная сила в сечении стержня считается положительной, сжимающая – отрицательной (см. рис. 1.7 и рис. 4.15).

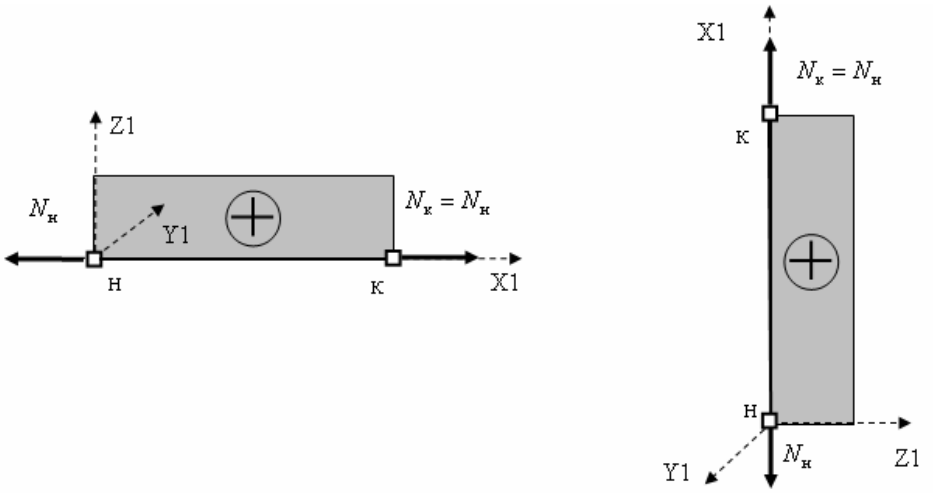


Рис.4.15

Эпюры N для стержневой системы, рассмотренной в предыдущих подразделах (см. рис. 4.1, рис. 4.13) от трех видов нагрузок, приведены на схемах 1, 2, 3 рис. 4.16.

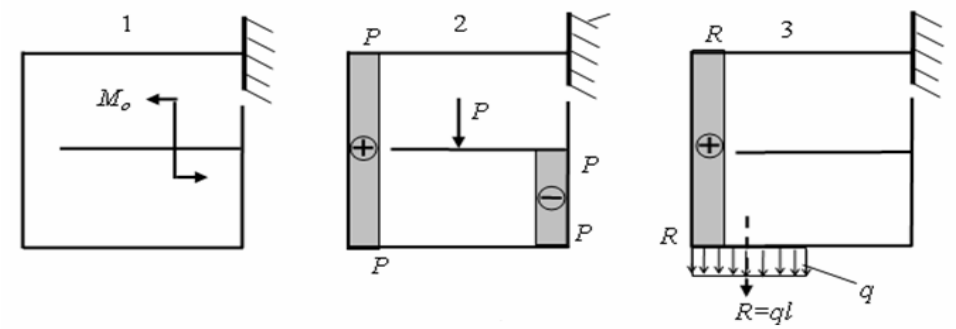


Рис. 4.16

Ординаты этих эпюр во всех сечениях вычислены рассмотренным способом, т. е с использованием уравнений равновесия (4.10).

Способ 2. Определение продольной силы в сечении стержня из рассмотрения равновесия узлов стержневой системы

Для иллюстрации второго способа рассмотрим узел C на схеме 2 рис. 4.1. Вырежем узел и рассмотрим его равновесие под действием поперечных и продольных сил. Векторы поперечных сил, действующие на узел, найдем по правилу «тупого узла» (рис. 4.10). Продольные силы в двух разрезанных стержнях (с номерами s и r) определятся из двух уравнений равновесия вида $\sum X = 0; \quad \sum Z = 0$ (рис. 4.17).

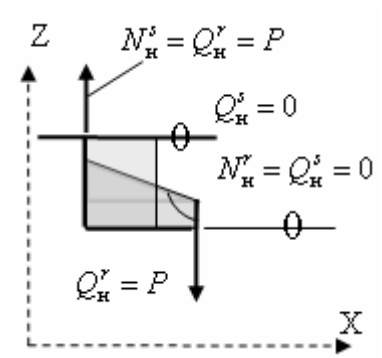


Рис. 4.17

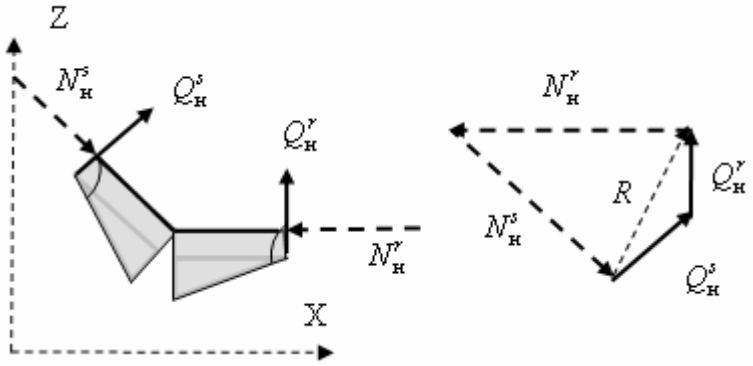


Рис. 4.18

Рассмотрим теперь некоторый узел с двумя наклонными по отношению друг к другу стержнями (рис. 4.18).

Предположим, что поперечные силы, действующие на узел, известны. Для определения продольных сил в двух разрезанных стержнях (с номерами s и r) можно использовать те же уравнения равновесия, что и для предыдущего

узла. Но теперь при аналитическом решении придется решить систему двух уравнений с двумя неизвестными.

На рис. 4.18 равновесие рассматриваемого узла отражено графически с помощью многоугольника сил.

Отложив последовательно (в любой очередности) в выбранном масштабе сил известные векторы поперечных сил в проведенных (бесконечно близко к узлу) сечениях, получим их равнодействующую R.

Эту равнодействующую раскладываем на два направления, параллельных осям разрезанных стержней и замыкаем треугольник сил, поставив направления векторов искомых продольных сил так, чтобы равнодействующая всех сил, действующих на узел, была равна нулю.

Направления найденных векторов продольных сил показывают, сжаты или растянуты стержни (в нашем примере – сжаты).

Очевидно, что из двух уравнений равновесия узла могут быть определены продольные силы только в двух стержнях.

Если же вырезанный узел имеет большее число стержней, то все остальные продольные силы, кроме искомых двух (не лежащих на одной прямой) должны быть определены из каких-то других узлов, иначе продольные усилия в узле будут статически неопределимы..

В качестве примера статически определимого узла с числом стержней, сходящихся в узле, больше двух рассмотрим узел D (см. схему 2 на рис. 4.1).

Из его рассмотрения видим, что три вектора поперечных сил в сечениях стержней у узла известны (два из них равны нулю). Известно и продольное усилие в примыкающей сверху к узлу консоли (оно равно нулю). Поэтому, хотя в узле и сходится более двух стержней, неизвестных продольных усилий будет только два. Они и определятся из двух уравнений равновесия.

Признаки правильного вида эпюры N

1. На прямом стержне без нагрузки по его длине продольная сила постоянна и эпюра N имеет прямоугольную форму.

2. В сечении, которое совпадает с действующей вдоль оси стержня сосредоточенной силой, ординаты эпюры Q слева и справа от силы имеют скачок, равный величине этой силы.

3. На участке с равномерно распределенной вдоль стержня нагрузкой интенсивностью q_{x1} эпюра N прямолинейна и имеет наклон к оси стержня, тангенс угла которого равен интенсивности нагрузки $q_{x1} = dN / dx = tg\,\beta$.

Последний вариант рассмотрен на рис. 4.19 для прямолинейного КЭ.

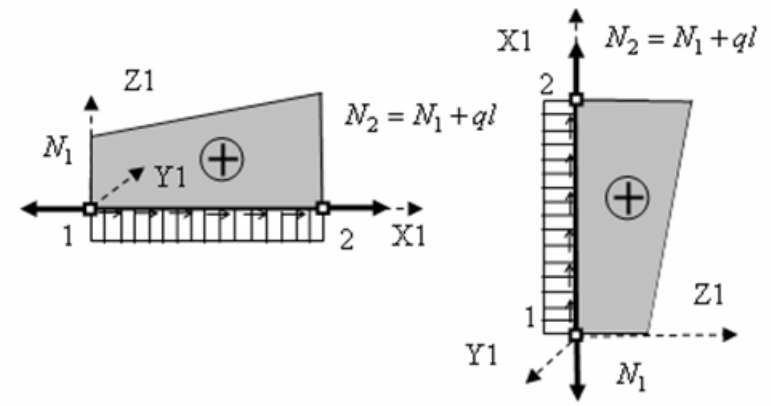


Рис. 4.19

4.4. Используемые способы контроля построенных эпюр M, Q, N

После построения эпюр M, Q, N вручную или на ПК, с помощью, например, программы SCAD, они должны быть обязательно проверены расчетчиком.

Этот контроль выполняется как по внешнему виду эпюр (по перечисленным выше свойствам (признакам) правильных эпюр), так и путем проверки равновесия стержневой системы и любых отсеченных из нее частей.

В практике расчетов для контроля построенных эпюр используются следующие варианты применения трех уравнений равновесия для плоской задачи:

1. Используется уравнение равновесия $Q = dM / dx$ бесконечно малого элемента dx стержня. С его помощью проверяется соответствие эпюр M и Q по их виду и знаку.

2. Рассматривается равновесие всей стержневой системы, т.е. используются три уравнения равновесия для плоской стержневой системы вида $\sum_i^{\text{системы}} M_i = 0$, $\sum_i^{\text{системы}} P_{i,X} = 0$; $\sum_i^{\text{системы}} P_{i,Z} = 0$ (конструкция относится к общей системе координат XOZ).

3. Рассматривается равновесие узлов стержневой системы, т.е. используются те же три вида уравнений равновесия, но для любого вырезанного узла: $\sum_i^{\text{узла}} M_i = 0$, $\sum_i^{\text{узла}} P_{i,X} = 0$; $\sum_i^{\text{узла}} P_{i,Z} = 0$, где i – номер стержня, подходящего к узлу.

3.1. Обычно равновесие узлов по моментам ($\sum_i^{\text{узла}} M_i = 0$) иллюстрируется

показом вырезанных узлов (см. например, рис. 4.17 и рис. 4.18).

Рекомендуется, для наглядности равновесия узлов по моментам, показывать вырезанные узлы прямо на чертеже эпюры M (см. далее примеры расчетов стержневых систем).

3.2. Рассмотрение оставшихся двух уравнений равновесия узлов плоской стержневой системы ($\sum_{i}^{\text{узла}} P_{i,X} = 0$; $\sum_{i}^{\text{узла}} P_{i,Z} = 0$) отражает равновесие узлов по поперечным и продольным силам.

Это равновесие иллюстрируют демонстрацией вырезанных узлов. Уравнения равновесия узлов проверяются либо аналитически (записываются уравнения равновесия на наиболее подходящие для проверки оси) или показывается замкнутый при равновесии многоугольник всех сил, действующих на узел (см., например, рис. 4.18).

4. Очень быстрой проверкой правильности эпюр в рамах является проверка равновесия вырезанных ригелей рам. Эта проверка продемонстрирована далее во многих примерах расчета рам.

Перейдем к рассмотрению рациональных способов использования уравнений равновесия вручную (без применения ПК) для определения усилий в различных типах статически определимых стержневых систем.

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ВЫБОРА РАЦИОНАЛЬНОГО СПОСОБА ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСИЛИЙ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

5.1. Последовательность определения усилий вручную

Усилия при расчете статически определимых систем определяются в различных связях: в опорных (опорные реакции), в шарнирных (давления в шарнирах), во внутренних связях сечений стержней (внутренние усилия M, Q, N).

Последовательность определения этих усилий при ручном расчете стержневой системы (без применения ПК) может быть различной и зависит как от поставленной задачи ручного расчета, так и от конструктивных особенностей стержневой системы.

В этом подразделе учебного пособия будем рассматривать статически определимую стержневую систему с точки зрения необходимости построения в ней вручную эпюр внутренних усилий M, Q, N. С этой точки зрения будем строить и последовательность решения задачи, имея также в виду построение наиболее рационального и наглядного пути определения усилий.

В строительной механике стержневых систем при построении вручную (без использования ПК) эпюр M, Q, N в таких статически определимых стержневых системах как рамы и балки принято строить вначале эпюру M, так как затем по ней может быть построена эпюра Q. Для рам по эпюре Q может быть построена эпюра N (см. подраздел 4.2).

В общем случае построение эпюры M может быть затруднено или невозможно без предварительного определения опорных реакций и давлений в шарнирах. *Поэтому расчет статически определимых стержневых систем обычно начинают с определения именно этих усилий.*

Некоторые рассуждения на тему определения усилий в опорных связях и давлений в шарнирах были приведены в подразделе 2.4. Там рассмотрены две задачи.

При решении первой задачи в стержневой системе удаляются все опорные связи и связи в шарнирах и заменяются соответствующими усилиями. Стержневая система превращается в систему отдельных дисков, для каждого из которых можно составить три уравнения равновесия. При этом в статически

определимой системе будет соблюдаться равенство (2.17). Из $3n_д$ уравнений равновесия и определяются все опорные реакции и все давления в шарнирах. Затем на каждом диске отдельно могут быть построены эпюры усилий.

При втором варианте решения задачи в стержневой системе вначале удаляются только опорные связи. По шарнирам, соединяющим диски между собой, система не разрезается.

Примечание. В статически определимых рамах с дисками в виде замкнутых контуров для построения эпюр усилий необходимо выполнить «раскрытие» контуров путем разрезания одного из трех шарниров, имеющихся в контуре (удаление двух связей) и определение заменяющих шарнир двух давлений. Это будет продемонстрировано в примере подраздела (4.3).

После определения опорных реакций и по два усилия в разрезанном шарнире каждого контура также возможно построение всех эпюр усилий. Соответствующие примеры приведены в подразделах (4.3) и (4.4).

Иногда построение эпюры M может быть выполнено с предварительным определением только части опорных реакций стержневой системы, или даже без определения опорных реакций. Это будет продемонстрировано на примере расчета рамы в подразделе (4.3).

В данном разделе учебного пособия продемонстрированы примеры рационального использования конструктивных особенностей стержневых систем при определении: усилий в сечениях стержней, опорных реакций и давлений в шарнирах.

5.2. Использование этажной схемы шарнирной балки

Изучим этот способ на примере шарнирной балки, расчетная схема которой изображена на рис. 1.2, *в*. Придадим балке конкретные размеры и загрузим ее конкретной нагрузкой (рис. 5.1, *а*). Пусть $l_1 = l_2 = l$; $l_3 = 1.4l$; $a = b = 0.2l$; $c = 0.15l$; $d = 0.2l$; $q_1 = 2q$; $q_2 = q$; $P_1 = P_2 = 0.6ql$; $M_o = 0.2ql^2$.

При выполнении структурного анализа этой шарнирной балки с целью исследования ее геометрической неизменяемости (см. подраздел 2.5) была использована так называемая этажная схема, которая показала, что балка является статически определимой системой.

Этажная схема оказывается удобной для рационального применения уравнений равновесия при определении опорных реакций балки и усилий в ее сечениях.

Действительно, из этажной схемы хорошо видно, что звено FD является самой верхней прикрепленной частью конструкции и может быть рассчитано

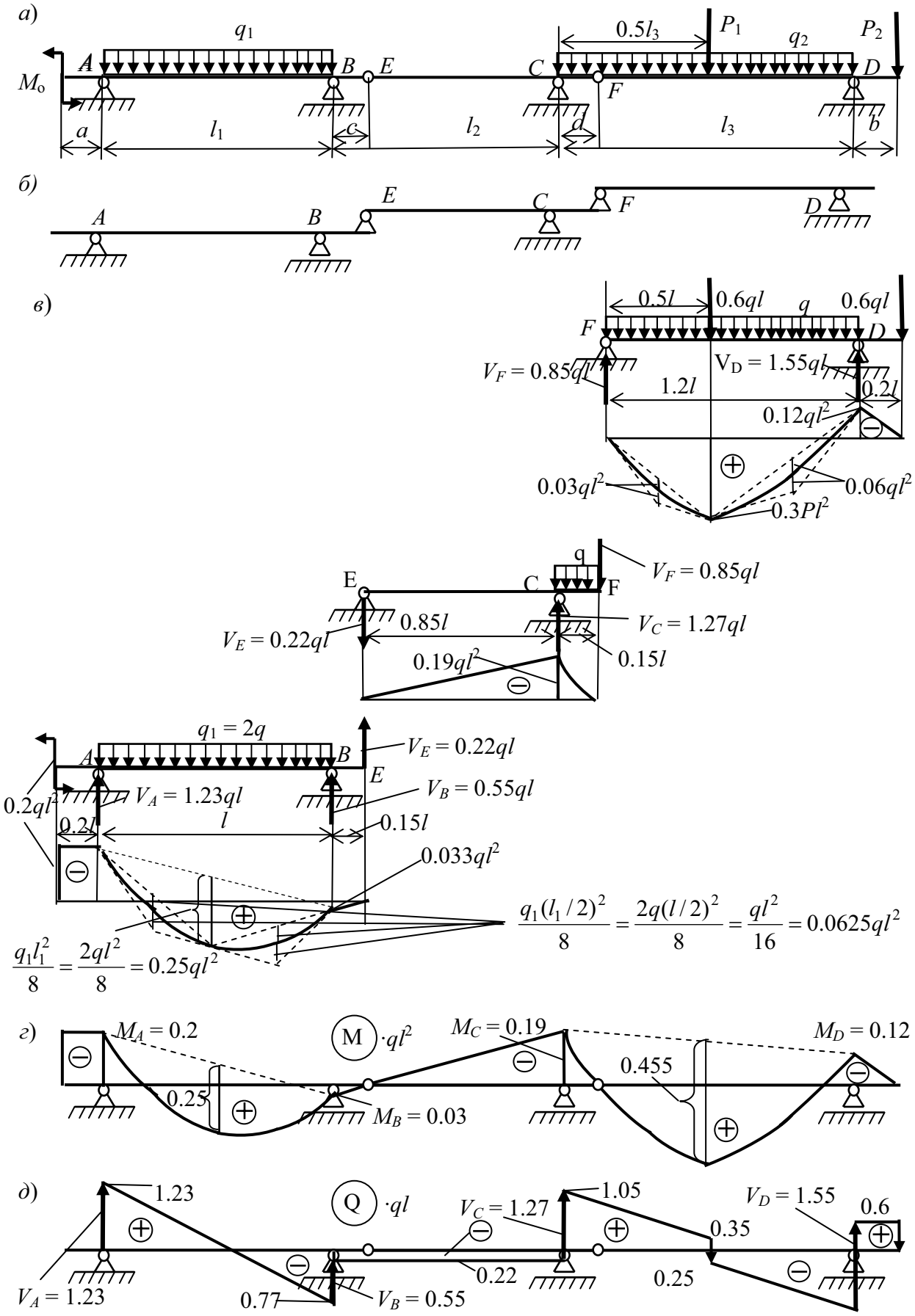

а)
q_1
$0.5l_3$
P_1
q_2
P_2
A
B
E
C
D
F
M_o
a
l_1
c
l_2
d
l_3
b
б)
A
B
E
C
F
D
в)
$0.5l$
$0.6ql$
q
$0.6ql$
F
D
$V_F = 0.85ql$
$V_D = 1.55ql$
$1.2l$
$0.2l$
$0.12ql^2$
$0.03ql^2$
$0.06ql^2$
$0.3Pl^2$
q
$V_F = 0.85ql$
E
C
F
$0.85l$
$V_C = 1.27ql$
$V_E = 0.22ql$
$0.19ql^2$
$0.15l$
$q_1 = 2q$
$V_E = 0.22ql$
A
B
E
$0.2ql^2$
$V_A = 1.23ql$
$V_B = 0.55ql$
$0.2l$
l
$0.15l$
$0.033ql^2$
$\frac{q_1(l_1/2)^2}{8} = \frac{2q(l/2)^2}{8} = \frac{ql^2}{16} = 0.0625ql^2$
$\frac{q_1 l_1^2}{8} = \frac{2ql^2}{8} = 0.25ql^2$
г)
$M_A = 0.2$
M $\cdot ql^2$
$M_C = 0.19$
$M_D = 0.12$
0.455
0.25
$M_B = 0.03$
д)
1.23
Q $\cdot ql$
$V_C = 1.27$
1.05
$V_D = 1.55$
0.6
0.35
0.22
0.25
$V_A = 1.23$
0.77
$V_B = 0.55$

Рис. 5.1

независимо от других. Применив уравнения равновесия для расчета этой прикрепленной части и определив в числе других неизвестных и опорную реакцию V_F, можно перейти к расчету оставшейся нижележащей части балки AF, которая по отношению к прикрепленному звену FD являлась основной частью конструкции.

Анализируя нижележащую часть AF, видим, что в ней звено EF является прикрепленной частью, а звено AB – основной частью конструкции. При этом реакцию V_F необходимо приложить как нагрузку на нижнюю часть, направленную, конечно, в обратную сторону по отношению с направлением реакции V_F на вышележащую часть конструкции – звено FD.

Основное звено рассчитать отдельно нельзя, так как не известна величина давления на него вышележащей прикрепленной части. Поэтому продолжением расчета будет рассмотрение сначала прикрепленной части, а затем основной.

Указанная процедура расчета шарнирной балки, называемая аналитическим способом, обычно применялась при ручном расчете с применением малых вычислительных средств (например, калькулятора).

Результаты такого расчета для рассматриваемой балки, взятые из учебного пособия [6], приведены на рис. 5.1, *в-д*.

5.3. Использование конструктивных особенностей статически определимых рам без замкнутых контуров

Рассмотрим вначале раму, изображенную на рис. 5.2,*а*.

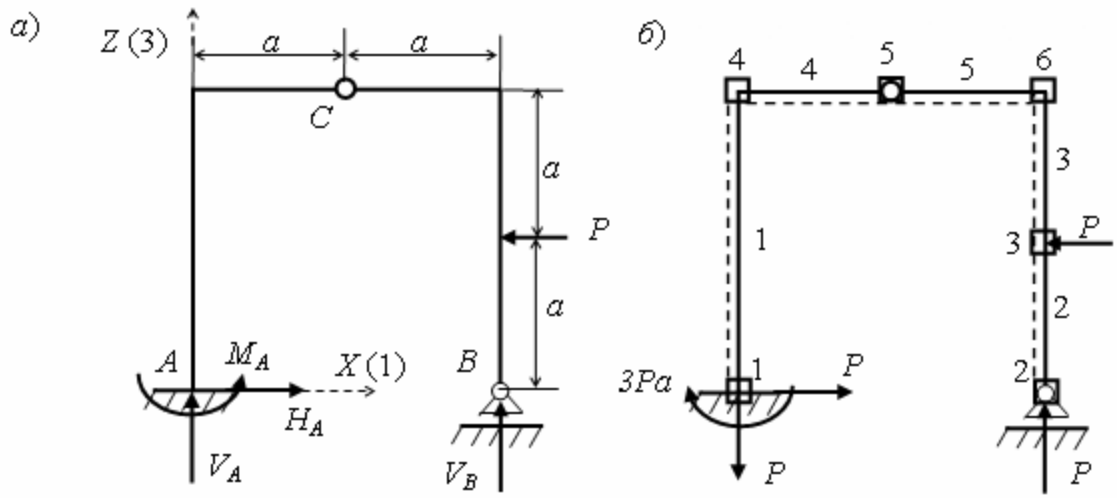


Рис. 5.2

Рама статически определима, т.к.:

1) по формуле (2.21) получаем $n = (4 + 3 \cdot 0) - (3 + 1) = 0$;

2) простой структурный анализ показывает, что рама геометрически неизменяема.

Отметим, что рама состоит из основной части в виде диска AC, прикрепленного к основанию тремя связями в защемляющей опоре A, и прикрепленной части в виде диска CB. Последний диск прикреплен двумя связями в шарнире C к основному диску и одной связью (вертикальной) – к основанию.

Поскольку рама статически определима, с помощью уравнений равновесия в ней можно определить любые усилия.

Для того, чтобы иметь возможность полного сопоставления с результатами расчета рамы на ПК с использованием по программы SCAD, реализующей МКЭ, разобьем раму на те же КЭ (рис. 5.2,*б*), на которые она разбивается при ее расчете по указанной программе (см. подраздел 3)

Знаки внутренних усилий будем определять в соответствии с заданной для каждого КЭ местной системой осей координат по правилам, принятым в программе SCAD (см. раздел 4).

Чтобы не рисовать на каждом стержне оси МСК, *при ручном счете* будем отмечать ее на схеме стержневой системы с помощью «правила пунктира» (см. раздел 4.1).

В соответствии с заданной нагрузкой и сделанной разбивкой рамы на КЭ еще до выполнения расчетов обращаем внимание на то, что на каждом элементе эпюра M будет прямолинейна. Это означает, что для ее построения на каждом элементе достаточно иметь две ординаты эпюры изгибающих моментов: в начальном и конечном сечении элементов. При этом очевидно также, что концевые ординаты в узле, где сходятся только два соседних элемента, будут численно равны друг другу (знак, зависящий от направления оси $Z1$ МСК на этих элементах, может различаться, см. раздел 4).

Поставим задачу определения опорных реакций и построения эпюр усилий M, Q, N рамы.

Последовательность решения задачи вручную

Структура рамы такова, что выполнить поставленную задачу можно в различной последовательности. Различие вариантов состоит, прежде всего, в подходе к определению опорных реакций, а именно:

Вариант 1. Прежде чем приступать к построению эпюр усилий можно определить все четыре реакции (H_A, V_A, M_A, V_B). Затем построить эпюры M, Q, N.

Вариант 2. Определить только реакцию V_B. Затем построить эпюры M, Q, N, в процессе построения которых определятся и остальные опорные реакции.

Вариант 3. Эпюра M может быть построена сразу, без определения опорных реакций. Затем по ней с использованием уравнения $Q = dM / dx$ может быть построена эпюра Q и потом из рассмотрения равновесия узлов рамы могут быть определены продольные силы в элементах рамы и построена эпюра N.

Первый вариант последовательности решения задачи. При подсчете степени статической неопределимости *n* (см. начало подраздела 5.3) сопоставлялось число (4) неизвестных опорных реакций рамы (H_A, V_A, M_A, V_B) с числом (3+1) уравнений равновесия, которые можно составить для их определения. Очевидно, что эти уравнения можно записать в виде:

$$1. \sum X = 0; \quad 2. \sum Z = 0; \quad 3. \sum M_A = 0; \quad 4. \sum M_C^{\text{справа}} = 0. \qquad (5.1)$$

Поэтому и решение задачи можно начать с решения этой системы уравнений. Это позволит сразу определить опорные реакции рамы.

Решение системы уравнений можно выполнить по-разному.

1. Можно сразу составить всю систему уравнений, назначив направления искомых реакций произвольно, например, в соответствии с направлением общей системы осей координат для рамы (рис. 5.2, *а*), и решить ее (для рам с многими неизвестными система уравнений может быть решена с помощью специальной программы для ПК, например, с помощью программы, имеющейся в учебном классе ПК.

2. При решении простых задач рационализация решения системы уравнений состоит в том, что необходимо, прежде всего, выделить из системы уравнений уравнения равновесия с одной неизвестной реакцией. Например, в рассматриваемой системе уравнений таких уравнений два (первое и четвертое).

Решив эти уравнения, с учетом уже найденных неизвестных продолжить поиск таких же уравнений. Если таковых нет, искать системы уравнений с двумя неизвестными и т. д.

В нашем случае вся система уравнений может быть решена как отдельное решение четырех уравнений с одним неизвестным каждое: 1. Из $\sum X = 0$ найдем $H_A = P$. 2. Из $\sum M_C^{\text{справа}} = 0$ найдем $V_B = P$. 3. Из $\sum Z = 0$ получим $V_A = -P$. 4. Из $\sum M_A = 0$ определим, что реактивный момент в заделке равен $M_A = -3Pa$. Знак « $-$» у реакции V_A и у момента M_A показывает, что каждая из

этих реакций направлена в обратную сторону по сравнению с соответственно первоначально заданным направлением (см. рис. 5.2, *а*). Неправильные направления реакций надо зачеркнуть и поставить правильные. В нашем случае правильные направления реакций и их определенные значения (в общем виде) приведены на рис. 5.2, *б*).

Определив опорные реакции можно достаточно быстро построить эпюры внутренних усилий M, Q, N. Будем строить их, полагая $P = 1$ кН, $a = 2$ м.

Построение эпюры M

Так как эпюра на каждом элементе линейная, будем вычислять изгибающие моменты в начале (узел 1 в МСК) и в конце (узел 2 МСК) элемента (или наоборот). Знаки ординат отмечаем по «правилу пунктира» и в соответствии с правилом знаков откладываем от оси стержня «снизу» или «сверху» от оси стержня. Размерность ординат, кНм, на рис. 5.3,*а*, где построена эпюра, не указываются.

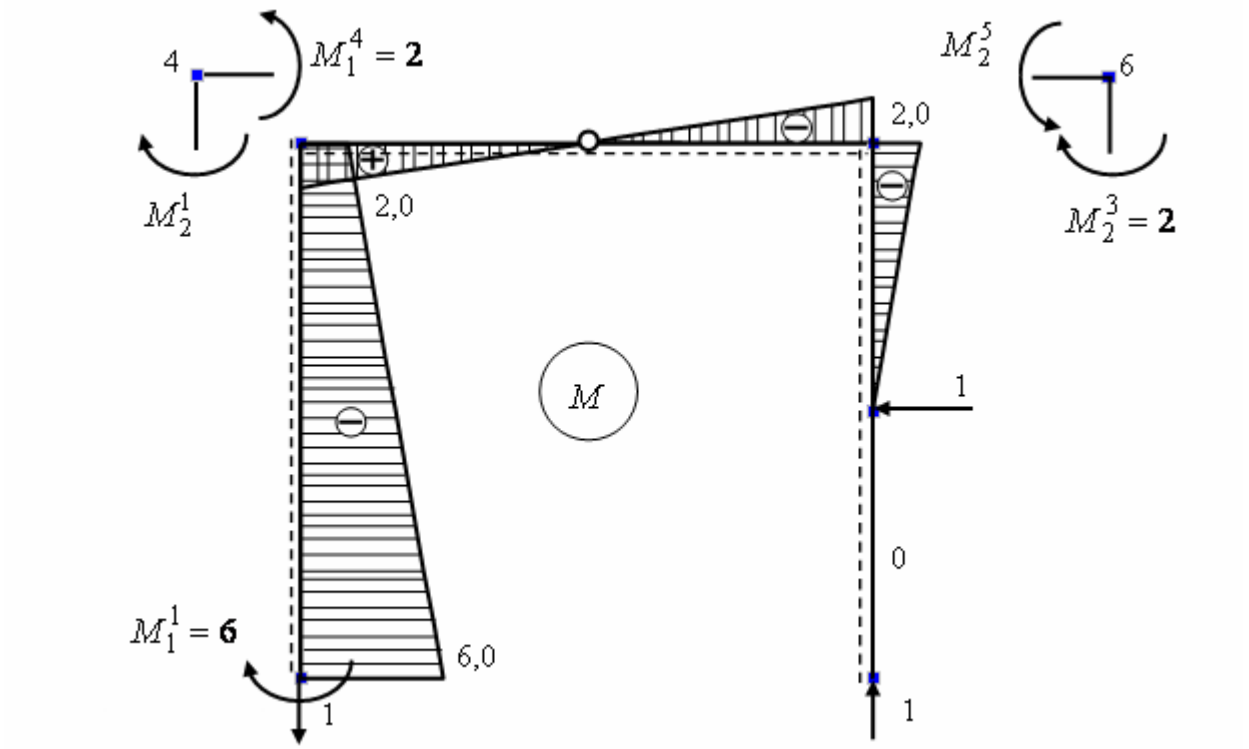


Рис. 5.3

Построение эпюры M начнем с конечного элемента рамы под номером 2, а затем последовательно рассмотрим КЭ 3, 5, 4, 1 (см. рис. 5.2,*б*).

Элемент 2. $M_1^2 = M_2^2 = 0$. Эпюра имеет нулевые ординаты не зависимо от величины опорной реакции V_B.

Элемент 3. $M_1^3 = 0$; $M_2^3 = -1\,\text{кН} \cdot 2\,\text{м} = -2\,\text{кН} \cdot \text{м}$. По этим двум ординатам строим эпюру M на элементе 3 правой стойки рамы.

Элемент 5. Изгибающий момент M_2^5 (в узле 2 МСК) на КЭ 5 найдем из рассмотрения равновесия моментов в узле 6 системы КЭ (см. рис. 5.2,*б* и рис. 5.3). По известному моменту $M_2^3 = 2$ находим $M_2^5 = M_2^3 = 2$. По тому, как момент M_2^5 действует на узел 6, видно, что он растягивает верхнюю сторону элемента 5, а значит и его ордината в сечении 2 (МСК) должна быть отложена сверху и по правилу знаков ордината имеет отрицательный знак.

Поскольку в узле 5 (в заданной раме он обозначен буквой *C*) установлен шарнир, то изгибающий момент M_1^5 в узле 1 КЭ 5 должен быть равен нулю. Именно из уравнения равновесия $\sum M_C^{\text{справа}} = 0$ и была определена реакция V_B =*P*=1. Поэтому прямая линия, ограничивающая ординаты эпюра изгибающих моментов на элементе 5 пройдет через вершину ординаты $M_2^5 = -2$ в узле 2 (МСК) элемента и нулевую ординату в узле 1 (МСК).

Элемент 4. По признакам правильного вида эпюры M прямолинейная эпюра на элементе 5 без изломов должна продолжиться и в пределах КЭ 4. При этом все ординаты на элементе 4 окажутся с нижней стороны элемента. Это означает, что изгибающие моменты растягивают нижнюю сторону элемента 4 и имеют положительный знак. Из подобия треугольников видно, что ордината в узле 1 (МСК) элемента 4 равна 2.

Элемент 1. Изгибающий момент M_2^1 в сечении 2 (МСК) КЭ 1 определится из равновесия узла 4 (см. рис. 5.2, *б* и рис. 5.3) по моментам. По известному моменту $M_1^4 = 2$ найдем $M_2^1 = M_1^4 = 2$. Так как этот момент на левой стойке растягивает «верхние» волокна, то и найденная ордината откладывается от оси стойки «вверх», т.е. вправо (в направлении оси Z1 МСК). Такая ордината по правилу знаков, принятому в программе SCAD, имеет знак «минус».

В узле 1 (МСК) КЭ 1 ордината изгибающего момента известна, поскольку она равна определенной опорной реакции: $M_1^1 = M_A = 6$ (см. рис. 5.2,*б*). Так как этот момент растягивает верхнюю сторону элемента 1, то и ординату эпюры M в узле 1 надо отложить «сверху». Такая ордината считается отрицательной.

Построение эпюры Q

Предварительный анализ ожидаемой эпюры Q показывает, что на

каждом КЭ она имеет постоянные ординаты, численное значение которых и их знак просто определяются и первым и вторым способами, описанными в подразделе 3.2 учебного пособия. Эпюра Q приведена на рис. 5.4.

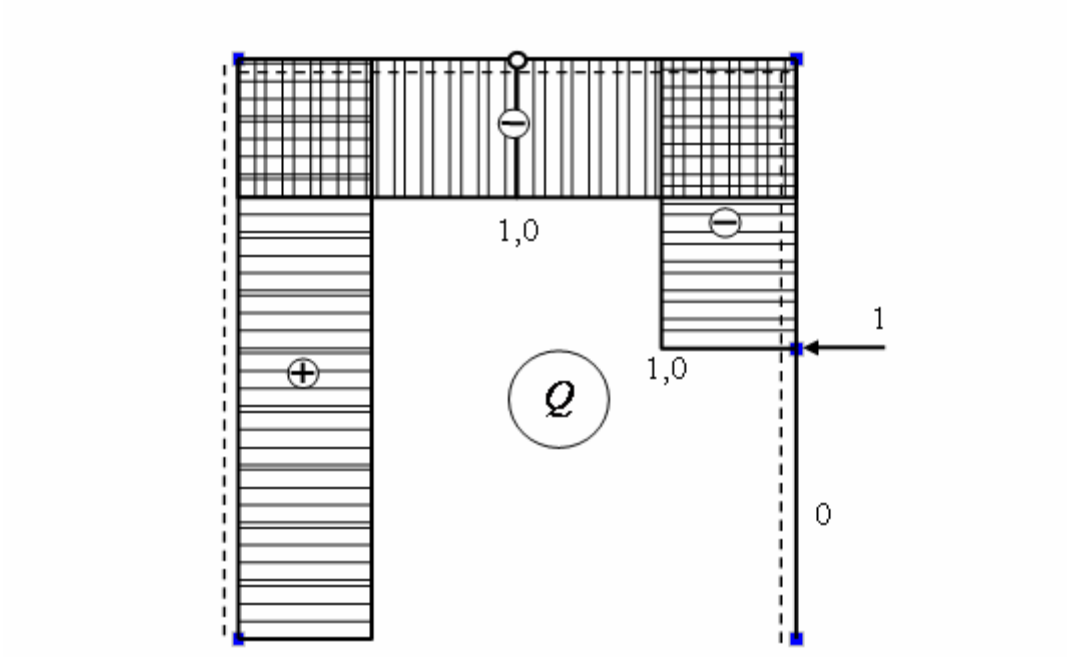


Рис. 5.4

Построение эпюры N

Эпюра N (рис. 5.5) легко строится как первым, так и вторым способами, описанными в подразделе 4.3.

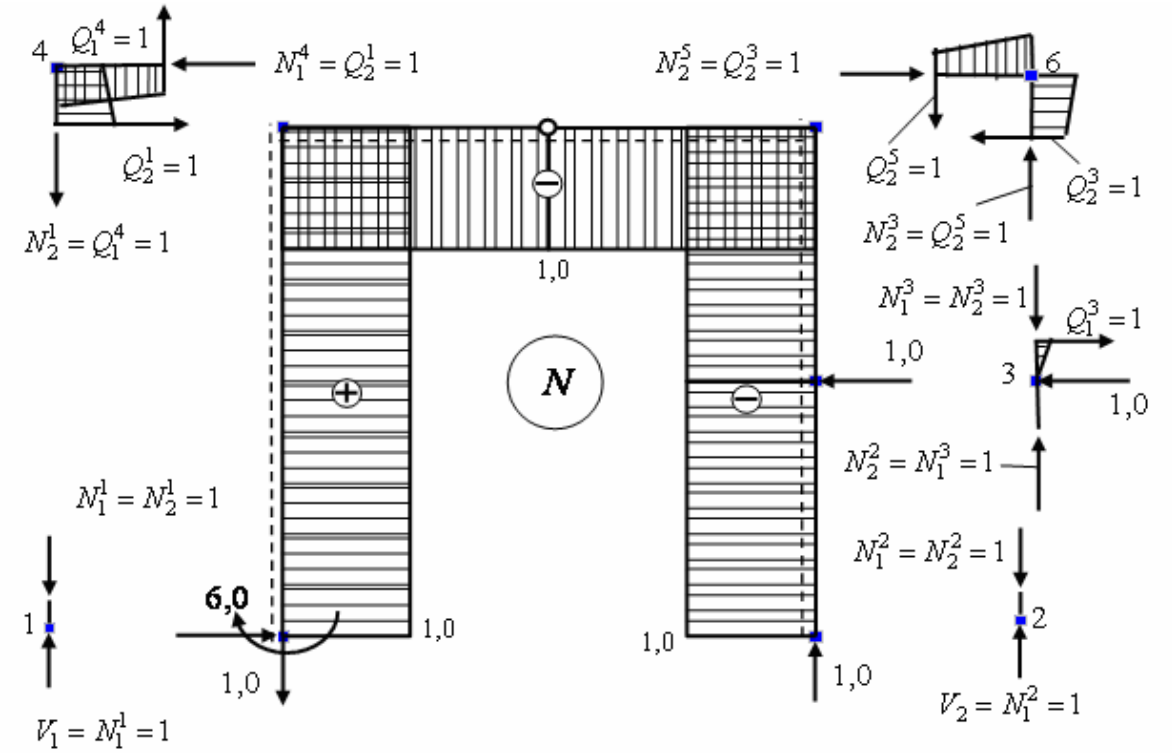


Рис. 5.5

Для определения продольных сил вторым способом на рис. 5.5 показаны вырезанные узлы 4 и 6 рамы (см. рис. 5.2,*б*), из которых по найденным ранее поперечным силам (см. рис. 5.4) определяются продольные силы в элементах 1, 3, 4 и 5. Продольная сила в элементе 2 определится по продольной силе $N_1^3 = N_2^3 = 1$ из рассмотрения равновесия узла 3 (см. рис. 5.5).

Второй вариант последовательности решения задачи. В этом варианте перед построением эпюр M, Q, N вручную из уравнения $\sum M_C^{\text{справа}} = 0$ определяется только опорная реакция $V_B = P = 1$. После этого возможно построение любой из эпюр в любой последовательности. При этом опорные реакции в заделке B определятся в процессе построения соответствующих эпюр усилий на левой стойке рамы.

Третий вариант последовательности решения задачи. В этом варианте перед построением эпюр M, Q, N реакции предварительно не определяются. Поэтому оказывается невозможным построить эпюры Q, N ни одним из способов (см. подразделы 4.2 и 4.3). Однако эпюра M может быть построена. Затруднение возникнет только при определении изгибающего момента в сечении 1 (МСК) элемента 1 который, казалось бы, невозможно определить без определения опорной реакции V_B. Но это не так: есть возможность вычислить изгибающий момент в этом сечении с помощью следующих рассуждений.

Вырежем ригель рамы сечением по стойкам рамы, проходящим бесконечно близко от ригеля. Поперечная сила в проведенном сечении 2 на элементе 3 правой стойки известна по значению и по направлению действия на отсеченный ригель ($Q_2^3 = P = 1$, рис. 5.6).

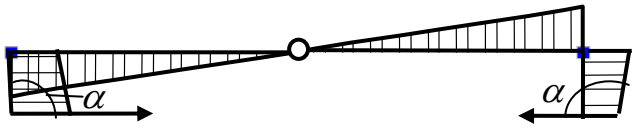


Рис. 5.6

Но тогда из рассмотрения равновесия всех сил, действующих на ригель в горизонтальном направлении, можно утверждать, что поперечная сила Q_2^1 в сечении 2 элемента 1 имеет такое же значение, как и поперечная сила $Q_2^3 = P = 1$, но имеет противоположное направление (см. рис. 5.6). Это показывает, что угол наклона α и эпюры M к оси левой стойки равен углу

наклона эпюры M к оси правой стойки. Равны и величины $tg\alpha = 1$.

Так как верхняя ордината эпюры M на стойке равна $M_2^1 = 2$, то момент в нижнем сечении стойки будет $M_1^1 = M_1^1 + 2a \cdot tg\alpha = 2 + 4 \cdot 1 = 6$.

Построив эпюру M, можно по ней (т.е. вторым способом, см. подраздел 4.2) построить эпюру Q, а затем способом вырезания узлов определить продольные силы в стержнях рамы (см. подраздел 4.3 и вырезанные узлы на рис. 5.5).

Примечание. При определении продольных сил в стержнях рамы способом вырезания узлов вертикальные составляющие опорных реакций определятся из рассмотрения равновесия опорных узлов в вертикальном направлении. Тогда из узла 1 рамы (см. рис. 5.2, *б*) найдем $V_A = V_1 = N_1^1 = 1$ и из узла 2: $V_B = V_2 = N_1^2 = 1$ (см. рис. 5.5).

Если же опорные реакции были определены заранее, то равновесие опорных узлов будет служить одним из контролей определения усилий.

5.4. Использование конструктивных особенностей статически определимых рам, имеющих замкнутые контуры

Рассмотрим раму в виде одного прямоугольного замкнутого контура со сторонами параллельными осям X и Z общей системы координат (рис. 5.7).

Установка трех разрезающих контур шарниров, необходимых для статической определимости контура, представлена тремя вариантами:

1. Два шарнира обязательно поставлены на какой-то одной (любой) стороне контура (рис. 5.7,*а)*.

2. Каждый из шарниров поставлен на трех разных сторонах контура. При этом два из них лежат на прямой линии параллельной двум сторонам контура (рис. 5.7,*б*).

3. Все три шарнира расположены на трех сторонах контура так, что не имеет место ни один из предыдущих случаев (рис. 5.7,*в*).

Расчет этой статически определимой рамы вручную по определению усилий должен начинаться с определения опорных реакций. Для всех вариантов расстановки шарниров в контуре, последовательно используя уравнения равновесия $\sum X = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum Z = 0$, найдем соответственно:

$H_A = 0; \quad V_B = 22.5$ кН; $V_A = 37.5$ кН.

Затем для построения эпюр усилий на стержнях замкнутого контура необходимо разрезать контур минимум по одному из шарниров. На рис. 5.7 для каждого варианта расстановки шарниров в контуре показан шарнир, который наиболее удобно разрезать, чтобы определить в нем два усилия в удаленных в результате разреза шарнира связях.

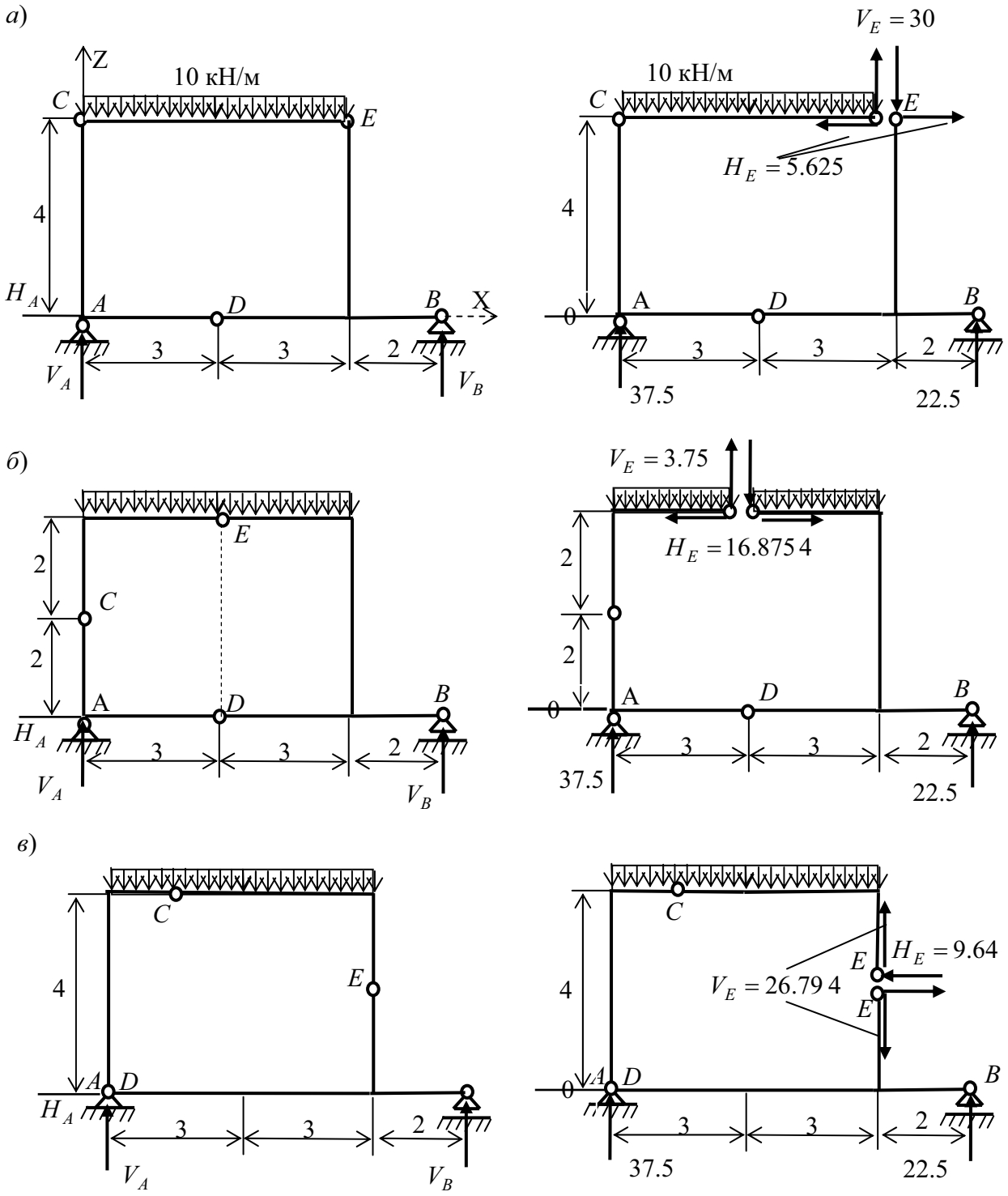


Рис. 5.7

В вариантах 1 и 2 расстановки шарниров разрез выполнен в шарнирах E, что позволяет каждое неизвестное усилие в этих шарнирах найти из одного уравнения равновесия.

Так в варианте 1 (см. рис. 4.7,*а*) из $\sum M_C^{CE} = 0$ найдем $V_E = 30$ кН. Затем,

из $\sum M_D^{DBE} = 0$ определим $H_E = 5.625$ кН.

В варианте 2 (см. рис. 5.7, *б*) из $\sum M_D^{DCE} = 0$ найдем $H_E = 16.875$ кН. Затем, из $\sum M_C^{CE} = 0$ определим $V_E = 3.75$ кН.

В варианте 3 расстановки шарниров практически безразлично, какой шарнир разрезать, так как при разрезании любого из трех шарниров для определения в них продольной и поперечной силы придется совместно решать два уравнения равновесия. На рис. 5.7, *в* разрезан шарнир E.

Для составления двух уравнений равновесия необходимо предварительно задать направления векторов поперечных и продольных сил. Эти направления могут быть выбраны произвольно. После решения системы уравнений неизвестные усилия в шарнире получатся с положительным или с отрицательным знаком. При отрицательном знаке найденного усилия направление вектора надо заменить на обратное и продолжить расчет по дальнейшему определению усилий в раме при правильных направлениях усилий в шарнирных связях.

На рис. 5.7, *в* показаны действительные направления усилий в шарнире E, определенные из системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$1.\sum M_D^{DBE} = 0; \quad 2.\sum M_D^{DCE} = 0. \tag{5.2}$$

Дальнейший ход решения задачи по построению и контролю эпюр усилий M, Q, N и их контролю выполняется по методике, рассмотренной в предыдущем примере, и здесь не приводится.

5.5. Использование конструктивных особенностей трехшарнирных арок

Трехшарнирная арка является статически определимой стержневой системой, расчетная схема которой встречается в двух видах:

1. Трехшарнирная арка без затяжки (рис. 5.8, *а*).
2. Трехшарнирная арка с затяжкой (рис. 5.8, *б*).

Рассмотрим последовательность определения усилий в этой конструкции с помощью уравнений равновесия всей арки и ее отдельных частей.

Для лучшего понимания особенностей работы арки выполним два условия:

- рассмотрим действие на нее только вертикальной нагрузки.
- Расчет опорных реакций и усилий в статически определимых арках без затяжки и с затяжкой будем выполнять одновременно с балкой, имеющей такой же пролет и такую же нагрузку, как и арка (см. рис. 5.8).

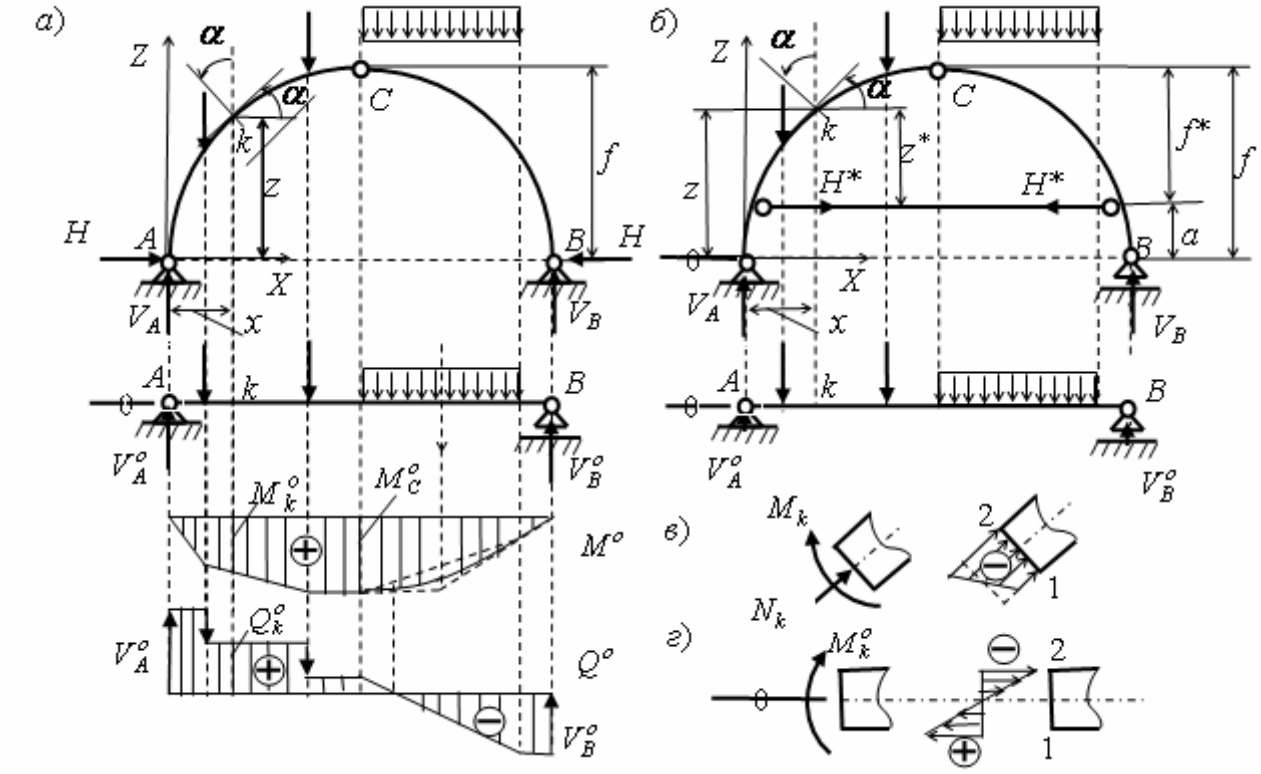


Рис. 5.8

В результате использования соответствующих уравнений равновесия получаются выражения для определения опорных реакций и внутренних усилий M, Q, N в сечениях арки. Вначале рассмотрим вопрос об опорных реакциях в трехшарнирной арке.

Вертикальные реакции опор в трехшарнирной арке без затяжки

. 1. Из уравнения $\sum M_B = 0$ находим:

$$V_A = V_A^o = \sum M_B^P / l. \tag{5.3}$$

2. Из уравнения $\sum Z = 0$ получаем

$$V_B = V_B^o = \sum Z^P - V_A. \tag{5.4}$$

Горизонтальные опорные реакции в трехшарнирной арке без затяжки

3. Из уравнения $\sum X = 0$ устанавливаем, что

$$H_A = H_B = H. \tag{5.5}$$

4. Из уравнения $M_C = \sum M_C^{\text{слева}} = \sum M_C^{\text{справа}} = 0$ получаем

$$H = \frac{M_C^o}{f}. \tag{5.6}$$

Горизонтальное усилие H называется ***распором арки***. Для пояснения этого названия рассмотрим рис. 5.9, *а*.

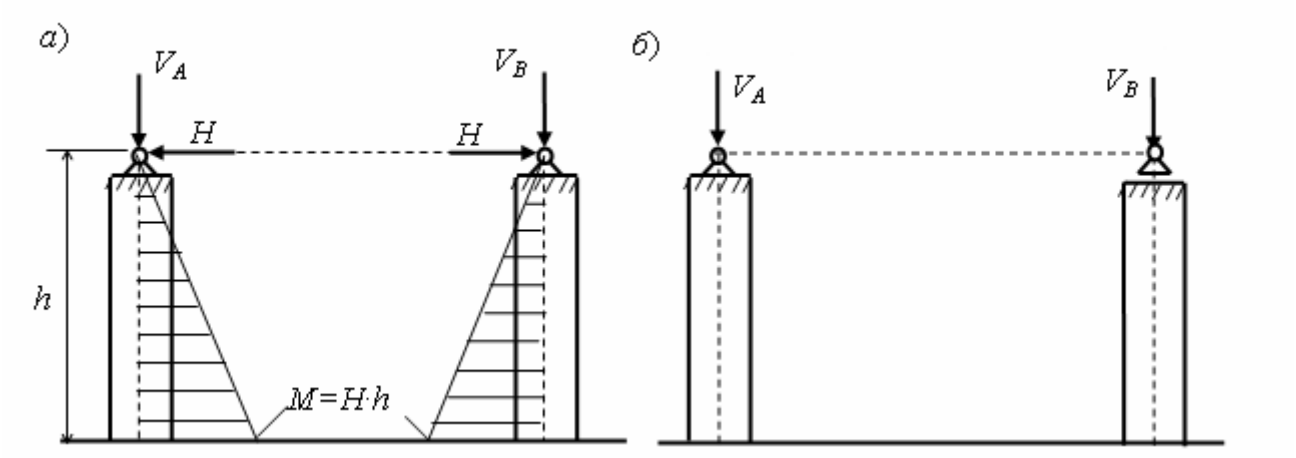


Рис. 5.9

На нем изображено действие усилий в опорных связях арки без затяжки, когда арка опирается на стены какого-то здания. Видно, что усилия H «распирают» стены и создают в них изгибающие моменты, вызывающие на внутренних сторонах поперечных сечений стен растягивающие напряжения.

Несмотря на наличие в поперечных сечениях стены сжимающих напряжений от ее собственного веса и от сжимающих стену вертикальных давлений от опор арки, с внутренней стороны стены суммарные напряжения могут остаться растягивающими. В бетонной стене для восприятия этих растягивающих напряжений можно подобрать арматуру, а в кирпичной стене растягивающих напряжений допускать нельзя.

Поскольку распор арки H передается на ниже лежащую конструкцию через горизонтальную опорную связь, то, для того чтобы убрать действие распора, в одной из опор арки горизонтальную связь удаляют. Чтобы трехшарнирная арка осталась геометрически неизменяемой и статически определимой, удаленную связь ставят в виде затяжки, соединяющей между собой левую и правую шарнирные опоры арки. Для увеличения высоты находящегося под аркой помещения, затяжка может быть поставлена выше опор (см. рис. 5.8, *б*).

Поскольку при арке с затяжкой одна из ее опор делается шарнирно – подвижной, она передает на ниже лежащую часть конструкции только вертикальное давление арки. При вертикальной нагрузке на арку и шарнирно – неподвижная опора будет передавать только вертикальное давление. Поэтому давление арки с затяжкой на ниже лежащую конструкцию будет только вертикальным (см. рис. 5.9, *б*).

Вертикальные реакции опор в трехшарнирной арке с затяжкой

Вертикальные реакции арки с затяжкой остаются такими же, как и в арке без затяжки и определяются из выражений (5.3) и (5.4).

Горизонтальные реакции в трехшарнирной арке с затяжкой отсутствуют.

Теперь перейдем к определению усилий в сечениях арки. Наметим на оси арки некоторое сечение k (см. рис. 5.8, *а, б*).

Внутренние усилия M, Q, N ***в любом сечении*** k ***арки без затяжки*** определятся из выражений (индекс k будем опускать):

$$M = M^o - H \cdot z \ ; \tag{5.7}$$

$$Q = Q^o \cos\alpha - H \sin\alpha \ ; \tag{5.8}$$

$$N = -(Q^o \sin\alpha + H \cos\alpha), \tag{5.9}$$

где M^o, Q^o являются соответственно изгибающим моментом и поперечной силой в любом сечении k простой балки, имеющей такой же пролет и несущей такую же нагрузку, как арка (см. рис. 5.8, *а*);

α представляет собой угол наклона касательной (нормали) в рассматриваемом сечении к оси арки по отношению к горизонтальной (вертикальной) оси X (Z) (см. рис. 5.8, *а, б*).

Примечание. Для вычисления ординаты сечения z и значений $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ в зависимости от очертания оси арки используются следующие формулы.

При параболическом очертании:

$$\begin{gathered} z = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2); \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x); \\ \sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}}. \end{gathered} \tag{5.10}$$

При круговом очертании:

$$\begin{gathered} r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2}; \quad z = f - r(l - \cos); \\ \sin\alpha = \frac{0.5l - x}{r}; \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}, \end{gathered} \tag{5.11}$$

где r – радикс окружности, по которой очерчена арка.

Внутренние усилия M, Q, N ***в любом сечении k арки с затяжкой***

В сечениях арки ниже затяжки усилия M, Q, N определяются только по вертикальным реакциям. Поэтому их можно вычислить из выражений:

$$M = M^o; \quad Q = Q^o \cos\alpha; \quad N = -Q^o \sin\alpha \tag{5.12}$$

Для определения усилий *в сечениях арки выше затяжки* необходимо предварительно «раскрыть» замкнутый контур DEC и определить продольное усилие H^* в затяжке (см. рис. 5.8, *б*). С этой целью удалим затяжку («раскроем» замкнутый контур). Действие затяжки на левую и правую части арки заменим усилием H^*. Тогда оно определятся из уравнения:

$$M_C = \sum M_C^{\text{слева}} = \sum M_C^{\text{справа}} = 0\,. \tag{5.13}$$

Отсюда выражение для вычисления H^* можно представить в виде

$$H^* = \frac{M_C^o}{f^*}. \tag{5.14}$$

После определения H^* усилия в любом сечении арки выше затяжки можно найти из выражений:

$$M = M^o - H^* \cdot z^*; \tag{5.15}$$

$$Q = Q^o \cos\alpha - H^* \sin\alpha\,; \tag{5.16}$$

$$N = -(Q^o \sin\alpha + H^* \cos\alpha)\,, \tag{5.17}$$

где $z^* = z - a$ (см. рис.5.8, *б*).

Примечание. Если затяжка будет поставлена на уровне опор, то (см. рис. 5.8, *б*) получим $a = 0$, $f^* = f - a = f$, $z^* = z - a = z$ и усилие H^* в затяжке (5.14) станет равно распору H арки (5.6), а формулы (5.15) – (5.17) перейдут в формулы (5.7) – (5.9).

Сопоставление внутренних усилий M, Q, N в сечениях арки и балки показывает различие в значениях и знаках соответствующих усилий и значениях и характере нормальных и касательных напряжений, вызываемых этими усилиями.

Отметим следующие факторы:

1. *Распор H арки (или усилия H^* в затяжке) благоприятно влияет на значения изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях арки.*

Действительно, из формул (5.7) и (5.13) видно, что изгибающие моменты M в арке меньше балочных M^o на величину $H \cdot z$ (или $H^* z^*$ для арки с затяжкой). Из формул (5.8) и (5.14) видно, что уменьшаются значения и поперечных сил.

2. *Материал арки работает в более благоприятном напряженном состоянии, чем в балке.*

Действительно, кроме уменьшения изгибающих моментов в арке,

отметим появление в ней сжимающих усилий N.

Как видно из формулы внецентренного сжатия $\sigma_{1,2} = N / A \pm M / W$, в связи с наличием в любом сечении арки продольной силы, имеющей отрицательный знак, нормальные напряжения в сечении арки распределены по сечению более равномерно, чем в балке. Они могут быть сжимающими во всех точках сечения (см. вид эпюры, приведенный на рис. 5.8, *в*. В формуле соответственно принято: 1, 2 –нижняя и верхняя точки сечения арки; A, W – площадь и момент сопротивления сечения).

В балке же, наоборот, в соответствующем сечении k, при большем значении изгибающего момента, отсутствует продольная сила. Поэтому в балке эпюра нормальных напряжений возникает только от изгиба и имеет вид, приведенный на рис. 5.8, *г*.

Поэтому арка, перекрывающая такой же пролет и несущая такую же нагрузку как балка, и выполненная из такого же материала, будет иметь более тонкое поперечное сечение, чем балка.

Безмоментная трехшарнирная арка

Из формулы (5.7) для арки без затяжки (см. рис. 5.8, *а*) видно, что *изгибающие моменты в трехшарнирной арке будут нулевыми во всех ее сечениях, если она несет постоянную нагрузку и очерчена по кривой, совпадающей с эпюрой изгибающих моментов в балке от этой нагрузки.*

Действительно, приравняв нулю выражение (5.7), получим:

$$z = \frac{M^o}{H}. \tag{5.18}$$

Так как значение H постоянно, то ординаты z безмоментной арки изменяются по длине ее пролета также как изменяются изгибающие моменты M^o в балке при рассматриваемой нагрузке. На рис. 5.10 показано очертание безмоментной арки для нескольких видов нагрузок.

При нагрузках в виде сосредоточенных сил безмоментная трехшарнирная арка по внешнему виду, соответствующему эпюре M^o в простой балке от заданной нагрузки, становится трехшарнирной рамой (см. рис. 5.10, *а*). Опорные реакции, распор и внутренние усилия в таких рамах определяются по полученным выше формулам для криволинейной трехшарнирной арки.

При равномерно распределенной нагрузке эпюра M^o имеет очертание квадратичной параболы, поэтому и безмоментная арка при этой нагрузке должна быть очерчена по квадратичной параболе (см. рис. 5.10, *б*).

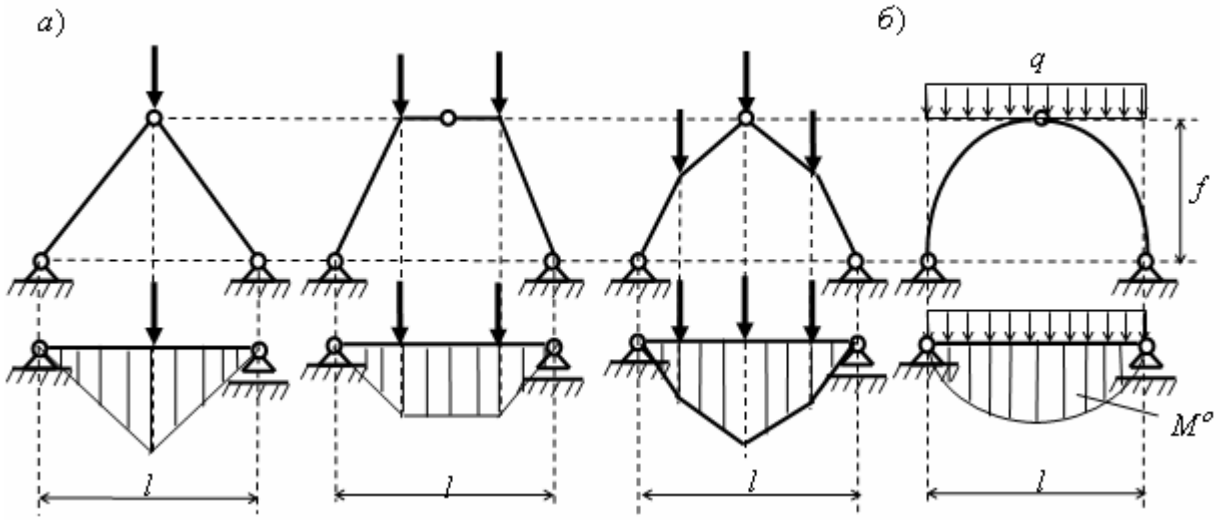


Рис. 5.10

Ординаты z арок не зависят от значений нагрузок, а вычисляются по соответствующей формуле (5.10) только по ее заданным параметрам: пролету l и стреле f.

5.6. Использование конструктивных особенностей ферм

В подразделе 2.6 учебного пособия было отмечено основное свойство стержневой системы, называемой в инженерной практике фермой:

при нагрузке на такую систему, передаваемую в виде сосредоточенных сил на узлы, в которых соединяются стержни, в расчетной схеме фермы для определения усилий и перемещений во всех узлах устанавливаются идеальные (без трения) шарниры.

При этом ферма должна остаться геометрически неизменяемой системой, в каждом стержне k которой возникает только продольное усилие N_k (см. рис. 2.10).

В инженерной практике встречаются фермы различной конфигурации с различным видом стержневой решетки.

С классификацией ферм по этим признакам можно, в частности, познакомиться с помощью программы SCAD. Для этого надо открыть какой-нибудь проект (см. приложение 1 УМК), открыть раздел **Схема,** а затем на инструментальной панели нажать кнопку «Генерация прототипа фермы». Появится диалоговое окно, с помощью которого можно познакомиться с различными типами ферм и с их различными стержневыми решетками.

Для предварительного ознакомления с наименованим элементов фермы приведен рис. 5.11, взятый из учебного пособия [7].

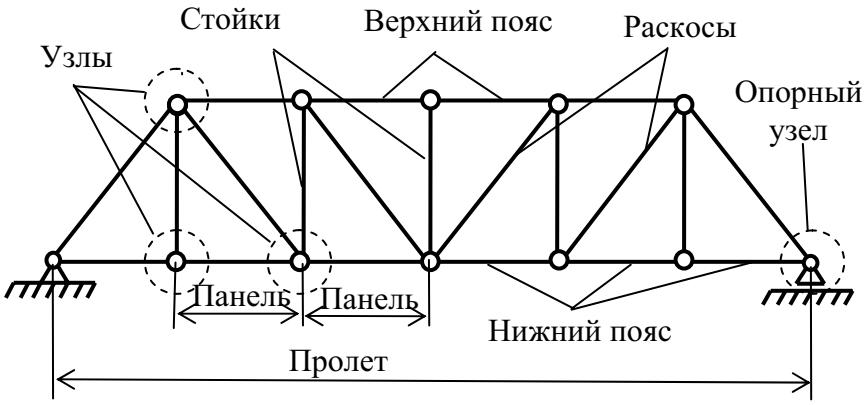


Рис. 5.11

Число неизвестных усилий $n_н$ в ферме равно сумме числа $n_с$ неизвестных продольных усилий в стержнях фермы и числа $n_{оп}$ продольных усилий в опорных стержнях фермы, т.е. $n_н = n_с + n_{оп}$.

В статически определимой ферме число $n_н = n_с + n_{оп}$ должно равняться числу уравнений равновесия $n_{ур} = 2n_y$ вида (2.22), где n_y равно числу узлов фермы. Иными словами, степень статической неопределимости статически определимой фермы, определяемой из выражения (2.23), должна быть равна нулю. Это условие является и необходимым условием для того, чтобы статически определимая ферма была геометрически неизменяемой системой. Неизменяемость фермы проверяется с помощью ее структурного анализа (см. подраздел 2.6).

Рациональные способы применения уравнений равновесия для определения усилий в стержнях ферм

При расчетах ферм вручную или контроле усилий, полученных расчетом на ПК, например с помощью программы SCAD, реализующей МКЭ, усилия в стержнях плоских статически определимых ферм определяются с помощью уравнений равновесия.

При ручном расчете с помощью уравнений равновесия обычно вначале определяют опорные реакции фермы. Методика их определения аналогична той, которая использовалась при определении опорных реакций балок, рам, арок.

Уравнения равновесия используются для определения усилий и в стержнях ферм. При этом, в зависимости от конструктивных особенностей фермы, используют уравнения равновесия либо только для одного узла, вырезая узел из фермы, либо для части фермы, отрезая ее от фермы сечением.

В соответствии с этими приемами их в инженерной практике называют «Способ вырезания узлов» или «Способ сечений». Строгости в этих названиях нет, т. к. в обоих случаях проводится сечение, отрезающее часть фермы от целой конструкции. Но выделение узла, в котором сходятся два стержня и более, характерно тем, что для него применимы только два уравнения равновесия вида (2.22). Третье уравнение равновесия, равенство нулю моментов, удовлетворяется тождественно при любом (даже не верном) значении усилий и поэтому не может использоваться для определения усилий в стержнях, сходящихся в узле.

В некоторых случаях при ручном счете для определения усилия в каком-либо стержне фермы более рациональным оказывается способ, в котором последовательно используются оба названных выше способа. Тогда говорят об определении усилия «комбинированным способом».

Способ вырезания узлов

Продемонстрируем этот способ на примере определения усилия 4 (рис. 5.12, *а*) фермы, взятой из учебного пособия [7]. Опорные реакции будем считать уже определенными.

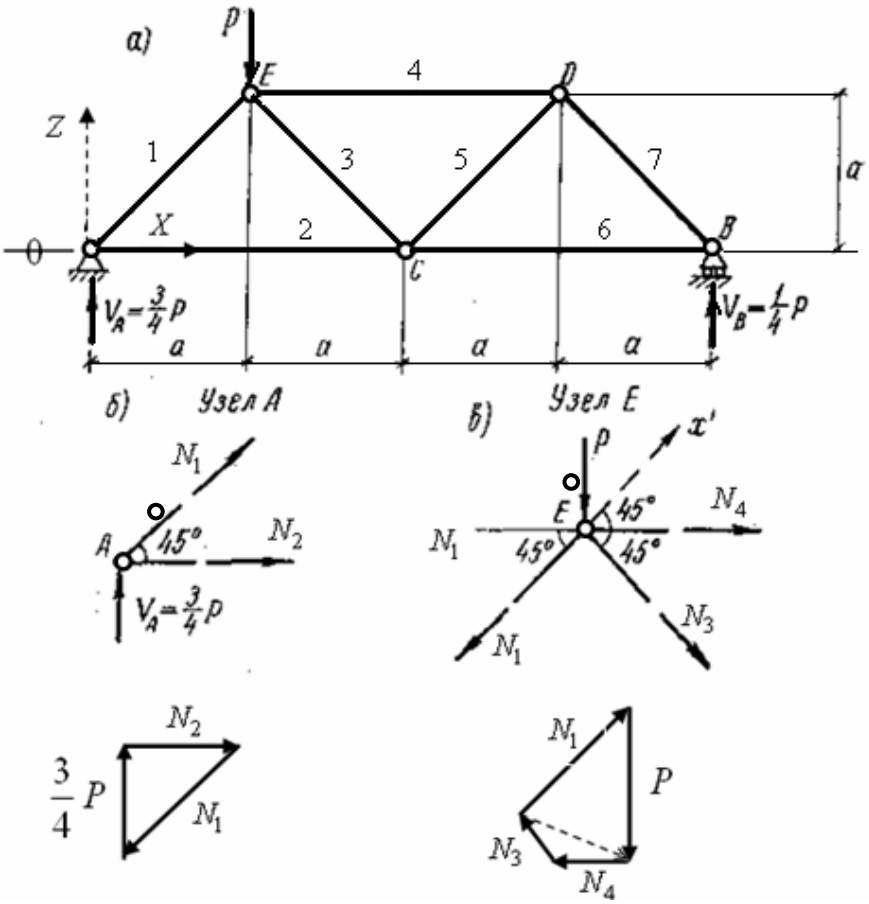


Рис. 5.12

В этом способе используется как аналитическое, так и графическое решение. В обоих случаях *из одного узла можно найти только два (по числу уравнений равновесия для узла) неизвестных усилия. Остальные усилия, действующие на узел, должны быть известны.*

Аналитическое решение. Сразу определить усилие N_4 вырезанием одного узла (E или D) не удастся, так как в каждом из указанных двух узлов стержня 4 сходится по три неизвестных усилия. Поэтому, чтобы решить поставленную задачу, вырежем сначала, например, узел A (рис. 5.12, *б*) и из уравнения равновесия

$$\sum Z = V_A + N_1 \sin 45^o = 0 \qquad (5.19)$$

сил, действующих на узел (неизвестные усилия направляем как растягивающие), определим усилие N_1:

$$N_1 = -\frac{3}{2\sqrt{2}} P \qquad (5.20)$$

Затем, получив величину усилия N_1, вырежем узел E (рис. 5.12, *в*) и запишем уравнение равновесия сил, действующих на этот узел, на ось x' перпендикулярную стержню 3 (усилию N_3):

$$-N_1 - P\cos 45^o + N_4 \cos 45^o = 0. \qquad (5.21)$$

Подставив сюда из (5.20) найденное усилие N_1, получим усилие $N_4 = -P/2$. Знак минус показывает, как и в случае усилия N_1, что стержень сжат, а не растянут, как мы это предполагали при записи уравнений равновесия.

Графическое решение. Равновесие сил, действующих на опорный узел A, можно представить графически. Узел будет находиться в равновесии только тогда, когда равнодействующая этих сил равна нулю. Это означает, что треугольник, составленный из векторов сил, действующих на узел, должен быть замкнут. Поскольку известной пока является только опорная реакция V_A, то для построения треугольника сил необходимо отложить вектор этой силы в удобном для построений масштабе и разложить его на две составляющие, параллельные стержням 1 и 2 фермы. Направления полученных таким образом усилий N_1 и N_2 в треугольнике сил ставятся так, чтобы равнодействующая всех сил, действующих на узел A, была равна нулю.

Теперь, когда определено усилие N_1, аналогично рассматривается равновесие сил, действующих на узел E. Сложив вектор усилия N_1, действующего на этот узел, с вектором силы P, получим вектор

равнодействующей известных сил, действующих на узел E (она показана штриховой линией). Разложив эту равнодействующую на две составляющие параллельные стержням 3 и 4 фермы и поставив соответствующие направления векторов N_3 и N_4 из условия равенства нулю равнодействующей всех сил, действующих на узел E, найдем усилия в стержнях 3 и 4 и направление их действия на узел E.

Нулевые стержни в ферме

При расчете ферм встречаются случаи, когда при загружении фермы усилия в некоторых ее стержнях оказываются равными нулю. Такие стержни называются ***нулевыми.***

Есть нулевые стержни, которые выявляются на чертеже фермы по простым признакам. Основными признаками, построенными на способе вырезания узлов, являются следующие два признака:

1) если незагруженный узел соединяет только два стержня, не лежащих на одной прямой, то оба стержня будут нулевыми;

2) если незагруженный узел соединяет три стержня, два из которых лежат на одной прямой, то усилие в третьем стержне будет нулевым.

Пример первого узла изображен на рис. 5.13, *а*, второго на рис. 5.13, *б*.

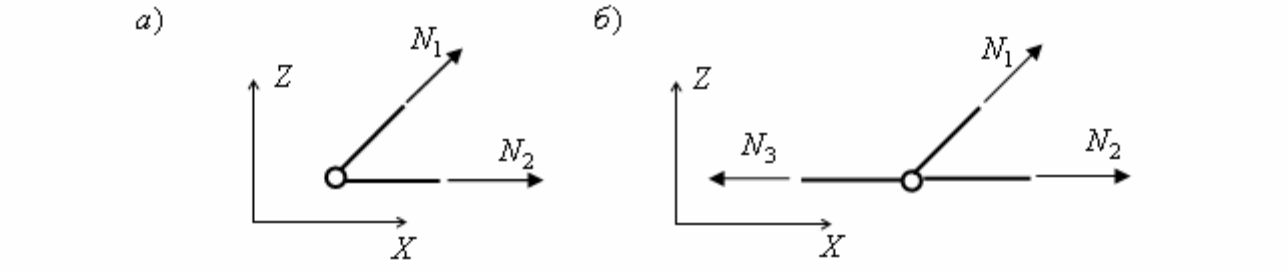


Рис. 5.13

Доказательством первого признака является применение к первому узлу сначала уравнения равновесия $\sum Z = 0$, из которого следует, что $N_1 = 0$, а затем уравнения равновесия $\sum X = 0$, из которого следует, что и усилие $N_2 = 0$.

Доказательство второго признака получается из уравнения равновесия $\sum Z = 0$, примененного ко второму узлу. Получим $N_1 = 0$. Из уравнения $\sum X = 0$ получится $N_3 = N_2$.

Прежде чем применить эти признаки к ферме необходимо определить усилия в опорных стержнях фермы.

Иногда загружение фермы может быть таким, что большинство стержней в ней от приложенной нагрузки не работают, т. е. являются нулевыми. Такой

пример приведен на рис. 5.14.

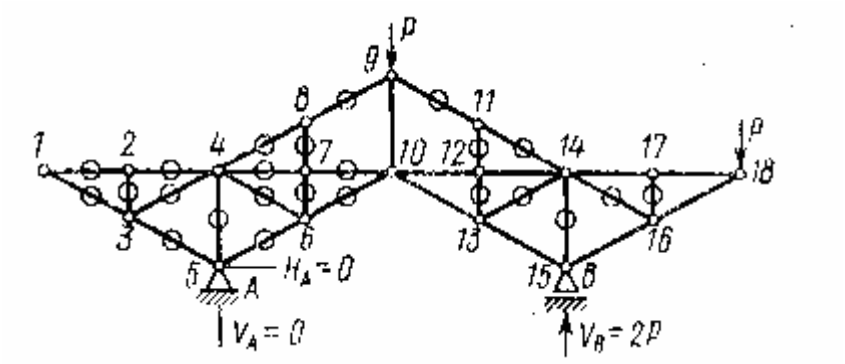


Рис. 5.14

В некоторых случаях нулевые стержни фермы выявляются не по приведенным признакам, а в результате некоторого анализа, например, учитывающего симметричность усилий в стержнях фермы, получающуюся вследствие симметрии самой фермы и симметрии ее загружения.

Примером такого случая является ферма, изображенная на рис. 5.15 [7]. Прежде всего, в ней из рассмотрения равновесия узла 6 устанавливается, что вследствие симметрии усилия в наклонных стержнях, подходящих к узлу 6 должны быть симметричными и равными друг другу: $N_6 = N_7$.

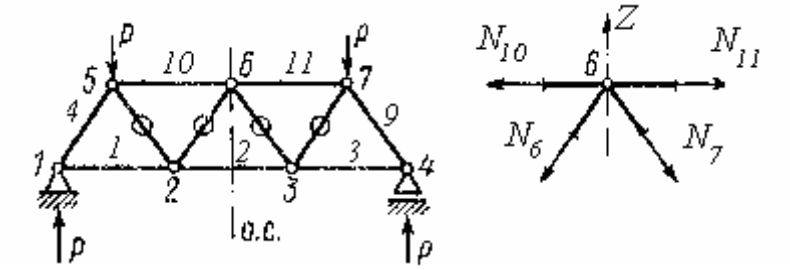


Рис. 5.15

В то же время, из уравнения равновесия $\sum Z = 0$ для узла 6 следует, что $N_6 = -N_7$. Такие противоречивые требования могут быть выполнены только в случае, когда оба усилия будут нулевыми. После этого по второму признаку нулевых стержней из узлов 2 и 3 получится, что и усилия N_5 и N_8 будут также нулевыми.

Примечание. Чертежи ферм на рис.5.14 и на рис. 5.15 взяты из учебного пособия [7]. Нулевые стержни там отмечены кружками. Так их будем отмечать и далее.

Имеются и другие примеры обнаружения явно нулевых стержней в фермах (см., например, [7]).

Расчет фермы вручную рекомендуется выполнять в такой

последовательности:

1. Определяются опорные реакции фермы.

2. На расчетной схеме фермы по различным признакам отмечаются все явно нулевые стержни. Это может упростить дальнейшее определение усилий в других стержнях.

3. С учетом отмеченных нулевых стержней выбирается способ определения конкретного усилия, интересующего расчетчика. Способ вырезания узлов был только что продемонстрирован. Рассмотрим теперь способы сечений и комбинированный.

Способы сечений и комбинированный

Применим сначала способ сечений для определения усилия N_1 в ферме, изображенной на рис. 5.16. Будем считать, что операции по проверке статической определимости фермы выполнены. Определены также опорные реакции и отмечены (кружками) явно нулевые стержни.

Усилие N_1 можно найти способом последовательного вырезания и рассмотрения равновесия узлов a, b, c, d. Можно также, проведя сечение 1-1, рассечь ферму на две части и определить N_1 из одного уравнения равновесия

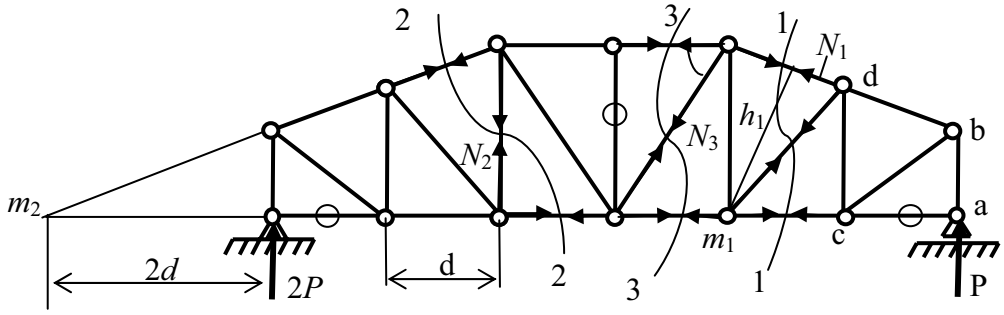


Рис. 5.16

$\sum M_{m_1} = P \cdot 2d + N_1 \cdot h_1 = 0$ для части фермы справа от сечения. Это уравнение отражает равенство нулю всех сил, действующих не правую отсеченную часть фермы относительно точки m_1, которая называется моментной точкой. Использование из трех уравнений равновесия именно этого уравнения связано с тем, что в моментной точке пересекаются усилия еще двух стержней, попавших в разрез фермы на две части. Поскольку они, как и интересующее нас усилие N_1, также не известны, то возможность их исключения и связана с выбором этого уравнения равновесия. В результате получим: $N_1 = 2Pd / h_1$.

Точно также, при необходимости определения усилия N_2, удобно использовать способ рассечения фермы сечением 2-2 (см. рис. 5.16) и определить это усилие из уравнения равновесия в виде $\sum M_{m_2} = 2P \cdot 2d - P \cdot (3d + 4d) + N_2 \cdot 4d = 0$ для части фермы слева от сечения 2-2. Тогда получим $N_2 = 0.75P$.

При определении усилия N_3 также используется способ сечений (сечение 3-3), но необходимое для определения этого усилия уравнение равновесия будет иметь вид $\sum Z = P - N_3 \cos(90^o - \alpha) = 0$ для сил справа от сечения 3-3. Отсюда $N_3 = P / \sin\alpha$.

Способ сечений применим не только в случае, когда сечение, рассекающее ферму, разрезает три стержня. Этот способ применим и при большем числе пересекаемых стержней, если есть возможность исключить из уравнения равновесия для определения искомого усилия все остальные усилия, попавшие в разрез. Примером является усилие N_1 в ферме, изображенной на рис. 5.17. Оно может быть определено с помощью сечения 1-1, хотя оно пересекает четыре стержня. Усилия в трех из них не войдут в уравнение равновесия всех сил, действующих на часть фермы правее сечения, составленное относительно моментной точки m_1: $\sum M_{m_1} = 0.75P \cdot d + N_1 \cdot h_1 = 0$. Из него определится усилие $N_1 = -0.75Pd / h_1$.

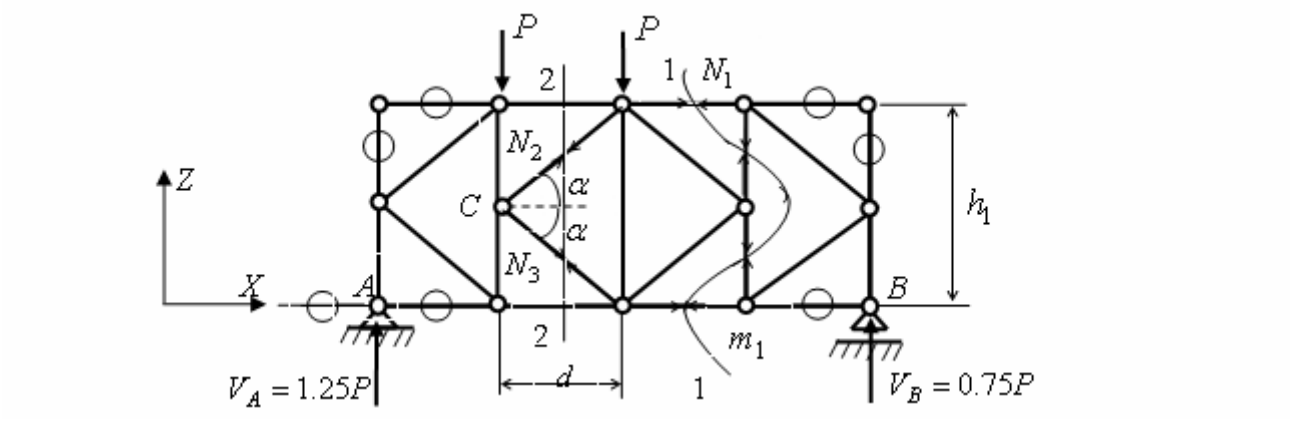


Рис. 5.17

Комбинированный способ продемонстрируем на примере определения усилия N_3. Здесь рассечение фермы на две части, например сечением 2-2, не приводит к возможности составления одного уравнения равновесия для определения одного неизвестного усилия N_3.

Можно составить уравнение равновесия, например, для части фермы

слева от сечения: $\sum Z = 1.25P - P - N_3 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha = 0$, но в него входят два неизвестных усилия.

Необходимо иметь второе уравнение с этими же двумя неизвестными. Таким уравнением является уравнение равновесия $\sum X = N_3 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha = 0$ узла C на ось X. Из него следует, что $N_2 = -N_3$. Подставив это выражение для усилия N_2 в предыдущее уравнение равновесия для всей левой части фермы, получим одно уравнение с неизвестным N_3, из которого найдем: $N_3 = -0.125P / \sin\alpha$.

5.7. Основные свойства статически определимых и статически неопределимых стержневых систем в сравнении

Отметим только основные свойства статически определимых и статически неопределимых стержневых систем, которые очевидны из анализа соответствующих им систем уравнений (1.3) – (1.5).

Приведем сопоставление этих свойств, записав их в два параллельных столбца табл. 5.1.

Отметим также следующее важное свойство статически определимых и статически неопределимых стержневых систем, которое вытекает из анализа числа связей в этих системах (см. раздел 2 пособия).

Разрушение от перегрузки любой связи в статически определимой стержневой системе делает эту систему частично или полностью геометрически изменяемой системой.

В статически неопределимой стержневой системе разрушение связи может привести не к разрушению конструкции, а только к перераспределению в ней внутренних усилий.

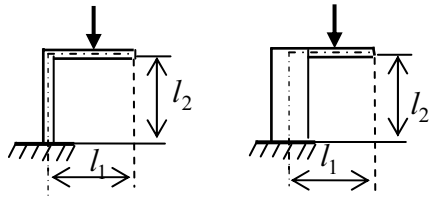
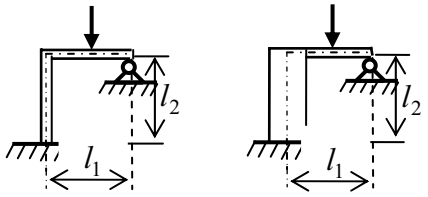
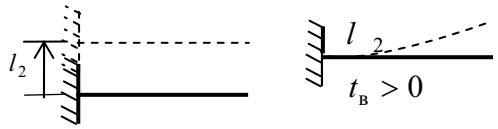
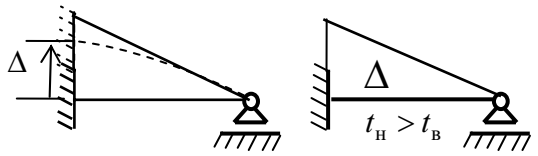
Для пояснения этого рассмотрим стержневые системы, приведенные в примере раздела 1 табл. 5.1.

Допустим, что в статически определимой и в статически неопределимой системах изгибающие моменты в заделках превысили некоторые допустимые пределы и разрушили связи, воспринимающие моменты.

Тогда, статически определимая система, потеряв одну (защемляющую) связь станет геометрически изменяемой системой и будет не способна нести нагрузку указанного вида.

Статически неопределимая система, потеряв защемляющую связь, останется геометрически неизменяемой системой, способной нести указанную нагрузку.

Таблица 5.1

Статически определимые (СО) системы	**Статически неопределимые (СН) системы**
1. Усилия в сечениях стержней и вид их эпюр вдоль осей стержней ***не зависят*** от параметров E, G, ν материала, из которого выполнена стержневая система, и от размеров поперечных сечений стержней. **П р и м е р**. Усилия M, Q, N в двух СО системах, выполненных из разных материалов и имеющих различные поперечные сечения стержней будут совершенно одинаковыми. 	1. Усилия в сечениях стержней и вид их эпюр вдоль осей стержней ***зависят*** от параметров E, G, ν материала, из которого выполнена стержневая система, и от размеров сечений стержней. **П р и м е р**. Усилия M, Q, N в двух СН системах, выполненных из разных материалов и имеющих различные поперечные сечения стержней будут совершенно разными [4, 5]. 
2. Усилия в СО стержневой системе возникают ***только*** от заданной нагрузки и не возникают от воздействий в виде осадки опор и температурных воздействий. **П р и м е р ы**. 1. Осадка заделки изображенной СО балки приведет *к свободному смещению всей консоли* 2. Указанное изменение температуры волокон балки вызовет свободные (без усилий) деформации удлинения и изгиба балки. 	2. Усилия в СН стержневой системе возникают ***не только*** от заданной нагрузки, но и от осадки опори от температурных воздействий [4, 5] и раздел 5 пособия. **П р и м е р ы**. 1. Осадка заделки и указанное изменение температуры волокон изображенной СН балки приведет к возникновению *не свободных изгибных деформаций, сопровождающихся изгибающими моментами* (см. табл. 2.3 и 2.4 в [4]). 

5.8. Исследование геометрической неизменяемости стержневых систем статическим способом «нулевых нагрузок» при соблюдении необходимого условия $n = 0$

При установлении принадлежности стержневой системы к статически определимым системам сначала подсчитывается степень ее статической неопределимости n (см. раздел 2). Получение результата в виде $n = 0$ показывает, что необходимое условие ее статической определимости и геометрической неизменяемости выполняется. Необходимо дополнительно проверить правильность структурного образования стержневой системы из

составляющих систему дисков.

В некоторых случаях структурный анализ затруднен, как это было показано на примере фермы, изображенной на рис. 2.11.

Тогда для исследования геометрической неизменяемости стержневых систем применяют другие способы. Одним из них для систем, у которых соблюдается условие $n = 0$, является способ «нулевых нагрузок», основанный на том, что в *статически определимой стержневой системе при отсутствии действия на нее нагрузки усилия во всех стержнях будут нулевыми.*

Это свойство следует из рассмотрения уравнений равновесия при отсутствии нагрузки на статически определимую систему, поэтому способ «нулевых нагрузок» является статическим способом исследования геометрической неизменяемости статически определимых стержневых систем.

Определение усилий в стержневой системе статическим способом «нулевых нагрузок» вручную сводится к использованию конструктивных особенностей стержневых систем, рассмотренных в предыдущих подразделах.

Обычно при соблюдении условия $n = 0$ используют такую последовательность расчета.

1. Сначала, если это возможно, из соответствующих уравнений равновесия определяют опорные реакции стержневой системы. При нулевой нагрузке на статически определимую систему они должны быть равны нулю.

2. Затем, выявляют явно нулевые внутренние усилия в элементах стержневой системы.

3. В части стержневой системы, в которой усилия не определенными с могут быть определены из уравнений равновесия, задаются каким-либо усилием, предполагая возможность его возникновения, как если бы эта часть была статически неопределимой.

Затем, с помощью уравнений равновесия определяют все остальные усилия. При этом могут встретиться два варианта:

3.1. Без противоречий удалось определить все усилия и они, как и заданное усилие, получились не нулевыми. Это означает, что сделанное допущение о возможности возникновения заданного усилия правильное и исследуемая часть системы является статически неопределимой системой, а вся конструкция (при $n = 0$) – геометрически изменяемой.

П р и м е р 1. Рассмотрим ферму (рис. 5.18, *а*). Для установления принадлежности ее к СО или СН системам по формуле (2.23) выполняем проверку степени ее статической неопределимости: $n = (n_{\text{с}} + n_{\text{оп}}) - 2n_{\text{у}} = (9+3) - 2 \cdot 6 = 0$. Этот результат показывает, что соблюдается необходимое условие статической определимости и геометрической

неизменяемости фермы.

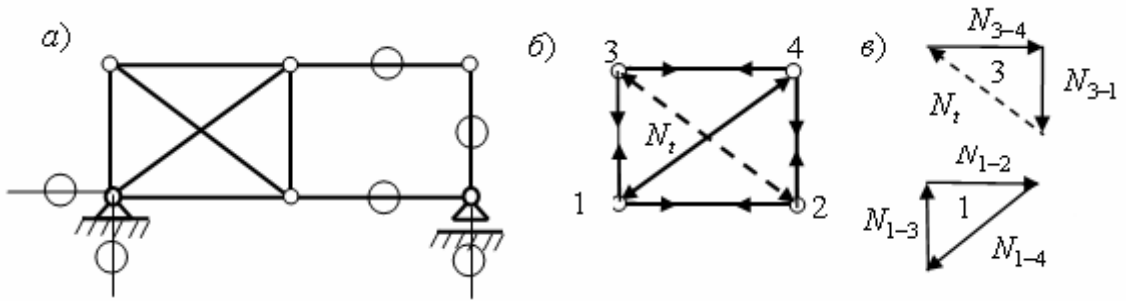


Рис. 5.18

Совершенно очевидно, что эта ферма геометрически изменяема, т. к. в ее структуре имеется замкнутый контур, состоящий из четырех дисков, соединенных четырьмя шарнирами. Однако, для ознакомления с процедурой статического способа исследования геометрической неизменяемости, для исследования геометрической неизменяемости фермы применим статический способ в только что приведенной последовательности.

1. Из трех уравнений равновесия для всей фермы устанавливаем, что усилия в трех опорных связях равны нулю.

2. По признакам явно нулевых стержней устанавливаем, что три стержня фермы являются явно нулевыми.

3. К оставшейся части фермы с неопределенными усилиями применим допущение, что эта часть статически неопределима и поэтому в ее стержнях возможно возникновение усилий и без нагрузки (например, от температурного воздействия).

Выделим эту часть из фермы (рис. 5.18, *б*) и сделаем предположение, что стержень, отмеченный штриховой линией, нагрет и давит на узлы, к которым он прикреплен, силой N_t.

Из равновесия сил, действующих на узел 3, найдем усилия N_{3-4} и N_{3-1} (рис. 5.18, *в*).

Затем, из последовательного рассмотрения равновесия узлов 1, 2, 4 (на рис. 5.18, *в*) показан только узел 1), найдем усилия во всех стержнях выделенного фрагмента фермы. При этом, видно, что не встретится никакого противоречия: все узлы будут в равновесии и все усилия не будут равны нулю.

Это означает, что заданное не нулевое усилие N_t в левой части конструкции действительно возможно, как и все определенные усилия в стержнях выделенного фрагмента. Это означает, что выделенный фрагмент фермы статически неопределим. При соблюдении условия $n = 0$ это возможно только в том случае, если в другой части фермы не достаточно связей, и она геометрически изменяема (что и видно из рисунка фермы).

3.2. При определении усилий получилось противоречие (отсутствие равновесия какого-либо узла или другого элемента). Это означает, что сделанное допущение не подтвердилось. Тогда принятое не нулевым заданное усилие необходимо принять равным нулю. Затем найти другие появившиеся нулевые усилия. Если при этом все остальные усилия оказываются нулевыми, система правильно образована и является статически определимой.

Если часть стержней остаются с неопределенными усилиями, такое исследование повторяется.

П р и м е р 2. Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 2.11. Для нее соблюдается необходимое требование статической определимости: $n = 0$. Это означает, что общее число связей в ферме достаточно для того, что бы она была геометрически неизменяема и статически определима.

Простой структурный анализ этой фермы оказывается невозможным, так как нет ни одного треугольника, который можно было бы взять за основу образования фермы, как это было возможно для ферм, приведенных на схемах 1 и 2 рис. 1.2, *е*.

Поэтому применим для исследования ее ГН рассматриваемый статический способ «нулевых нагрузок».

1. Из уравнений равновесия для всей фермы устанавливаем, что опорные реакции равны нулю (рис. 5.19, *а*).

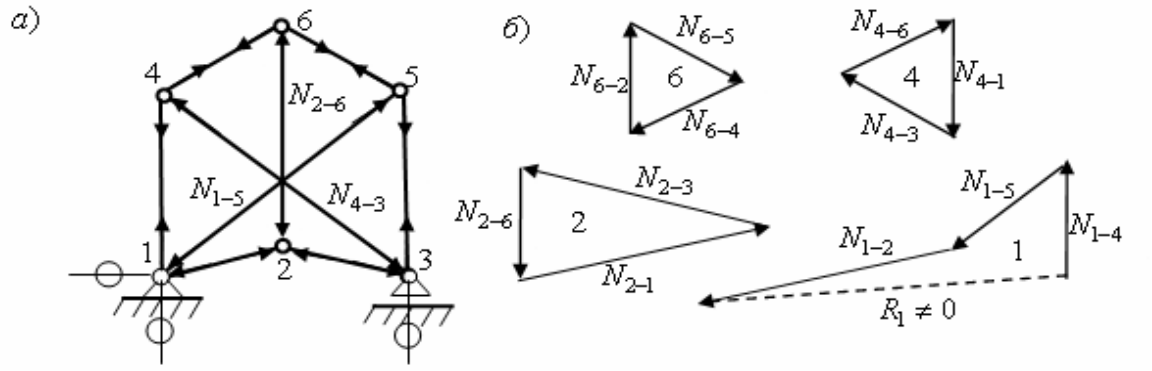


Рис. 5.19

2. Явно нулевых стержней нет. В то же время усилия в стержнях остаются не определяемыми ни способом вырезания узлов, ни сечений.

3. Сделаем предположение о том, что, не смотря на соблюдающееся условие $n = 0$, система СН и в ней возможно возникновение усилий и при нулевой нагрузке (как это было сделано в предыдущем примере).

Зададимся усилием N_{6-2} и, последовательно вырезая узлы 6, 4, 2, 1, найдем усилия в стержнях, соединенных в узле 1 (см. треугольники сил на рис. 5.19, *б*).

При построении треугольника сил для узла 1, обнаруживаем, что он получился незамкнутым. Это означает, что равнодействующая сил, действующих на узел 1 не равна нулю и, следовательно, узел 1 не находится в равновесии. Этого быть не может: при любой нагрузке и без нее узел должен находиться в равновесии. Отсюда следует и такой вывод: наше допущение о том, что без нагрузки на ферму в стержне 2-6 возможно возникновение усилия, не правильно. Усилие N_{6-2} следует принять равным нулю.

Но как только мы приравняем усилие N_{6-2} нулю, из приведенных треугольников сил получатся нулевыми все усилия в ферме. Отсюда делаем общий вывод: так как соблюдается необходимое условие $n = 0$ и при нулевой нагрузке все усилия равны нулю, то ферма геометрически неизменяема и статически определима.

Аналогичное исследование может быть выполнено и для стержневых систем других типов.

П р и м е р 3. Рассмотрим раму, изображенную на рис. 5.20, *а*. Для нее удовлетворяется необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости: $n = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) - (3 + n_{1\text{ш}}) = (5 + 3 \cdot 0) - (3 + 2) = 0$.

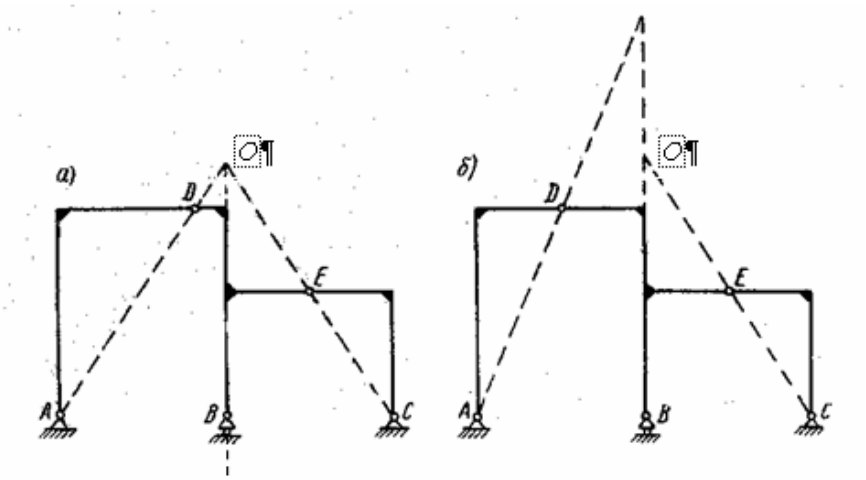


Рис. 5.20

Проверку ГН выполним способом нулевой нагрузки, выполнив следующие рассуждения.

Линия действия полной реакции в опоре A из условия равновесия диска AD пройдет через шарнир D. Из тех же соображений линия действия полной опорной реакции в опоре C пройдет через шарнир E. Обе линии действия пересекутся в точке O с вертикальной реакцией V_B.

Так как все три опорных реакции пересеклись в одной точке, то, задавшись одной из них как некоторой не нулевой величиной, можем из треугольника сил, построенного для точки O, определить две других реакции. При этом не встретим никакого противоречия: треугольник сил будет замкнут, и вся система будет находиться в равновесии.

Отсюда получаем вывод: наше допущение о возможности возникновения реакций и без нагрузки показывает, что система, несмотря на выполнение условия $n = 0$, является геометрически изменяемой системой.

Если сдвинуть шарнир D или E (см. рис. 5.20, *б*), то линии действия реакций не будут пересекаться в одной точке. В этом случае, при предположении о возможности возникновения одной из реакций, получим противоречие: рама не будет находиться в равновесии. Значит, любая из реакций в варианте *б* рамы равна нулю, а значит, равны нулю и все усилия в сечениях стержней рамы. Это в свою очередь означает, что система правильно образована и является геометрически неизменяемой и статически определимой.

5.9. Понятие о линиях влияния и их использовании при расчете стержневых систем

Введение

До сих пор в этом разделе УМК рассматривалась методика определения усилий статическим методом (с помощью уравнений равновесия) в статически определимых стержневых системах от действия на них неподвижной нагрузки.

Однако, на некоторые сооружения действуют и подвижные нагрузки, Примером может служить промышленное здание, в котором при его эксплуатации предусмотрено использование крана.

Станина крана может перемещаться, например, вдоль машинного зала электростанции по специальным подкрановым балкам. Вдоль подкрановых балок уложены рельсы, на которые через колеса станины крана передаются силы давления от собственного веса крана и несущего им груза.

Таким образом, при движении крана подкрановая балка будет испытывать давление колес крана в виде группы подвижных сосредоточенных сил.

Поскольку подкрановая балка опирается на поперечные рамы промышленного здания, то действие подвижной нагрузки передается и на поперечные рамы здания и на их фундамент.

Вторым примером сооружений, воспринимающих подвижные нагрузки, являются мосты. При этом силы давления на мост могут быть самые разнообразные (от группы сосредоточенных давлений колес поезда или от многочисленного и разнообразного автотранспорта, от распределенного давления по какой-то длине моста, например, от движущейся демонстрации людей и т. д.).

При движущейся по сооружению или его элементу нагрузке все внутренние усилия и опорные реакции будут изменяться по своему значению и по направлению действия. Поэтому возникает вопрос о методике расчета сооружений и их элементов от подвижной нагрузки.

При этом следует отметить, что движущаяся нагрузка может быть рассмотрена и как статическая (не вызывающая появления дополнительной нагрузки в виде сил инерции) и как динамическая (когда появляются силы инерции, которые необходимо учитывать как дополнительную нагрузку на сооружение).

Как показано в подразделе 1.4 УМК на схеме разделения строительной механики на «статику сооружений» и на «динамику сооружений», данное

учебное пособие соответствует части «Статика сооружений». Поэтому подвижная нагрузка будет рассматриваться как статическая. Вопросы динамики будут изучаться в части «Динамика сооружении».

Изучение вопроса о расчете сооружений на подвижную нагрузку начнем с понятия о линиях влияния.

Понятие о линии влияния для усилий

Рассмотрим однопролетную балку, по которой движется сосредоточенная сила $P = 1$ кН.

При указанном положении единичного груза из уравнений равновесия опорные реакции выразятся как линейные функции координаты x:

$$V_A = 1 \cdot \frac{l - x}{l}; \quad V_B = 1 \cdot \frac{x}{l} \qquad (5.22)$$

Эти функции являются ***функциями влияния*** единичной силы на величины (на значения и знаки) опорных реакций.

Графики этих функций влияния называются ***линиями влияния*** единичной силы на величины опорных реакций.

Графики линейных функций влияния можно построить по двум ординатам, например, при $x = 0$ и $x = l$ (рис. 5.21).

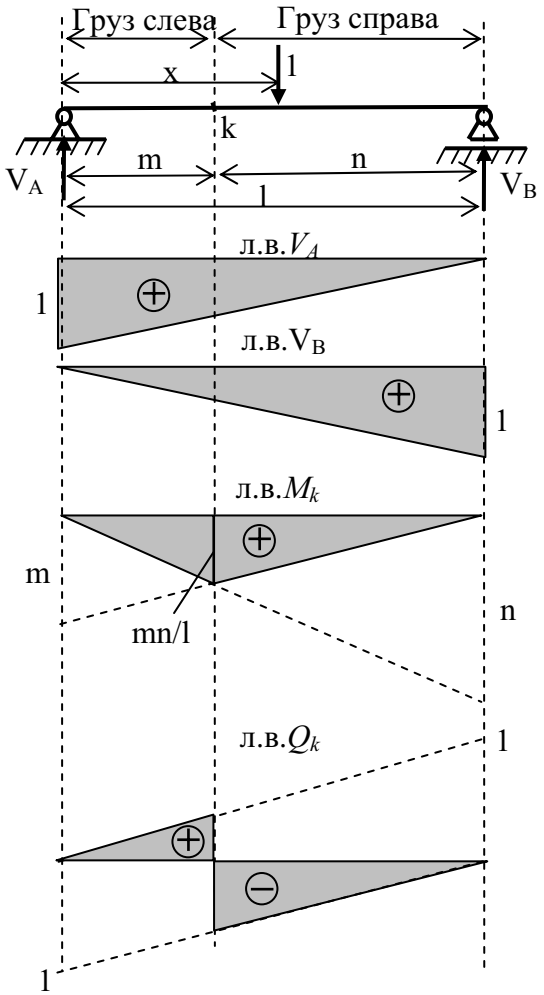


Рис. 5.21

Линии влияния можно построить и для усилий M_k и Q_k в любом сечении k пролета балки. При этом отдельно строятся два графика для каждого усилия: когда груз находится слева от рассматриваемого сечения k и когда он находится справа от сечения. Получается ветви л.в.M_k и л.в.Q_k слева и справа от сечения k (см. рис. 5.21).

Использование линий влияния для усилий с целью определения искомого усилия от группы сил

Линию влияния можно использовать для определения величины усилия , для которого она построена, от любой группы сил, действующих на

рассматриваемую конструкцию (в данном примере – на простую балку).

Вычисление искомого усилия от группы сосредоточенных сил P_i с номером i и от группы равномерно распределенных нагрузок интенсивностью q_j с номером j будет выполняться по формуле:

$$\text{Усилие} = \sum_i P_i \cdot z_i + \sum_j q_j \cdot \omega_j \,. \tag{5.23}$$

Здесь z_i является ординатой линии влияния для рассматриваемого усилия, соответствующей сосредоточенной силе P_i; ω_j представляет собой площадь линии влияния находящейся под распределенной нагрузкой интенсивности q_j. Все произведения в формуле (5.23) берутся со своими знаками.

Для получения максимального значения искомого усилия необходимо разместить грузы таким образом, чтобы вычисление по формуле (5.23) дало это значение.

Вопрос о построении линий влияния был продемонстрирован на примере простой однопролетной балки. Аналогично с использованием уравнений равновесия можно построить линии влияния для опорных реакций и внутренних усилий *M, Q, N* в сечениях стержней любых статически определимых стержневых систем (шарнирных балок, рам, трехшарнирных арок и ферм) [7, 10].

Значительно более сложно линии влияния для искомых усилий строятся для статически неопределимых стержневых систем, например для подкрановых балок, когда они представляют собой неразрезную балку.

Однако использование современных программных комплексов (например, программы SCAD) позволяет достаточно быстро определять искомые усилия от любой нагрузки при любом ее конкретном положении в процессе передвижения по сооружению.

5.10. Информация о сборнике заданий для самостоятельных расчетных работ студентов на тему «Определение усилий и построение эпюр M, Q, N в статически определимых стержневых системах»

Изучение рациональных способов определения усилий в статически определимых стержневых системах с учетом их конструктивных особенностей является очень важным этапом учебного процесса по дисциплине «Строительная механика».

Знание теории и умение решать практические задачи позволяет

учащемуся лучше понимать общие свойства статически определимых стержневых систем и их различие, определяемое конструктивными особенностями различных типов конструкций (балок, рам, арок, ферм).

Для выработки знаний и умений студентов по всем разделам УМК учащимся в процессе обучения задаются для самостоятельного решения ряд заданий и задач, в том числе из сборника заданий и задач, приведенного в приложении 2 к УМК. Часть заданий относится к разделу «Расчет статически определимых стержневых системам».

Методика выполнения заданий и задач строится на использовании:

1) расчетов вручную, реализующих для определения усилий приведенные выше рациональные способы применения уравнений равновесия;

2) расчетов на ПК по программе SCAD, реализующей МКЭ.

Сопоставление результатов расчетов двумя способами позволяет учащемуся лучше понять работу рассматриваемой стержневой системы с точки зрения распределения в ней усилий.

Для упрощения подготовки учащихся по применению программы SCAD на уровне «Пользователя» в приложении 1 УМК приведены методические указания по использованию этой программы при расчете стержневых систем.

Кроме того, в приложении 3 приведены примеры оформления домашних расчетных работ (заданий) по предлагаемой в УМК методике сочетания в них расчетов на ПК с помощью программы SCAD, реализующей МКЭ в форме метода перемещений и расчетов вручную, реализующих рационально составленные уравнения равновесия.

В сборнике заданий приведены также задания по расчету статически неопределимых стержневых систем. Рассмотрение методики расчета этих систем приведено в разделах 6, 7, 8, 9 УМК.

Кроме заданий для расчетных работ в приложении 5 приведены также задачи, которые могут быть использованы как самим студентом (для самоконтроля), так и преподавателем для быстрой контрольной проверки уровня знаний и умений учащихся.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

6.1. Введение

При решении задачи определения НДС плоской стержневой системы от статически приложенной внешней нагрузки для каждого сечения имеем 9 неизвестных величин (см. рис. 1.5):

M, Q, N – внутренние усилия в сечении;

$\kappa, \gamma, \varepsilon$ – соответствующие деформации в сечении;

u, w, θ – перемещения сечения.

До сих пор при решении задачи об определении НДС стержневых систем ставилась только часть этой задачи, а именно: задача определения внутренних усилий M, Q, N в сечениях статически определимых стержневых систем.

После определения указанных усилий можно из уравнений, отражающих закон Гука (1.5), определить соответствующие величины, отражающие деформации изгиба κ, поперечные деформации (деформации сдвига) γ и продольные деформации ε.

Три перемещения сечения можно определить затем интегрированием дифференциальных уравнений (1.4) при заданных граничных условиях.

В курсе сопротивления материалов такой способ определения перемещений был проиллюстрирован на примерах рассмотрения НДС прямых стержней при продольных и изгибных деформациях.

Кроме того, в курсе сопротивления материалов рассматривался также метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации стержневой системы. Он был реализован в виде формулы Кастильяно, из которой затем для определения перемещений сечений стержней получается формула Максвелла – Мора.

В строительной механике для определения перемещений сечений стержневых систем обычно используется формула Максвелла – Мора. Вопрос о ее получения базируется на законе сохранения энергии при деформации линейно деформированной стержневой системы, реализуемого в форме принципа (начала) возможных перемещений.

В УМК вопрос о получении этой формулы рассмотрен в сокращенной форме. Более подробно с ним можно познакомиться в учебниках по строительной механике, например, [7, 10].

6.2. Формула Максвелла-Мора для определения действительных перемещений линейно деформируемых стержневых систем

Действительные перемещения и деформации

Рассмотрим некоторое *грузовое состояние* линейно деформируемой стержневой системы в виде рамы (рис. 6.1, *а*).

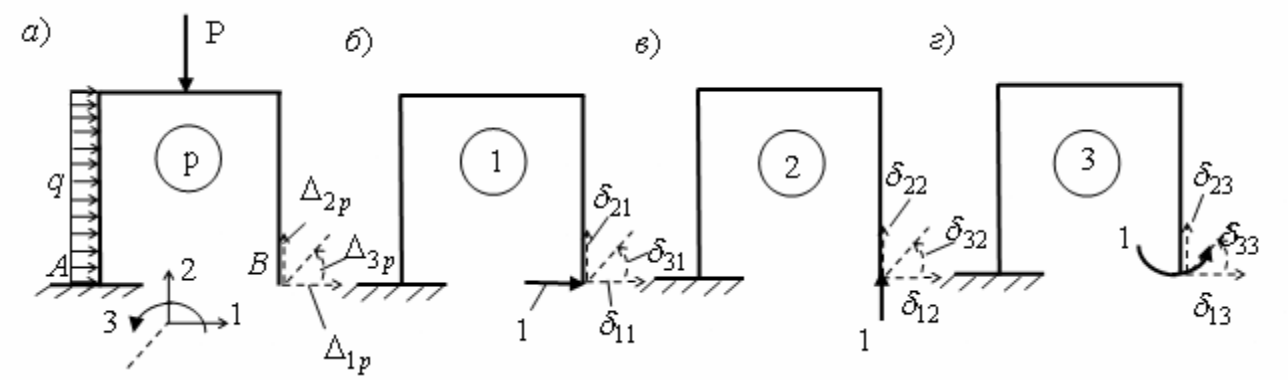


Рис. 6.1

Под действием приложенной внешней статической нагрузки в любом сечении стержневой системы возникают внутренние усилия M_p, Q_p, N_p, деформации $\kappa_p, \gamma_p, \varepsilon_p$ и перемещения u_p, w_p, θ_p. Индекс p у обозначений величин усилий, деформаций и перемещений показывает их принадлежность грузовому состоянию. Само грузовое состояние на рис. 1.6, *а* также отмечено как состояние «*p*».

Все указанные величины в раме являются *действительными* или *истинными*.

Заданная рама статически определима, поэтому *действительные* усилия M_p, Q_p, N_p в любых ее сечениях от заданной нагрузки легко определяются. По формулам (1.5) закона Гука легко определяются и соответствующие *действительные* деформации:

$$\kappa_p = \frac{M_p}{EI}; \quad \gamma_p = \mu \frac{Q_p}{GS}; \quad \varepsilon_p = \frac{N_p}{ES}. \tag{6.1}$$

Рассмотрим методику определения *действительных* перемещений любого сечения рассматриваемого грузового состояния рамы сначала на примере определения горизонтального перемещения Δ_{1p} сечения *B* рамы (см. рис. 6.1, *а*).

Возможные перемещения и деформации

Изобразим некоторое *вспомогательное состояние* 1 рассматриваемой рамы (рис. 6.1, *б*), в котором внешней нагрузкой будем полагать единичную силу, действующую в сечении *B в направлении искомого перемещения* Δ_{1p} *в грузовом состоянии рамы.* От этой единичной силы в сечениях стержней рамы возникнут внутренние усилия M_1, Q_1, N_1.

Введем для вспомогательного состояния рамы понятия «*возможные перемещения*» и соответствующие им «*возможные деформации*». Под ними будем понимать *любые малые* перемещения u^*, w^*, θ^* и соответствующие им *малые* деформации

$$\kappa^* = \frac{d\theta^*}{dx}; \quad \gamma^* = \theta^* - \frac{dw^*}{dx}; \quad \varepsilon^* = \frac{du^*}{dx}, \tag{6.2}$$

допускаемые наложенными на раму связями.

Например, такими возможными перемещениями и деформациями во вспомогательном состоянии рамы можно считать действительные упругие перемещениями и деформациями рамы, вызванные заданными в грузовом состоянии рамы нагрузками (см. рис. 6.1, *а*).

Предположим, что во вспомогательном состоянии рамы заданы возможные перемещения u^*, w^*, θ^* и возможные деформации (6.2) соответственно равные действительным перемещениям u_p, w_p, θ_p и действительным деформациям в грузовом состоянии, т.е. заданы возможные перемещения и деформации в виде:

$$u^* = u_p; \quad w^* = w_p; \quad \theta^* = \theta_p; \tag{6.3}$$

$$\kappa^* = \kappa_p; \quad \gamma^* = \gamma_p; \quad \varepsilon^* = \varepsilon_p. \tag{6.4}$$

Принцип возможных перемещений для линейно деформируемой стержневой системы

Для линейно деформируемой стержневой системы в соответствии с законом сохранения энергии можно записать так называемый «Принцип (Начало) возможных перемещений» (ПВП или НВП) в следующей формулировке.

Для линейно деформируемой стержневой системы, находящейся в равновесии, сумма работы A, *совершаемой приложенными к системе внешними силами на соответствующих этим силам возможных перемещениях, и работы* B, *совершаемой внутренними усилиями системы на соответствующих возможных деформациях, равна нулю:*

$$A + B = 0\,. \qquad (6.5)$$

Применив ПВП к бесконечно малому элементу длиной *dx* (см. рис. 1.5), и использовав уравнения (1.3) – (1.5), после пренебрежения слагаемыми второго порядка малости (см. [7, 10]), получим выражение для работы A_{dx} внешних сил, к которым относятся и нагрузки по длине элемента (см. рис. 1.5,*а)* и внутренние усилия по его концам (см. рис. 1.5, *б*), в виде

$$A_{dx} = (M \cdot \kappa^* + Q \cdot \gamma^* + N \cdot \varepsilon^*)dx\,. \qquad (6.6)$$

Для всей стержневой системы, после интегрирования по длине *L* всех стержней, получим:

$$A = \int_L (M \cdot \kappa^* + Q \cdot \gamma^* + N \cdot \varepsilon^*)dx = \int_L M \cdot \kappa^* dx + \int_L Q \cdot \gamma^* dx + \int_L N \cdot \varepsilon^* dx\,. \qquad (6.7)$$

Здесь: A – работа внешних сил, приложенных к стержневой системе, на соответствующих им возможных перемещениях; $M, Q.N$ – внутренние усилия в стержневой системе, для которой применен ПВП; $\kappa^*, \gamma^*, \varepsilon^*$ – возможные деформации, соответствующие возможным перемещениям (6.2).

Формула Максвелла – Мора для определения перемещений

Уравнение (6.7) отражает принцип возможных перемещений применительно к любой линейно деформируемой системе. Значит оно применимо и к раме во вспомогательном состоянии *1* (см. рис. 6.1, *б*).

Тогда в формуле (6.7) $M = M_1$; $Q = Q_1$; $N = N_1$. При этом за возможные перемещения и деформации рамы можно принять соответственно действительные перемещения и деформации рамы в грузовом состоянии, т.е. использовать при записи уравнения (6.7) равенства (6.3), (6.4), а также равенство $A = A_{1p} = 1 \cdot \Delta_{1p} + \sum_m R_{m1} \cdot c_{mp}$.

В этом равенстве слагаемое в виде суммы отражает работу всех m составляющих R_{m1} реакций во вспомогательном состоянии *1* на соответствующих им перемещениях c_{mp} в грузовом состоянии p. Тогда получим формулу (6.7) в виде:

$$1 \cdot \Delta_{1p} = \int_L M_1 \cdot \kappa_p dx + \int_L Q_1 \cdot \gamma_p dx + \int_L N_1 \cdot \varepsilon_p dx - \sum_m R_{m1} \cdot c_{mp}\,. \qquad (6.8)$$

Формула (6.8) представляет собой формулу Максвелла – Мора для определения перемещения Δ_{1p} в грузовом состоянии рамы (см. рис. 6.1).

Поскольку в грузовом состоянии рамы деформации связаны с внутренними усилиями формулами закона Гука (6.1), то формула Максвелла – Мора может быть записана и в следующем виде:

$$1 \cdot \Delta_{1p} = \int_L \frac{M_1 M_p}{EI} dx + \mu \int_L \frac{Q_1 Q_p}{GI} dx + \int_L \frac{N_1 N_p}{EA} dx - \sum_m R_{m1} \cdot c_{mp}. \qquad (6.9)$$

Соответствие единичной силы во вспомогательном состоянии стержневой системы искомому перемещению в ее грузовом состоянии

Из формулы Максвелла – Мора в виде (6.8) или (6.9) видно, что в левой ее части отражается работа единичной внешней силы, приложенной во вспомогательном состоянии, на соответствующем этой силе действительных перемещениях в грузовом состоянии.

Если во вспомогательном состоянии стержневой системы (в данном случае рамы) всегда прикладывать единичную силу, *соответствующую искомому перемещению*, то левая часть формулы всегда будет иметь такой же вид, как и в формулах (6.8) и (6.9). Сумма работ остальных внешних сил вспомогательного состояния, представляющих опорные реакции, вызванные единичной силой, перенесена с обратным знаком в правую часть формулы Максвелла –Мора.

Следовательно, выражения (6.8) и (6.9) формулы Максвелла –Мора является общими и для определения других перемещений сечений стержней. Необходимо только во вспомогательном состоянии стержневой системы приложить единичную силу, соответствующую искомому перемещению в грузовом состоянии.

На рис. 6.1, *в* и рис. 6.1, *г* изображены соответственно вспомогательные состояния 2 и 3 рассматриваемой рамы для определения вертикального перемещения Δ_{2p} и угла поворота Δ_{3p} сечения *B* рамы в состоянии p рамы.

Все перемещения сечений рамы будем относить к некоторой общей системе координат, изображенной на рис. 6.1, *а*. Горизонтальную и вертикальную ось отметим цифрами 1 и 2, а угол поворота сечений стержней будем отмечать цифрой 3 как поворот относительно оси (штриховая линия на рис. 6.1, *а*), перпендикулярной плоскости, в которой лежат оси 1 и 2..

Очевидно, что для определения всех трех искомых действительных перемещений Δ_{1p}, Δ_{2p}, Δ_{3p} в грузовом состоянии рамы можно использовать одну общую формулы Максвеллу –Мора в виде:

$$1 \cdot \Delta_{ip} = \int_L \frac{M_i M_p}{EI} dx + \mu \int_L \frac{Q_i Q_p}{GI} dx + \int_L \frac{N_i N_p}{EA} dx - \sum_m R_{mi} \cdot c_{mp}, \; i = 1, 2, 3. \qquad (6.10)$$

В грузовом состоянии, изображенном на (рис. 6.1, *а*), действует только заданная внешняя нагрузка. Составляющие c_{mp} перемещений опор в грузовом состоянии, соответствующие составляющим R_{m1} реакций отсутствуют.

Поэтому последнее слагаемое в формуле (6.10) при отсутствии заданных перемещений опор стержневой системы в ее грузовом состоянии равно нулю.

6.3. Упрощение формулы Максвелла – Мора для конкретного вида стержневых систем

Формула Максвелла – Мора содержит три интеграла, отражающих соответственно влияние на искомое перемещение изгибных, сдвиговых и продольных деформаций стержней в ее грузовом состоянии, где и определяется перемещение.

Чаще всего в стержневых системах используются тонкие стержни, у которых мало отношение h/l, где h – высота балки, а l ее длина. В таких стержневых системах влияние работы поперечных сил вспомогательного состояния на соответствующих сдвиговых деформациях грузового состояния на искомые перемещения оказывается незначительным, поэтому вторым интегралом в формуле (6.10) обычно пренебрегают.

Кроме того, например, при поперечной нагрузке на балку в грузовом состоянии, продольные силы в балке, а значит и продольные деформации (6.1) равны нулю. Значит при изгибе балок от поперечных нагрузок в формуле (6.10) третий интеграл равен нулю и прогибы балок и углы поворота их сечений определяются только с помощью первого интеграла.

В фермах, при действии на них статической узловой нагрузки, в стержнях возникают только продольные силы. Поэтому в формуле (6.10) остается только третий интеграл. Так как для каждого стержня продольное усилие и жесткость стержня постоянны по его длине, то для ферм третий интеграл заменяется суммой:

$$1 \cdot \Delta_{ip} = \int_L \frac{N_i N_p}{EA} dx = \sum_k \frac{N_{ki} N_{kp}}{(EA)_k} l_k, \; k = 1, 2, 3, \ldots n_{\text{с}}. \qquad (6.11)$$

Здесь i – номер искомого перемещения и номер соответствующего вспомогательного состояния, k – номер стержня, $n_{\text{с}}$ – число стержней в ферме.

6.4. Способы вычисления интегралов в формуле Максвелла – Мора

В строительной механике стержневых систем для вычисления интегралов, входящих в формулу Максвелла – Мора (6.10), используют следующие три способа:

1. Аналитический способ.
2. Графо-аналитический способ (способ А.Н. Верещагина).
3. Численный способ Симпсона.

Рассмотрим их на примере вычисления первого интеграла формулы.

Прежде всего, заменим интеграл по длине L всех стержней суммой интегралов для отдельных участков интегрирования.

Участком интегрирования длиной l_r будем считать часть стержня, на котором эпюры внутренних усилий, входящих под интеграл, не имеют скачков и резкого изменения (в виде углов излома) ординат и жесткости.

Так как скачки ординат и изломы в эпюрах изгибающих моментов происходят соответственно в месте приложения к стержню внешних сосредоточенных моментов и поперечных к оси стержней сил, то границами участков интегрирования для первого интеграла будем считать: опоры стержней; узлы соединения стержней; места приложения сосредоточенных моментов и поперечных к оси стержня сосредоточенных сил; места изменения изгибной жесткости стержней.

Таким образом, первый интеграл в (6.10) можно представить в виде:

$$1 \cdot \Delta_{ip} = \int_L \frac{M_i M_p}{EI} dx = \sum_{r=1}^{r=n_{\text{у}}} \int_{l_r} \frac{M_{ri} M_{rp}}{(EI)_r} dx, \; i = 1, 2, 3. \tag{6.11}$$

где r – номер участка интегрирования, а $n_{\text{у}}$ – их число.

Теперь перейдем к рассмотрению способов вычисления интегралов Максвелла – Мора, рассмотрев интеграл только на одном участке интегрирования.

Чаще всего жесткость стержня на изгиб на одном участке интегрирования постоянна, поэтому представим интеграл на одном участке в виде:

$$\int_{l_r} \frac{M_{ri} M_{rp}}{(EI)_r} dx = \frac{1}{(EI)_r} \int_{l_r} M_{ri} M_{rp} dx. \tag{6.12}$$

Напомним, что i – номер искомого перемещения и соответствующего ему вспомогательного состояния (см., например, рис. 6.1).

Для вычисления интеграла (6.12) аналитическим способом под знак интеграла должны быть подставлены функции $M_{ri} = M_{ri}(x)$, $M_{rp} = M_{rp}(x)$, а затем произведено аналитическое интегрирование.

Графо-аналитический способ был предложен А.Н. Верещагиным для вариантов, когда $M_{ri} = M_{ri}(x)$ является линейной функцией, а функции $M_{rp} = M_{rp}(x)$ на участке интегрирования соответствует график, для которого просто вычисляется площадь ω_{rp} и ее центр тяжести C (рис. 6.2).

Тогда интеграл (6.12) на участке интегрирования r вычисляется по формуле (6.13) [7, 10]:

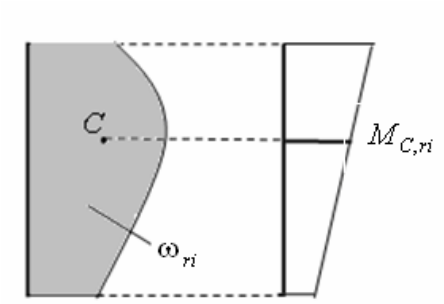


Рис. 6.2

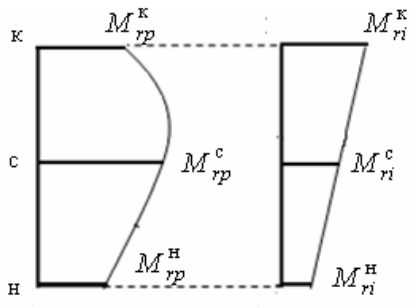


Рис. 6.3

$$\frac{1}{(EI)_r}\int_{l_r} M_{ri}M_{rp}dx = \frac{\omega_{rp}\cdot M_{C,ri}}{(EI)_r}. \qquad (6.13)$$

При вычислении интеграла (6.12) с использованием формулы численного интегрирования Симпсона необходимо на эпюрах $M_{rp}=M_{rp}(x)$ и $M_{ri}=M_{ri}(x)$ в грузовом и вспомогательном состояниях иметь значения ординат в начале (н), середине (с) и конце (к) участка интегрирования и его длину l_r. Тогда

$$\frac{1}{(EI)_r}\int_{l_r} M_{ri}M_{rp}dx = \frac{l_r}{6(EI)_r}\left[M_{ri}^{н}M_{rp}^{н} + 4M_{ri}^{с}M_{rp}^{с} + M_{ri}^{к}M_{rp}^{к}\right]. \qquad (6.14)$$

Как известно, в общем виде формула численного интегрирования является приближенной. Но для участков интегрирования с линейной эпюрой $M_{rp}=M_{rp}(x)$ и эпюрой $M_{rp}=M_{rp}(x)$ в виде линейной функции или квадратичной параболы интеграл Максвелла – Мора вычисляется по формуле Симпсона точно.

6.5. Матричный вид вычислений интеграла Максвелла – Мора по формуле Симпсона

Вычисления интеграла для одного участка интегрирования

Формулу Симпсона (6.14) для дальнейшего использования удобно представить в матричном виде. С этой целью из ординат эпюр изгибающих моментов в начале, середине и конце участка интегрирования с номером r во вспомогательном состоянии с номером i и грузовом состоянии p составим следующие матрицы:

$$\mathbf{m}_{ri} = \begin{bmatrix} M_{ri}^{н} \\ M_{ri}^{с} \\ M_{ri}^{с} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{m}_{rp} = \begin{bmatrix} M_{rp}^{н} \\ M_{rp}^{с} \\ M_{rp}^{с} \end{bmatrix}. \qquad (6.15)$$

Тогда вычисления интеграла по формуле Симпсона (6.14) можно представить в следующей матричной записи:

$$\frac{1}{(EI)_r}\int_{l_r} M_{ri}M_{rp}dx = (\mathbf{m}_{ri})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}_r \cdot \mathbf{m}_{rp}, \tag{6.16}$$

где $(\mathbf{m}_{ri})^{\mathrm{T}}$ – транспонированная матрица $\mathbf{m}_{ri}$, т.е. – матрица строка; $\mathbf{L}_r$ – диагональная матрица коэффициентов формулы Симпсона на участке интегрирования с номером r:

$$\cdot \mathbf{L}_r = \frac{l_r}{6(EI)_r}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.17}$$

Вычисления интеграла на всех участках интегрирования формулы Максвелла – Мора

Если применить формулу Симпсона для всех участков интегрирования в формуле Максвелла – Мора (6.11), то вычисления интеграла можно представить в следующем виде:

$$1 \cdot \Delta_{ip} = \int_L \frac{M_i M_p}{EI}dx = \sum_{r=1}^{r=n_{\text{у}}} \int_{l_r} \frac{M_{ri}M_{rp}}{(EI)_r}dx = (\mathbf{m}_i)^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\,\mathbf{m}_p. \tag{6.18}$$

Здесь $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{m}_p$ – матрицы столбцы ординат эпюр изгибающих моментов в начале (н), середине (с) и конце (к) всех участков интегрирования соответственно во вспомогательном состоянии i и грузовом состоянии p; $\mathbf{L}$ – соответствующая предыдущим матрицам блочно-диагональная матрица коэффициентов формулы Симпсона для всех участков интегрирования. Более подробно со структурой указанных матриц можно ознакомиться в учебных пособиях [7, 10].

Вычисление сразу нескольких перемещений в грузовом состоянии

Матричная форма записи вычислений по формуле Симпсона в предыдущем случае позволяет компактно записать вычисления в случае, когда требуется подсчитать в грузовом состоянии сразу несколько перемещений.

Например, для получения трех перемещений сечения B рамы (см. рис. 5.1), можем записать формулу (6.19) с учетом (6.20):

$$\mathbf{d}_p = (\mathbf{M})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_p; \tag{6.19}$$

$$\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix}. \tag{6.20}$$

Здесь $\mathbf{d}_p$ представляет собой вектор искомых перемещений.

Матрицы **L** и $\mathbf{m}_p$ при одинаковом числе участков интегрирования имеют такой же вид, как и в предыдущей формуле (6.18); матрица **M** соответствует матрицам **L** и $\mathbf{m}_p$ и состоит из трех столбцов $\mathbf{m}_i$ (i = 1, 2, 3), каждый из которых представляет собой вектор с ординатами эпюры M_i на всех участках интегрирования в начале, середине и конце каждого участка.

С примерами расчетов в матричной форме можно познакомиться в учебных пособиях [7, 10].

6.6. Понятие о матрице податливости стержневой системы. Матричная форма ее вычисления при использовании формулы Симпсона

До сих пор в рассматриваемой раме (см. рис. 6.1) ставилась задача определения перемещений только в грузовом состоянии (см. рис. 6.1,*а*) от какой-то заданной в этом состоянии нагрузки. Для того чтобы определить три перемещения в сечении *B* были составлены три вспомогательных состояния (см. рис. 6.1, *б, в, г*).

Предположим, что в этой же системе поставлена задача определения вектора (6.20) тех же трех перемещений, но от группы сосредоточенных усилий P_1, P_2, P_3 (рис. 6.4, *а*), действующих в направлении искомых перемещений и образующих вектор

$$\cdot\mathbf{p} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}, \qquad (6.21)$$

где P_3 представляет собой сосредоточенный момент.

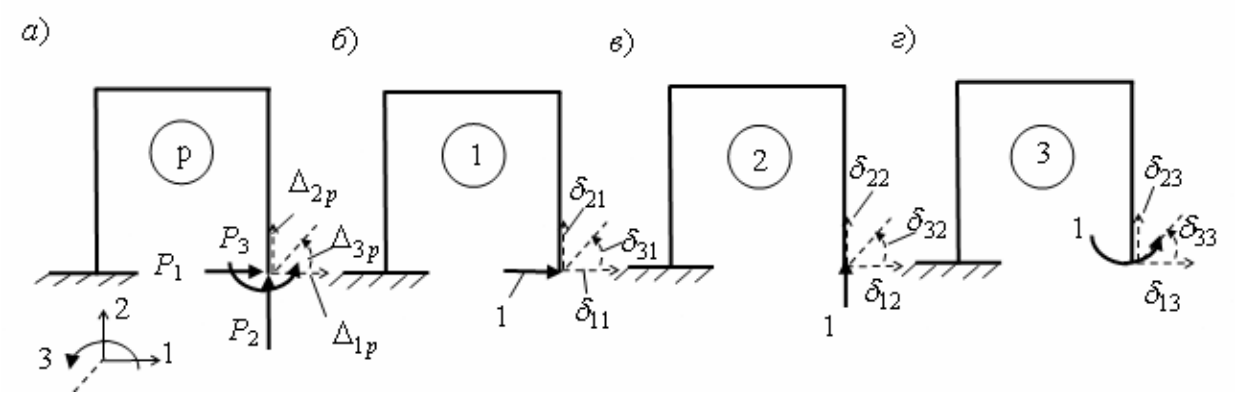


Рис. 6.4

Так как требуется определить такие же перемещения, как и в задаче, изображенной на рис. 6.1, *а*, то вспомогательные состояния для использования

формулы Максвелла – Мора (6.10) останутся такими же (см. рис. 6.1, *б, в, г* и рис. 6.4, *б, в, г*).

Если во вспомогательных состояниях от действия единичных сил определять перемещения δ_{ik} по тем же направлениям, что и в грузовом состоянии, то, используя закон Гука и принцип независимости действия сил, можно записать уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \delta_{13}P_3; \\ \Delta_{2p} &= \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + \delta_{23}P_3; \\ \Delta_{3p} &= \delta_{31}P_1 + \delta_{32}P_2 + \delta_{33}P_3. \end{aligned} \tag{6.22}$$

В матричной записи эти уравнения можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}, \tag{6.23}$$

или при компактной записи матриц –столбцов (6.20) и (6.21) – в виде:

$$\mathbf{d}_p = \mathbf{D} \cdot \mathbf{p}, \tag{6.24}$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

представляет собой матрицу влияния сил, образующих вектор $\mathbf{p}$ (6.21) на перемещения, образующих вектор $\mathbf{d}_p$ (6.20). Такую матрицу в строительной механике называют *матрицей податливости* стержневой системы (в данном случае рамы) в направлениях действующих сил.

Коэффициенты этой матрицы представляют собой перемещения во вспомогательных состояниях (см. рис. 6.4, *б, в, г*), которые определятся по формуле Максвелла - Мора (для любых $i = 1, 2, 3$ и $k = 1, 2, 3$):

$$1_k \cdot \delta_{ik} = 1_i \cdot \delta_{ki} = \int_L \frac{M_i M_k}{EI} dx + \mu \int_L \frac{Q_i Q_k}{GI} dx + \int_L \frac{N_i N_k}{EA} dx. \tag{6.26}$$

При этом доказываются сразу две теоремы строительной механики:

1. Теорема о взаимности работ для любых двух состояний рамы, загруженных какой-то нагрузкой (в данном случае при единичных усилиях соблюдается равенство работ $1_k \cdot \delta_{ik} = 1_i \cdot \delta_{ki}$).

2. Теорема о взаимности перемещений (в данном случае $\delta_{ik} = \delta_{ki}$).

Первый индекс в выражении $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ показывает номер направления, по которому определяется перемещение. Второй индекс показывает номер вспомогательного состояния, в котором приложена единичная сила (поэтому при записи работы сил единичная сила отмечена индексом равным второму индексу в обозначении перемещения).

Обратим внимание на следующие свойства матрицы податливости:

1. Она квадратная и имеет порядок $(n \cdot n)$, где n – число строк соответственно в векторах $\mathbf{d}_p$ и $\mathbf{p}$.
2. На ее главной диагонали, отмеченной в (6.25) штриховой линией, располагаются элементы, которые всегда положительны, так как при равенстве $i = k$ под любым из трех интегралов (6.26) подынтегральная функция внутреннего усилия имеет вторую степень.
3. Так как элементы матрицы равны $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ при любых i и k, то матрица симметрична.

Для вычисления вектора $\mathbf{d}_p$ (6.20) в грузовом состоянии (см. рис. 6.4, *а*) можно использовать выражение (6.19) или (6.24).

При использовании закона Гука и принципа независимости действия сил вектор изгибающих моментов $\mathbf{m}_p$ в грузовом состоянии можно представить в виде

$$\mathbf{m}_p = \mathbf{M} \cdot \mathbf{p}. \tag{6.27}$$

Подставим это выражение в (6.19) и сопоставим его с (6.24). Тогда очевидно, что для вычисления матрицы податливости можно использовать выражение:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{M})^{\mathrm{T}} \mathbf{L}\mathbf{M}. \tag{6.28}$$

С примерами расчетов матрицы **D** можно познакомиться в учебных пособиях [7, 10].

6.7. Определение перемещений в статически определимых стержневых системах от заданной осадки опор

Для определения перемещений стержневых систем от внешнего воздействия в подразделе 6. 2 была получена формула Максвелла – Мора (6.10).

Эта формула отражает работу внешних сил и внутренних усилий во вспомогательном состоянии заданной стержневой системы на соответствующих внешним силам и внутренним усилиям возможных перемещениях и деформациях.

Возможные перемещения и возможные деформации во вспомогательном состоянии заданной стержневой системы приняты равными соответственно действительным перемещениям и действительным деформациям «грузового» состояния заданной рамы

Под «грузовым» состоянием понимается состояние стержневой системы от любого внешнего воздействия (силового воздействия в виде заданной нагрузки, заданной осадки опор и заданного температурного воздействия).

В соответствии со свойствами статически определимых систем (см. табл. 5.1 в подразделе 5.7 УМК) от заданной осадки опор в «грузовом» состоянии рамы при отсутствии внешней нагрузки не возникают внутренние усилия M_p, Q_p, N_p, а значит (см. уравнения (1.5) закона Гука) не возникают и деформации стержней $\kappa_p, \gamma_p, \varepsilon_p$. Поэтому все интегралы в правой части формулы (6.10) будут равны нулю.

В результате из формулы (6.10) получим следующую формулу для определения перемещений в статически определимых стержневых системах только от ее заданных перемещений («осадок») опор:

$$1 \cdot \Delta_{ip} = -\sum_m R_{mi} \cdot c_{mp}, \; i = 1, 2, 3. \qquad (6.29)$$

Для применения этой формулы к определению тех же перемещений, которые указаны на рис. 6.1, *а* , но только не от нагрузки, а от заданных смещений опор (рис. 6.5), необходимо составить те же вспомогательные состояния (см. рис. 6.5, *б, в, г*), что и при определении перемещений от заданной нагрузки (см. рис. 6.1, *б, в, г*).

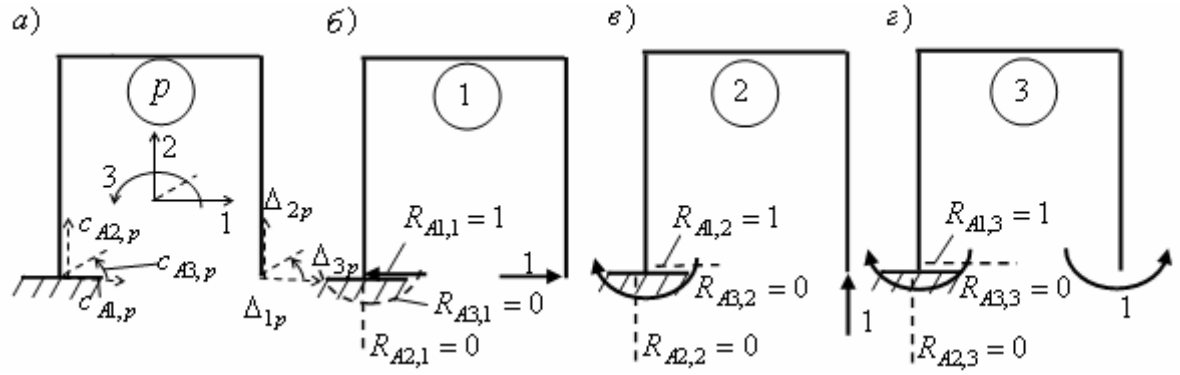


Рис. 6.5

Но теперь, для использования формулы (6.29) необходимо в грузовом состоянии рамы указать заданные перемещения опоры A (см. рис. 6.5, *а*), а во вспомогательных состояниях вычислить и указать направления реакций всех опор стержневой системы (в данном примере только одной)

(см. рис. 6.5, *б, в, г*).

Все необходимые для вычисления по формуле (6.29) величины указаны на рис. 6.5.

Вычисленные по формуле (6.29) перемещения будут свободными (не стесненными), так как при этих перемещениях в стержневой системе не будет возникать никаких усилий. Ее элементы переместятся как жесткие диски в некоторое новое ненапряженное положение как части механизма (рис. 6.6).

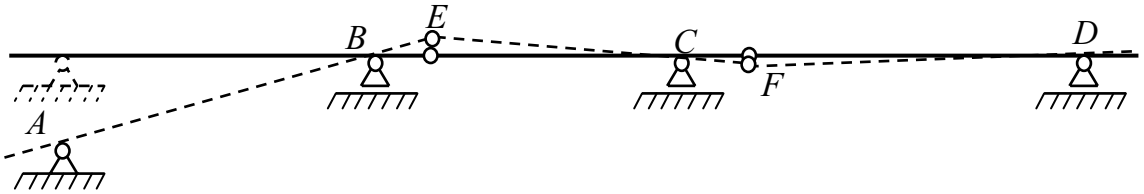


Рис. 6.6

Вопрос определения перемещений по формуле Максвелла – Мора в статически неопределимых стержневых системах будет рассмотрен в разделе 7 после ознакомления с методом сил расчета статически неопределимых стержневых систем.

6.8. Определение перемещений в статически определимых стержневых системах от изменения температуры их стержней

Полученная общая формула Максвелла – Мора (6.10) применима и при температурных воздействиях на стержневые системы.

Температурное воздействие не вызывает усилий в статически определимых стержневых системах (см. табл. 5.1 в подразделе 5.7 УМК). В $t_в$ тоже время от температурного воздействия происходят деформации стержней. Это означает, что происходящие деформации и связанные с ними перемещения являются свободными (не стесненными).

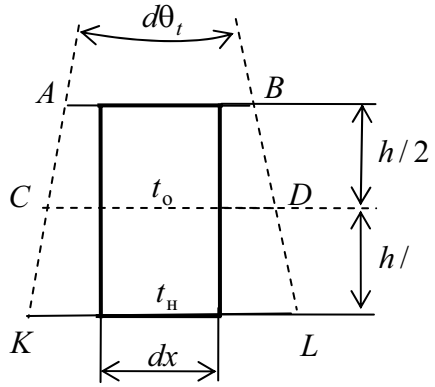


Рис. 6.7

Рассмотрим вопрос об определении этих свободных (не вызывающих усилий) температурных деформациях стержней.

Изобразим на рис. 6.7 бесконечно малый элемент стержня длиной dx.

Будем считать, что произошло изменение температуры верхнего и нижнего волокон стержня соответственно на $t_в$ и $t_н$ градусов, где $t_н > t_в > 0$.

Будем полагать стержень тонким и изменение температуры по его

высоте линейным. Тогда $t_{\text{о}} = 0.5(t_{\text{н}} + t_{\text{в}})$.

Удлинения нижнего, среднего и верхнего волокон элемента dx соответственно составляют $\Delta_{dx,\text{н}} = \alpha t_{\text{н}} dx$, $\Delta_{dx,\text{о}} = \alpha t_{\text{о}} dx$, $\Delta_{dx,\text{в}} = \alpha t_{\text{в}} dx$, где α является коэффициентом линейного расширения материала стержня.

Отсюда следует выражение для продольной деформации стержня от средней температуры $t_{\text{о}} = 0.5(t_{\text{н}} + t_{\text{в}})$

$$\varepsilon_{t_{\text{о}}} = \alpha t_{\text{о}}. \tag{6.30}$$

Кроме того, происходит деформация искривления стержня, при которой сечения элемента dx поворачиваются на угол $d\theta_t$ (см. рис. 6.7).

Условно деформированный от изменения температуры волокон элемент показан в виде трапеции *ABKL*. Центр кривизны стержня (обозначим его точкой *O*) расположен далеко от его оси: на расстоянии радиуса кривизны R. Поэтому искривление волокон стержня на рис. 6.7 не показано. Приближенно $KL = (1 + \alpha t_{\text{н}})dx$, $CD = (1 + \alpha t_{\text{о}})dx$,. $AB = (1 + \alpha t_{\text{в}})dx$. Тогда

$$d\theta_t \approx \text{tg} d\theta_t = \frac{KL - AB}{h} = \frac{\alpha(t_{\text{н}} - t_{\text{в}})dx}{h} \tag{6.31}$$

Отсюда получаем деформацию искривления стержня:

$$\kappa_t = \frac{d\theta_t}{dx} = \frac{\alpha(t_{\text{н}} - t_{\text{в}})}{h} = \alpha\tau \tag{6.32}$$

Здесь величина

$$\tau = \frac{(t_{\text{н}} - t_{\text{в}})}{h} \tag{6.33}$$

представляет собой градиент температур по толщине h стержня, равный тангенсу угла наклона линейной эпюры температур к вертикали.

Запишем теперь формулу Максвелла – Мора для определения тех же перемещений в раме, изображенной на рис. 6.1, *а* и на рис. 6.5, но только от указанного здесь воздействия температуры.

Формулу представим в виде (6.8). При этом запишем ее для любого перемещения с номером i, учтем, что на раму не воздействуют ни нагрузки, ни осадки опор. Деформации в «грузовом» состоянии заменим указанными температурными деформациями. Тогда для тонких стержней получим:

$$1 \cdot \Delta_{it} = \int_L M_i \cdot \kappa_t dx + N_i \cdot \varepsilon_{\text{о}} dx. \tag{6.34}$$

Вопрос определения перемещений в статически неопределимых стержневых системах будет рассмотрен в разделе 7 после рассмотрения метода сил расчета статически неопределимых стержневых систем.

7. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

7.1. Идея метода сил на примере рамы

Рассмотрим раму, изображенную на рис. 7.1, *а*. Требуется построить для этой рамы эпюры внутренних усилий $M, Q.N$.

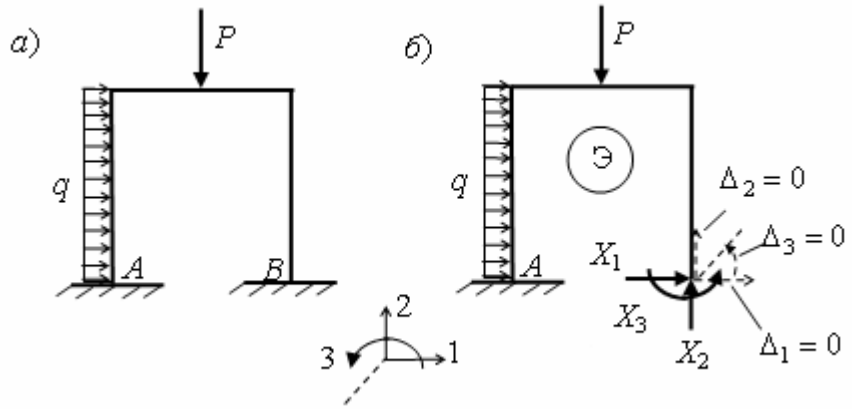


Рис. 7.1

Как всегда расчет начинаем с выяснения принадлежности рамы к статически определимым или к статически неопределимым системам.

Сначала подсчитываем степень статической неопределимости:

$$n = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) - (3 + n_{1\text{ш}}) = (6 + 3 \cdot 0) - (3 + 0) = 3. \qquad (7.1)$$

Результат показывает, что рама три раза статически неопределима, т.е. она с точки зрения определения в ней усилий с помощью имеющегося числа уравнений равновесия имеет три «лишние» неизвестные.

Результат (7.1) показывает также, что рама имеет три «лишних» связи с точки зрения числа связей, делающих эту систему геометрически неизменяемой системой, т.е. единым неподвижным диском (см. раздел 2 по исследованию геометрической неизменяемости стержневых систем). Действительно, структурный анализ рамы показывает, что она представляет собой единый диск. Для закрепления диска на основании достаточно иметь три связи, не пересекающиеся в одной точке и не параллельные (см. подраздел 2.2). Следовательно, три опорные связи из имеющихся шести могут с этой точки зрения рассматриваться как «лишние». Как будет показано в следующем пункте, за «лишние» могут приниматься не только опорные связи, но и внутренние связи в сечениях стержней.

Для расчета статически неопределимой системы может быть использован метод, позволяющий составить недостающие уравнения для определения «лишних» неизвестных усилий. Этот метод называют в строительной механике *методом сил*.

Рассмотрим его идею и последовательность расчета на примере рамы, расчетная схема которой изображена на рис. 7.1,*а*.

1. Из заданной статически неопределимой стержневой системы удаляются «лишние» связи и получается статически определимая стержневая система, называемая «основной системой» метода сил.

Основная система должна быть статически определимой, поэтому для нее должны соблюдаться два условия: 1) $n = 0$; 2) она должна быть геометрически неизменяемой.

«Основной» такая система называется потому, что все остальные действия по расчету заданной стержневой системы методом сил выполняются с помощью этой системы.

Действие удаленных «лишних» связей на основную систему заменяются действием «лишних» неизвестных усилий, которые и подлежат определению в методе сил.

Примечание. При выборе основной системы в заданной раме, т.е. при удалении трех лишних связей, следует обратить внимание на то, что имеется бесконечно большое число вариантов. Это объясняется тем, что кроме шести внешних опорных связей, которым соответствуют опорные реакции, каждое (из бесконечно большого числа) сечение рамы содержит три внутренних связи, которым соответствуют три внутренних усилия $M, Q. N$.

Поэтому за три лишние связи в раме могут быть выбраны не только три из шести опорных связей, но любые три внутренних связи в сечениях стержней рамы, лишь бы полученная основная система была статически определимой, а значит и геометрически неизменяемой.

На рис. 7.2 для рассматриваемой рамы приведены четыре из бесконечно большого числа вариантов статически определимых основных систем.

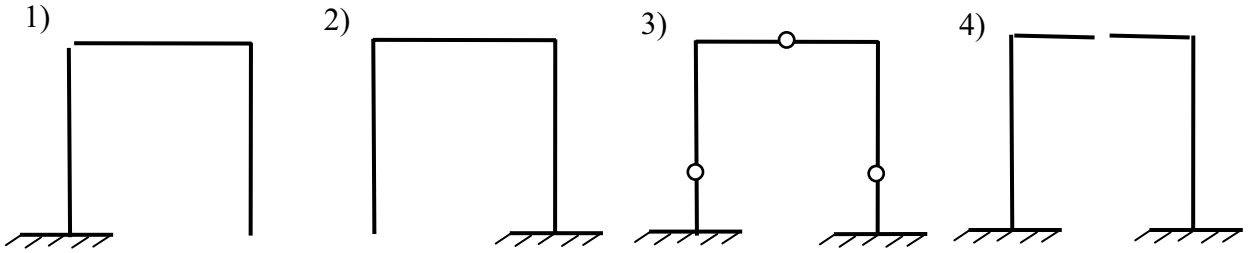


Рис. 7.2

Для расчета выбирается та основная система, которая приводит к наиболее рациональному расчету. Вопрос о рациональности будет рассмотрен на примере расчета

неразрезных балок в подразделе 7.2.

В данном примере расчета рамы этот вопрос не рассматривается. В качестве основной системы для дальнейшей демонстрации метода сил использован первый вариант основной системы в виде рамы, которая уже встречалась в предыдущем разделе при рассмотрении вопроса по определению перемещений (см. рис. 7.2).

2. Составляется так называемое «эквивалентное состояние» (Э) выбранного варианта основной системы (рис. 7.1, б), Для того, чтобы основная система по возникающим в ней перемещениям, усилиям и деформациям была эквивалентна заданной статически неопределимой раме, необходимо поставить выбранной основной системе следующие три условия (см. рис. 7.1, *а, б*):

1) основная система должна испытывать те же внешние воздействия, которые испытывает заданная рама (в данном случае на основную систему рамы должна действовать заданная на нее нагрузка;

2) вместо удаленных связей к ней должны быть приложены лишние неизвестные, являющиеся усилиями в удаленных связях;

3) в направлении удаленных связей должны быть поставлены условия равенства нулю перемещений по направлениям удаленных связей.

3. Составляются грузовое состояние основной системы и n вспомогательных состояний основной системы, в каждом из которых действует единичная сила, соответствующая лишнему неизвестному (рис. 7.3)**.**

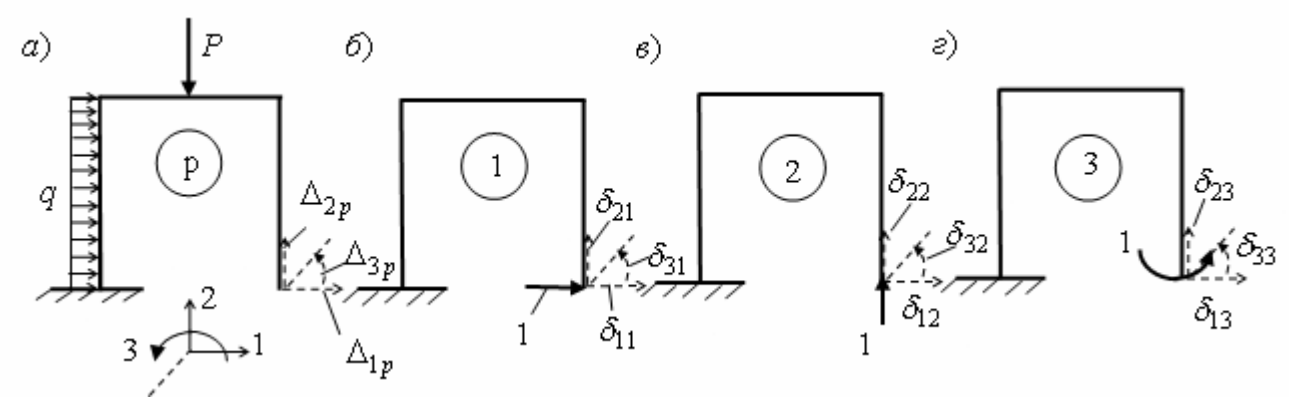


Рис. 7.3

В этих вспомогательных состояниях обозначены перемещения по направлению удаленных лишних связей. Как было показано в предыдущем разделе, эти перемещения могут быть определены с помощью соответствующих формул Максвелла – Мора.

При использовании численного способа Симпсона для вычисления интегралов Максвелла – Мора во вспомогательных состояниях должны быть построены эпюры усилий и составлены соответствующие матрицы $\mathbf{M}$, $\mathbf{m}_p$ изгибающих моментов во вспомогательных и грузовом состояниях и матрица $\mathbf{L}$ коэффициентов формулы численного интегрирования Симпсона [7, 10].

Затем по формулам (6.19) и (6.28) вычисляются соответственно вектор перемещений $\mathbf{d}_p$ в грузовом состоянии p (см. рис. 7.3, *а*) и матрица податливости основной системы $\mathbf{D}$ в направлении удаленных лишних связей.

4. Из условий равенства нулю перемещений в эквивалентном состоянии основной системы по направлению удаленных связей составляется система уравнений метода сил для определения лишних неизвестных усилий.

С этой целью, используя закон Гука и принцип независимости действия сил для линейно деформируемой рамы, запишем условия $\Delta_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ (см. рис. 7.1,*б*) в виде:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Получили систему трех алгебраических уравнений для определения трех лишних неизвестных в выбранной основной системе.

Такой же вид система уравнений будет иметь и для других вариантов основных систем для заданной статически неопределимой рамы. При этом сами лишние неизвестные и коэффициенты, отражающие перемещения по направлению лишних неизвестных, будут соответствовать выбранной основной системе.

В матричной форме система уравнений (7.2) будет иметь вид:

$$\mathbf{Dx} + \mathbf{d}_p = \mathbf{0}. \tag{7.3}$$

Здесь матрица податливости $\mathbf{D}$, отражающая перемещения во вспомогательных состояниях 1 – 3 (см. рис. 7.3, *б, в, г*), вектор $\mathbf{d}_p$ перемещений в грузовом состоянии (см. рис. 7.3, *а*) имеют соответственно вид (6.25) и (6.20). Вектор столбец с элементами в виде лишних неизвестных имеет вид

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}. \tag{7.4}$$

В правой части матричного уравнения (7.2) имеем вектор столбец с нулевыми элементами:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (7.5)$$

Обратим внимание на то, что первое слагаемое в матричном уравнении (7.3) представляет собой вектор перемещений $\mathbf{d}_x$ по направлению удаленных лишних связей, вызванных лишними неизвестными (см. (6.24), когда вектор сил $\mathbf{p}$ (6.21) на рис. 6.4 заменен вектором $\mathbf{x}$ (7.4) на рис. 7.2, *б*).

5. Решается система уравнений (7.2) в канонической записи или (7.3) в матричном виде и определяется вектор лишних неизвестных (7.4).

Для решения системы уравнений метода сил может быть использована любая стандартная программа для решения системы алгебраических уравнений. В учебном классе ПК кафедры строительной механики и теории упругости и на сайте кафедры http://smity.cef.spbgtu.ru соответствующая программа имеется.

6. Вычисляются ординаты эпюр внутренних усилий в сечениях стержней заданной рамы и по ним строятся соответствующие эпюры.

Так как рама является линейно деформируемой системой, то вычисление ординат эпюр усилий в любом сечении k рамы может быть представлено в следующей соответственно канонической или матричной форме (ограничимся только выражением для вычисления усилия M):

$$M_k = M_{k\text{э}} = M_{kp} + M_{k1}X_1 + M_{k2}X_2 + M_{k3}X_3; \qquad (7.6)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_\text{э} = \mathbf{m}_p + \mathbf{m}_1 X_1 + \mathbf{m}_2 X_2 + \mathbf{m}_3 X_3 = \mathbf{m}_p + \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}. \qquad (7.7)$$

Поскольку эпюры изгибающих моментов во всех вспомогательных состояниях уже построены (см. пункт 3 последовательности расчета) и лишние неизвестные определены (см. предыдущий пункт), то для выполнения вычислений по этим формулам имеются все необходимые величины.

По полученным ординатам M в начале, середине и конце участков интегрирования строится соответствующая эпюра M.

Окончательные эпюры поперечных Q и продольных N сил могут быть построены по аналогичным формулам, если, как и для изгибающих моментов, были построены соответствующие эпюры во вспомогательных состояниях, или могут быть построены по окончательной эпюре M, как это было показано на примерах расчета статически определимых систем в разделах 4 и 5.

7. Выполняется контроль построенных эпюр.

Для этого применимы все виды контроля, которые были рассмотрены при расчете статически определимых стержневых систем (см. разделы 4 и 5).

Приведенная на примере рамы последовательность расчета и вид всех формул, используемых в методе сил, остаются такими же и при расчете других стержневых систем. В следующем подразделе метод сил применен к расчету неразрезных балок.

7.2. Расчет неразрезных балок методом сил

Выбор рациональной основной системы

Рассмотрим n раз статически неопределимую неразрезную балку. Условно ее расчетная схема изображена на рис. 7.4, *а* в виде трех фрагментов балки с номерами опор $k = 0, 1, 2, \dots, (i-1), i, (i+1), \dots, (n-1), n, (n+1)$ и пролетами $l_1, l_2, \dots, l_i, l_{i+1}, \dots, l_n, l_{n+1}$.

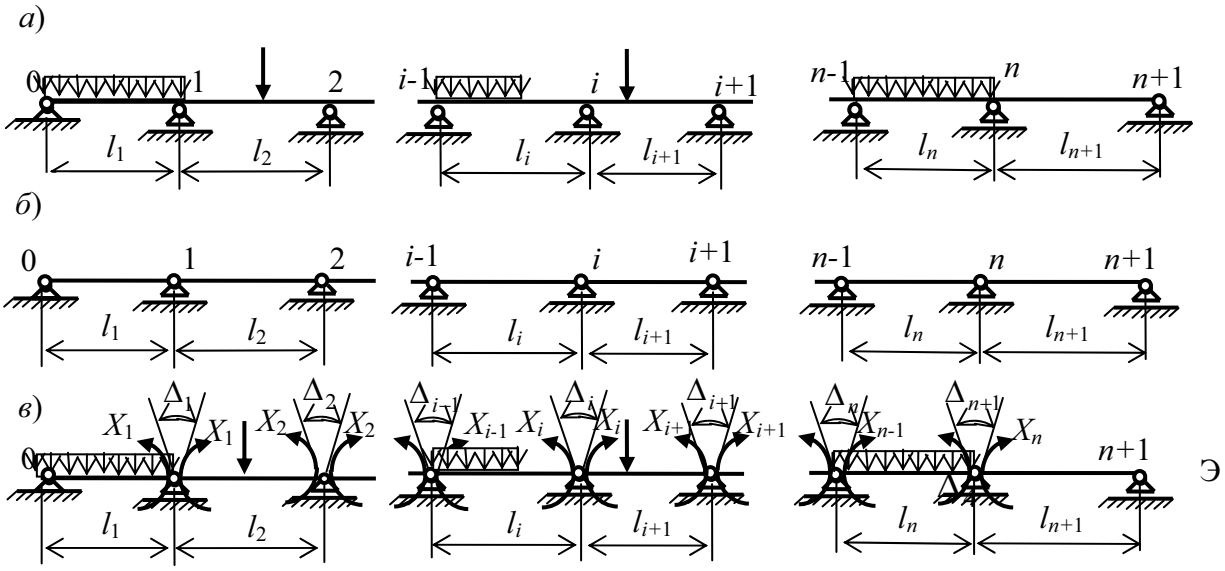


Рис. 7.4

В соответствии с приведенной в предыдущем подразделе последовательностью расчета, для расчета неразрезной балки методом сил необходимо выбрать рациональную основную систему.

Имея представление о ходе расчета стержневой системы методом сил, отметим, что его трудоемкость, прежде всего, связана со следующими этапами расчета:

– с необходимостью построения эпюр усилий M_p и M_i во вспомогательных состояниях $i = 1, 2, \dots, n$;

– с вычислением коэффициентов и свободных членов уравнений метода сил;

– с решением системы уравнений метода сил;

– с построением окончательных эпюр усилий.

Выполним анализ трудоемкости расчета для заданной балки с точки зрения выбора различных основных систем.

При этом учтем, что балка является тонкой и имеет поперечную к ее оси нагрузку. Тогда в используемых для определения коэффициентов и свободных членов уравнений метода сил формулах Максвелла – Мора будут учитываться только первые интегралы, соответствующие учету только изгибных деформаций.

Простой анализ показывает, что самой рациональной основной системой, при которой расчет методом сил оказывается наиболее простым, является система в виде цепочки простых однопролетных балок (рис. 7.4, *б*).

Такая основная система метода сил получится, если за лишние связи принять связи, которым соответствуют изгибающие моменты в сечениях неразрезной балки над ее промежуточными опорами (их число как раз равно n).

Эквивалентное состояние основной системы метода сил для неразрезной балки будет иметь вид, изображенный на рис. 7.4, *в*.

Рациональность выбранной основной системы связана с тем, что эпюра M_p изгибающих моментов в грузовом вспомогательном состоянии имеет простой вид, так как стоится на каждом пролете балки отдельно (на рис. 7.5 показан вид эпюр только на пролетах с номерами i и $i+1$).

Кроме того, во вспомогательных состояниях основной системы, от действия единичных опорных моментов, эпюры моментов M_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ также имеют простой однотипный вид (на рис. 7.5 показаны эпюры M_{i-1}, M_i, M_{i+1}) и являются локальными.

Все это сильно упрощает вычисление коэффициентов и свободных членов системы уравнений метода сил для неразрезных балок..

Система уравнений метода сил получается из условия, что в эквивалентном состоянии основной системы балки все «углы раскрытия» опорных шарниров Δ_i $(i = 1,2,\dots,n)$ должны быть равны нулю.

Ниже показано, что для выбранной основной системы значительно упрощается и само составление системы уравнений метода сил.

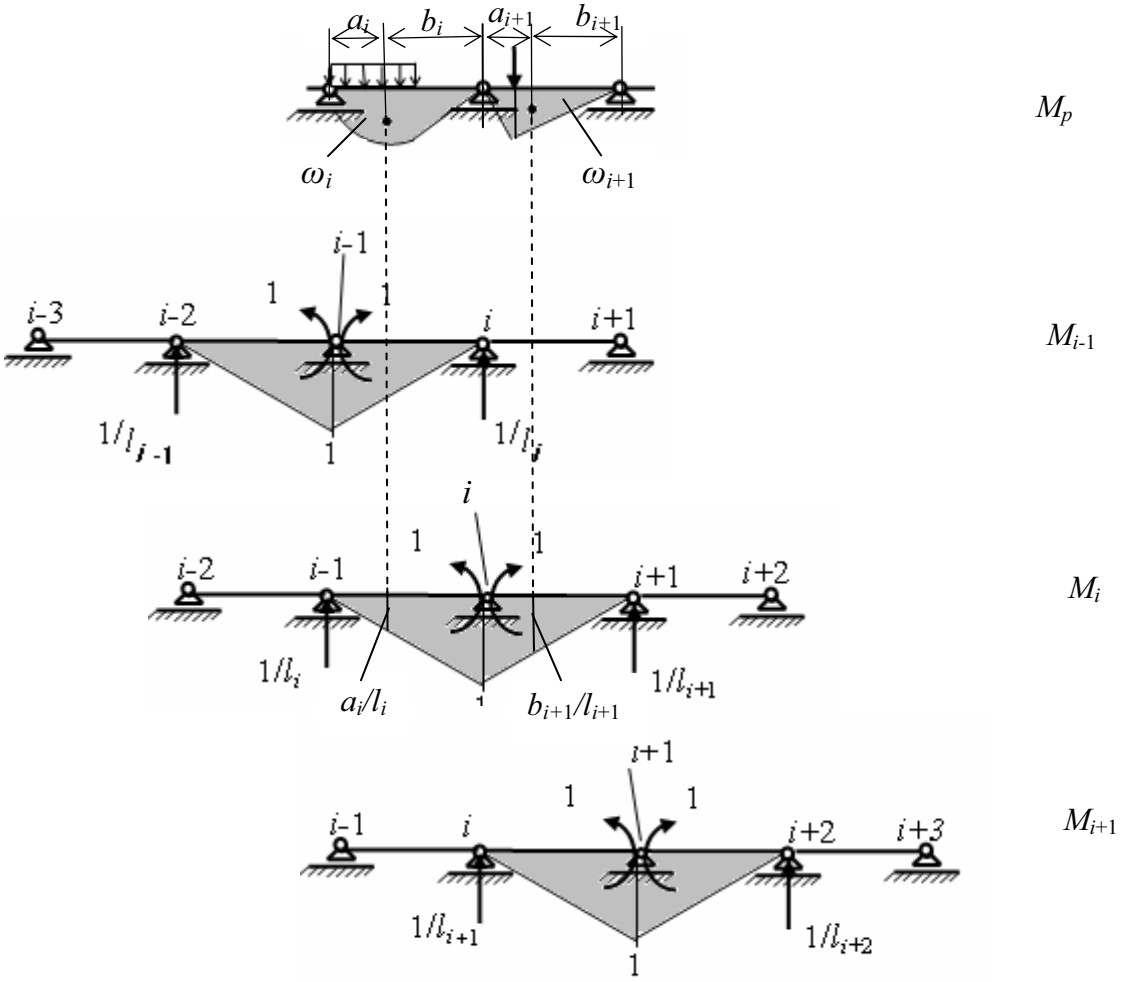


Рис. 7.5

«Уравнение трех моментов» для записи системы уравнений при расчете неразрезных балок методом сил

Выбранная рациональная основная система приводит к тому, что любое уравнение системы уравнений метода сил, кроме двух крайних, будет содержать только три лишних неизвестных опорных моментов. Крайние уравнения будут содержать только по два лишних неизвестных.

Это означает, что при решении задачи в матричном виде матрица **D** будет иметь ненулевые элементы только на главной диагонали (диагональ симметрии матрицы) и двух побочных диагоналях, примыкающих к ней слева и справа (7.8).

При этом любое уравнение системы уравнений метода сил может быть получено из уравнения с номером i (первый индекс коэффициентов и свободного члена этого уравнения), которое имеет вид (7.9), подстановкой в него значения i, равного номеру уравнения.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & & & & & & \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & \delta_{i,i-1} & \delta_{ii} & \delta_{i,i+1} & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \delta_{n-1,n-2} & \delta_{n-1,n-1} & \delta_{n-1,n} \\ & & & & & \delta_{n,n-1} & \delta_{nn} \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

$$\delta_{i,i-1}X_{i-1} + \delta_{i,i}X_i + \delta_{i,i+1}X_{i+1} + \Delta_{i,p} = 0 \tag{7.9}$$

Уравнение (7.9), имея в виду наличие в нем только трех лишних неизвестных в виде опорных моментов неразрезной балки, называют «уравнением трех моментов».

При этом оказывается возможным представить выражения для его коэффициентов и свободного члена в виде удобном для расчетов.

Рассмотрим сначала общий случай, когда:

– неразрезная балка на пролете с номером i имеет жесткость на изгиб EI_i;

– нагрузка, а значит и соответствующая ей эпюра M_{pi} на пролете с номером i, несимметрична относительно середины пролета. Центр тяжести площади ω_i эпюры расположен на расстоянии a_i и b_i соответственно от левой и правой опоры пролета (см. рис. 7.5).

Тогда после вычисления первого интеграла в соответствующих формулах Максвелла – Мора с использованием формулы А.Н. Верещагина получим:

$$1_i \cdot \delta_{i,i-1} = \int_{l_i} \frac{M_i M_{i-1}}{EI_i} dx = \frac{l_i}{6EI_i}; \tag{7.10}$$

$$1_i \cdot \delta_{i,i} = \int_{l_i} \frac{M_i^2}{EI_i} dx + \int_{l_{i+1}} \frac{M_i^2}{EI_{i+1}} dx = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}}; \tag{7.11}$$

$$1_i \cdot \delta_{i,i+1} = \int_{l_{i+1}} \frac{M_i M_{i+1}}{EI_{i+1}} dx = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}}; \tag{7.12}$$

$$1_i \cdot \Delta_{ip} = \int_{l_i} \frac{M_i M_p}{EI_i} dx + \int_{l_{i+1}} \frac{M_i M_p}{EI_{i+1}} dx = \frac{\omega_{pi} a_i}{EI_i} + \frac{\omega_{p+1} b_{i+1}}{EI_{i+1}}. \quad (7.13)$$

Введем обозначения:

$$EI_i = k_i EI\,,\ \bar{l}_i = l_i / k_i\,, \quad (7.14)$$

где k_i– относительная жесткость пролета с номером i, EI – некоторая эталонная жесткость, к которой отнесены жесткости всех пролетов, $\bar{l}_i$ – приведенная длина пролета с номером i, учитывающая его жесткость.

С учетом этих обозначений уравнение трех моментов (7.9) можно представить в виде:

$$\bar{l}_i \cdot X_{i-1} \cdot +2(\bar{l}_i + \bar{l}_{i+1}) \cdot X_i + \bar{l}_{i+1} \cdot X_{i+1} = -6(\frac{\omega_i a_i}{k_i l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{k_{i+1} l_{i+1}}).\,, \quad (7.15)$$

Для частного случая, когда все пролеты балки имеют одинаковую жесткость (в выражении (7.14) следует принять $k_i = 1$), уравнение трех моментов имеет вид:

$$l_i \cdot X_{i-1} \cdot +2(l_i + l_{i+1}) \cdot X_i + l_{i+1} \cdot X_{i+1} = -6(\frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}}).\,, \quad (7.16)$$

При этом, для варианта загружения балки нагрузкой, симметричной на каждом пролете относительно середины пролета ($a_i = b_i = l_i / 2$), получим:

$$l_i \cdot X_{i-1} \cdot +2(l_i + l_{i+1}) \cdot X_i + l_{i+1} \cdot X_{i+1} = -3(\omega_i + \omega_{i+1}).\,, \quad (7.17)$$

Рассмотрим ряд примеров использования формулы 3-х моментов для расчета неразрезных балок.

П р и м е р 1. Пусть требуется построить эпюры M и Q в однопролетной балке (рис. 7.6) от нагрузки симметричной относительно середины длины пролета (нормальная к оси балки нагрузка показана условно).

Использование формулы (2.21) приводит нас к результату: $n = (4 + 3 \cdot 0) - (3 + 0) = 1$. Это показывает, что балка имеет одну лишнюю связь и соответствующее ей лишнее неизвестное.

Для расчета методом сил этой один раз статически неопределимой однопролетной балки оказывается возможным представить ее как неразрезную двухпролетную балку и воспользоваться рассмотренной выше основной системой и полученным с ее помощью уравнением трех моментов.

С этой целью заменим заделку пролетом бесконечно малой длины (рис. 7.6, *а*), который имеет жесткость на изгиб равную жесткости EI заданной балки. При этом пролет бесконечно малой длины будет иметь бесконечно большую удельную жесткость на

изгиб EI/l_1, поэтому НДС основного загруженного пролета балки с конечной удельной жесткостью EI/l_2 при такой замене защемляющей опоры практически не изменится.

Но теперь для расчета заданной однопролетной балки появилась формальная возможность использовать основную систему и ее эквивалентное состояние в виде, изображенном на рис. 7.4, *в*. Крайняя слева опора по-прежнему отмечается как нулевая. Нумерация пролетов начинается с первого.

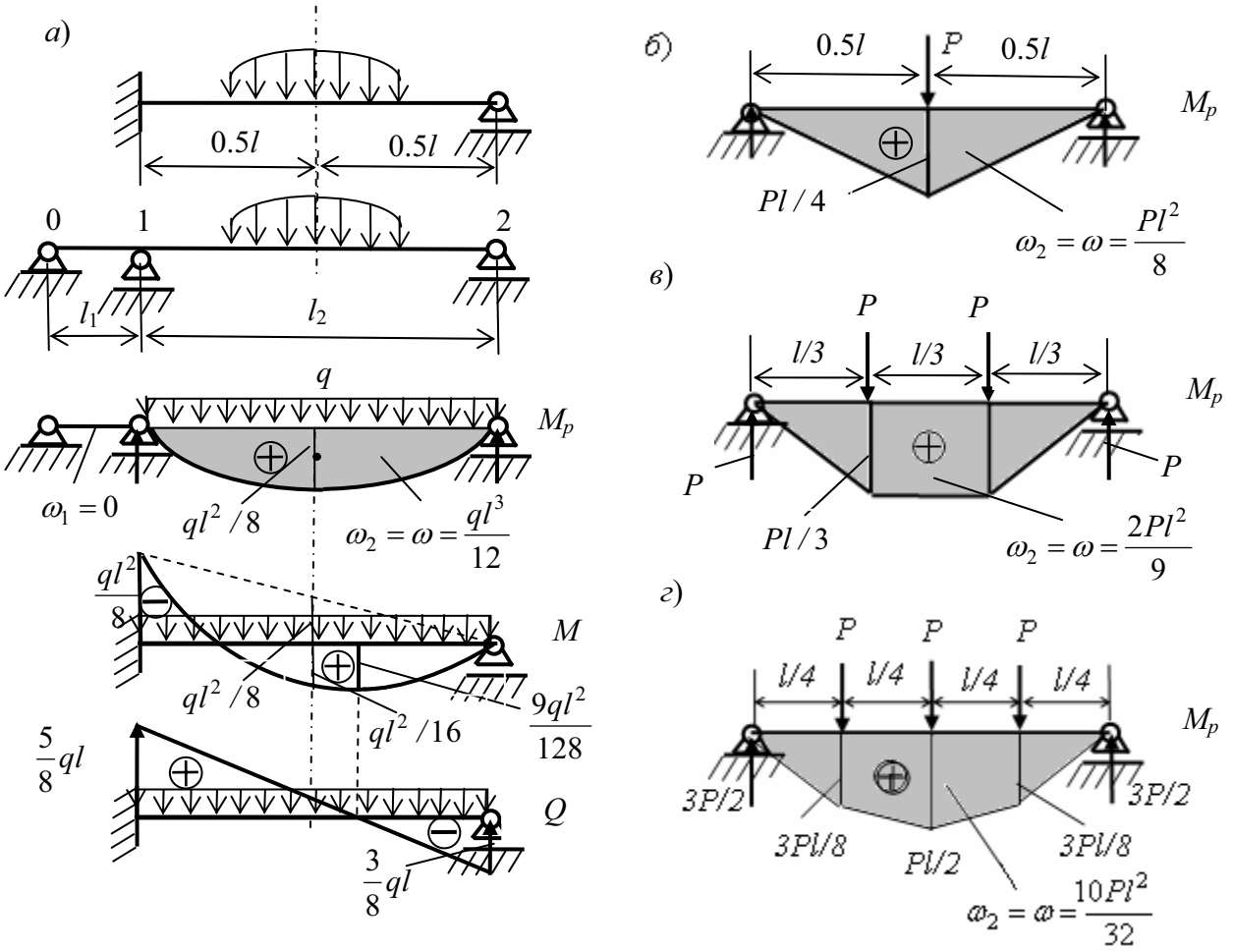


Рис. 7.6

Система один раз статически неопределима, поэтому вместо системы уравнений метода сил вида (7.2) получим только одно уравнение, которое получится из уравнения 3-х моментов (7.17), подстановкой $i = 1$:

$$l_1 \cdot X_o \cdot +2(l_1 + l_2) \cdot X_1 + l_2 \cdot X_2 = -3(\omega_1 + \omega_2).\,, \tag{7.18}$$

Так как $X_o = X_2 = 0$, $\omega_1 = 0$, $l_2 = l$, $\omega_2 = \omega$ и l_1 – бесконечно малая величина, то из (7.15) получим:

$$X_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\omega}{l}. \tag{7.19}$$

Получение табличных эпюр M и Q при различных нагрузках, симметричных на пролете

С помощью полученного выражения для момента в защемляющей опоре можно построить эпюры M и Q для конкретного вида нагрузок, симметричных на пролете балки.

На рис. 7.6, *а* для выбранной основной системы приведена эпюра M_p при равномерно распределенной нагрузке. Площадь эпюры представляет собой параболический сегмент, поэтому $\omega = ql^3/12$. Тогда $X_1 = -ql^2/8$. Отложив ординату этого момента сверху от оси балки, построим линию опорных моментов (л.о.м.) балки (штриховая линия на схеме M рис. 7.6, *а*).

Ординаты окончательной эпюры моментов M на балке получаются суммированием отрицательных ординат эпюры M(л.о.м.) с положительными ординатами эпюры M_p: $M = M(\text{л.о.м.}) + M_p$. Ранее такая эпюра, полученная суммированием указанных эпюр, уже встречалась нам (см. пример 2 подраздела 4.1). Только эпюра M_p там обозначалась M^{o}. При практических расчетах встречаются оба обозначения.

Кроме ординаты $-ql^2/8$ в защемляющей опоре, как это было показано в примере 2 подраздела 4.1, для построения эпюры на загруженном пролете удобно воспользоваться ординатой в середине пролета, получаемой по формуле вида (4.2): $M_c = -ql^2/16 + ql^2/8 = ql^2/16$.

Положение максимальной ординаты $M_{\max}$ по длине пролета установим, определив сечение, в котором $Q = 0$. Поэтому вначале построим эпюру Q. Поскольку эта эпюра линейная, для ее построения достаточно иметь две ординаты, например, в начале (н) и в конце (к) пролета по формуле вида (4.8):

$$Q_{\text{н,к}} = Q_{\text{н,к},\,p} + \frac{(M_{\text{к}} - M_{\text{н}})}{l} = \pm\frac{ql}{2} + \frac{(0 - (-ql^2/8)}{l} = \pm\frac{4ql^2}{8} + \frac{ql^2}{8}. \qquad (7.20)$$

Отсюда получаем $Q_{\text{н}} = V_1 = \frac{5}{8}ql$, $Q_{\text{к}} = -V_2 = -\frac{3}{8}ql$. Эпюра Q построена на рис. 7.6,*а*. Там же показаны опорные реакции V_1 и V_2 (или $V_{\text{н}}$ и $V_{\text{к}}$) соответственно опор 1 (н) и 2 (к) балки (по принятой нумерации в местной системе координат для МКЭ, см. раздел 4).

Положение сечения с нулевой ординатой эпюры Q, которой соответствует максимальный изгибающий момент в пролете, определится, например, из следующего уравнения равновесия части балки правее сечения балки, расположенного на расстоянии x от правой опоры:

$$Q_{\text{x}} = V_2 - qx = 0. \qquad (7.21)$$

Откуда следует, что $x = 3l/8$. То же значение получится и из подобия треугольников эпюры Q (см. схему Q на рис. 7.6 ,*а*).

Максимальный изгибающий момент в этом сечении определится из уравнения равновесия для этой же части балки: $M_{max} = V_2 \cdot 3l/8 - q \cdot (3/8)^2 l^2/2 = 9ql^2/128$.

Аналогично выполняется расчет однопролетной балки и при других симметричных на пролете нагрузках. Необходимые для расчета значения ординат эпюр M_p и площадей ω приведены на рис. 7.6, *б, в, г* соответственно при действии на пролет одной, двух и трех сосредоточенных сил.

Эпюры M и Q для однопролетной балки, рассматриваемого вида (см. рис. 7.6) при наиболее часто встречающихся нагрузках приведены в табл. 7.1 (см. также табл. 2.1 в учебном пособии [3] и табл. 5 в [8]).

Используя формулу уравнения 3-х моментов при нагрузке несимметричной на пролете, можно также получить соответствующие табличные эпюры усилий и значения опорных реакций для рассматриваемой балки (см. табл. 7.1, табл. 2.1 в [3] и табл. 5 в [8]). .

Построенные в табл. 7.1 табличные эпюры для однопролетных статически неопределимых балок при часто встречающихся в инженерной практике нагрузках удобны для их практического использования.

П р и м е р 2. Рассмотрим балку, изображенную на рис. 7.6,*а*, когда она имеет справа консоль (рис. 7.7, *а*). Предположим, что эта консоль загружена сосредоточенной силой P, приложенной на конце консоли. Консоль представляет собой статически определимый элемент балки, на котором в любом сечении с помощью соответствующих уравнений равновесия может быть определен изгибающий момент и поперечная сила. При построении эпюр M и Q на консоли она может быть рассмотрена отдельно (рис. 7.7,*б*).

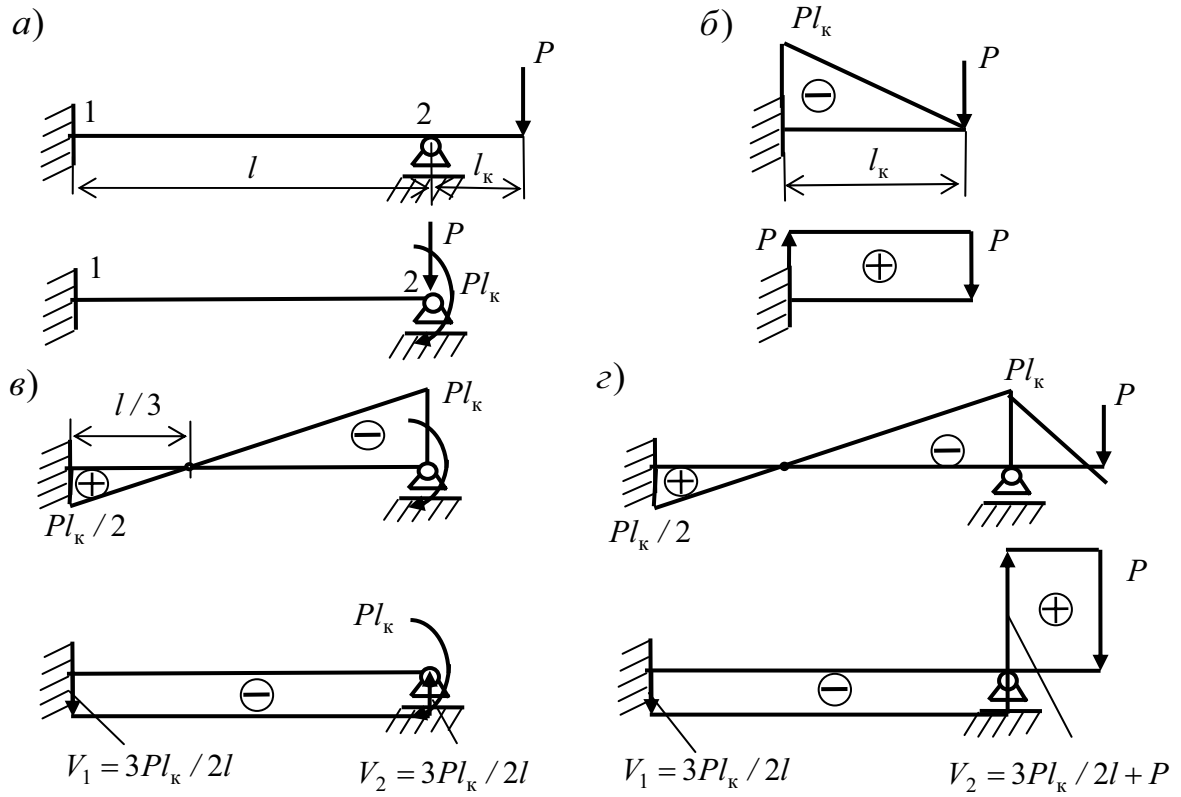


Рис. 7.7

Определив, опорный момент и вертикальную реакцию в заделке консоли, можем

заменить воздействие консоли на остальную балку воздействием этих усилий, приложенных на опоре 2 (см. рис. 7.7, *а*). Нумерацию опор используем такую же, как в предыдущей балке.

Поперечная сила P, которая передается от консоли на опору 2, воспримется этой опорой и усилий в балке не вызовет. Поэтому выполним дальнейший расчет балки только от действия изгибающего момента Pl.

Произведя замену защемляющей опоры дополнительным пролетом бесконечно малой длины и выбрав основную систему балки при ее расчете методом сил в виде, представленном на рис. 7.4, *б*, запишем уравнение (7.18) для определения лишнего неизвестного усилия в виде опорного момента в заделке:

$$l_1 \cdot X_o \cdot +2(l_1 + l_2) \cdot X_1 + l_2 \cdot X_2 = 0. \qquad (7.22)$$

В отличие от предыдущего примера, здесь нет нагрузки в пределах пролета, поэтому $\omega_1 = \omega_2 = 0$. В тоже время, опорный момент X_2 не равен нулю, а равен моменту, действующему со стороны консоли на балку. Нужно только иметь в виду, что в уравнении 3-х моментов все опорные моменты приняты растягивающими нижние волокна балки, то есть положительными, а момент, действующий на балку со стороны консоли, растягивает верхние волокна, т.е. он отрицательный. Поэтому в уравнение (7.22) подставим $X_2 = -Pl$.

В результате из (7.22) получим: $X_1 = -X_2 / 2 = pl / 2$ (рис. 7.7, *в*).

Эпюры M и Q в балке от действия только опорного момента $X_2 = -Pl$ (при отрезанной консоли) и в балке при наличии консоли построены соответственно на рис. 7.7, *в* и рис. 7.7, *г*. Различие состоит только в том, что при учете вертикального воздействия консоли в опоре 2 к реакции, вызванной опорным моментом $X_2 = -Pl$, добавляется реакция, вызванная вертикальной силой P.

П р и м е р 3. К «табличным» балкам относится и однопролетная балка с двумя защемляющими опорами (рис. 7.8, *а*).

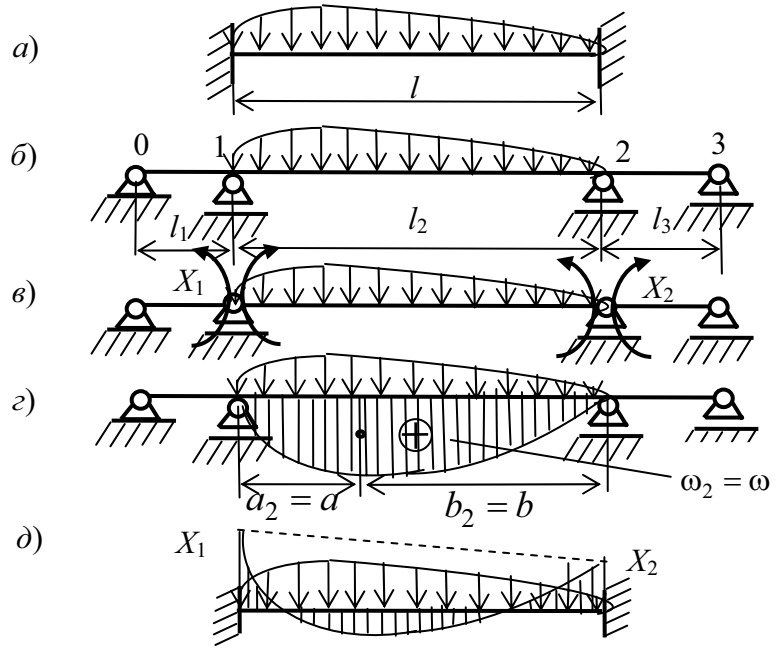


Рис. 7.8

Такая балка также просто рассчитывается с помощью уравнения 3-х моментов, как при нагрузках симметричных на пролете, так и при несимметричных нагрузках. Рассмотрим общий случай, когда нагрузка несимметрична (рис. 7.8, *а*).

Заменив защемляющие опоры пролетами бесконечно малой длины, получим неразрезную балку с двумя промежуточными опорами (рис. 7.8, *б*). Опорные моменты X_1 и X_2 неразрезной балки, равные опорным моментам соответственно в левой и правой заделках заданной балки, примем за лишние неизвестные (рис. 7.8, *в*).

В этом случае, последовательно приняв в уравнении 3-х моментов (7.16) значения $i = 1$ и $i = 2$, получим два уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} 2l \cdot X_1 + l \cdot X_2 &= -6\frac{\omega \cdot b}{l}); \\ l \cdot X_1 + 2l \cdot X_2 &= -6\frac{\omega \cdot a}{l}). \end{aligned} \tag{7.23}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{2\omega}{l^2}(2b - a); \\ X_2 &= -\frac{2\omega}{l^2}(2a - b). \end{aligned} \tag{7.24}$$

Для построения окончательной эпюры M (рис. 7.8,*д*) сначала строится л.о.м. (штриховая линия), имеющая отрицательные ординаты, затем от нее откладываются положительные ординаты эпюры M_p.

Решение для балки с симметричной нагрузкой получится из этого общего решения, если принять $a = b = l/2$. При этом получится $X_1 = X_2 = -\omega/l$.

Табличные эпюры для однопролетной балки с двумя защемляющими опорами при действии некоторых конкретных нагрузок приведены в табл. 7.1. (см. также табл. 2.1 в [3[и табл. 5 в[8]).

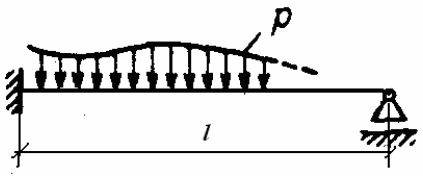
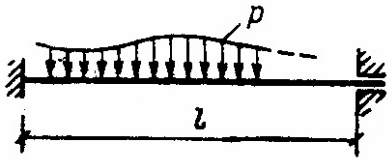
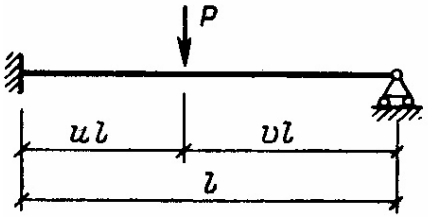
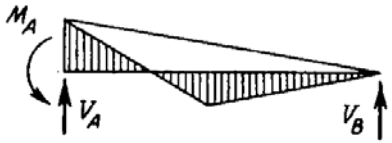
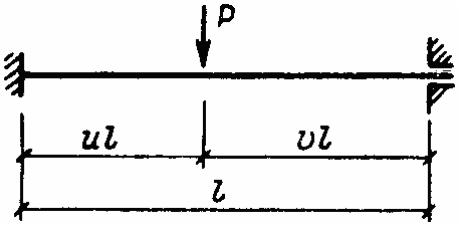
7.3. Случай загружения неразрезной балки заданным моментом на крайней шарнирной опоре. Понятие о фокусных точках

Однопролетная балка

Рассмотрим эпюру изгибающих моментов M на однопролетной балке, построенную в примере 2 предыдущего подраздела от заданного на шарнирной опоре опорного момента (см. рис. 7.7, *в*). При отсутствии нагрузки в пределах пролета балки эпюра на пролете прямолинейна. Ее ординаты ограничены линией, представляющей собой линию опорных моментов (л.о.м.). Точку пересечения этой прямой линии с осью балки называют «фокусной точкой».

При защемляющей опоре (заделке) балки слева фокусная точка расположена на пролете балки на расстоянии $c_2 = l/3$ от заделки и называется «левой фокусной точкой» (рис. 7.9, *а*). При зеркальном отражении схемы балки, заделка окажется справа (рис. 7.9,*б*). Фокусная точка станет «правой фокусной точкой» на пролете и будет расположена на расстоянии $c_2' = l/3$ от заделки.

Таблица 7.1

Схема балки и воздействия	Эпюра M и реакции	Схема балки и воздействия	Эпюра M и реакции
	$M_A = \frac{3\omega b}{l^2}$, $V_A = V_A^0 + M_A/l$, $V_B = V_B^0 - M_A/l$		$M_A = \frac{2\omega}{l^2}(2b - a)$, $M_B = \frac{2\omega}{l^2}(2a - b)$, $V_A = V_A^0 + (M_A - M_B)/l$, $V_B = V_B^0 - (M_A - M_B)/l$,
	$M = 1{,}5\omega/l$, $V_A = V_A^0 + M/l$, $V_B = V_B^0 - M/l$		$M = \omega/l$, $V = V_A^0$
	 $M_A = \frac{1}{2}Pl\,uv(1+v)$; $V_A = 0{,}5\,Pv(3-v^2)$; $V_B = 0{,}5\,Pu^2(3-u)$		$M_A = Pl\,uv^2$; $M_B = Pl\,u^2v$, $V_A = P(3u+v)v^2$; $V_B = P(u+3v)u^2$

(продолжение табл. 7.1)

Эпюра *M* и реакции	Эпюра *M* и реакции	Схема балки	Эпюра *M* и реакции
P; 0,5 l; 0,5 l	$\frac{3}{16}Pl$; Pl/4; $\frac{11}{16}P$; $\frac{5}{16}P$	P; 0,5 l; 0,5 l	Pl/8; Pl/4; P/2
P; P; l/3; l/3; l/3	$\frac{Pl}{3}$; $\frac{4}{3}P$; $\frac{2}{3}$	P; P; l/3; l/3; l/3	$\frac{2}{9}Pl$; $\frac{2}{9}Pl$; P; P
M; l/2; l/2	M/8; $\frac{7}{16}M$; $\frac{9M}{8l}$; $\frac{9}{16}M$; $\frac{9M}{8l}$	M; l/2; l/2	M/4; M/2; M/4; $\frac{3M}{2l}$; $\frac{3M}{2l}$
q; l	$\frac{ql^2}{8}$; $ql^2/8$; $\frac{5}{8}ql$; $\frac{3}{8}ql$	q	$\frac{ql^2}{12}$; $ql^2/8$; ql/2

В обоих случаях принято, что опорный момент на шарнирной опоре (он входит в формулу 3-х моментов как опорный момент X_2) известен (в данном случае $X_2 = -m$). Тогда $X_1 = -X_2 / 2 = 0.5m$

Поскольку все ординаты эпюры M отложены с растянутой стороны стержня, то эпюра позволяет изобразить вид изогнутой оси балки (штриховая линия на рис. 7.9, *а, б*). Нулевой ординате эпюры M соответствует точка с нулевой кривизной балки, т.е. точка на оси балки, в которой происходит изменение растянутой стороны балки.

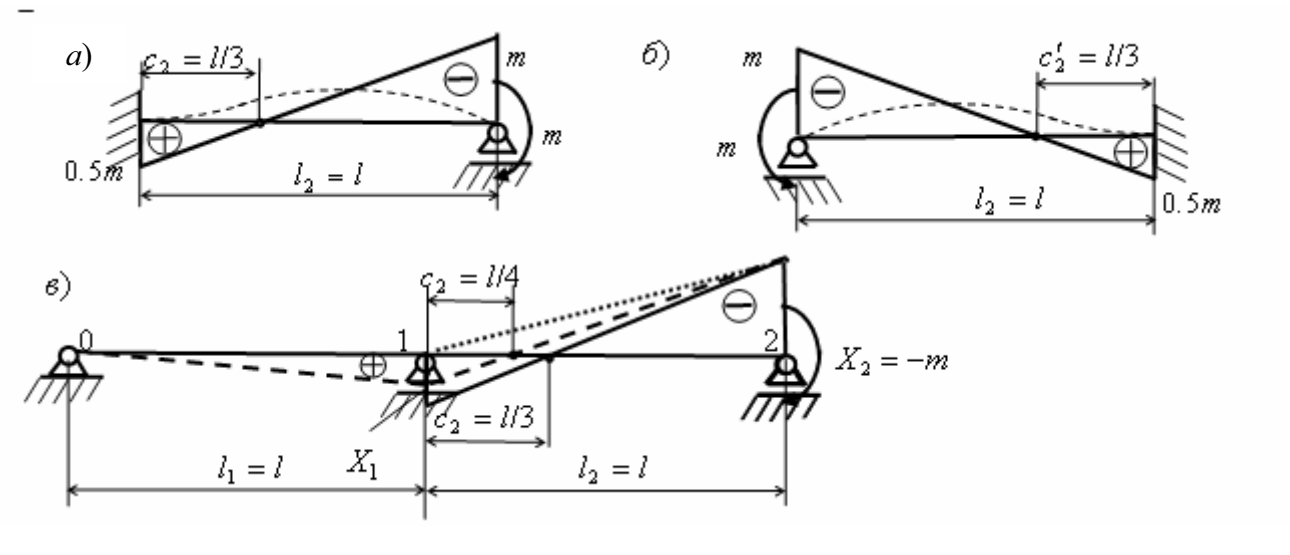


Рис. 7.9

Двухпролетная балка.

Рассмотрим двухпролетную балку загруженную только опорным моментом $-m$ на правой шарнирной опоре (рис. 7.9, *в*). Балка один раз статически неопределима. Запишем для нее уравнение 3-х моментов в общем виде (7.15):

$$2(\bar{l}_1 + \bar{l}_2) \cdot X_1 + \bar{l}_2 \cdot X_2 = 0. \qquad (7.25)$$

(здесь учтено, что $X_o = 0$ и $\omega_1 = \omega_2 = 0$). Тогда неизвестный опорный момент X_1 можно представить в виде:

$$\cdot X_1 = -\frac{X_2}{K_2}, \qquad (7.26)$$

где (с учетом (7.14))

$$\cdot K_2 = 2(\frac{\bar{l}_1}{\bar{l}_2} + 1) = 2(\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{k_2}{k_1} + 1) = 2(\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{EI_2}{EI_1} + 1) = 2(\frac{i_2}{i_1} + 1) \qquad (7.27)$$

представляет собой отношение известного момента X_2 на правой опоре

пролета 2 к неизвестному моменту X_1 на левой опоре. Поскольку это отношение связано с левой фокусной точкой на пролете 2 его называют «левым фокусным отношением опорных моментов на незагруженном пролете с номером 2. Знак «минус» в отношении опорных моментов на правой и левой опорах показывает, что они имеют разные знаки.

В последнем равенстве (7.27) использована величина

$$i_r = \frac{EI_r}{l_r} \quad (r = 1, 2), \tag{7.28}$$

которая представляет собой удельную (отнесенную к единичной длине пролета) жесткость пролета с номером r. Эту жесткость иногда называют «погонной жесткостью».

Обратим внимание на то, что *левое фокусное отношение* K_2 *опорных моментов (7.27) зависит не только от отношения жесткостей пролетов 2 и 1, но и от отношения их длин*. Из последнего равенства (7.27) видно, что *для определения* K_2 *можно использовать также отношение только удельных жесткостей* i_2 *и* i_1 *пролетов, подходящих к опоре 1 с неизвестным опорным моментом* X_1. Поэтому в дальнейшем из приведенных нескольких возможных выражений для определения K_2 будем использовать выражение

$$K_2 = 2(\frac{i_2}{i_1} + 1). \tag{7.29}$$

Применим это выражение для исследования влияния значений удельных жесткостей i_1 и i_2 на значение K_2 и на значение искомого опорного момента X_1 (7.26) при условии, что опорный момент X_2 представляет известную постоянную величину (на рис. 7.9, *в* $X_2 = -m$) и удельная жесткость $i_2 = EI_2 / l_2$ также постоянна.

1. Исследование, связанное с увеличением погонной жесткости $\boldsymbol{i_1 = EI_1 / l_1}$**.** Из выражения (7.29) видим, что при увеличении погонной жесткости $i_1 = EI_1 / l_1$ пролета 1 (см. рис. 7.9, *в*), значение K_2 будет уменьшаться. Увеличение $i_1 = EI_1 / l_1$ может быть связано с увеличением жесткости EI_1 и с уменьшением длины пролета l_1.

Предположим, что жесткость балки на обоих пролетах одинакова и равна EI. Тогда увеличение погонной жесткости будет связано с уменьшением длины пролета l_1.

При $l_1 \to 0$ $i_1 = (EI_1 / l_1) \to \infty$ и отношение $(i_2 / i_1) \to 0$. Тогда из (7.29)

$K_2 \to 2$ и значение опорного момента из (7.26) $X_1 \to -(0.5X_2) = 0.5m$.

Из подобия треугольников на эпюре M с положительными и отрицательными ординатами видно (см. рис. 7.9, *в*), что изменяется и расстояние c_2. Действительно, при $l_2 = l$:

$$\frac{c_2}{|X_1|} = \frac{(l_2 - c_2)}{|X_2|} \tag{7.30}$$

и

$$c_2 = \frac{l}{(1 + \frac{|X_2|}{|X_1|})} = \frac{l}{(1 + K_2)}. \tag{7.31}$$

При $K_2 \to 2$ из (7.31) следует, что $c_2 \to (l_2 / 3)$. Это полностью соответствует способу замены защемляющей опоры балки бесконечно малым пролетом $l_1 \to 0$.

2. Исследование, связанное с уменьшением погонной жесткости $\boldsymbol{i_1 = EI_1 / l_1}$**.** Из выражения (7.29) видим, что при уменьшении погонной жесткости $i_1 = EI_1 / l_1$ пролета 1 (см. рис. 7.9, *в*), значение K_2 будет увеличиваться. Уменьшение $i_1 = EI_1 / l_1$ может быть связано с уменьшением жесткости EI_1 и с увеличением длины пролета l_1.

Предположим, что длина пролета l_1 остается постоянной и равной длине пролета l_2 ($l_1 = l_2 = l$).. Тогда уменьшение погонной жесткости $i_1 = EI_1 / l_1$ будет связано с уменьшением жесткости EI_1 пролета l_1.

При $EI_1 \to 0$ $i_1 = (EI_1 / l_1) \to 0$ и отношение $(i_2 / i_1) \to \infty$. Из (7.29), (7.31), (7.26) соответственно следует, что: $K_2 \to \infty$; $c_2 \to 0$; $X_1 \to 0$.

Этот вариант соответствует случаю, когда первый пролет из- за нулевой жесткости EI_1 фактически отсутствует. Опора 1 становится крайней шарнирной опорой однопролетной балки с параметрами второго пролета расчетной схемы, изображенной на рис. 7.9, *в*. Линия опорных моментов при этом придет прямо в опору 1 (на рис. 7.9, *в* она показана точечной линией). Таким образом левая фокусная точка на втором пролете при шарнирной левой опоре совпадает с центром опорного шарнира.

Промежуточный вариант эпюры M на втором и первом пролетах при равных погонных жесткостях пролетов ($i_1 = i_2$) показан на рис. 7.9, *в* штриховой линией. При этом из (7.29), (7.31) и (7.26) соответственно получаем: $K_2 = 4$; $c_2 = l / 4$; $X_1 = -X_2 / 4 = m / 4$.

Получив опорный момент $X_1 = m/4$, можем достроить эпюру моментов на первом пролете балки, поскольку нам известно, что она эпюра прямолинейна и что момент в крайней левой шарнирной опоре первого пролета равен нулю (см. рис. 7.9, *в*). Иными словами, нам известно, что левая фокусная точка на первом пролете совпадает с левой шарнирной опорой.

Обратим внимание на то, что для получения величин K_1, c_1, X_o на этом пролете можно использовать соответственно формулы (7.29), (7.31), (7.26). Только следует уменьшить на единицу индексы, входящих в них величин. При этом появится величина погонной жесткости $i_o = EI_o / l_o$ несуществующего пролета l_o. Поскольку в действительности такого пролета нет, будем считать, что $i_o = EI_o / l_o = 0$. Как мы уже видели при выполненном выше исследовании, это достигается, двумя способами:

1. Добавленный слева (фиктивный) пролет имеет такую же длину как реальный первый пролет ($l_o = l_1$), а жесткость пролета $EI_o = 0$.

2. Добавленный слева (фиктивный) пролет имеет такую же жесткость на изгиб, как реальный первый пролет ($EI_o = EI_1$), а его длина $l_o = \infty$.

Тогда из указанных формул соответственно получим: $K_1 = \infty$; $c_1 = 0$; $X_o = -X_1 / K_1 = 0$.

Балка с числом пролетов более двух

Рассмотрим неразрезную балку с числом пролетов, равным $n+1 > 2$ (см. рис. 7.4, *а*). Такая балка n раз статически неопределима. При ее расчете методом сил необходимо составить и решить систему n уравнений с n лишними неизвестными. Для выбранной рациональной основной системы (см. рис. 7.4, *б*) каждое уравнение системы уравнений метода сил имеет вид уравнения с тремя неизвестными. В общем случае такое уравнение имеет вид (7.15).

В рассматриваемом здесь частном случае пролеты неразрезной балки незагружены, а нагрузка представлена только заданным моментом на крайней правой опоре. При этом оказывается возможным получить общее выражение для вычисления левого опорного момента на любом пролете балки по известному правому опорному моменту. Для неразрезной балки с одним неизвестным опорным моментом это продемонстрировано на предыдущих примерах.

При двух и более неизвестных необходимо рассмотреть и второе и более уравнений трех моментов.

При $n \geq 2$ рассмотрим второе уравнение 3-х моментов системы уравнений метода сил, полагая, что в уравнении общего вида (7.15) принято $i = 2$. Тогда получим:

$$\bar{l}_2 \cdot X_1 + 2(\bar{l}_2 + \bar{l}_3) \cdot X_2 + \bar{l}_3 \cdot X_3 = 0. \qquad (7.32)$$

Подставим в него решение (7.26), полученное из первого уравнения. Тогда получим

$$-\bar{l}_2 \cdot X_2 / K_2 + 2(\bar{l}_2 + \bar{l}_3) \cdot X_2 + \bar{l}_3 \cdot X_3 = 0.$$

Отсюда

$$X_2 = -X_3 / K_3, \qquad (7.33)$$

где (с учетом соотношений (7.14) и (7.28))

$$K_3 = -\frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_3} / K_2 + 2(\frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_3} + 1) = 2 + \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_3}(2 - \frac{1}{K_2}) = 2 + \frac{i_3}{i_2}(2 - \frac{1}{K_2}) \qquad (7.34)$$

представляет собой левое фокусное отношение на пролете неразрезной балки с номером 3 (см. рис. 7.4, *а*).

Расстояние от левой опоры до левой фокусной точки на пролете с номером 3 определится из формулы (7.31) при увеличении в ней индексов на единицу.

Полученные выражения можно представить в общем виде:

$$K_r = 2 + \frac{\bar{l}_{r-1}}{\bar{l}_r}(2 - \frac{1}{K_{r-1}}) = 2 + \frac{i_r}{i_{r-1}}(2 - \frac{1}{K_{r-1}}); \qquad (7.35)$$

$$X_{r-1} = -X_r / K_r, \qquad (7.36)$$

Поскольку левое фокусное отношение на первом пролете ($r = 1$) известно ($K_1 = \infty$), алгоритм вычисления левых фокусных отношений на пролетах неразрезной балки по формуле (7.35) начинается со второго пролета ($r = 2$). Затем (при трехпролетной балке) для $r = 3$ определяется K_3 и т.д. до $r = n + 1$.

По формуле (7.36) наоборот, по известному самому правому опорному моменту $X_{n+1} = -m$ на опоре с номером $r = n + 1$ пролета r неразрезной балки последовательно определяются опорные моменты на опорах с меньшим номером. Для двухпролетной балки такими моментами будут моменты X_1 (при рассмотрении пролета с номером $r = 2$) и X_o (при рассмотрении первого пролета. Поскольку отношение $K_1 = \infty$ получим $X_o = 0$.

Рассмотренная процедура расчета неразрезной балки по формулам (7.35) и (7.36) отражает частный случай так называемого «способа прогонки»

решения алгебраической системы уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов при неизвестных величинах.

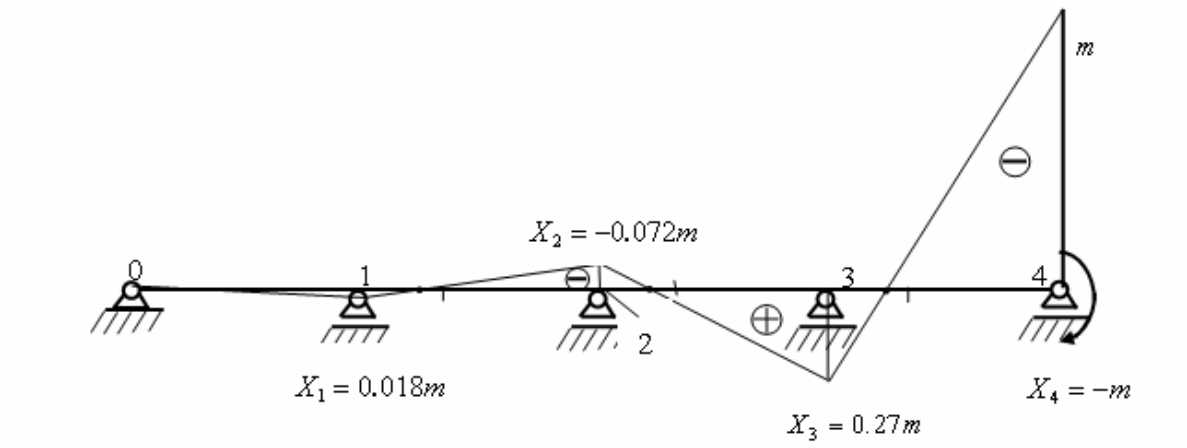
Способ прогонки для частного случая загружения неразрезной балки опорным моментом на крайней правой опоре состоит в двух процедурах, которые можно представить схемами:

1. Прямая прогонка: $K_1 \to K_2 \to ... \to K_{n+1}$ (при известном $K_1 = \infty$);
2. Обратная прогонка: $X_{n+1} \to X_n \to ... \to X_o$ (при известном X_{n+1}(здесь $X_{n+1} = -m$)).

Для определения положения левых фокусных точек в пролетах балки можно использовать формулу

$$c_r = \frac{l_r}{(1 + K_r)}. \qquad (7.37)$$

П р и м е р. Допустим, что балка, изображенная на рис. 7.4, *а*, имеет четыре пролета (рис. 7.10), т.е. она трижды статически неопределима ($n = 3$). Ее опоры имеют номера $r = 0, 1, 2, 3, 4$.



7.10

На правой опоре с номером 4 задан опорный момент, растягивающий верхние волокна балки $X_4 = -m$. Требуется построить эпюру M для варианта, когда жесткости всех пролетов равны друг другу и равны EI и длины всех пролетов равны друг другу и равны l.

Для построения эпюры M с помощью полученных формул (7.35) и (7.36) необходимо:

– вычислить погонные жесткости i_r (7.28) для всех четырех пролетов;

– выполнить процедуру прямой прогонки и последовательно по формуле (7.35) вычислить левые фокусные отношения K_{r+1} для всех четырех пролетов ($r = 1, 2, 3, 4$ с учетом того, что $K_1 = \infty$).

– выполнить процедуру обратной прогонки и последовательно, начиная с заданного

момента $X_4 = -m$, по формуле (7.36) вычислить ординаты моментов на опорах 3, 2, 1, 0;

– отложить вычисленные ординаты с учетом их знака от оси балки;

– построить линии опорных моментов на каждом пролете.

Результаты вычислений приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Вычисляемые величины	Номера пролетов балки			
	1	2	3	4
$i_r = EI_r / l_r$	i	i	i	i
$K_r = 2 + \frac{i_r}{i_{r-1}} \cdot (2 - \frac{1}{K_{r-1}})$	$K_1 = \infty$	$K_2 = 4$	$K_3 = 3{,}75$	$K_4 = 3.73$
$c_r = \frac{l_r}{(1 + K_r)}$	$c_1 = 0$	$c_2 = 0.2l$	$c_3 = 0.21l$	$c_4 = 0.21l$
X	$X_o = 0$	$X_1 = 0.018m$	$X_2 - 0.072m$	$X_3 = 0.27m$
X_r	$X_1 = 0.018m$	$X_2 - 0.072m$	$X_3 = 0.27m$	$X_4 = -m$

В табл. 7.2 приведены также расстояния c_r от левой опоры пролета до левой фокусной точки, вычисленные для каждого пролета по формуле (7.37).

По вычисленным ординатам построена эпюра M (рис. 7.10). Как видно значения опорных моментов быстро уменьшаются с удалением от загруженной опоры.

Все левые фокусные точки расположены в пределах левой трети соответствующих пролетов.

Загружение балки опорным моментом на крайней левой опоре. Правые фокусные точки. Соответствующие формулы способа прогонки

Если приложить к балке, изображенной на рис. 7.4, *а*, нагрузку в виде момента на опоре с номером 0, то вся рассмотренная выше процедура расчета останется без изменения, но изменятся индексы в полученных выше расчетных формулах способа прогонки.

При таком варианте загружения балки эпюры моментов на свободных от нагрузки пролетах будут иметь вид прямых линий, пересекающих ось балки в правых фокусных точках, расположенных в пределах правых третей пролетов. Это было продемонстрировано выше на примере однопролетной балки (см. рис. 7.9, *б*).

Процедура способа прогонки в этом варианте загружения балки опорным моментом на левой крайней шарнирной опоре начинается с прямой прогонки справа - налево по получению правых фокусных отношений по формуле:

$$K'_r = 2 + \frac{\bar{l}_{r+1}}{\bar{l}_r}(2 - \frac{1}{K_{r+1}}) = 2 + \frac{i_r}{i_{r+1}}(2 - \frac{1}{K_{r+1}}) \qquad (7.38)$$

При этом, поскольку для крайнего правого пролета с крайней шарнирной опорой правое фокусное отношение известно ($K'_{n+1} = \infty$), то

определение правых фокусных отношений по приведенной формуле выполняется последовательной подстановкой номеров пролетов $r = n, ..., 2, 1$.

После выполнения процедуры прямой прогонки, выполняется обратная прогонка при которой, начиная с заданного опорного момента $X_{\text{o}} = -m$, последовательно вычисляются все остальные опорные моменты по формуле

$$X_r = -X_{r-1} / K'_r. \qquad (7.39)$$

При этом последовательно рассматриваются пролеты с $r = 1, 2,...(n+1)$.

Примечание. Способ прогонки решения системы уравнений метода сил с трехдиагональной матрицей при расчете неразрезной балки реализовался в форме способа, который можно назвать «способом фокусных отношений опорных моментов неразрезной балки на незагруженных пролетах» или «способом моментных фокусных отношений».

Процедура определения моментных фокусных отношений начинается с уже известного фокусного отношения для крайнего пролета.

Обратим внимание, что при крайней слева шарнирной опоре она имеет номер 0, а начинающийся от нее пролет имеет номер 1. При этом известным левым фокусным отношением является величина $K_1 = \infty$.

Если же левой крайней опорой является защемляющая опора, то сама опора в принятых обозначениях для использования формулы 3-х моментов имеет номер 1, а начинающийся от нее пролет имеет номер 2. При этом оказывается, что для пролета, идущего от заделки левое фокусное отношение тоже известно и составляет величину $K_2 = 2$.

Это относится и к заделке на последнем пролете неразрезной балки справа: номер заделки и номер пролета будет равен n. При этом известным будет правое фокусное отношение $K'_n = 2$.

7.4. Случай загружения одного пролета неразрезной балки

Предположим, что в неразрезной балке загружен некоторый один пролет с номером k (на рис.7.11 на загруженном пролете показана только л.о.м).

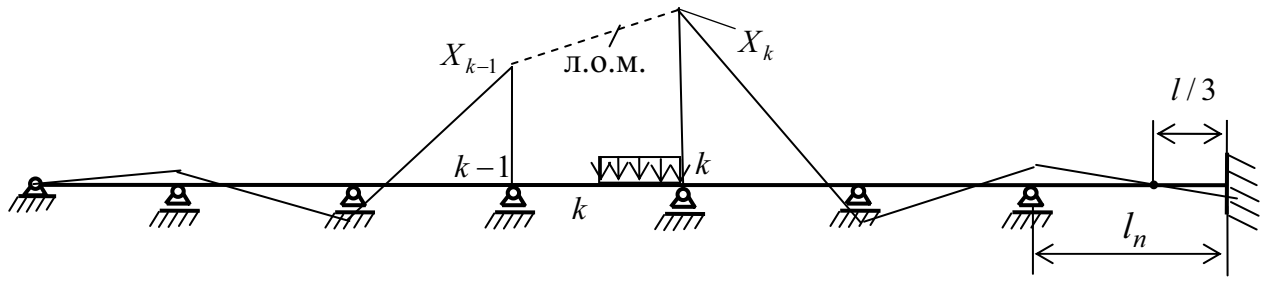


Рис. 7.11

Расчет балки левее и правее загруженного пролета был только что рассмотрен в результате решения уравнений метода сил в виде уравнений 3-х моментов, записанных для пролетов левее и правее загруженного пролета. При

заданном загружении балки осталось рассмотреть два уравнения из всей системы уравнений 3-х моментов. В общем виде их можно записать с помощью уравнения (7.15), приняв в них $i = k-1$ и $i = k$. Эти два уравнения получатся в виде (ω_k, b_k, a_k известные параметры эпюры M_p на загруженном пролете k):

Уравнение ($k-1$): $\bar{l}_{k-1} \cdot X_{k-2} \cdot +2(\bar{l}_{k-1} + \bar{l}_k) \cdot X_{k-1} + \bar{l}_k \cdot X_k = -6(\frac{\omega_k b_k}{k_k l_k});;$

Уравнение (k): $\bar{l}_k \cdot X_{k-1} \cdot +2(\bar{l}_k + \bar{l}_{k+1}) \cdot X_k + \bar{l}_{k+1} \cdot X_{k+1} = -6(\frac{\omega_k a_k}{k_k l_k})$,

Выразим опорный момент X_{k-2} с помощью выражения (7.36) через опорный момент X_{k-1} на левой опоре загруженного пролета. Аналогично выразим X_{k+1} с помощью выражения (7.39) через момент X_k.

После этого решим два уравнения с двумя неизвестными опорными моментами загруженного пролета. В результате получим:

$$X_{k-1} = \frac{6\omega_k (K'_k b_k - a_k)}{l_k^2 (1 - K_k K'_k)}; \quad X_k = \frac{6\omega_k (K_k a_k - b_k)}{l_k^2 (1 - K_k K'_k)}. \tag{7.40}$$

Для часто встречающегося частного случая симметричной нагрузки на загруженном пролете эти выражения принимают вид:

$$X_{k-1} = \frac{3\omega_k (K'_k - 1)}{l_k (1 - K_k K'_k)}; \quad X_k = \frac{3\omega_k (K_k - 1)}{l_k (1 - K_k K'_k)}. \tag{7.41}$$

Алгоритм решения задачи способом прогонки по построению эпюры M при загружении одного пролета неразрезной балки

1. Определяются погонные жесткости i_r (7.28) пролетов балки.

2. Прямой прогонкой слева направо последовательно определяются левые фокусные отношения K_r (7.31) для всех пролетов балки, начиная с известной величины $K_1 = \infty$ при крайней слева шарнирной опоре, или с известной величины $K_2 = 2$, если крайней слева является заделка.

3. Прямой прогонкой справа налево последовательно определяются правые фокусные отношения K'_r (7.38) для всех пролетов балки, начиная с известной величины $K_{n+1} = \infty$ при крайней справа шарнирной опоре, или с известной величины $K_n = 2$, если крайней справа является заделка.

4. На загруженном пролете с номером k определяется площадь ω_k эпюры моментов от заданной нагрузки и расстояния a_k *и* b_k соответственно от левой и правой опор загруженного пролета до центра тяжести площади ω_k.

5. Определяются опорные моменты на загруженном пролете по формулам (7.40) при несимметричной нагрузке на пролете или по формуле (7.41) при симметричной нагрузке.

6. С помощью левых фокусных отношений по формуле (7.36) определяются опорные моменты на опорах слева от загруженного пролета.

7. С помощью правых фокусных отношений по формуле (7.39) определяются опорные моменты на опорах справа от загруженного пролета.

Примечание. Способ прогонки применим и для более общего случая, когда у балки загружены все или несколько пролетов. Этот способ изложен, например, в учебном пособии [8].

Однако решение в этих (более общих) случаях становится и более трудоемким. Для общего случая загружения удобнее выполнить расчет методом конечных элементов в форме метода перемещений. Идея этого метода рассмотрена в разделе 8 УМК, а также в учебных пособиях [3, 8, 11 – 13].

7.5. Графический способ С.С. Голушкевича

Излагаемый в этом подразделе способ был разработан С.С. Голушкевичем, когда он был студентом нашего факультета. Однако работа была им опубликована только в 1937 г. и только в трудах Ленинградского института промышленного строительства (вып.4). Поэтому способ мало известен, хотя отличается исключительной простотой и оригинальностью.

Способ был внедрен в учебный процесс на ИСФ СПбГПУ в 1972 г. [16], когда учащийся при выполнении расчетных работ по строительной механике практически мог воспользоваться из «вычислительной техники» только логарифмической линейкой.

Поскольку способ является графическим, сейчас он потерял свое практическое значение как практический способ расчета. Но идеи, заложенные в его основу, представляют интерес и в настоящее время, когда расчеты выполняются на современных ПК. Авторы данного пособия решили изложить эти идеи для того, чтобы учащиеся могли их использовать для лучшего понимания «игры сил» в такой распространенной инженерной конструкции, как неразрезная балка.

Назначение способа С.С. Голушкевича

Графический способ С.С. Голушкевича расчета неразрезных балок позволяет:

1. Найти на каждом пролете неразрезной балки положение левых и правых фокусных точек (ф.т.). При этом графически осуществляется прямая прогонка слева направо для определения левых ф.т. на оси балки и прямая прогонка справа налево для определения правых ф.т. (вместо определения при аналитической прогонке левых и правых фокусных отношений);

2. Определить ординаты л.о.м. над ф.т. при загружении пролетов балки перпендикулярной к оси балки нагрузкой. Процедура определения этих ординат осуществляет процедуру обратной прогонки справа налево для определения ординат л.о.м. над левыми ф.т. в пролетах балки и слева направо для определения ординат л.о.м над правыми ф.т..

Графический способ С.С. Голушкевича использует «основное свойство ординат эпюры изгибающих моментов в сечениях, где расположены левые и правые ф.т.» (сокращенно: «основное свойство фокусных точек»), а также – две сформулированные и доказанные С.С. Голушкевичем теоремы, названные им как «теорема об узле» и «теорема о стержне».

«Основное свойство фокусных точек»

Рассмотрим эпюру M, изображенную на рис 7.11. Предположим, что к загруженному пролету добавлена еще какая-то нагрузка. Очевидно, что от дополнительной нагрузки *все ординаты эпюры M изменятся кроме ординат в сечениях балки, где расположены левые фокусные точки в пролетах балки слева от загруженного пролета и ординат в сечениях балки, где расположены правые фокусные точки в пролетах балки справа от загруженного пролета.*

Это и составляет суть «основного свойства фокусных точек», которое затем используется в способе С.С. Голушкевича.

«Теорема об узле»

Прежде чем сформулировать теорему, изобразим два крайних правых пролета неразрезной балки, отрезанных от нее сечением (рис. 7.12). Нагрузкой является момент m на крайней правой опоре.

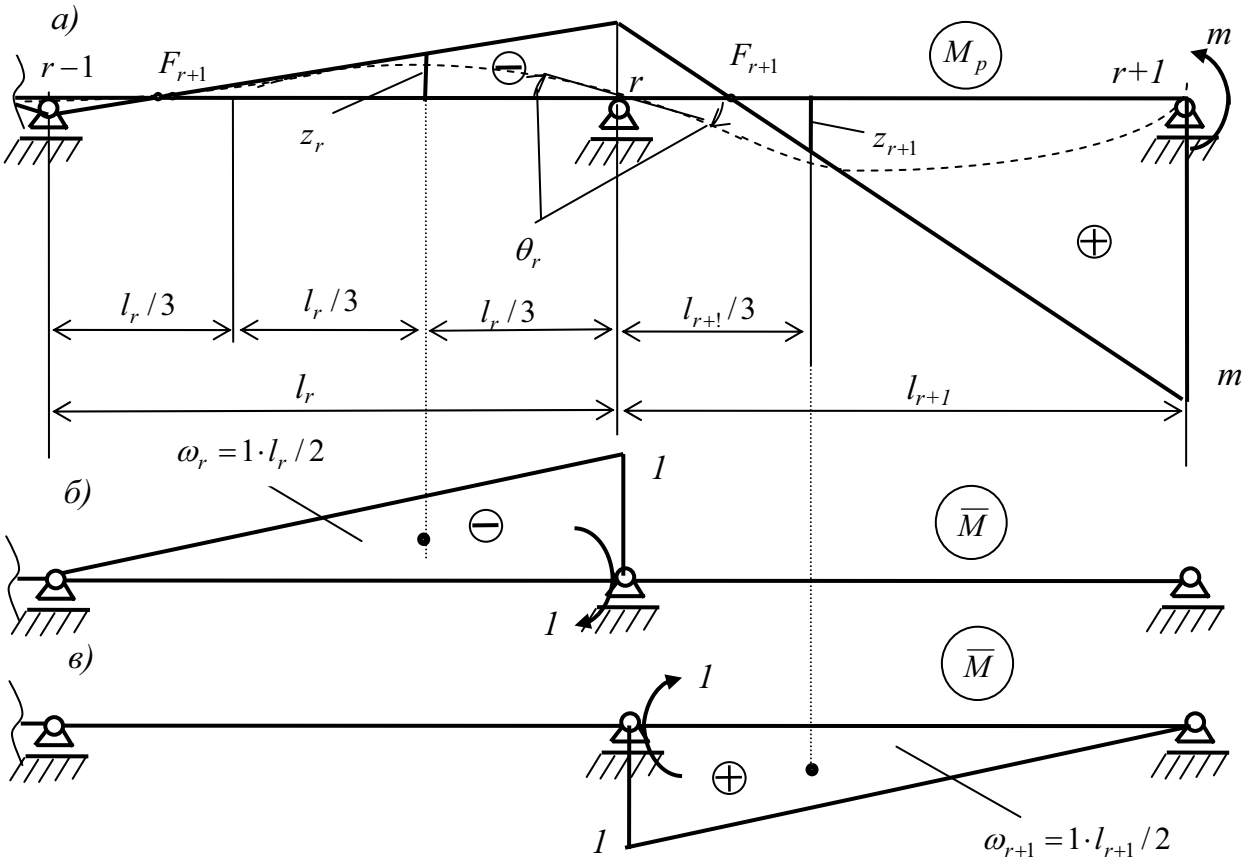


Рис. 7.12

Обозначим номера пролетов и опор в соответствии с нумерацией, принятой для использования формулы трех моментов. Среднюю опору обозначим как опора с номером r. Остальные обозначения сделаны в соответствии с обозначением опоры.

«Теорема об узле» формулируется следующим образом.

Изгибающие моменты в ближайших третях пролетов неразрезной балки, подходящих к опоре с номером r пропорциональны погонным жесткостям пролетов при условиях, что пролеты свободны от нагрузки и опора r не имеет линейного перемещения перпендикулярного оси балки.

Для доказательства теоремы, на приведенных пролетах балки изобразим вид эпюры M от заданного момента на крайней правой шарнирной опоре. Ординаты этой эпюры на расстоянии одной трети соответствующих пролетов обозначим z_r и z_{r+1}. На рисунке также изображен вид изогнутой оси балки.

Поставим задачу: определить угол поворота θ_r сечения балки над опорой r. Выполним эту задачу с помощью интеграла Максвелла – Мора. Причем, так как это сечение является общим для обоих пролетов, формулу Максвелла – Мора можно вычислить, приложив в узле r единичный момент во вспомогательном состоянии либо к пролету r (рис. 7.12, *б*), либо и к пролету $r+1$ (рис. 7.12, *в*). Тогда будут равны интегралы:

$$\theta_r = \int_{l_r} \frac{\overline{M} \cdot M_p}{EI} dx = \int_{l_r+!} \frac{\overline{M} \cdot M_p}{EI} dx \qquad (7.42)$$

Первый интеграл отражает использование вспомогательного состояния, представленного на рис. 7.12, *б;* второй интеграл – на рис. 7.12, *в*.

В результате вычисления этих интегралов Максвелла – Мора с помощью правила А.Н. Верещагина, получим:

$$\theta_r = \frac{\omega_r \cdot z_r}{EI_r} = \frac{\omega_{r+1} \cdot z_{r+1}}{EI_{r+!}}, \qquad (7.43)$$

или

$$2\theta_r = \frac{l_r \cdot z_r}{EI_r} = \frac{l_{r+1} \cdot z_{r+1}}{EI_{r+!}}. \qquad (7.44)$$

Так как $i_r = EI_r / l_r$ и $i_{r+1} = EI_{r+1} / l_{r+1}$ представляют собой погонные жесткости пролетов, отсюда можно записать, что

$$2\theta_r = \frac{z_r}{i_r} = \frac{z_{r+1}}{i_{r+1}}. \qquad (7.45)$$

Это и требовалось доказать. Можно подобрать момент m таким, что угол поворота будет равен $2\theta_r = 1$. Тогда получим равенства:

$$z_r = i_r; \quad z_{r+1} = i_{r+1}. \qquad (7.46)$$

Пример графического определения положения фокусных точек методом С.С. Голушкевича

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 7.13. Для простоты предположим, что все пролеты равны длине l и все пролеты имеют постоянную жесткость EI. Тогда погонная жесткость всех пролетов равна $i = EI / l$.

Графический расчет по определению ф.т. состоит в следующем.

1. Пролеты балки делятся на три равных части.

2. В третях, ближайших к внутренним опорам балки, откладываются отрезки равные

погонным жесткостям пролетов.

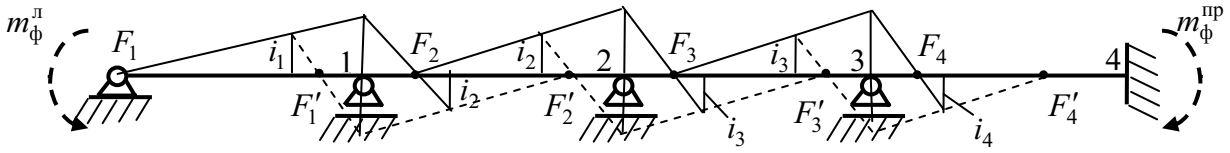


Рис.7.13

3. Следуя процедуре доказательства теоремы об узле, предполагаем, что на опоре с номером 2 приложен некоторый фиктивный момент $m_ф^{пр}$, который вызывает в третях, ближайших к опоре 1 опорные моменты равные погонным жесткостям соответствующих пролетов. Это позволяет по известной левой ф.т. F_1 первого пролета найти положение левой ф.т. F_2 на втором пролете.

Аналогичные рассуждения проводятся для других опор.

4. Для определения всех правых ф.т. пролетов, процедура с приложением некоторого фиктивного момента $m_ф^л$ слева от рассматриваемых пролетов выполняется, начиная с известной правой ф.т. F_4', которая находится на расстоянии $l_4/3$ от заделки. Построения вспомогательных фиктивных эпюр моментов при определении правых ф.т. показаны штриховыми линиями.

«Теорема о стержне»

Прежде чем сформулировать теорему, рассмотрим однопролетную балку с произвольной нагрузкой на пролете, представленную на рис. 7.14,*а*.

Построение эпюр M на такой балке методом сил с использованием формулы 3-х моментов уже рассматривалось. Подобная эпюра является табличной (см. табл. 7.1)

Общее выражение для опорного момента в заделке *A* приведено в указанной таблице:

$$M_A = -\frac{3\omega b}{l^2}. \qquad (7.47)$$

Здесь ω – площадь эпюры M_p грузового состояния основной системы на пролете балки; b – расстояние от ее центра тяжести до правой опоры (см. рис. 6.5 и формулу (7.16)).

На рис. 7.14, *б* штриховой линией изображена л.о.м. для балки при заданной нагрузке.

На этом же рисунке отмечена ордината л.о.м. на расстоянии $l/3$ от заделки. Эта ордината соответствует положению левой ф.т. балки и равна

$$\mu = \frac{2}{3} M_A = -\frac{2\omega b}{l^2}. \qquad (7.48)$$

Теорема о стержне формулируется следующим образом.

Изгибающий момент в сечении, расположенном на расстоянии трети пролета от левой (правой) заделки, не зависит от величины момента, приложенного к правому (левому) опорному сечению.

Доказательством является эпюра изгибающих моментов, построенная на пролете балки от опорного момента m, приложенного на правой шарнирной опоре.

Такая эпюра уже была построена на рис. 7.9, *а*. Линия опорных моментов ***независимо***

от величины момента m в этом случае загружения балки ***всегда*** пересекает ось балки в левойф.т., находящейся на расстоянии $l/3$ от заделки.

Как показано на рис. 7.14, *г*, от приложенного к балке опорного момента m изменяются все ординаты л.о.м. от заданной нагрузки, кроме ординаты μ над левой ф.т. F_2 (ее номер соответствует номеру 2 пролета балки при использовании формулы 3-х моментов).

Ордината $M(F_2)$ в сечении балки, где расположена левая ф.т. F_2, окончательной эпюры M изгибающих моментов в балке, получается алгебраическим (с учетом знаков ординат) суммированием:

$$M(F_2) = \mu + M_p(F_2), \qquad (7.49)$$

μ – отрицательная ордината л.о.м. от заданной на балку нагрузки, определенная по формуле (7.48) в сечении, где расположена леваяф.т.;

$M_p(F_2)$ – положительная ордината грузовой эпюры M_p, соответствующая этому же сечению.

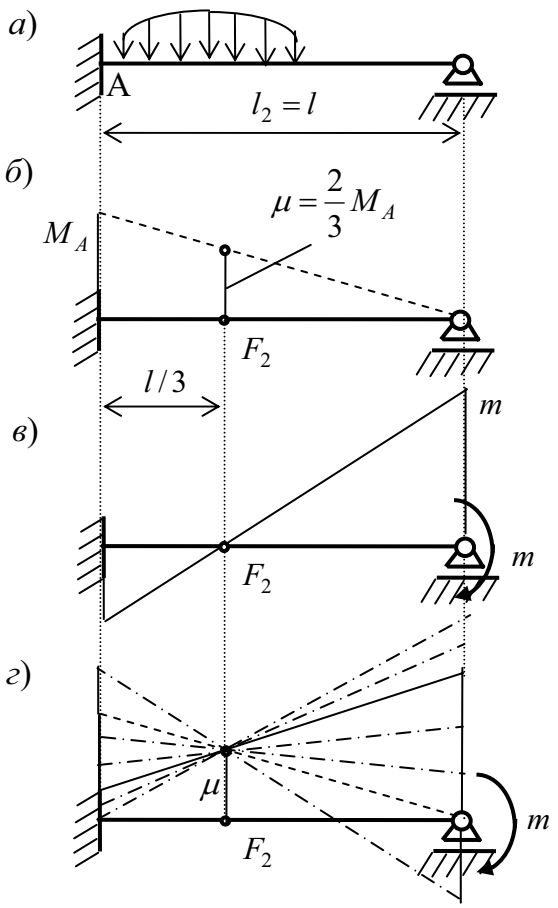


Рис. 7.14

Обе ординаты в правой части равенства (7.49) не зависят от приложенного на правой опоре момента m, поэтому не зависит от него и ордината $M(F_2)$ окончательной эпюры M.

Это подтверждает сформулированную теорему.

Примечание. Теорема об узле справедлива не только при воздействии на пролет нагрузки, но и при заданной осадке опор и при заданном температурном воздействии. Линия опорных моментов при этих воздействиях будет иметь такой же вид, как и при нагрузке (см. табл. 8.2 и 8.3). В табл. даны и значения опорного момента M_A от заданной осадки опор или температуры, который необходим для вычисления ординаты $\mu = 2M_A/3$.

Использование теоремы о стержне и основного свойства фокусных точек для графического определения ординат л.о.м. над фокусными точками

Линия опорных моментов на любом пролете неразрезной балки в способе С.С. Голушкевича строится по двум ординатам: соответственно над левой и над правой фокусными точками.

Процедура определения ординат л.о.м. на каждом пролете, например, над левыми ф.т., начинается с известной ординаты л.о.м. над крайней левой ф.т.. Затем процедура повторяется для определения ординат л.о.м. над правыми ф.т., начиная с известной ординаты над крайней правой ф.т.

В качестве примера рассмотрим эту задачу для неразрезной балки, приведенной на рис. 7.15,*а*. Пролеты балки равны длине l; изгибные жесткости пролетов равны EI; интенсивность q равномерно распределенной нагрузки принята равной 1 кН.

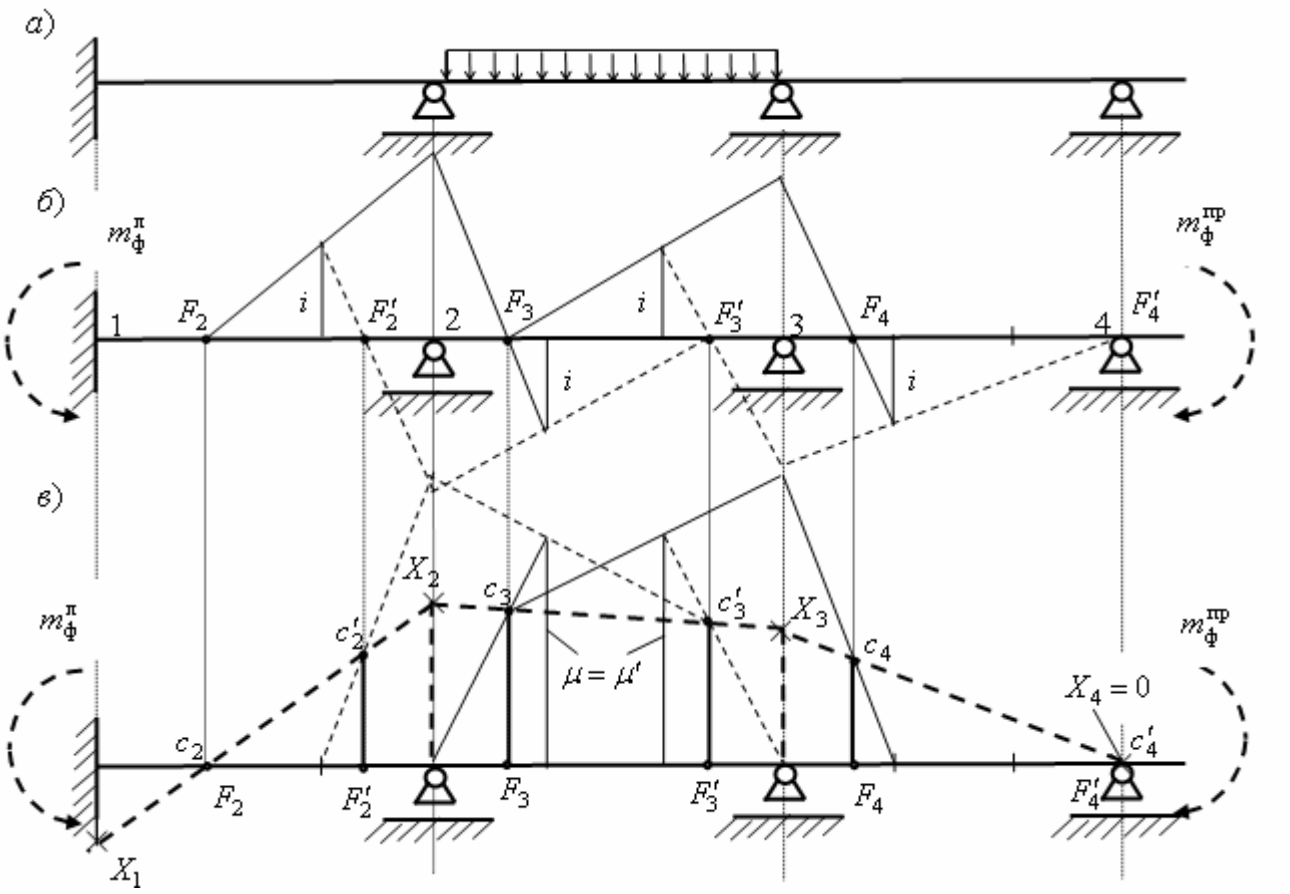


Рис. 7.15

При графическом расчете балки способом С.С. Голушкевича по построению эпюры M выполняется следующий алгоритм.

1. Определяются левые F_r и правые F_r' фокусные точки на пролетах балки (рис. 6.15,б).

1.1. Вычисляются погонные жесткости пролетов $i_r = EI_r / l_r$ ($r = 2, 3, 4$). В данном примере все погонные жесткости равны i.

1.2. Каждый пролет балки делятся на три равные части и в третях ближайших к внутренним опорам (в выбранном удобном для расчета масштабе) от оси балки откладываются ординаты равные погонным жесткостям соответствующих пролетов (рис. 7.12, *б*).

1.3. Применением «теоремы об узле» к опоре 2 по известной левой ф.т. F_2 находится левая ф.т. F_3. Затем процедура повторяется для опоры 3 и находится левая ф.т. F_4.

1.4. Аналогично, применяя теорему об узле к опоре 3, по известной правой ф.т. F_4' находится правая ф.т. F_3' (соответствующее построение на рис. 7.15, *б* показано штриховыми линиями). Затем процедура повторяется для узла 2 и находится правая ф.т. F_2'.

Примечание. На рис. 7.15, *б* справа и слева изображены фиктивные моменты $m_{ф}$, которые в соответствии с «теоремой об узле» используются для подбора точного равенства моментов в третях, ближайших к рассматриваемой опоре, соответствующим погонным жесткостям. При этом фиктивный момент справа используется для получения левых ф.т., а фиктивный момент слева используется при получении правых ф.т.

2. Определяются ординаты c_r и c'_r л.о.м. над левыми и правыми ф.т. (рис. 7.15, *в*).

2.1. В соответствии с заданным воздействием (нагрузка, осадка опор пролета, температурное воздействие на стороны балки в пролете) вычисляются ординаты линии опорных моментов μ и μ' в пролетах балки соответственно над левой и правой фокусными точками ближайшими соответственно к левой и правой заделкам (см. рис. 7.14 при заделке слева).

2.2. Каждый пролет балки делится на три равные части и в третях пролетов (в выбранном удобном для расчета масштабе) от оси балки откладываются ординаты равные величинам μ и μ' соответствующих пролетов (на рис. 7.15, *в* ненулевые ординаты μ и μ' будут только на загруженном пролете).

2.3. Справа к балке прикладывается фиктивный момента $m_{ф}^{пр}$ (см. рис. 7.15, *в*) и подбирается таким, чтобы опора 2, повернувшаяся от заданной на пролет 3 нагрузки на какой-то угол $\theta_2(q)$, фиктивным моментом повернулась обратно на такой же угол $\theta_2(m_{ф}^{пр}) = -\theta_2(q)$.

В результате опора 2 окажется в условиях фиктивного защемления (заделки). Это позволяет применить теорему о стержне сначала к пролету 2, а затем к пролету 3 и провести на каждом из них л.о.м.

На пролете 2 при двух защемляющих опорах (вторая искусственно сделана заделкой с помощью фиктивного момента $m_{ф}^{пр}$) и при отсутствии на нем нагрузки получится л.о.м. с нулевыми ординатами.

Пролет 3 также будет иметь фиктивную защемляющую опору 2. Опорный момент в ней будет равен нулю из равновесия фиктивной заделки 2 по моментам, действующим на нее со стороны пролетов 2 и 3.

Поэтому л.о.м. на пролете с номером 3, в соответствии с «теоремой о стержне», обязательно пройдет (см. рис. 7.14, *г*) от нулевой ординаты в узле 2 и конец ординаты μ в трети пролета ближайшей к искусственно созданной заделке на опоре 2 (на рис. 7.15, *в* построение показано тонкой сплошной линией).

Теперь вступает в силу использование «основного свойства фокусных точек»: *приложение справа к балке фиктивного момента $m_{ф}^{пр}$ позволило провести л.о.м. на пролетах 2 и 3, но сделало не реальными полученные ординаты л.о.м. на всем их протяжении* ***кроме ординат, соответствующих левым фокусным точкам на пролетах 2 и 3. Приложение фиктивного момента справа от пролетов 2 и 3 не повлияло на ординаты л.о.м. c_2 и c_3 в сечениях, где расположены фокусные точки F_2 и F_3.***

Это означает, что ***ординаты c_2 и c_3 фиктивных л.о.м. на пролетах 2 и 3 будут***

ординатами окончательных л.о.м. на этих пролетах от заданной реальной нагрузки.

2.2. Точно такое же рассуждение (см. на рис. 7.15, *в* построение сплошными тонкими линиями фиктивных л.о.м. на пролетах 3 и 4) выполняется с помощью фиктивных моментов $m_{\text{ф}}^{\text{пр}}$. для опоры 3 и определяется ордината c_3 действительной л.о.м. на пролете 4 над левой ф.т. F_4.

2.3. Аналогичная процедура последовательно применяется к опорам 3 и 2 для определения действительных ординат л.о.м c_4', c_3', c_2'. в сечениях балки, где соответственно расположены правые ф.т. F_4', F_3', F_2'. Построения фиктивных л.о.м. в соответствии с «теоремой о стержне» на рис. 7.15, *в* выполнены тонкими штриховыми линиями.

2.4. Получив на каждом пролете неразрезной балки по две ординаты действительных л.о.м., проводим эти л.о.м. (толстые штриховые линии на рис. 7.15, *в*).

2.5. Выполняется контроль построений л.о.м., заключающийся в проверке равенства опорных моментов, полученных на опорах построением л.о.м. для пролетов слева и справа от опор. В рассмотренном примере опорные моменты X_2 и X_3 получились построениями л.о.м. на смежных пролетах достаточно точно.

Кроме того, сопоставление численных значений опорных моментов, полученных графическим расчетом, с соответствующими моментами, полученными расчетом МКЭ в разделе 8, также показывает хорошую точность выполненного графического расчета.

Примечание. Продемонстрирован пример расчета от нагрузки на балку. Аналогично решается задача и при заданной осадке опор балки и при заданном температурном воздействии на стороны ее пролетов [16]. Необходимые отрезки μ и μ' при этом берутся из табл. 8.2 и 8.3.

7.6. Методические указания по расчету методом сил неразрезных балок, имеющих опоры в виде «скользящих» заделок

Обоснование появления в расчетных схемах балок «скользящих» заделок в направлении перпендикулярном оси балок

В подразделе 7.2 изучение применения метода сил к расчету неразрезных балок было начато с рассмотрения статически неопределимых однопролетных балок (рис. 7.16).

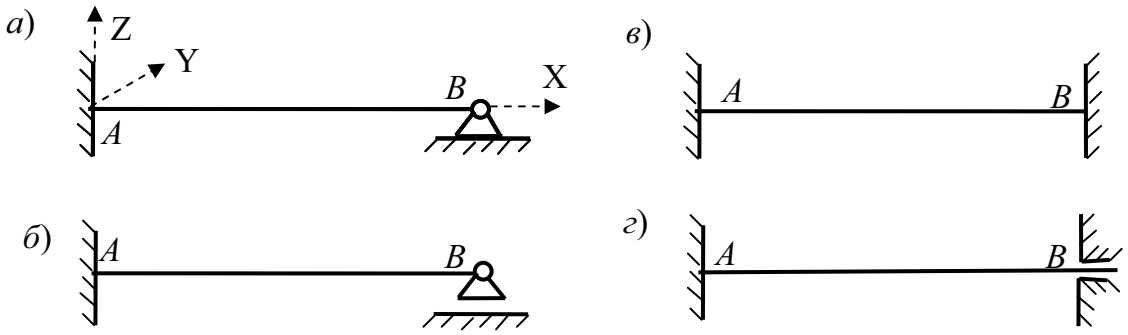


Рис. 7.16

С точки зрения степени статической неопределимости верхние балки на рис 7.16 отличаются от соответствующих нижних балок наличием одной дополнительной лишней неизвестной в виде продольного усилия.

При поперечной к оси балок нагрузке или при нагрузке в виде моментов эта продольная лишняя неизвестная равна нулю**, **поэтому при построении эпюр усилий** M и Q **от нагрузки поперечной к оси балок или от нагрузки в виде моментов балки с одной защемляющей опорой будут один раз, а с двумя заделками – два раза статически неопределимыми системами.

Методика расчета однопролетных и многопролетных балок методом сил и примеры их расчета были рассмотрены в подразделе 7.2.

Эпюры моментов для однопролетных балок, изображенных на рис. 7.16 от действия некоторых нагрузок представлены в табл. 7.1.

В заданиях для расчетных работ в приложении 1 УМК, кроме балок изображенных на рис. 7.16, использованы балки со «скользящими» заделками в направлении поперечном ее оси (левые опоры на рис. 7.17). Такая защемляющая опора не имеет связи в направлении поперечном к оси балки.

Ясно, что удаление в защемляющей опоре поперечной к оси балки связи при поперечной или моментной нагрузке на балку вызовет неблагоприятное изменение НДС балок, приведенных на рис. 7.16.

Однако, скользящая заделка указанного вида встречается как реальная опора при построении рациональной расчетной схемы для расчета симметричных неразрезных балок с симметричной нагрузкой на них.

Это продемонстрировано на рис. 7.17, где приведен пример симметричной относительно оси ОС неразрезной балки с симметричной относительно этой же оси нагрузкой. Для расчета такой неразрезной балки может быть построена расчетная схема, представляющая только ее левую или правую половину от оси симметрии (ОС).

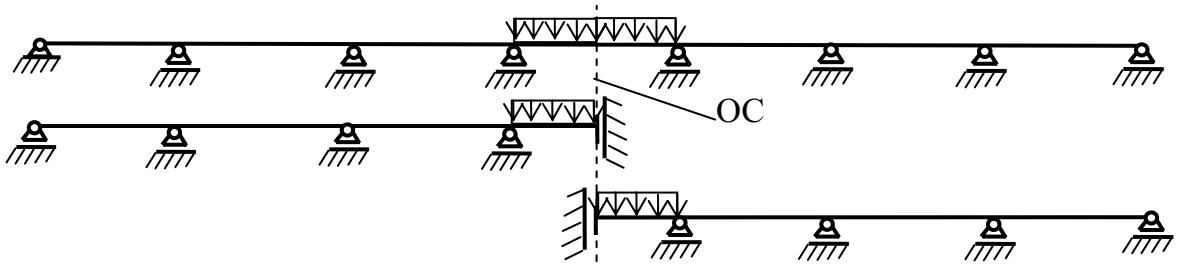


Рис. 7.17

Действительно сечение, совпадающее с осью симметрии (ОС) в целой неразрезной балке, вследствие симметрии балки и нагрузки не имеет угла поворота и не имеет горизонтального перемещения (горизонтальную связь в

левой крайней опоре при указанной нагрузке можно удалить и условно перенести ее в сечение балки на оси симметрии. На НДС балки это не повлияет). В тоже время это сечение имеет возможность смещаться по вертикали. Такая возможность не нарушает симметрии перемещений симметричной балки при симметричной нагрузке.

Рассмотрение при симметричной нагрузке на балку только одной (любой) половины неразрезной балки ***при постановке скользящей опоры в сечении балки, совпадающем с осью симметрии ОС***, полностью отражает НДС выбранной половины балки при ее работе в составе целой балки.

Таким образом, применение скользящих заделок указанного вида на левом или на правом конце балки в расчетных схемах неразрезных балок обосновано. Рассмотрение в расчетных схемах неразрезных балок для расчетных заданий студентам скользящих заделок одновременно на левом и на правом концах неразрезной балки (см. сборник заданий в приложении 1) имеет методическую направленность.

Изменения в формулах для коэффициентов уравнения «трех моментов» и в формулах для вычисления левых и правых фокусных отношений, вызванные появлением у балки скользящих заделок,

Для того, чтобы выявить характер и численное выражение изменений НДС однопролетных балок (см. рис. 7.16) после удаления вертикальных опорных связей в левых защемляющих опорах, выполним методом сил построение эпюр изгибающих моментов для балок, изображенных на рис. 7.18.

Анализ прикрепления этих балок жесткими опорными связями к жесткому основанию показывает, что все приведенные на рис. 7.18 балки (полученные удалением у балок, изображенных на рис. 7.16, вертикальных связей в левых защемляющих опорах), остаются геометрически неизменяемыми.

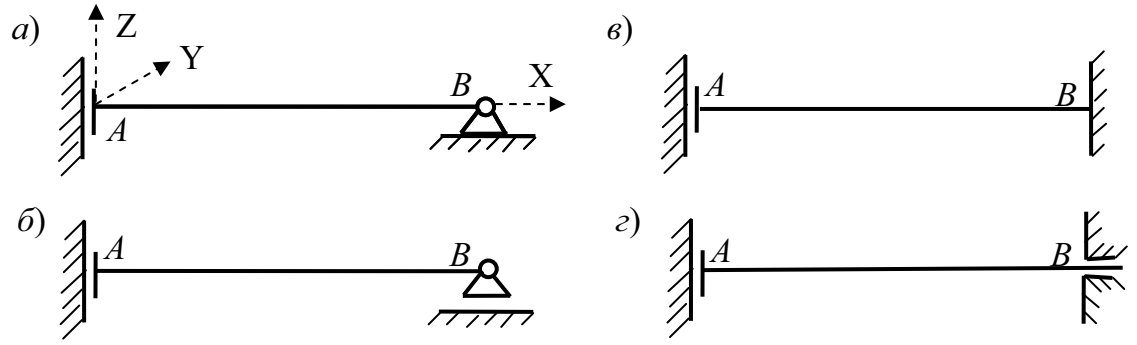


Рис. 7.18

При поперечных к оси балок нагрузках или при нагрузке в виде моментов продольная лишняя неизвестная в балке с неподвижной шарнирной опорой (см. рис. 7.18, *а*) будет равна нулю. Поэтому ***обе балки, изображенные на рис. 2, а, б с точки зрения построения эпюр*** M и Q ***будут статически определимыми.***

Рассмотрим вариант загружения балки, изображенной на рис.7.18, *б*, поперечной к ее оси и не симметричной относительно середины пролета нагрузкой, приведенной к равнодействующей R (рис. 7.19).

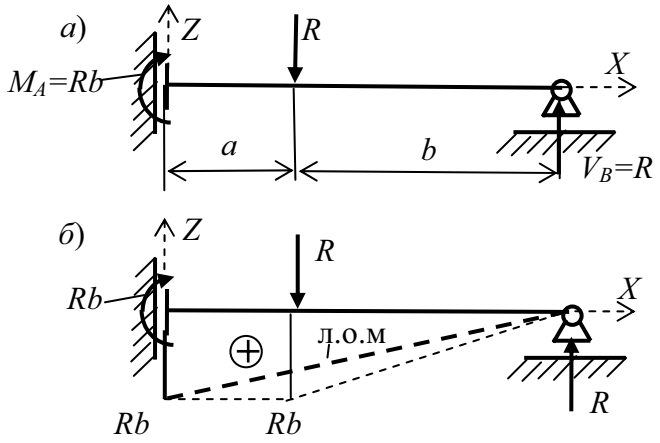


Рис. 7.19

Из уравнений равновесия находим:

$$V_B = R;\ M_A = Rb. \tag{7.50}$$

Соответствующая эпюра M ***от равнодействующей нагрузки*** построена на рис. 7.19, *б*. Ее ординаты ограничены тонкими пунктирными линиями. Ординаты действительной эпюры зависит от вида нагрузки. Однако линия опорных моментов (л.о.м) (жирная пунктирная прямая на рис. 7.19, *б*) и ее ординаты зависят только от величин R и b.

Балка с полной защемляющей опорой справа (рис. 7.18, *в*) при расчете от аналогичной нагрузки будет один раз статически неопределимой системой. Действительно по формуле подсчета степени статической неопределимости для этой балки получаем:

$$n = n_{\text{оп}} - (3 + n_{1\text{ш}}) = 5 - (3 - 0) = 2. \tag{7.51}$$

Так как одной лишней неизвестной является продольное усилие, которое при поперечной к оси балки нагрузке равно нулю, то для заданной нагрузки при расчете методом сил остается только одно лишнее неизвестное, как и в балке изображенной на рис. 7.18, *г*.

При использовании уравнения трех моментов (см. подраздел 7.2) для обеих балок (см. рис.7.18, *в ,г*) защемляющую опору заменяем дополнительным пролетом l_2 бесконечно малой длины (рис. 7.20, *а*).

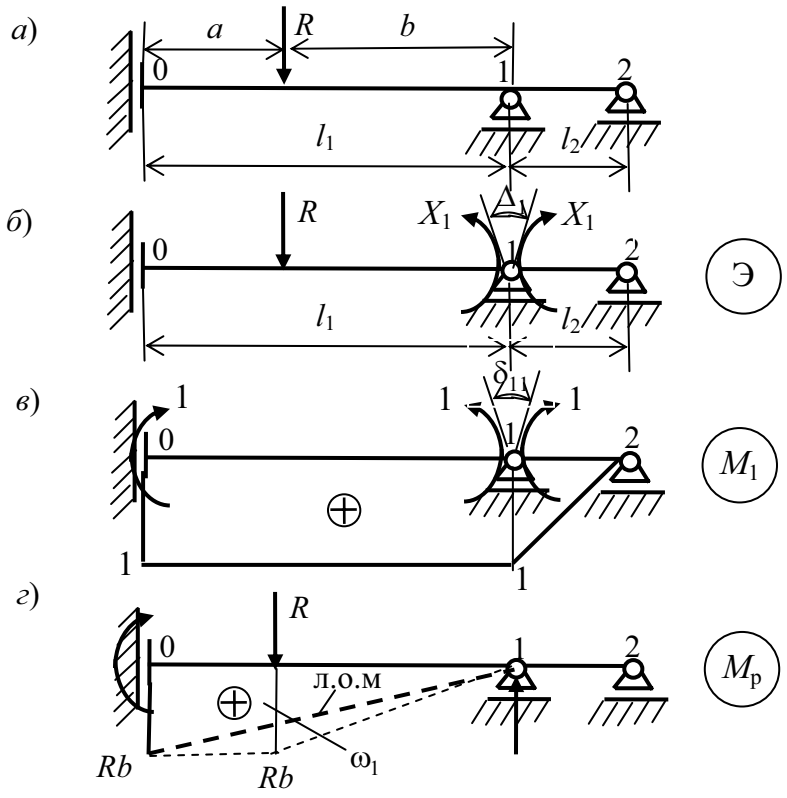


Рис. 7.20

Горизонтальную связь в опоре 2 (см. рис. 7.20, *а*) с нулевым усилием при заданной нагрузке в балке, изображенной на рис. 7.18, *в*, удаляем. При нумерации опор балки, имеющей на левом конце скользящую в направлении поперечном оси балки заделку, эта опора отмечается номером 0 (см. рис. 7.20, *а*).

Примем за лишнюю неизвестную опорный момент в опоре 1 и изобразим эквивалентное состояние выбранной основной системы метода сил (рис. 7.20, *б*). Кроме заданной нагрузки в виде равнодействующей R и лишней неизвестной X_1 эквивалентному состоянию отвечает требование равенства нулю угла «раскрытия шарнира» над опорой 1:

$$\Delta_1 = 0 \tag{7.52}$$

Условие (7.52) в методе сил при использовании принципа независимости действия сил и закона Гука представляется в виде уравнения для определения лишнего неизвестного X_1 (изгибающего момента в сечении балки над опорой 1):

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0 \qquad (7.53)$$

Угол δ_{11} раскрытия шарнира 1 от единичного момента (см. рис. 7.20, *в*) для тонкой балки определится с учетом только изгибных деформаций балки по формуле Максвелла-Мора (для вычисления использован численный способ Симпсона при пренебрежении участка интегрирования бесконечно малой длины l_2):

$$\delta_{11} = \int_{l_1} \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{l_1}{6EI}[(1)(1) + 4(1)(1) + (1)(1)] = \frac{l_1}{EI}. \qquad (7.54)$$

Угол Δ_{1p} раскрытия шарнира над опорой 1 от действующей нагрузки для тонкой балки также определится по формуле Максвелла – Мора только с учетом изгибных деформаций. Как и при выводе формулы трех моментов (см. подраздел 7.2), представим вычисление интеграла в общем виде для любой нагрузки с использованием способа Верещагина:

$$\Delta_{1p} = \int_{l_1} \frac{M_p M_1}{EI} dx = \frac{\omega_1 \cdot 1}{EI} = \frac{\omega_1}{EI}. \qquad (7.55)$$

Использование этого способа в данном примере удобно потому, что центру тяжести площади ω_1 эпюры M_p на пролете балки длиной l_1 при любом его расположении по длине пролета во вспомогательном состоянии с эпюрой M_1 соответствует ордината равная единице (см. рис. 7.20, *в*).

В результате, для лишней неизвестной X_1 при любой нагрузке поперечной к оси балки или в виде моментов получаем общую формулу:

$$X_1 = -\frac{\omega_1}{l_1} \qquad (7.56)$$

Поскольку рассматриваемая балка однопролетная, то в дальнейшем (как это делалось и ранее в подразделе 7.2) произведем следующие замены в обозначениях величин, входящих в формулу (7.56):

– заменим обозначение X_1 опорного момента над правой опорой в эквивалентном состоянии основной системы метода сил (см. рис. 7.20, *б*) на обозначение M_B опорного момента в опоре B (см. рис. 7.18, *в*).

– не будем использовать индекс 1 в обозначениях ω_1 и l_1.

Тогда для рассматриваемого варианта нагрузки получим:

$$M_B = -\frac{\omega}{l}. \qquad (7.57)$$

Величина ω – площадь эпюры M_p в грузовом состоянии на пролете балки от заданной на пролете нагрузки определяется как сумма двух площадей:

$$\omega = \omega_1 + \omega_p^o . \qquad (7.58)$$

где $\omega_1 = Rb \cdot l / 2$ – площадь эпюры от опорных моментов, а ω_P^o является площадью эпюры моментов в статически определимой балке на двух шарнирных опорах от заданной на пролете нагрузки (см. рис. 4.4).

Вертикальная составляющая V_B опорной реакции в опоре B (см. рис. 7.18, *в, г*) является статически определимой величиной, определяемой из уравнения равновесия балки $\sum Z = 0$. Откуда получим:

$$V_B = R . \qquad (7.59)$$

Вектор реакции направлен в сторону обратную направлению вектора равнодействующей R поперечной к оси балки нагрузки. Если поперечной к оси балки нагрузки нет (например, нагрузка только моментная), то $V_B = R = 0$.

Отсюда следует, что опорный момент в скользящей заделке A (см. рис. 7.18, *в, г*) равен:

$$M_A = Rb - M_B = Rb - (\omega / l) \qquad (7.60)$$

Построим эпюру изгибающих моментов M в балках, изображенных на рис. 7.18, *в, г*, от некоторых частных случаев нагрузок.

П р и м е р 1. Сначала рассмотрим вариант равномерно распределенной нагрузки. В этом случае (см. рис. 7.21) получим:

$$R = ql ; \quad b = l / 2 ; \quad Rb = ql^2 / 2 ;$$
$$\omega = \omega_1 + \omega_p^o = ql^3 / 4 \cdot + ql^3 / 12 = ql^3 / 3 . \qquad (7.61)$$

Изобразим л.о.м. (рис. 7.21, *б*). От нее отложим ординаты эпюры M_p^o в простой балке с двумя шарнирными опорами, нагруженной равнодействующей R (пунктирный треугольник на рис.7.21, *б*). Тогда эпюра M_p^o от равномерно распределенной нагрузки на рис. 7.21, *б* будет представляться сплошной кривой линией параболического очертания (см. объяснение в подразделе 4.1).

Действительные эпюры M_p^o для простой балки с двумя шарнирными опорами для вариантов с одной, двумя и тремя сосредоточенными силами, равными P и приложенными симметрично приведены на рис. 7.6. Там же даны значения соответствующих площадей ω_p^o.

Для сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета, и равной P получим:

$$R = P ; b = l / 2 ; Rb = Pl / 2 ;$$
$$\omega = \omega_1 + \omega_p^o = Pl^2 / 4 \cdot + Pl^2 / 8 = 3Pl^2 / 8 ; \qquad (7.62)$$
$$M_B = -3Pl / 8 ; \; M_A = Pl / 2 - 3Pl / 8 = Pl / 8 .$$

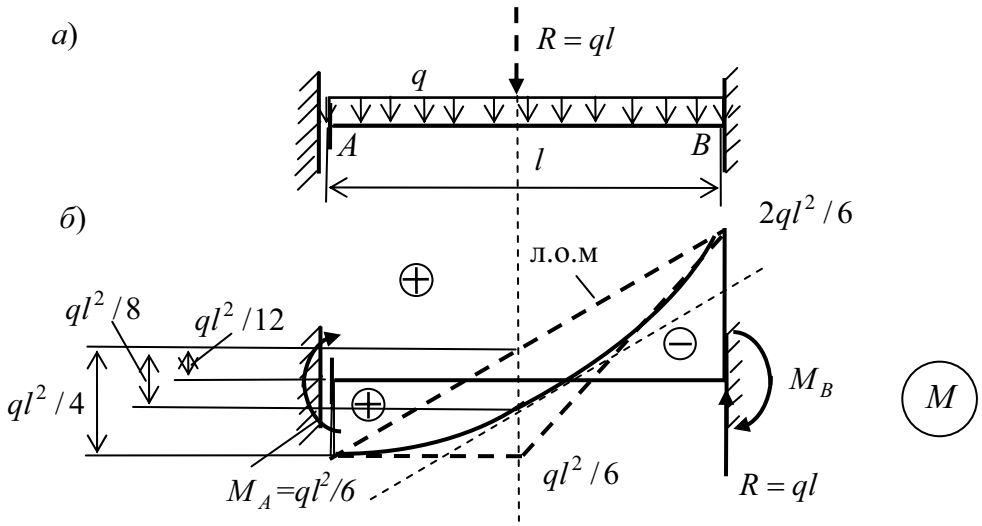


Рис. 7.21

Построим л.о.м. и окончательную эпюру M (рис. 7.22).

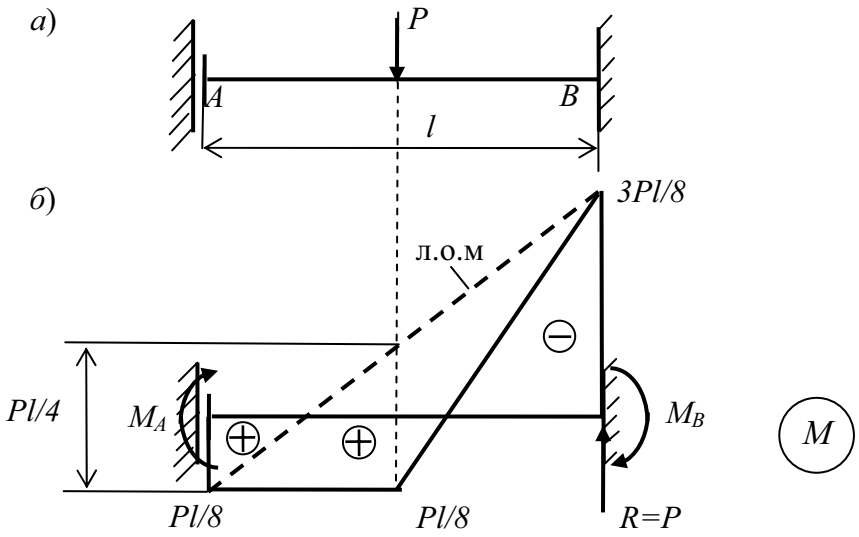


Рис. 7.22

Для двух сил, равных P и делящих пролет на три равные части (см. рис. 7.6) получим:

$$R = 2P; \quad b = l/2; \quad Rb = Pl;$$

$$\omega = \omega(M_{оп}) + \omega_p^o = Pl^2/2 \cdot +2Pl^2/9 = 6.5Pl^2/9 = 0.722Pl; \tag{7.63}$$

$$M_B = -6.5Pl/9 = 0.722Pl; \quad M_A = Pl - 0.722Pl = 0.278P.$$

Построим л.о.м. и окончательную эпюру M (рис. 7.23).

Аналогично можно построить эпюры изгибающих моментов для других вариантов загружения рассматриваемой балки.

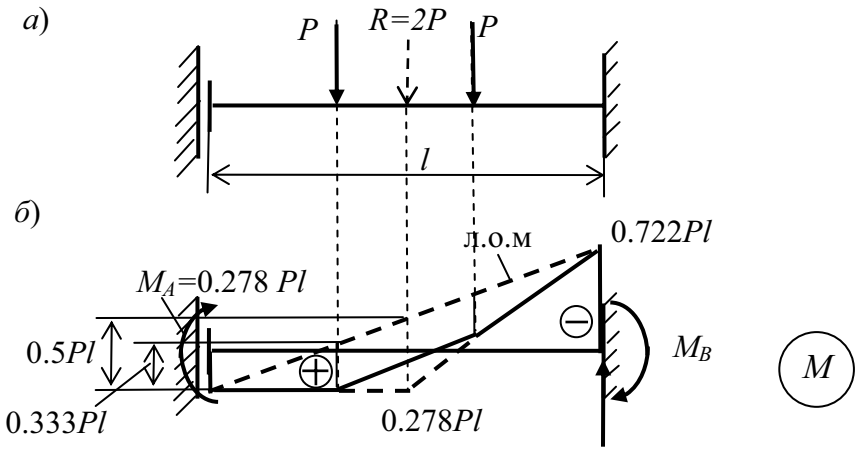


Рис. 7.23

Рассмотрим теперь одну и ту же неразрезную балку с несколькими пролетами, но с разными защемляющими опорами по концам (рис. 7.24).

Поскольку для расчета этих балок от заданной нагрузки предполагается использование метода сил с системой уравнений в виде уравнений трех моментов (см. подраздел 7.2), номера опор и пролетов для приведенных на рис. 7.24 схем балок зависят от вида левой опоры.

Защемляющей опоре с тремя связями на левом конце балки (схемы *а* и *в*) присваивается номер 1, а следующему за ней пролету – номер 2.

Это связано с тем, что при расчете балки с использованием уравнения трех моментов такая опора заменяется в расчетной схеме дополнительным пролетом бесконечно малой длины (см. рис. 7.6 и 7.8). В результате чего в расчетной схеме при заделке слева появляются опора с номером 0 и пролет с номером 1.

Опоре со «скользящей» заделкой на левом конце балки, присваивается номер 0, а следующий за ней пролет обозначается номером 1.

Рассмотрим методику расчета балки методом сил для трех вариантов расположения скользящей заделки: только слева (рис. 7.24, *б*), только справа (рис. 7.24, *в*) и слева и справа (рис. 7.24, *г*).

Будем считать, что загружен только один пролет балки: l_3 в вариантах 1; и 3; l_2 в варианте 2. Загружение выполнено временной нагрузкой в виде, представленном на рис. 7.25.

Требуется построить эпюру изгибающих моментов M в балке в предположении, что все пролеты балки имеют одинаковую жесткость на изгиб, равную EI.

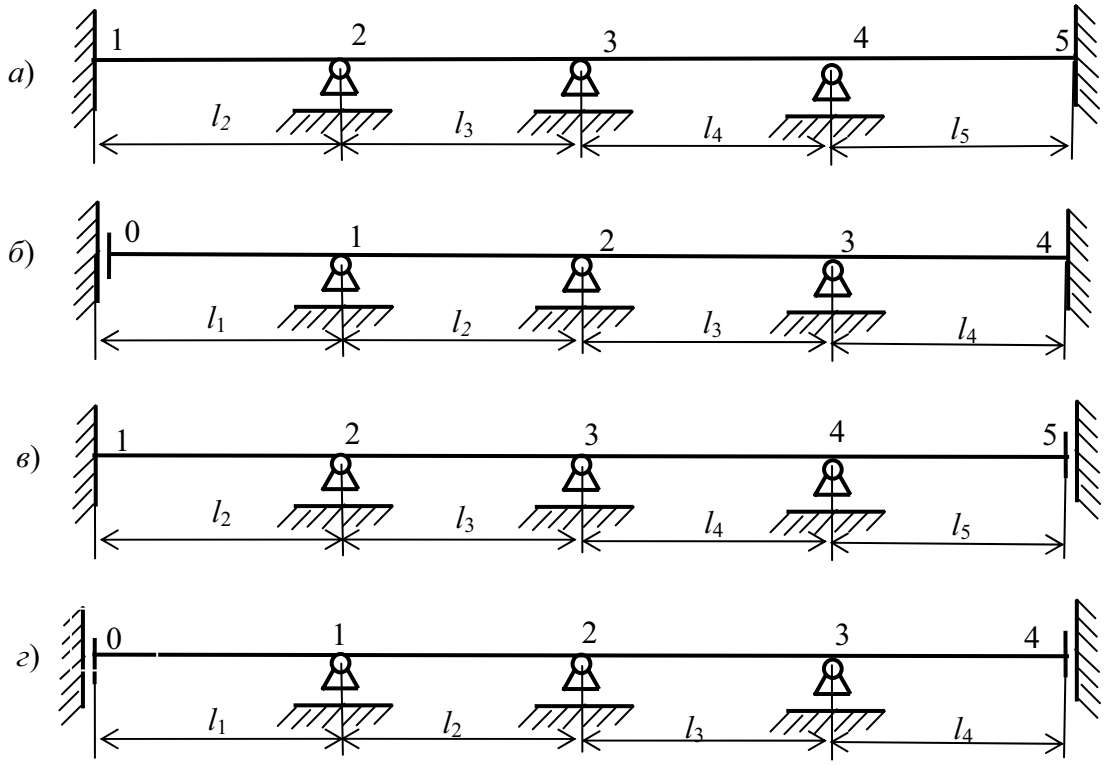


Рис. 7.24

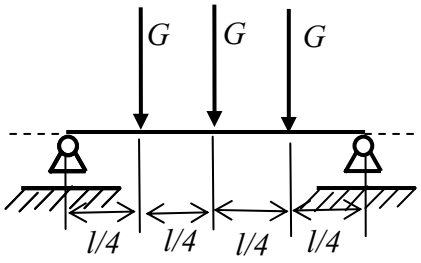


Рис.7.25

Решение методом сил выполним с использованием двух способов его реализации:

1. Решение с использованием системы уравнений метода сил;
2. Решение способом фокусных отношений опорных моментов.

7.7. Скользящая заделка имеется только на левом конце неразрезной балки

Решение с использованием системы уравнений метода сил

Выполняем его в следующей последовательности.

1. Подсчитываем степень статической неопределимости балки:

$$n = n_{\text{оп}} - 3 = 8 - 3 = 5 .$$

Балка 5 раз статически неопределима.

2. Составляем эквивалентное состояние рациональной основной системы балки для метода сил, принимая за лишние неизвестные опорные моменты в опорах 1, 2, 3 и 4 и одну лишнюю неизвестную в виде горизонтальной силы в опоре 5 (рис. 7.26).

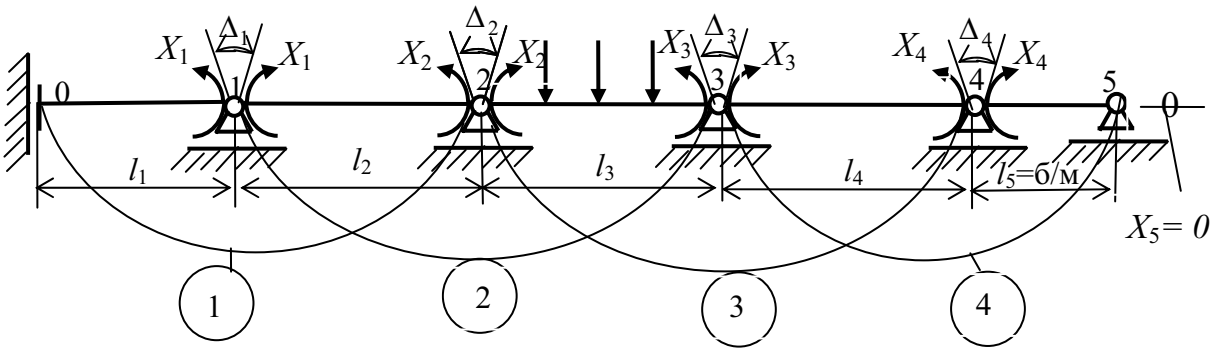


Рис. 7.26

Отметим, что опорный момент в скользящей заделке с номером 0 равен неизвестному пока моменту X_1, то – есть: $M_o = X_1$. Момент в опоре 5 равен нулю: $M_5 = 0$.

3. Исходя из условий равенства нулю перемещений по направлению удаленных связей в эквивалентном состоянии выбранной основной системы балки при расчете методом сил, составим систему уравнений метода сил для определения лишних неизвестных (усилий в удаленных «лишних» связях заданной балки).

В соответствии с выбранной основной системой для неразрезной балки (см. рис. 7.26) любое уравнение этой системы уравнений будет иметь не более трех слагаемых (см. уравнение (7.9) в подразделе 7.2).

При этом, для всех коэффициентов и свободных членов уравнений получены формулы удобные для практических расчетов неразрезных балок (см. выражения (7.10) – (7.17) в подразделе 7.2).

Для рассматриваемой балки со скользящей заделкой на левом конце балки и нагрузкой на пролете l_3 (см. рис. 7.24, *б* и рис. 7.26) отличие от приведенных формул будет состоять только в формуле для вычисления коэффициента δ_{11}. Это связано с видом эпюры M_1 (рис. 7.27, *а*).

Действительно, при использовании интеграла Максвелла – Мора с учетом только изгибных деформаций для пролетов с равной жесткостью на изгиб получим:

$$\delta_{11} = \int_L \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{l_1}{EI} + \frac{l_2}{3EI}.$$

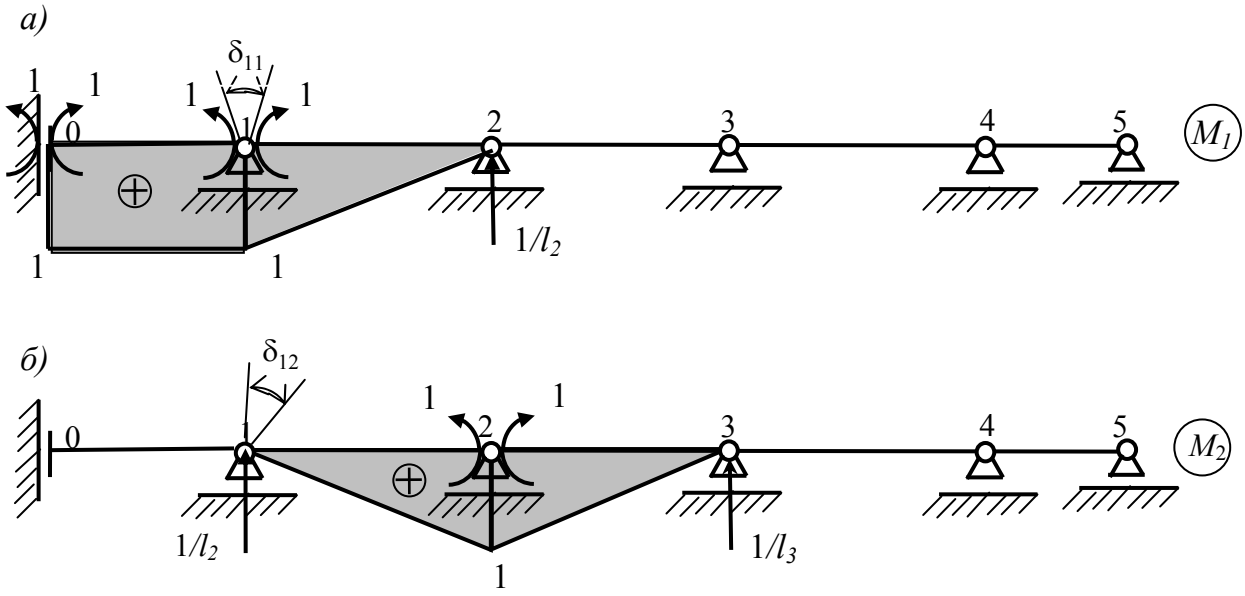


Рис. 7.27

Так как при выводе формулы трех моментов вся система уравнений умножалась на $6EI$, то получим:

$$\delta_{11} = 6l_1 + 2l_2. \tag{7.64}$$

В результате, при расчете рассматриваемой балки (см. рис. 7.24, *б*) оказывается возможным использование формул трех моментов, полученных в подразделе 7.2.

Для балки с постоянной жесткостью пролетов и с нагрузкой на пролете l_3 симметричной относительно середины пролета (см. рис. 7.25 и рис. 7.26) при наличии на левом конце балки скользящей заделки можно использовать (с учетом формулы (7.64)) уравнение трех моментов в виде (7.17).

С помощью этого уравнения получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными вида (7.65).

$$\begin{aligned}
&1)\ (i = 1 \text{ в } (6.17) \text{ с учетом } (7.64))\ (6l_1 + 2l_2)X_1 + l_2X_2 = 0;\\
&2)\ (i = 2 \text{ в } (6.17))\ l_2X_1 + 2(l_2 + l_3)X_2 + l_3X_3 = -3\omega_3;\\
&3)\ (i = 3 \text{ в } (6.17))\ l_3X_2 + 2(l_3 + l_4)X_3 + l_4X_4 = -3\omega_3;\\
&4)\ (i = 4 \text{ в } (6.17))\ l_4X_3 + 2(l_4 + l_5)X_4 + l_5X_5 = 0.
\end{aligned} \tag{7.65}$$

Пятое уравнение метода сил в эквивалентном состоянии (см. рис. 7.26) отражает равенство нулю суммарного горизонтального перемещения сечения 5 от всех лишних неизвестных и от заданной нагрузки и может быть

представлено в виде

$$5)\ \delta_{51}X_1 + \delta_{52}X_2 + \delta_{53}X_3 + \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 + \Delta_{5p} = 0.$$

Так как горизонтальное перемещение сечения 5 от всех опорных моментов и поперечной к оси балки нагрузки по формуле Максвелла – Мора равно нулю, то из уравнения получаем $X_5 = 0$.

С учетом того, что $X_5 = M_5 = 0$, и длина пролета l_5 является бесконечно малой величиной, система уравнений (7.65) примет вид:

$$\begin{aligned}
&1)\ (i = 1 \text{ в } (6.17))\ (3l_1 + 2l_2)X_1 + l_2X_2 = 0;\\
&2)\ (i = 2 \text{ в } (6.17))\ l_2X_1 + 2(l_2 + l_3)X_2 + l_3X_3 = -3\omega_3;\\
&3)\ (i = 3 \text{ в } (6.17))\ l_3X_2 + 2(l_3 + l_4)X_3 + l_4X_4 = -3\omega_3;\\
&4)\ (i = 4 \text{ в } (6.17))\ l_4X_3 + 2l_4X_4 = 0,
\end{aligned} \tag{7.66}$$

или в матричном виде:

$$\mathbf{Dx} = -\mathbf{d}_p, \tag{7.67}$$

где для выбранной основной системы балки (см. рис. 7.27)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (6l_1 + 2l_2) & l_2 & & & \\ l_2 & 2(l_2 + l_3) & l_3 & & \\ & l_3 & 2(l_3 + l_4) & l_4 \\ & & l_4 & 2l_4 \end{bmatrix}; \tag{7.68}$$

$$-\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\omega_3 \\ -3\omega_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.69}$$

Величину ω_3 вычисляем для загруженного пролета балки по формуле, приведенной на рис. 7.6, *г*.

4. Решаем систему уравнений и определяем вектор лишних неизвестных:

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}. \tag{7.70}$$

5. Строим эпюру моментов, представляя ее как сумму:

$$M = M_{\text{оп}} + M_{\text{р}}, \tag{7.71}$$

где $M_{\text{р}}$ – эпюра изгибающих моментов на загруженном пролете.

П р и м е р. Выполним числовой пример, полагая, что: $l_1 = 8$ м; $l_2 = 9$ м; $l_3 = 8$ м;

$l_4 = 6$ м; $G = 80$ кН. Тогда матрица податливости основной системы получится в виде:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 66 & 9 & & \\ 9 & 34 & 8 & \\ & 8 & 28 & 6 \\ & & 6 & 12 \end{bmatrix}. \qquad (7.72)$$

Для вычисления площади ω_3 эпюры моментов на загруженном пролете в грузовом состоянии основной системы построим эту эпюру. В общем виде эпюра от заданной нагрузки приведена на рис. 7.28.

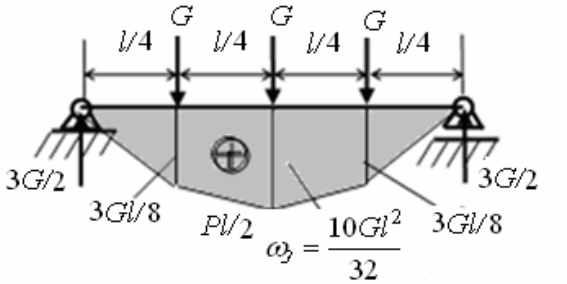


Рис. 7.28

Тогда

$$\omega_3 = \frac{10 \cdot 80 \cdot 8^2}{32} = 1600;\ 3\,\omega_3 = 4800 \qquad (7.73)$$

и вектор свободных членов получится в виде:

$$-\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -4800 \\ -4800 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (7.74)$$

После решения системы уравнений получаем:

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.7 \\ -108.0 \\ -157.4 \\ 78.7 \end{bmatrix} \text{кНм}. \qquad (7.75)$$

По найденным опорным моментам построим эпюру $M_{\text{оп}}$ (л.о.м.), а затем окончательную эпюру M (Рис. 7.29).

Решение способом фокусных отношений опорных моментов

Для построения эпюры моментов в неразрезной балке, изображенной на рис. 7.24, *б*, можно воспользоваться и способом моментных фокусных отношений, алгоритм которого для случая загружения одного пролета балки описан в подразделе 7.4.

Проанализируем особенность этого метода при наличии на левом конце балки скользящей заделки (см., например, рис. 7.24, *б*).

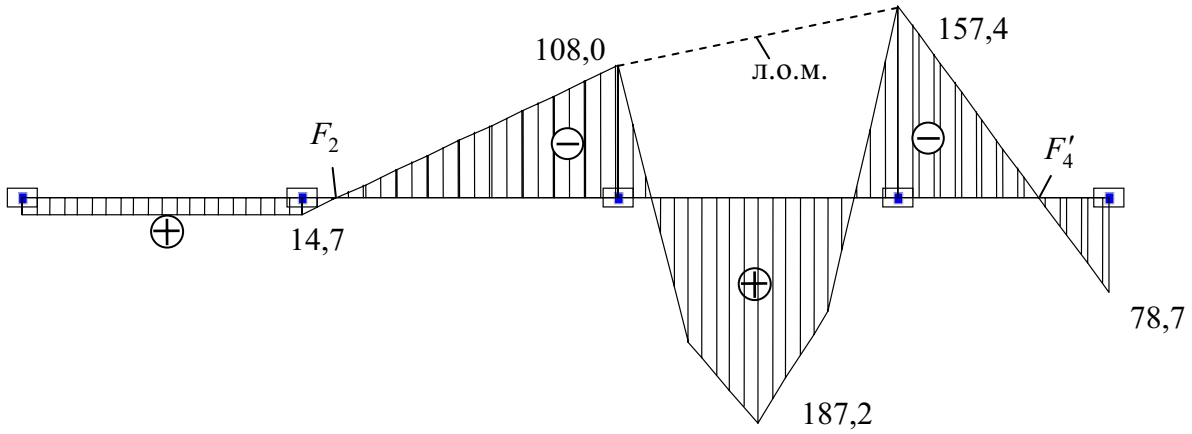


Рис. 7.29

Как и при наличии на левом конце балки шарнирной опоры, расчет начинается с определения всех левых фокусных отношений опорных моментов на незагруженных пролетах, начиная с известного левого фокусного отношения.

Построенная эпюра изгибающих моментов (см. рис. 7.29) показывает, что при отсутствии нагрузки на пролете l_1, заканчивающимся слева скользящей заделкой с номером 0, опорные моменты равны. Видно, что левая фокусная точка F_1 на пролете l_1 отсутствует. Левое фокусное отношение опорных моментов на пролете l_1 равно единице:

$$\frac{M_o}{X_1} = K_1 = 1, \tag{7.76}$$

Известно фокусное отношение опорных моментов и на втором пролете. Это видно из первого уравнения системы уравнений (7.65):

$$-\frac{X_2}{X_1} = K_2, \tag{7.77}$$

где при равных жесткостях пролетов на изгиб

$$K_2 = \frac{\delta_{11}}{\delta_{12}} = \frac{6l_1 + 2l_2}{l_2} = 2 + 6\frac{l_1}{l_2}. \tag{7.78}$$

Укажем дальнейшую последовательность расчета:

1. По известному левому фокусному отношению моментов на пролете l_2 (7.78) находим левое фокусное отношение

$$K_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3}(2 - \frac{1}{K_2}) \tag{7.79}$$

2. По известному правому фокусному отношению опорных моментов на

пролете l_4 (см. уравнение 4 в (7.65)) , равному при равных жесткостях пролетов на изгиб

$$-\frac{X_3}{X_4} = K_4' = 2, \tag{7.80}$$

находим правое фокусное отношение

$$K_3' = 2 + \frac{l_4}{l_3}(2 - \frac{1}{K_4'}) \tag{7.81}$$

3. Строим эпюру M_p на загруженном пролете балки (см. рис. 7.28) и вычисляем площадь этой эпюры ω_3

4. По формулам (7.41) определяем опорные моменты X_2 и X_3 на загруженном пролете балки:

$$X_2 = \frac{3\omega_3(K_3' - 1)}{l_3(1 - K_3K_3')} \tag{7.82}$$

$$X_3 = \frac{3\omega_3(K_3 - 1)}{l_3(1 - K_3K_3')} \tag{7.83}$$

5. По левому фокусному отношению опорных моментов на пролете слева от загруженного находим неизвестный опорный момент на пролете l_2 (7.77)

$$X_1 = -\frac{X_2}{K_2}. \tag{7.84}$$

6. Из (7.76) определяем опорный момент в скользящей заделке: $M_o = X_1$

7. По правому фокусному отношению опорных моментов на пролете справа от загруженного находим неизвестный опорный момент (7.80)

$$X_4 = -\frac{X_3}{K_4'}. \tag{7.85}$$

8. По найденным опорным моментам строим л.о.м. на балке и окончательную эпюру M (см. рис. 7.29).

П р и м е р. Выполним расчет балки с теми же параметрами, которые были взяты в предыдущем примере. Тогда, выполняя вычисления в соответствии с только что рассмотренным алгоритмом, получим:

1. Левые фокусные отношения: $K_2 = 2 + 6\frac{8}{9} = 7.333$; $K_3 = 2 + \frac{9}{8}(2 - \frac{1}{7.333}) = 4.1$;

2. Правые фокусные отношения: $K_4' = 2$; $K_3' = 2 + \frac{6}{8}(2 - \frac{1}{2}) = 3.125$.

3. Опорные моменты на загруженном пролете:

$$X_2 = \frac{3 \cdot 1600(3.125 - 1)}{8(1 - 3.125 \cdot 4.1)} = -107{,}9 \text{ кНм}; \qquad X_3 = \frac{3 \cdot 1600(4.1 - 1)}{8(1 - 3.125 \cdot 4.1)} = -157.5 \text{ кНм}.$$

4. Опорные моменты слева от загруженного пролета:

$$X_1 = -\frac{(-107.9)}{7.333} = 14.7 \text{ кНм}; \quad M_o = X_1 = 14.7 \text{ кНм}.$$

5. Опорные моменты справа от загруженного пролета:

$$X_4 = -\frac{X_3}{K_4'} = \frac{(-157.5)}{2} = 78.7 \text{ кНм}.$$

Результаты расчета обеими способами метода сил практически совпадают.

7.8. Скользящая заделка имеется только на правом конце неразрезной балки

Решение с использованием системы уравнений метода сил

Выполняем его в последовательности, аналогичной использованной в варианте 1.

1. Подсчитываем степень статической неопределимости балки:

$$n = n_{\text{оп}} - 3 = 8 - 3 = 5 .$$

Балка 5 раз статически неопределима.

2. Составляем эквивалентное состояние рациональной основной системы балки для метода сил, принимая за лишние неизвестные опорные моменты в опорах с номерами 1, 2, 3 и 4 и одну лишнюю горизонтальную силу в опоре 0 (рис. 7.30).

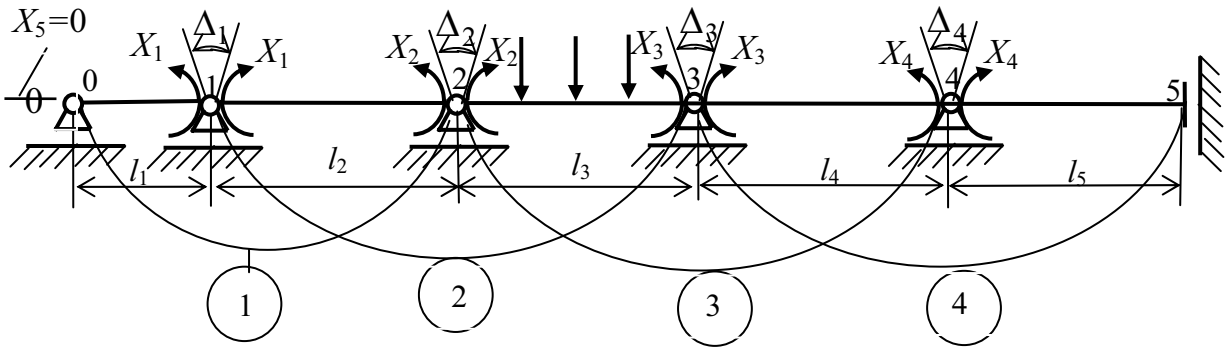


Рис. 7.30

3. Исходя из условий равенства нулю перемещений по направлению удаленных связей в эквивалентном состоянии выбранной основной системы балки при расчете методом сил, составим систему уравнений метода сил для определения лишних неизвестных (усилий в удаленных «лишних» связях заданной балки).

Для первых трех уравнений метода сил для расчета балки с постоянной жесткостью пролетов и с симметричной нагрузкой на них относительно середины пролетов используем общую формулу трех моментов (7.17):

1) ($i = 1$ в (6.17)) $2l_2X_1 + l_2X_2 = 0$;

2) ($i = 2$ в (6.17)) $l_2X_1 + 2(l_2 + l_3)X_2 + l_3X_3 = -3\omega_3$; (7.86)

3) ($i = 3$ в (6.17)) $l_3X_2 + 2(l_3 + l_4)X_3 + l_4X_4 = -3\omega_3$;,

Четвертое уравнение получается как уравнение метода сил для четвертого и пятого смежных пролетов основной системы метода сил балки (см. рис. 7.30).

$$4)\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 = 0 \tag{7.87}$$

Оно отражает равенство нулю взаимного угла поворота Δ_4 сечений основной системы балки, подходящих к опоре 4. При этом очевидно (см. подраздел 7.2), что взаимный угол поворота этих сечений, вызванный единичным моментом $X_3 = 1$ будет определяться по формуле Максвелла – Мора

$$\delta_{43} = \int_L \frac{M_3 M_4}{EI} dx = \frac{l_4}{6EI}, \tag{7.88}$$

где эпюры M_3 и M_4 будут эпюрами изгибающих моментов на пролете l_4 от единичных моментов $X_3 = 1$ и $X_4 = 1$ (рис. 7.31)

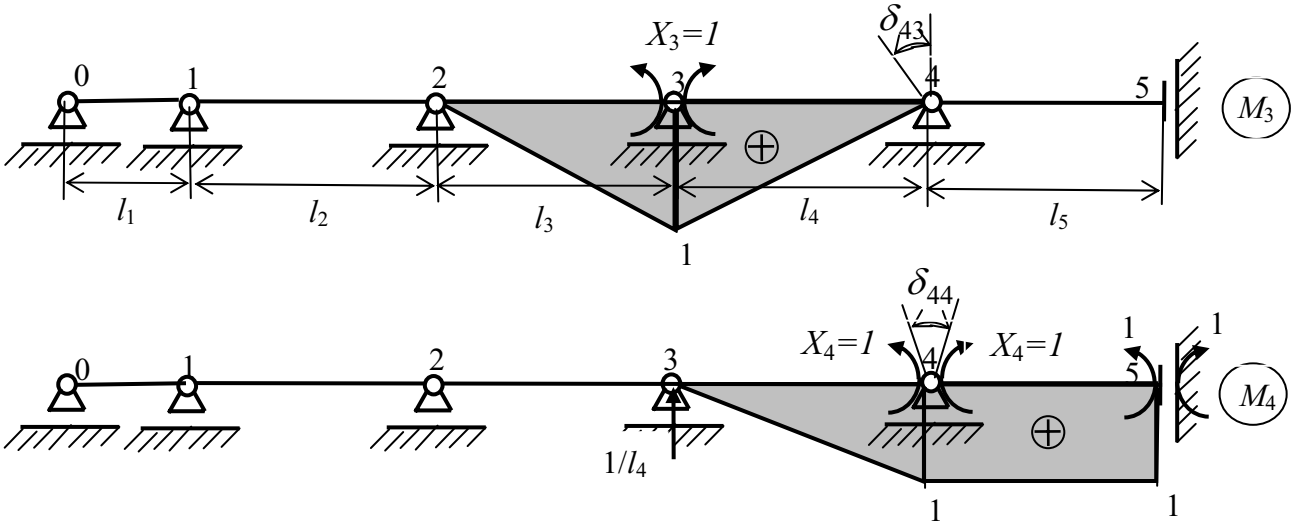


Рис. 7.31

Взаимный угол поворота сечений, подходящих к опоре 4, от единичного момента $X_4 = 1$ определится из интеграла Максвелла – Мора

$$\delta_{44} = \int_L \frac{M_4 M_4}{EI} dx = \frac{l_4}{3EI} + \frac{l_5}{EI}. \tag{7.89}$$

Таким образом, четвертое уравнение метода сил (7.87) в выбранной основной системе балки после умножения его на 6*EI*, как это было сделано в уравнении 3-х моментов (см. подраздел 7.2), получится в виде:

$$4)\ l_4 X_3 + (2l_4 + 6l_5) X_4 = 0\,. \tag{7.90}$$

Примечание. Так как номер i опоры балки, для которой составляется уравнение вида (7.90) будет изменяться для неразрезных балок с различным числом пролетов, то для вычисления коэффициента δ_{ii} при наличии скользящей опоры на правом конце балки можно записать формулу

$$\delta_{ii} = (2l_i + 6l_{i+1})\,. \tag{7.91}$$

В рассматриваемом примере при $i = 4$ (см. рис. 7.31) $\delta_{44} = (2l_4 + 6l_5)$.

Пятое уравнение метода сил в эквивалентном состоянии (см. рис. 7.30) отражает равенство нулю суммарного горизонтального перемещения по направлению пятой удаленной связи от всех лишних неизвестных и от заданной нагрузки и может быть представлено в виде

$$5)\ \delta_{51} X_1 + \delta_{52} X_2 + \delta_{53} X_3 + \delta_{54} X_4 + \delta_{55} X_5 + \Delta_{5p} = 0\,.$$

Так как горизонтальное перемещение опоры с номером 0 от всех опорных моментов и поперечной к оси балки нагрузки по формуле Максвелла – Мора равно нулю, то из уравнения получаем $X_5 = 0$.

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо решить систему полученных выше 4 уравнений с 4 неизвестными.

В матричной форме эта система уравнений метода сил записывается в виде (7.67). В ней вектор свободных членов при загружении пролета l_2 как и в предыдущем варианте имеет вид (7.69), а матрица податливости **D** для выбранной основной системы балки (см. рис. 7.30) примет вид:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2l_2 & l_2 & & \\ l_2 & 2(l_2 + l_3) & l_3 & \\ & l_3 & 2(l_3 + l_4) & l_4 \\ & & l_4 & (2l_4 + 6l_5) \end{bmatrix}. \tag{7.92}$$

Величину ω_3 вычисляем для загруженного пролета балки (см. рис. 7.28) по формуле, приведенной на этом рисунке. При других схемах загружения пролета соответствующую формулу можно взять на рис. 7.6, *г*.

4. Решаем систему уравнений и определяем вектор лишних неизвестных (7.70).

5. Строим эпюру моментов, представляя ее как сумму по формуле (7.71).

П р и м е р. Выполним числовой пример, полагая, что: $l_2 = 6$ м; $l_3 = 8$ м; $l_4 = 9$ м; $l_5 = 8$ м; $G = 80$ кН. Тогда матрица податливости основной системы получится в виде:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & & \\ 6 & 28 & 8 & \\ & 8 & 34 & 9 \\ & & 9 & 66 \end{bmatrix}. \qquad (7.93)$$

Для вычисления площади ω_3 эпюры моментов на загруженном пролете в грузовом состоянии основной системы, как и в предыдущем варианте, используем рис. 7.28:

$$\omega_3 = \frac{10 \cdot 80 \cdot 8^2}{32} = 1600\,;\ 3\,\omega_3 = 4800. \qquad (7.94)$$

Тогда вектор свободных членов получится в виде:

$$-\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -4800 \\ -4800 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (7.95)$$

После решения системы уравнений получаем:

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78.7 \\ -157.4 \\ -108.0 \\ 14.7 \end{bmatrix} \text{кНм}. \qquad (7.96)$$

По полученным опорным моментам построим эпюру $M_{\text{оп}}$ (л.о.м.), а затем окончательную эпюру M (Рис. 7.32).

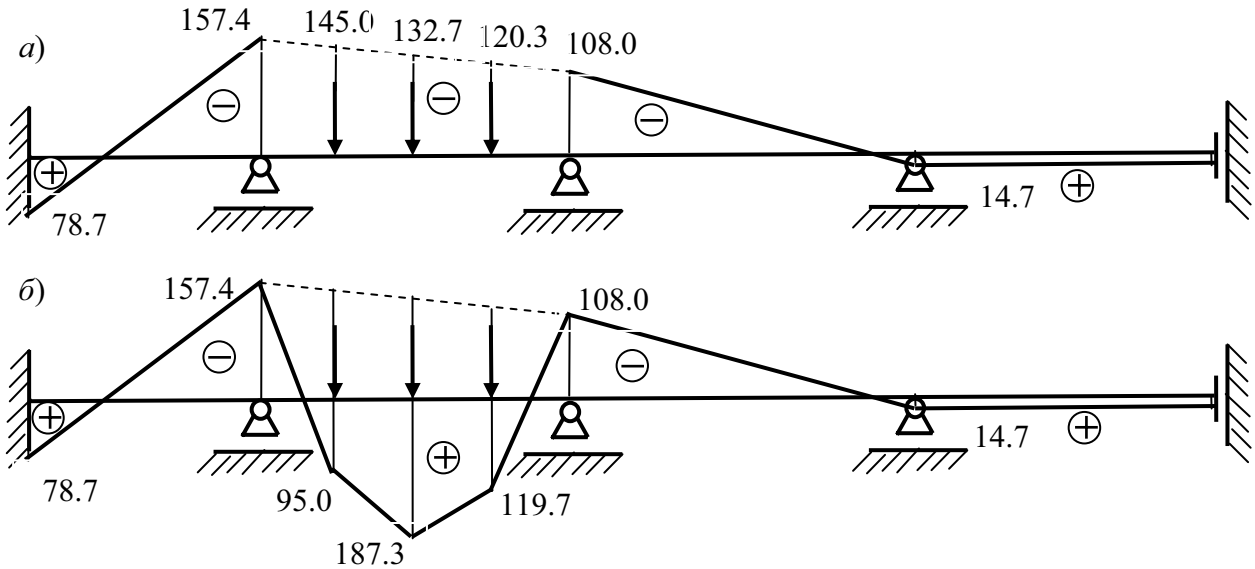


Рис. 7.32

Решение с использованием способа моментных фокусных отношений

Для построения эпюры моментов в неразрезной балке, изображенной на рис. 7.32, можно воспользоваться и способом моментных фокусных отношений, алгоритм которого для случая загружения одного пролета балки описан в подразделе 7.4 и в предыдущем примере для варианта 1.

1. По известному левому фокусному отношению моментов на пролете l_2 равному $K_2 = 2$ находим левое фокусное отношение

$$K_3 = 2 + \frac{i_3}{i_2}(2 - \frac{1}{K_2}). \tag{7.97}$$

При равной жесткости пролетов на изгиб

$$K_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3}(2 - \frac{1}{K_2}). \tag{7.98}$$

2. По известному правому фокусному отношению опорных моментов на пролете l_4 (см. в системе уравнений метода сил уравнение 4 (7.90)), равному при равных жесткостях пролетов на изгиб

$$-\frac{X_3}{X_4} = K'_4 = 2 + 6\frac{l_5}{l_4} \tag{7.99}$$

находим (см. [1]) правое фокусное отношение

$$K'_3 = 2 + \frac{i_3}{i_4}(2 - \frac{1}{K'_4}). \tag{7.100}$$

При равной жесткости пролетов на изгиб

$$K'_3 = 2 + \frac{l_4}{l_3}(2 - \frac{1}{K'_4}). \tag{7.101}$$

3. Строим эпюру M_p на загруженном пролете балки (см. рис. 7.28) и вычисляем площадь этой эпюры ω_3.

4. По формулам (7.41) определяем опорные моменты X_2 и X_3 на загруженном пролете балки:

$$X_2 = \frac{3\omega_3(K'_3 - 1)}{l_3(1 - K_3K'_3)}; \tag{7.102}$$

$$X_3 = \frac{3\omega_3(K_3 - 1)}{l_3(1 - K_3K'_3)}. \tag{7.103}$$

5. По левому фокусному отношению опорных моментов на пролете слева от загруженного находим неизвестный опорный момент

$$X_1 = -\frac{X_2}{K_2} = -\frac{X_2}{2}. \qquad (7.104)$$

6. По правому фокусному отношению опорных моментов на пролете справа от загруженного находим неизвестный опорный момент

$$X_4 = -\frac{X_3}{K_4'}. \qquad (7.105)$$

7. Очевидно, что $M_5 = X_4$.

8. По найденным опорным моментам строим л.о.м. на балке (см. рис. 7.32, *а*) и окончательную эпюру M (см. рис. 7.32, *б*).

П р и м е р. Выполним расчет балки с теми же параметрами, которые были взяты при расчете балки первым способом. Тогда, выполняя вычисления в соответствии с только что рассмотренным алгоритмом, получим:

1.Левые фокусные отношения: $K_2 = 2$; $K_3 = 2 + \frac{6}{8}(2 - \frac{1}{2}) = 3.125$.

2. Правые фокусные отношения: $K_4' = 2 + 6\frac{8}{9} = 7.333$; $K_3' = 2 + \frac{9}{8}(2 - \frac{1}{7.333}) = 4.1$.

3. Опорные моменты на загруженном пролете:

$$X_2 = \frac{3 \cdot 1600(4.1 - 1)}{8(1 - 3.125 \cdot 4.1)} = -157.5 \text{ кНм}; \qquad X_3 = \frac{3 \cdot 1600(3.125 - 1)}{8(1 - 3.125 \cdot 4.1)} = -107{,}9.$$

4.Опорные моменты слева от загруженного пролета:

$$X_1 = -\frac{X_2}{K_2} - \frac{(-157.5)}{2} = 78.7$$

5. Опорные моменты справа от загруженного пролета:

$$X_4 = -\frac{X_3}{K_4'} = -\frac{(-107.9)}{7.333} = 14.7 \text{ кНм}; \quad M_5 = X_4 = 14.7 \text{ кНм}.$$

Результаты расчета в варианте 2 расположения скользящей заделки обеими способами метода сил практически совпадают.

7.9. Скользящая заделка имеется на левом и на правом концах неразрезной балки

Решение с использованием системы уравнений метода сил

Выполняем его в последовательности, аналогичной использованной в вариантах 1 и 2.

1. Подсчитываем степень статической неопределимости балки:

$$n = n_{\text{оп}} - 3 = 7 - 3 = 4.$$

Балка 4 раза статически неопределима.

2. Составляем эквивалентное состояние рациональной основной системы балки для метода сил, принимая за лишние неизвестные опорные моменты в

опорах с номерами 1, 2, 3 (рис. 7.33). Четвертую лишнюю связь в виде горизонтальной силы в опоре 0 или в опоре 4 не удаляем, так как усилие в ней от рассматриваемой нагрузки равно нулю.

3. Исходя из условий равенства нулю перемещений по направлению удаленных связей в эквивалентном состоянии выбранной основной системы балки при расчете методом сил, составим систему уравнений метода сил для определения лишних неизвестных (усилий в удаленных «лишних» связях заданной балки).

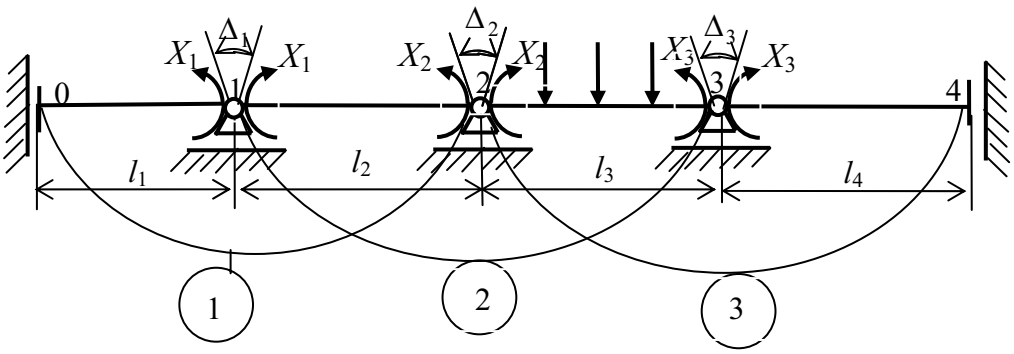


Рис. 7.33

Для составления системы уравнений метода сил при расчете балки с постоянной жесткостью пролетов и с нагрузкой на пролете l_3 симметричной относительно середины пролета (см. рис. 7.28) используем формулу трех моментов (7.17).

При этом для вычисления коэффициента δ_{11} в связи с наличием скользящей заделки на левом конце балки используем формулу (7.64), а для вычисления коэффициента δ_{33} в связи с наличием скользящей заделки на правом конце балки используем выражение (7.91):

1) ($i = 1$ в (6.17) с учетом (15)): $(6l_1 + 2l_2)X_1 + l_2X_2 = 0$

2) ($i = 2$ в (6.17)): $l_2X_1 + 2(l_2 + l_3)X_2 + l_3X_3 = -3\omega_3$; (7.106)

3) ($i = 3$ в (6.17) с учетом (41)): $l_3X_2 + (2l_3 + 6l_4)X_3 = -3\omega_3$.

В матричном виде эта система уравнений имеет такой же вид, как и в предыдущих вариантах (7.67). Сами же матрицы имеют вид:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (6l_1 + 2l_2) & l_2 & \\ l_2 & 2(l_2 + l_3) & l_3 \\ & l_3 & (2l_3 + 6l_4) \end{bmatrix}; \qquad (7.107)$$

$$-\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\omega_3 \\ -3\omega_3 \end{bmatrix}. \qquad (7.108)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}. \qquad (7.109)$$

4. Решаем систему уравнений (7.67) при матрицах в виде (7.107), (7.108) и определяем вектор лишних неизвестных (7.109).

5. Строим эпюру моментов, представляя ее как сумму по формуле (7.71).

П р и м е р. Выполним числовой пример, полагая, что: $l_1 = 8$ м; $l_2 = 9$ м; $l_3 = 8$ м; $l_4 = 6$ м; $G = 80$ кН. Тогда матрица податливости основной системы получится в виде:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 66 & 9 & 0 \\ 9 & 34 & 8 \\ 0 & 8 & 52 \end{bmatrix}. \qquad (7.110)$$

Для вычисления площади ω_3 эпюры моментов на загруженном пролете в грузовом состоянии основной системы как и в предыдущем варианте используем рис. 7.28:

$$\omega_3 = \frac{10 \cdot 80 \cdot 8^2}{32} = 1600\,;\ 3\,\omega_3 = 4800. \qquad (7.111)$$

Тогда вектор свободных членов получится в виде:

$$-\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -4800 \\ -4800 \end{bmatrix}. \qquad (7.112)$$

После решения системы уравнений получаем:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.6 \\ -128.8 \\ -72.5 \end{bmatrix} \text{кНм}. \qquad (7.113)$$

По полученным опорным моментам построим эпюру $M_{\text{оп}}$ (л.о.м.), а затем окончательную эпюру M (Рис. 7.34).

Решение с использованием способа моментных фокусных отношений

Для построения эпюры моментов в неразрезной балке, изображенной на рис. 7.34, можно воспользоваться и способом моментных фокусных отношений, алгоритм которого для случая загружения одного пролета балки описан в подразделе 7.4 и в предыдущих примерах для вариантов 1 и 2.

Проанализируем особенность этого метода при наличии скользящей заделки на обоих концах балки (см. рис. 7.24, *г*).

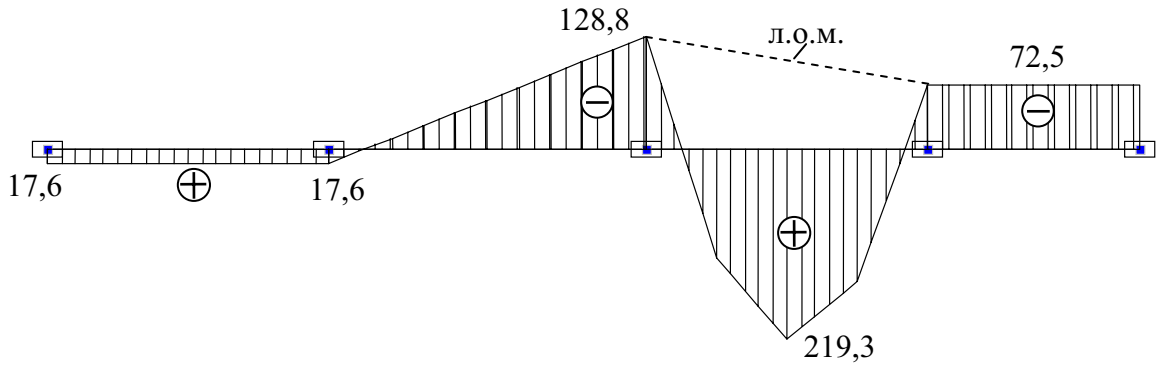


Рис. 7.34

Построенная эпюра изгибающих моментов (см. рис. 7.34) показывает, что при отсутствии нагрузки на пролете l_1, заканчивающимся слева скользящей заделкой с номером 0, опорные моменты равны. Видно, что левая фокусная точка F_1 на пролете l_1 отсутствует. Левое фокусное отношение опорных моментов на пролете l_1 равно единице:

$$\frac{M_o}{X_1} = K_1 = 1, \tag{7.114}$$

Известно фокусное отношение опорных моментов и на втором пролете. Это видно из первого уравнения системы уравнений (7. 65):

$$-\frac{X_2}{X_1} = K_2, \tag{7.115}$$

где при равных жесткостях пролетов на изгиб

$$K_2 = \frac{\delta_{11}}{\delta_{12}} = \frac{6l_1 + 2l_2}{l_2} = 2 + 6\frac{l_1}{l_2}. \tag{7.116}$$

1. По известному левому фокусному отношению моментов на пролете l_2 равному K_2 (7.116) при равной жесткости пролетов на изгиб находим левое фокусное отношение

$$K_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3}(2 - \frac{1}{K_2}). \tag{7.117}$$

2. Правое фокусное отношение опорных моментов на пролете l_3 (см. в системе уравнений метода сил уравнение 4 (7.90)) при равных жесткостях пролетов на изгиб известно, так как определяется из выражения

$$-\frac{X_2}{X_3} = K_3' = 2 + 6\frac{l_4}{l_3} \qquad (7.118)$$

3. Строим эпюру M_p на загруженном пролете балки (см. рис. 7.28) и вычисляем площадь этой эпюры ω_3.

4. По формулам (7.4) определяем опорные моменты X_2 и X_3 на загруженном пролете l_3 балки:

$$X_2 = \frac{3\omega_3(K_3' - 1)}{l_3(1 - K_3K_3')}; \qquad (7.119)$$

$$X_3 = \frac{3\omega_3(K_3 - 1)}{l_3(1 - K_3K_3')}. \qquad (7.120)$$

5. По левому фокусному отношению опорных моментов на пролете слева от загруженного (7.115) находим неизвестный опорный момент

$$X_1 = -\frac{X_2}{K_2}. \qquad (7.121)$$

6. Опорный момент в скользящей заделке с номером 0 равен опорному моменту X_1 (7.114).

7. Опорный момент M_4 в правой скользящей заделке равен опорному моменту X_3 (7.120) на загруженном пролете.

8. По найденным опорным моментам строим л.о.м. на пролетах балки и окончательную эпюру M (см. рис. 7.34).

П р и м е р. Выполним расчет балки с теми же параметрами, которые были взяты при расчете балки первым способом. Тогда, выполняя вычисления в соответствии с только что рассмотренным алгоритмом, получим:

1. Левые фокусные отношения: $K_1 = 1$ $K_2 = 2 + 6\frac{8}{9} = 7.333$; $K_3 = 2 + \frac{9}{8}(2 - \frac{1}{7.333}) = 4.1$;

2. Правые фокусные отношения: $K_4' = 1$; $K_3' = 2 + 6\frac{6}{8} = 6.5$.

3. Опорные моменты на загруженном пролете:

$$X_2 = \frac{3 \cdot 1600(6.5 - 1)}{8(1 - 6.5 \cdot 4.1)} = -128.65\,\text{кНм}; \qquad X_3 = \frac{3 \cdot 1600(4.1 - 1)}{8(1 - 6.5 \cdot 4.1)} = -72.51\,\text{кНм}.$$

4. Опорные моменты слева от загруженного пролета:

$$X_1 = -\frac{(-128.65)}{7.333} = 17.54\,\text{кНм}; \quad M_o = X_1 = 17.54\,\text{кНм}.$$

5. Опорный момент справа от загруженного пролета:

$$M_4 = X_3 = 17.54\ \text{кНм}.$$

Результаты расчета обеими способами метода сил практически совпадают.

7.10. Применение графического способа С.С. Голушкевича для балок, имеющих скользящие заделки

Рассмотрим неразрезную балку (рис. 7.35, *а*), для которой в подразделе 7.7 уже была построена эпюра изгибающих моментов методом сил с использованием системы уравнений, составленной с помощью формулы трех моментов и с использованием способа моментных фокусных отношений (рис. 7.29).

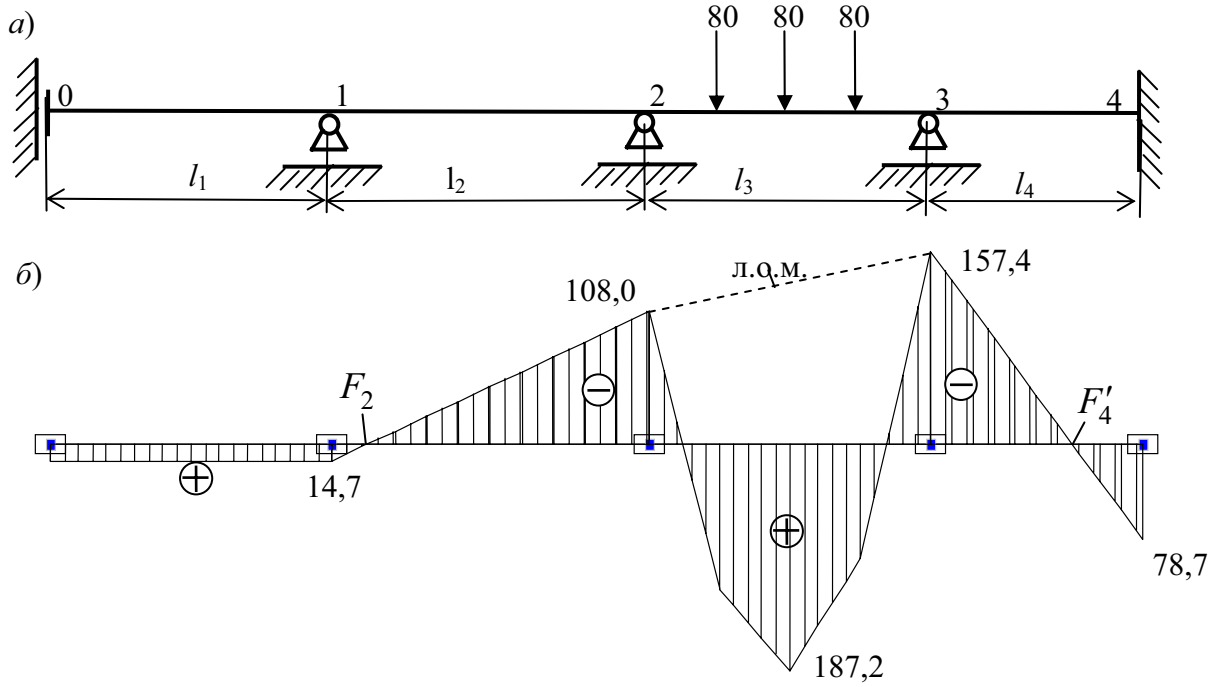


Рис. 7.35

Анализируя эпюру изгибающих моментов, видим, что поскольку на крайнем левом пролете неразрезной балки, имеющем левую опору в виде скользящей заделки, при отсутствии нагрузки на пролете эпюра изгибающих моментов постоянна (отсутствует поперечная сила в пролете балки), то левая и правая фокусные точки отсутствуют.

В связи с этим получим изменение при применении теоремы об узле, доказанной в подразделе 7.5. Это продемонстрировано на рис. 7.36.

«Теорема об узле» при скользящей заделке на левом конце неразрезной балки

Изобразим два крайних слева незагруженных пролета неразрезной балки, имеющей скользящую заделку на левом конце балки (рис. 7.36).

Нагрузкой на пролеты является опорный момент m, приложенный на опоре 2 (на рис. 7.36, *б* таким моментом является момент -108 кН·м).

Изменение в «Теореме об узле» при наличии в неразрезной балке скользящей опоры на крайней левой опоре будет только для опорного узла 1 и формулируется следующим образом:

Изгибающие моменты z_1 и z_2 в ближайших третях пролетов 1 и 2 неразрезной балки, подходящих к опоре с номером 1, при указанной нагрузке соответственно

пропорциональны половине погонной жесткостям пролета 1 и жесткости пролета 2 при условиях, что пролеты свободны от нагрузки и опора 1 не имеет линейного перемещения перпендикулярного оси балки (см. рис. 7.36, а).

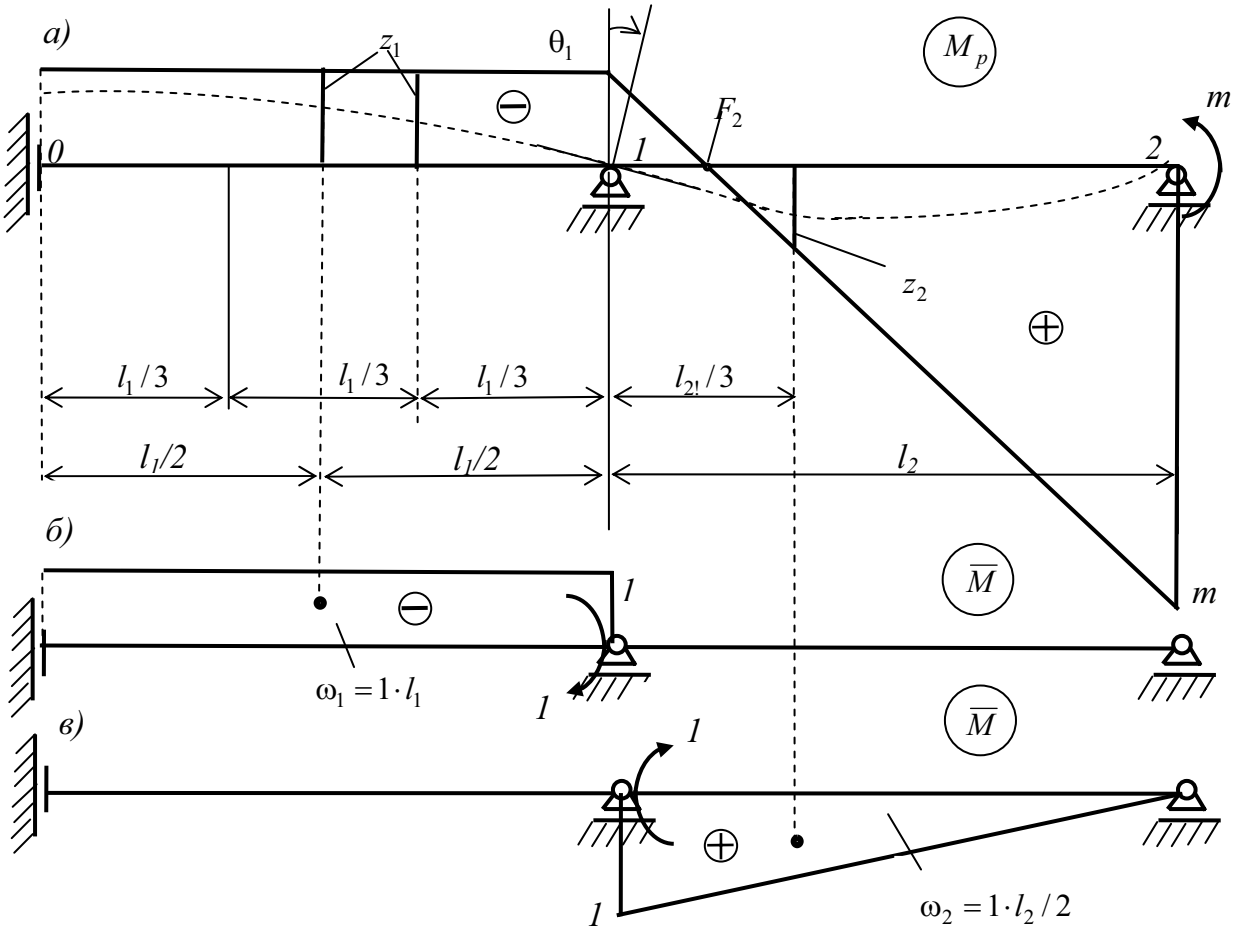


Рис. 7.36

Иначе говоря (см. рис.7.36), наблюдается соотношение:

$$\frac{z_1}{0.5 i_1} = \frac{z_2}{i_2}, \tag{7.122}$$

где z_1 и z_2 представляют собой ординаты эпюры изгибающих моментов (от заданной нагрузки в виде момента m) в сечениях балки расположенных от опоры 1 на расстояниях одной трети длины соответствующего пролета; $i_1 = EI_1 / l_1$ и $i_2 = EI_2 / l_2$ являются погонными жесткостями соответственно пролетов 1 и 2.

Для доказательства этого поставим задачу определения угла поворота θ_1 сечения балки над опорой 1. Выполним эту задачу с помощью интеграла Максвелла – Мора. Причем, так как это сечение является общим для обоих пролетов, формулу Максвелла – Мора можно вычислить, приложив в узле 1 единичный момент во вспомогательном состоянии либо к пролету 1 (см. рис. 7.36, *б*), либо к пролету 2 (см. рис. 7.36, *в*). Тогда будут равны интегралы:

$$\theta_1 = \int_{l_1} \frac{\overline{M} \cdot M_p}{EI} dx = \int_{l_2} \frac{\overline{M} \cdot M_p}{EI} dx . \tag{7.123}$$

Первый интеграл отражает использование вспомогательного состояния, представленного на рис. 7.36, *б;* второй интеграл – на рис. 7.36, *в*.

В результате вычисления этих интегралов Максвелла – Мора с помощью правила А.Н. Верещагина, получим:

$$\theta_1 = \frac{\omega_1 \cdot z_1}{EI_1} = \frac{\omega_2 \cdot z_2}{EI_2}, \tag{7.124}$$

или

$$\theta_1 = \frac{(1 \cdot l_1) \cdot z_1}{EI_1} = \frac{(1 \cdot l_2 / 2) \cdot z_2}{EI_2}. \tag{7.125}$$

Так как $i_1 = EI_1 / l_1$ и $i_2 = EI_2 / l_2$ представляют собой погонные жесткости пролетов, отсюда можно записать, что

$$2\theta_1 = \frac{z_1}{0.5 i_1} = \frac{z_2}{i_2}. \tag{7.126}$$

Это и требовалось доказать. Можно подобрать момент m таким, что угол поворота будет равен $2\theta_1 = 1$. Тогда получим равенства:

$$z_1 = 0.5 i_1; \quad z_2 = i_2. \tag{7.127}$$

Применение теоремы об узле для определения фокусных точек на пролетах неразрезной балки, имеющей скользящую заделку на левом конце балки

Применение теоремы об узле для определения фокусных точек в неразрезной балке, имеющей на левом конце балки шарнирную (рис. 7.37, *а*) или защемляющую опору с тремя связями (рис. 7.37, *б*) известно (см. подраздел 7.5). Рассмотрим особенность применения этой теоремы в варианте, когда на левой опоре имеется скользящая заделка (рис. 7.37, *в*).

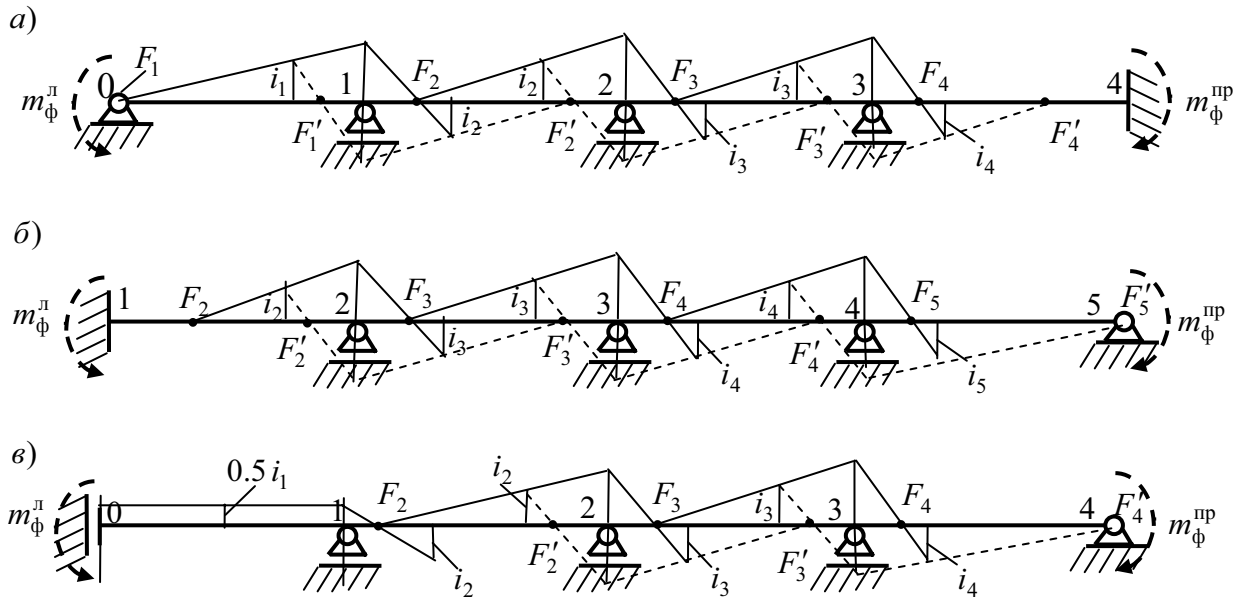


Рис. 7.37

Определение левых фокусных точек. В вариантах неразрезной балки с крайними слева шарнирной опорой (см. рис. 7.37, *а*) и полной (с тремя связями) заделкой (см.

рис. 7.37, *б*) на первом слева пролете уже имеются известные левые фокусные точки. При шарнирной опоре слева левая фокусная точка F_1 будет находиться в крайней шарнирной опоре. Так как эта фокусная точка относится к пролету с номером 1, ее обозначение имеет индекс 1. При защемляющей опоре слева известно, что левая фокусная точка F_2 пролета с номером 2 будет находиться на расстоянии равном $l_2/3$ от заделки.

По этим известным левым фокусным точкам, применяя известную теорему об узле С.С. Голушкевича (см. подраздел 7.5) последовательно к опорным узлам 1, 2, 3 при шарнирной опоре слева, найдем все остальные левые фокусные точки на пролетах 2, 3, 4. Для варианта с полной защемляющей опорой слева аналогично, найдем левые фокусные точки в пролетах 3, 4, 5.

При наличии скользящей заделки на левом конце неразрезной балки (см. рис. 7.37, *в*) для определения левой фокусной точки F_2 к опорному узлу 1 необходимо применить полученный выше новый вариант теоремы об узле.

Для его использования при определении левой фокусной точки F_2 необходимо на пролете 1 провести постоянную эпюру изгибающих моментов с ординатой равной 0.5 i_1.

Получив опорный момент на опоре 1, проводим л.о.м. на пролете 2 через ординату равную i_2 в ближайшей к узлу 1 трети второго пролета. Этим построением и определится положение левой фокусной точки F_2 на пролете 2.

Все остальные левые фокусные точки (в данном примере на пролетах 3 и 4) определяются применением обычной теоремы об узле (см. предыдущие варианты на рис. 7.37).

Обратим внимание на то, что во всех вариантах при определении каждой левой фокусной точки справа к балке прикладывается каждый раз новый фиктивный момент $m_{\text{ф}}^{\text{пр}}$, который считается подобранным так, чтобы применить теорему об узле к соответствующему опорному узлу.

Определение правых фокусных точек. Поскольку на правом конце, рассматриваемых на рис. 7.37 неразрезных балок, нет скользящих заделок, то на крайнем справа пролете имеется уже известная правая фокусная точка F_4' (на крайнем справа пролете, имеющем номер 4), или F_5' – в варианте, где крайний справа пролет имеет номер 5.

Поэтому для определения правых фокусных точек на других пролетах последовательно применяется обычная теорема об узле (см. подраздел 7.5).

Для ее применения к конкретному опорному узлу к балке справа прикладывается каждый раз новый фиктивный момент $m_{\text{ф}}^{\text{лев}}$. Он считается подобранным так, что к рассматриваемому опорному узлу можно применить характерное для теоремы об узле графическое построение, аналогичное рассмотренному выше при определении левых фокусных точек.

Правые фокусные точки определятся стандартным приемом на всех пролетах рассматриваемых на рис. 4 балок, кроме пролета, имеющего скользящую заделку. На этом пролете правой фокусной точки (также как и левой) – нет. В этом варианте последней определяемой правой фокусной точкой является точка F_2'.

Определение ординат л.о.м. в сечениях пролетов балки, где расположены левые фокусные точки.

Для построения л.о.м. эпюры изгибающих моментов пролетах от какой-то заданной нагрузки (см., например, рис. 7.35, *б*) на каждом пролете необходимо знать любые две ординаты л.о.м.

В графическом способе С.С. Голушкевича для каждого пролета неразрезной балки определяются две ординаты л.о.м. в сечениях балки, где расположены левые и правые фокусные точки.

При этом (так же как при определении фокусных точек) оказываются уже известными ординаты л.о.м. в сечениях балки, где расположена известная левая фокусная точка на самом левом пролете балки и где расположена известная правая фокусная точка на самом правом пролете.

Далее (так же как при определении фокусных точек) используется алгоритм последовательного определения ординат л.о.м. над уже определенными левыми фокусными точками (ход слева направо) и над уже определенными правыми фокусными точками (ход справа налево).

Для этого используется основное свойство фокусных точек и теорема о стержне (см. рис. 7.15 в подразделе 7.5).

Однако, наличие крайнего левого пролета со скользящей заделкой (см. вариант балки, изображенный на рис. 7.35, *а*), на котором нет ни левой, ни правой фокусной точки, не позволяет использовать на этом пролете теорему о стержне С. С. Голушкевича. Тем не менее, и в этом варианте оказывается возможным графическое построение л.о.м. на этом и на втором пролете для получения первой необходимой ординаты $c_2 = M_{F_2}$ л.о.м. в сечении балки, в котором расположена левая фокусная точка F_2.

Это подтверждается анализом примеров расчета однопролетной балки (см. рис. 7.19 – рис. 7.23) со скользящей заделкой на ее левом конце (A) и с полной защемляющей опорой на правом конце (*B*), рассмотренных при различных нагрузках на пролет.

Действительно, как показано в примерах, л.о.м. от заданной на балке перпендикулярной к оси балки нагрузки с равнодействующей R можно построить эпюру M по двум ординатам (M_A и M_B) на опорах балки.

Для иллюстрации особенности применения теоремы о стержне С.С. Голушкевича для неразрезных балок, имеющих слева скользящую заделку, рассмотрим сначала неразрезную балку с полной заделкой слева (см. рис. 7.15, *в* подраздела 7.5).

В рассмотренном на рис. 7.15, *в* примере процедура определения ординат л.о.м. в сечениях, где расположены левые фокусные точки, начинается с определения по известной ординате л.о.м. $c_2 = M_{F_2}$ на пролете с номером 2 первой неизвестной ординаты $c_3 = M_{F_3}$ л.о.м. в сечении пролета балки с номером 3, в котором расположена левая ф. т. F_3.

При этом (для получения возможности применения теоремы о стержне) к неразрезной балке прикладывается справа фиктивный момент $m_{\text{ф}}^{\text{пр}}$ (см. рис. 7.15, *в*).

Этот момент приложен для того, чтобы повернуть сечение балки над опорой 2, повернувшееся от заданной на балку нагрузки на какой-то угол θ_2, в обратную сторону на такой же угол. При этом суммарный угол поворота опорного сечения 2 от действия нагрузки и указанного фиктивного момента окажется равным нулю. Это равносильно наличию в опорном узле 2 фиктивной заделки.

В результате появления фиктивной заделки появилась возможность использования теоремы о стержне и на пролете балки с номером 2 и на пролете балки с номером 3 (см. рис. 7.15, *в* в подразделе 7.5 и приведенные там соответствующие рассуждения, которые здесь не повторяются).

Теперь рассмотрим вариант неразрезной балки, когда на ее левом конце имеется скользящая заделка (см. рис. 7.35, *а*).

От приложенной на балку нагрузки сечение балки над опорой 1 повернется на какой-то угол θ_1. Для применения теоремы о стержне приложим на правом конце балки такой фиктивный момент $m_{\text{ф}}^{\text{пр}}$, чтобы опорное сечение 1 балки повернулось на угол $-\theta_1$.

В результате в узле 1 появится фиктивная заделка, и самый крайний слева пролет со скользящей заделкой на его левом конце окажется работающим в условиях балки, рассмотренной на рис. 7.19 – 7.23 с различными нагрузками на этот пролет.

Как уже отмечалось, л.о.м. на этом пролете можно провести по двум опорным ординатам, которые определятся по формулам, полученным в подразделе 7.7.

В соответствии с обозначениями, принятыми для неразрезных балок, эти формулы для пролета с номером 1 запишутся в виде:

$$M_1 = -\frac{\omega_1}{l_1} \tag{7.128}$$

$$\omega_1 = \omega_1(\text{л.о.м.}) + \omega_p^o, \tag{7.129}$$

где ω_1 – площадь эпюры M_p в грузовом состоянии на пролете 1 балки от заданной на пролете нагрузки; $\omega_1(\text{л.о.м.}) = Rb \cdot l/2$ – площадь эпюры от опорных моментов; ω_P^o является площадью эпюры моментов в статически определимой балке на двух шарнирных опорах от заданной на пролете нагрузки (см. рис. 7.6).

Вертикальная составляющая V_1^1 опорной реакции в опоре 1 от нагрузки на пролет 1 является статически определимой величиной, определяемой из уравнения равновесия балки $\sum Z^{\text{пролета 1}} = 0$:

$$V_1^1 = R. \tag{7.130}$$

Вектор реакции направлен в сторону обратную направлению вектора равнодействующей R поперечной к оси балки нагрузки. Если поперечной к оси балки нагрузки нет (например, нагрузка только моментная), то $V_B = R = 0$.

Отсюда следует, что опорный момент M_0 в скользящей заделке с номером 0 (от нагрузки на пролете с равнодействующей R, приложенной на расстоянии b от фиктивной заделки в опоре 1) определится по формуле:

$$M_0 = Rb - M_1 = Rb - (\omega_1 / l_1). \tag{7.131}$$

Для проведения участка л.о.м. на пролете с номером 2 с целью определения ординаты л.о.м. $c_2 = M_{F_2}$ достаточно иметь ординату M_1 (7.129) и известную ***в соответствии с теоремой о стержне для пролета 2 ординату*** μ_2 ***л.о.м в сечении, находящемся на расстоянии*** $l_2/3$ ***от фиктивной заделки в опорном узле 1*** (см. теорему о стержне в подразделе 7.6).

Построенный через вершины ординат M_1 и μ_2 участок фиктивной л.о.м. на втором пролете от нагрузки и фиктивного момента $m_{\text{ф}}^{\text{пр}}$ на правом конце неразрезной балки *будет иметь одну реальную ординату, которая будет отвечать только заданной нагрузке и не изменяется при приложении фиктивного момента, приложенного где-то справа от рассматриваемого пролета. Этой ординатой будет ордината* $c_2 = M_{F_2}$ *в сечении пролета 2, где расположена левая фокусная точка* F_2.

Таким образом, графический способ С.С. Голушкевича оказывается применим и для неразрезной балки, имеющей на левом конце скользящую заделку.

П р и м е р 1. Построим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 7.35, *б*) в балке, изображенной на рис. 7.35, *а*, применив графический способ С.С. Голушкевича. Решение выполним в указанной ниже последовательности.

1. Для определения фокусных точек построим схему балки (рис. 7.38) в удобном для графических расчетов масштабе.

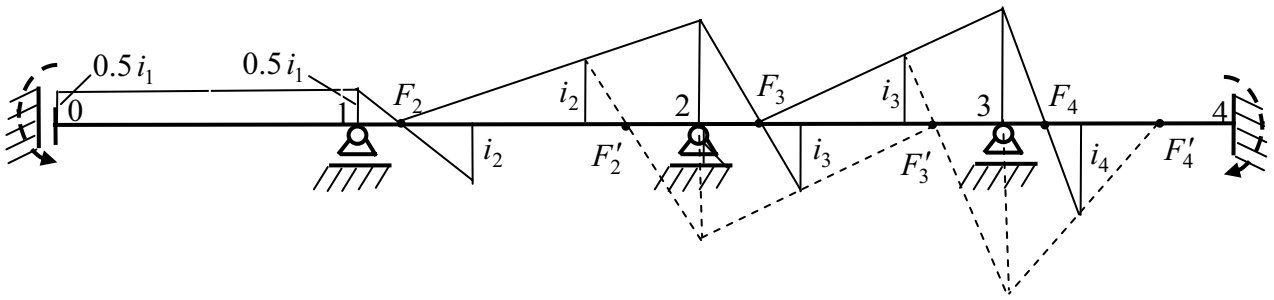


Рис. 7.38

2. Разделим каждый пролет балки (кроме пролета со скользящей заделкой) на три равные части (см. рис. 7.38).

3. Для дальнейшего применения теоремы об узле, в намеченных третях пролетов от оси балки откладываем в удобном масштабе ординаты, равные погонным жесткостям соответствующих пролетов (см. рис. 7.38).

Поскольку в рассматриваемой балке жесткости на изгиб пролетов приняты постоянными для всех пролетов, то при подсчете погонных жесткостей (чтобы получить погонные жесткости в виде целых чисел) примем жесткость на изгиб равной наименьшему общему делителю для чисел равных длине пролетов. В данном случае принимаем $EI = 72$. Тогда получим: $i_2 = 72/8 = 9$; $i_3 = 72/9 = 8$; $i_4 = 72/6 = 12$

Для пролета 1 со скользящей заделкой получаем $i_1 = 72/8 = 9$. На пролете 1 необходимо отложить на опоре номером 0 и на опоре с номером 1 (как показано на рис. 5) отрезок равный $0.5i_1 = 4.5$.

4. Последовательно применяя с помощью фиктивного момента, приложенного на правом конце балки (см. рис. 7.38), терему об узле к опорным сечениям 1, 2 и 3 (применение теоремы об узле к указанным опорным узлам показано сплошными линиями), находим левые фокусные точки F_2, F_3, F_4.

5. Аналогично, последовательно применяя с помощью фиктивного момента, приложенного на левом конце балки, теорему об узле к опорным сечениям 3 и 2 (построения показаны штриховыми линиями), находим правые фокусные точки F_3' и F_2'.

6. Построим в выбранном при определении фокусных точек масштабе схему рассматриваемой балки (рис. 7.39) и отметим на схеме уже определенные фокусные точки.

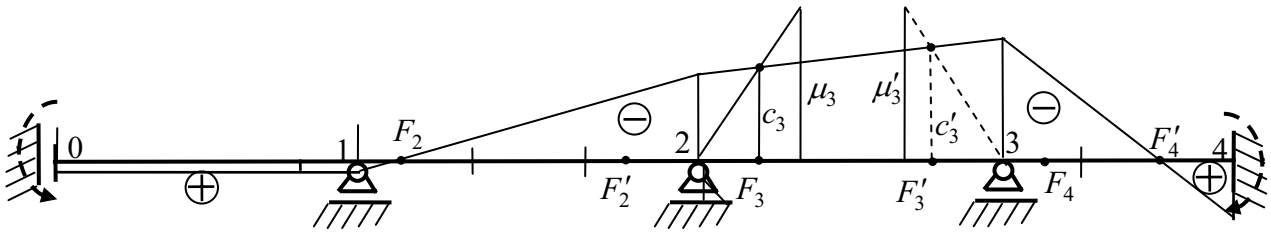


Рис. 7.39

7. На загруженном пролете (в данном случае с номером 3) в третях пролета откладываем ординаты μ_3 и μ_3' л.о.м., характерные для заданной нагрузки при применении к данному пролету теоремы о стержне (соответственно при фиктивной заделке на левой опоре и при фиктивной заделке на правой опоре пролета. См. теорему о стержне в подразделе 7.5.

В данном примере на пролет действуют три сосредоточенные силы $G = 80$ кН, приложенные симметрично относительно середины пролета. При любой симметричной на пролете нагрузке (см. формулу 7.48):

$$\mu_3 = \mu_3' = -\frac{\omega_3}{l_3}. \tag{7.132}$$

Формула для определения ω_3 при трех сосредоточенных силах приведена на рис. 7.6:

$$\omega_3 = \frac{10Gl_3^2}{32} = \frac{10 \cdot 80 \cdot 8^2}{32} = 1600 \text{ кН·м}^2. \tag{7.133}$$

Тогда

$$\mu_3 = \mu_3' = -\frac{\omega_3}{l_3} = \frac{1600}{8} = 200 \text{ кН·м}. \tag{7.134}$$

8. В графическом способе С.С. Голушкевича при загружении только одного пролета, как и в аналитическом способе фокусных отношений, при известных фокусных точках сначала определяются опорные моменты на загруженном пролете. Эти опорные ординаты л.о.м. на загруженном пролете определяются построением л.о.м. по ординатам над фокусными точками этого пролета. В данном случае при загружении пролета с номером 3 это выполняется в такой последовательности:

8.1. Сначала с помощью фиктивного момента на правом конце неразрезной балки образуется фиктивная заделка в опорном сечении 2.

8.2. Фиктивная заделка в узле 2 позволяет применить теорему о стержне к незагруженному пролету с номером 2. Так как нагрузки на нем нет, ***л.о.м. на нем проходит через уже известную левую фокусную точку*** F_2 ***и (по теореме о стержне) через ординату*** $\mu_2' = 0$ ***в сечении расположенном на расстоянии*** $l_2/3$ ***от фиктивной заделки в узле 2.***

8.3. Затем строится прямолинейный участок л.о.м. на загруженном пролете с номером 3. Этот участок л.о.м. пройдет (из условия равновесия опорного узла 2 с фиктивной заделкой) через нулевую ординату в фиктивной заделке и через ординату $\mu_3 = 200$ кНм в сечении пролета 3, расположенном (по теореме о стержне для этого пролета) на расстоянии $l_3/3$ от фиктивной заделки в узле 2 (на рис. 6 этот участок л.о.м. показан сплошной линией).

8.4. Проведенный участок л.о.м. на пролете 3 является фиктивным, так как она (л.о.м) соответствует не только заданной на пролете нагрузке, но и приложенному на правом конце неразрезной балки фиктивному моменту.

Однако одна ордината этой фиктивной л.о.м. в соответствии с основным свойством фокусных точек (см. подраздел 7.5) ***оказывается отвечающей реально заданной нагрузке, и не изменилась от приложения справа фиктивного момента.*** Такой ординатой является ордината c_3 в сечении балки, где приложена фокусная точка F_3.

8.5. Аналогично от заданной на пролете нагрузки находится ордината c_3' л.о.м. в сечении пролета, где расположена правая фокусная точка F_3'. С этой целью фиктивная заделка образовывалась в опорном узле 3 с помощью фиктивного момента, приложенного к неразрезной балке слева. Прямой участок фиктивной л.о.м., с помощью которого определилась ордината c_3' показан на рис. 6 штриховой линией.

8.6. Через полученные ординаты c_3 и c_3' л.о.м. на загруженном пролете, имеющие реальные значения и отвечающие заданной нагрузке, проводится действительная л.о.м. для всего пролета, которая на опорных вертикалях отсечет отрезки, по которым в выбранном для изгибающих моментов масштабе определятся опорные моменты на загруженном пролете. Зная их, с помощью фокусных точек F_2 и F_4' проводим л.о.м. на пролетах 2 и 4.

На пролете со скользящей заделкой л.о.м. строится по полученной на опоре 1 ординате, поскольку известно, что ее ординаты при отсутствии нагрузки на этом пролете постоянны.

8.7. Для получения окончательных ординат изгибающих моментов на загруженном пролете от построенной л.о.м. необходимо отложить ординаты эпюры моментов в статически определимой балке от заданной нагрузки (см. эту эпюру на рис. 7.28). Здесь, чтобы не накладывать эти построения на картину выполненных графических построений, не приводятся.

Как показано, графический способ С.С. Голушкевича легко применяется и к неразрезным балкам, имеющим скользящие заделки на левом и на правом концах. Решение получается очень просто и дает вполне удовлетворительные результаты. Знание метода полезно для понимания «игры сил» в неразрезных балках.

7.11. Особенность реализации метода сил при расчете неразрезных балок от заданной осадки их опор и от температурного воздействия

Решение при заданных перемещениях опор

Применение метода сил к расчету неразрезных балок было продемонстрировано на примере внешнего воздействия на них в виде заданных внешних нагрузок.

Обратим внимание на то, что внешнее воздействие в методе сил проявляется только при вычислении свободных членов $\Delta_{i,p}$ системы уравнений (см., например, общий вид уравнения трех моментов (с номером i в системе уравнений) для неразрезных балок (7.9)).

При действии внешней нагрузки на неразрезную балку величина $\Delta_{i,p}$ определяется от нагрузки, действующей на два смежных пролета с номерами i и $i+1$.

При этом для разных вариантов балок и нагрузок на указанные два смежных пролета величина $-6\Delta_{i,p}$ (после умножения уравнения на $6EI$ и переноса свободного члена уравнения в его правую часть) вычисляется в виде, показанном в уравнениях (7.15) – (7.17).

Если нагрузка на этих пролетах отсутствует, то площади эпюр изгибающих моментов ω_i и ω_{i+1} будут равны нулю.

Рассмотрим именно этот случай, но будем воздействовать на эти пролеты заданием осадок их опор. На рис. 7. 40 показано соответствующее «грузовое» состояние для двух смежных пролетов с номерами i и $i+1$ основной системы метода сил для неразрезной балки.

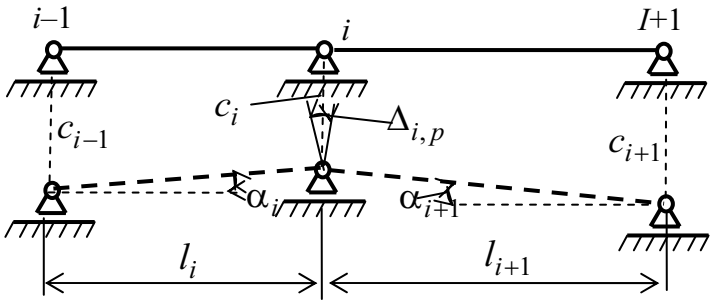


Рис. 7.40

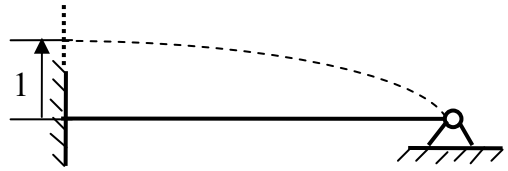
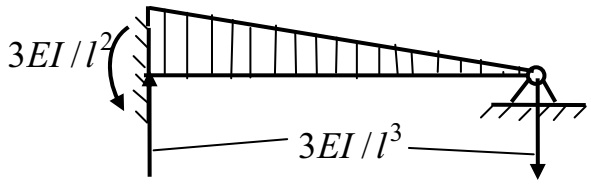
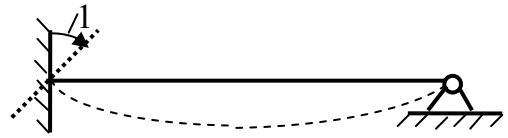
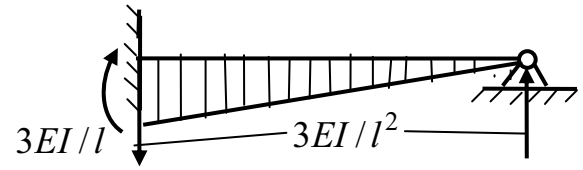
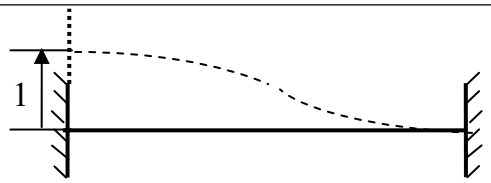
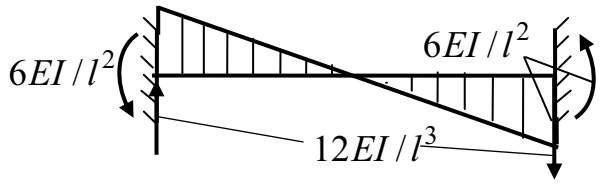
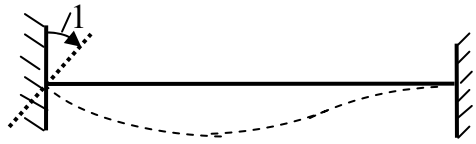
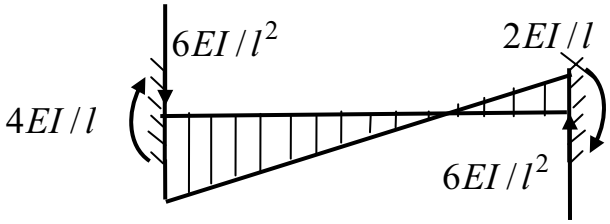
Перемещение $\Delta_{i,p}$ означает взаимный угол поворота сечений балки, подходящих к опоре с номером i, вызванный заданной осадкой опор неразрезной балки.

Так как рассматриваются линейно-деформируемые стержневые системы, то заданные осадки опор предполагаются малыми величинами, то

$$\Delta_{i,p} = \alpha_i + \alpha_{i+1} \approx \operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}\alpha_{i+1} = \frac{c_{i-1} - c_i}{l_i} + \frac{c_{i+1} - c_i}{l_{i+1}}. \qquad (7.135)$$

П р и м е р 1. В качестве примера реализации при расчете неразрезных балок метода сил построим эпюру изгибающих моментов для однопролетной статически неопределимой балки, рассмотренной на рис. 7.6, от заданного вертикального единичного перемещения ее заделки (см. первую строку и левый столбец табл. 7.3).

Таблица 7.3

Схема балки и воздействия	Эпюра M и реакции
	
	
	
	

Левая часть уравнения трех моментов (7.18), записанного для определения опорного момента в заделке, при смене внешнего воздействия на балку останется без изменения. Изменится только правая часть этого уравнения:

$$-6EI \cdot \Delta_{1,p} = -6EI\left(\frac{c_0 - c_1}{l_1} + \frac{c_2 - c_1}{l_2}\right) = -6EI\left(0 + \frac{1}{l}\right) = -\frac{6EI}{l}.$$

Тогда уравнение трех моментов (7.18) получится в виде:

$$2l \cdot X_1 = -\frac{6EI}{l}. \qquad (7.136)$$

Отсюда получим опорный момент в заделке:

$$X_1 = -\frac{3EI}{l^2}. \qquad (7.137)$$

Знак «минус» показывает, что опорный момент растягивает верхнее волокно балки в сечении у заделки.

Эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой балке приведена во втором столбце табл. 7.3. там же показаны опорные реакции балки при заданном внешнем воздействии в виде единичного вертикального перемещения ее заделки.

Аналогично можно выполнить расчет однопролетной статически неопределимой балки ***при различных опорных связях по ее концам*** (см. табл. 3.1) и от других перемещений опор.

В табл. 7.3 приведены результаты расчетов однопролетной статически неопределимой балки с одной и двумя заделками по ее концам для двух вариантов заданных единичных перемещениях опор.

Решение при заданном изменении температуры нижней и верхней сторон балки

Предположим, что внешним воздействием на два рассматриваемых смежных пролета неразрезной балки является не нагрузка и не заданное перемещение опор, а заданное изменение температуры $t_{\text{н}}$ и $t_{\text{в}}$ соответственно нижней и верхней сторон балки.

Тогда то правая часть уравнения трех моментов в формулах (7.15) – (7.17), (умноженная на $6EI$), будет иметь вид (см. формулу (6.34)

$$-6EI \cdot \Delta_{i,p} = -6EI(\int_L M_i \cdot \kappa_t dx + \int_L N_i \cdot \varepsilon_{\text{о}})dx. \qquad (7.138)$$

При использовании формулы (7.138) примем следующие исходные данные: материал пролетов балки одинаковый и имеет коэффициент линейного расширения материала α; $t_{\text{н}} > t_{\text{в}} > 0$; продольные силы N_i в рассматриваемых смежных пролетах балки от единичного момента, приложенного на опоре с номером i (см. рис. 7.5), равны нулю.

Тогда с учетом (6.32) для неразрезных балок постоянной высоты h поперечного сечения получим:

$$-6EI \cdot \Delta_{i,p} = -6EI\alpha(\int_{l_i} M_i \cdot \tau_i \, dx + \int_{l_{i+1}} M_{i+1} \cdot \tau_{i+1})dx. \qquad (7.139)$$

Вычисляя интегралы с использованием правила А.Н. Верещагина (см. формулу (6.13), выражение (7.139) можем представить в виде:

$$-6EI \cdot \Delta_{i,p} = -6EI\alpha(\overline{\omega}_i \cdot \tau_i + \overline{\omega}_{i+1} \cdot \tau_{i+1}). \qquad (7.140)$$

Черта над обозначением площади показывает, что эта площадь относится не к эпюре грузового состояния, как это было при внешнем воздействии в виде нагрузки на пролет, а к эпюре изгибающих моментов во вспомогательном состоянии с номером i.

П р и м е р 2. Рассмотрим пример расчета балки, представленной в первой и второй строках первого столбца табл. 7.4.

Т а б л и ц а 7.4

Схема балки и воздействия	Эпюра *M* и реакции
$t_в$, $t_н > t_в$	$1.5EI\alpha\tau$, $EF\alpha t_о$, $EF\alpha t_о$, $1.5EI\alpha\tau / l$
$t_в$, $t_н > t_в$	$1.5EI\alpha\tau$, $\Delta l = \alpha t_о l$, $1.5EI\alpha\tau / l$
$t_в$, $t_н > t_в$	$EI\alpha\tau$, $EI\alpha\tau$, $EF\alpha t_о$, $EF\alpha t_о$
$t_в$, $t_н > t_в$	$EI\alpha\tau$, $EI\alpha\tau$

Вычислим правую часть уравнения трех моментов, записанную для эквивалентного состояния основной системы балки (см. рис. 7.6), в виде (7.18), но при заданном воздействии:

$$-6EI \cdot \Delta_{1,p} = -6EI\alpha(\overline{\omega}_1 \cdot \tau_1 + \overline{\omega}_2 \cdot \tau_2)\,. \qquad (7.141)$$

Так как первый пролет в эквивалентном состоянии основной системы является фиктивным площадь и имеет бесконечно малую длину, то, обозначая $\omega_2 = \omega$ и $\tau_2 = \tau$, формулу (7.141) получим в виде:

$$-6EI \cdot \Delta_{1,p} = -6EI\alpha \cdot \overline{\omega} \cdot \tau\,. \qquad (7.142)$$

Так как $\overline{\omega} = 0.5 \cdot 1 \cdot l = l/2$, то

$$-6EI \cdot \Delta_{1,p} = -3EI\alpha \cdot \tau / l\,. \qquad (7.143)$$

Тогда уравнение (7.18) примет вид:

$$2l \cdot X_1 = -3EI\alpha \cdot \tau / l\,. \qquad (7.144)$$

Отсюда

$$X_1 = -1.5EI\alpha \cdot \tau\,. \qquad (7.145)$$

Знак «минус» показывает, что момент в защемляющей опоре растягивает верхнюю сторону балки. Эпюра моментов и соответствующие ей опорные реакции приведены в табл. 7.4.

Аналогичным решением получены усилия и в балке с двумя заделками (см. табл. 7.4).

8. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОРМЕ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

8.1. Представление задачи расчета стержневой системы МКЭ как суммы вспомогательной и основной задач

В разделе 3 были даны первые представления о расчете стержневых систем МКЭ в форме метода перемещений. На примере плоской рамы было показано, что такой расчет начинается с построения расчетной схемы, когда заданная стержневая система представляется как совокупность конечных стержневых элементов, соединенных между собой и с основанием в жестких узлах (см. рис. 3.1).

Сами конечные элементы и основание представляются присоединенными к узлам тремя связями (жестко), двумя связями (в виде шарнирной опоры или «скользящих» заделок), одной связью. Все виды конечных элементов, получающихся в зависимости от их присоединения к жестким узлам, приведены в табл. 3.1.

При представлении решения МКЭ в форме метода перемещений за основные неизвестные величины, которые определяются в первую очередь, принимаются перемещения намеченных жестких узлов расчетной схемы по направлению их степеней свободы. Общее число неизвестных перемещений в узлах построенной расчетной схеме МКЭ определится по формуле (3.2).

Затем по определенным в МКЭ в форме метода перемещений перемещениям узлов, определяются усилия в связях, присоединяющих конечные элементы к узлам. Эти усилия для каждого вида конечных элементов показаны в табл. 3.1.

После этого строятся эпюры усилий M, Q, N на каждом конечном элементе.

В данном разделе рассматривается алгоритм решения всей задачи расчета стержневой системы МКЭ в форме метода перемещений. При этом задача выполняется как сумма решения двух задач МКЭ: ***вспомогательной*** и ***основной***.

Вспомогательная задача МКЭ приводит все не узловые статические воздействия на конечные элементы (в виде нагрузок, изменения температуры элементов и заданных перемещений их узлов) к узловым воздействиям.

В основной задаче МКЭ производится расчет системы в виде совокупности элементов и узлов на полученную во вспомогательной задаче узловую нагрузку [7−13].

Алгоритм расчета стержневых систем МКЭ с использованием этих двух задач рассмотрим на примере плоской рамы, изображенной на рис. 8.1.

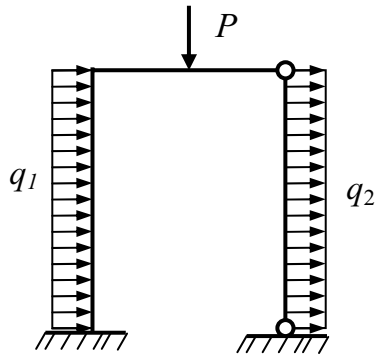


Рис. 8.1

При построении расчетной схемы этой рамы для ее расчета МКЭ с помощью программы SCAD разделим раму узлами на стержневые конечные элементы типа 2 «Стержень плоской рамы» (рис. 8.2, *а*).

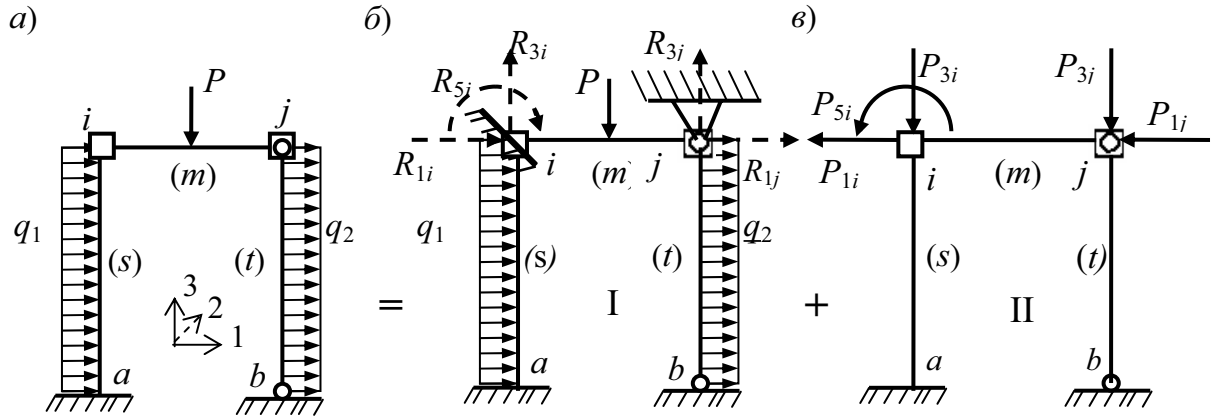


Рис. 8.2

На приведенной расчетной схеме (см. рис. 8.2, *а*) отмечены только узлы разбиения рамы на конечные элементы, которые имеют степени свободы (i и j). Опорные узлы (a и b) расчетной схемы не имеют степеней свободы, поэтому они на рис. 8.2, *а* не показаны.

В сечении ригеля рамы, где на него приложена сосредоточенная сила, также можно было назначить узел, как это делалось при расчете статически определимых шарнирных балок и рам (см. раздел 4).

Однако в примере рассмотрен другой способ приведения нагрузки на элемент к узловой нагрузке, который в рамках вспомогательной задачи позволяет привести к узлам элемента как распределенную, так и сосредоточенные нагрузки.

На рис. 8.2, *б, в* отражен смысл использования вспомогательной (I) и основной (II) задач МКЭ для построения эпюр усилий M, Q, N в заданной раме. Показано, что эпюры усилий в раме или ее расчетной схеме МКЭ (см. рис. 8.2, *а*) равны сумме соответствующих эпюр усилий в состояниях I и II рамы (рис. 8.2, *б, в*), т.е. рис. 8.2 отражает равенства:

$$\begin{aligned} M &= M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}}; \\ Q &= Q_{\mathrm{I}} + Q_{\mathrm{II}}; \\ N &= N_{\mathrm{I}} + N_{\mathrm{II}}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Состояние I заданной рамы получено из расчетной схемы рамы для МКЭ, (см. рис. 8.2, *а*), введением связей в узлы *i* и *j* по направлению их степеней свободы.

На рис. 8.2, *б* введение трех связей в жесткий узел *i* представлено в виде введения заделки, а введение двух связей в шарнирный узел *j* – введением шарнирно-неподвижной опоры. В результате получилась система стержневых элементов с неподвижными связями в узлах.

В такой системе расчет каждого элемента можно выполнять независимо от других. Иными словами, эпюры M_{I}, Q_{I}, N_{I} от заданных внешних воздействий в состоянии I могут быть построены отдельно для каждого элемента.

Задачи определения опорных реакций и построения эпюр усилий в плоских прямых стержнях, неподвижно прикрепленных к жесткому основанию тремя связями (статически определимые стержни), четырьмя, пятью и шестью связями (статически неопределимые стержни) были рассмотрены в разделах 4, 6, 7.

Результаты таких расчетов для наиболее часто встречающихся вариантов статических нагрузок на плоские стержни представлены в табл. 7.1.

При отдельном расчете элементов с закрепленными узлами получаются не только эпюры усилий на элементе, но и реакции в дополнительно введенных связях (см. табл. 7.1), поэтому в узлах расчетной схемы МКЭ, где сходятся два элемента и более, в дополнительно введенных связях можно вычислить суммарные опорные реакции.

На рис. 8.2, *б* в заделке узла *i* и шарнирной опоре узла *j* пунктирными линиями в виде векторов сил (и момента в заделке узла *i*) в соответствии

с принятой на рис. 8.2, *а* общей системой осей координат показаны положительные направления суммарных реакций.

Первый индекс у обозначений реакций отображает номер направления перемещения узла в общей системе осей координат (см. рис. 3.2), которому соответствует введенная связь.

В состоянии рамы I действие на нее введенной заделки в узле *i* и введенной шарнирной опоры в узле *j* (см. рис. 8.2, *б* и рис. 8.3, *а*) можно заменить действием найденных в этих опорах суммарных опорных реакций (рис. 8.3, *б*). Тогда эпюры M_{I}, Q_{I}, N_{I} в состоянии рамы I можно считать эпюрами от заданных внешних нагрузок и равных суммарным реакциям узловых сил, изображенных на рис. 8.3, *б*.

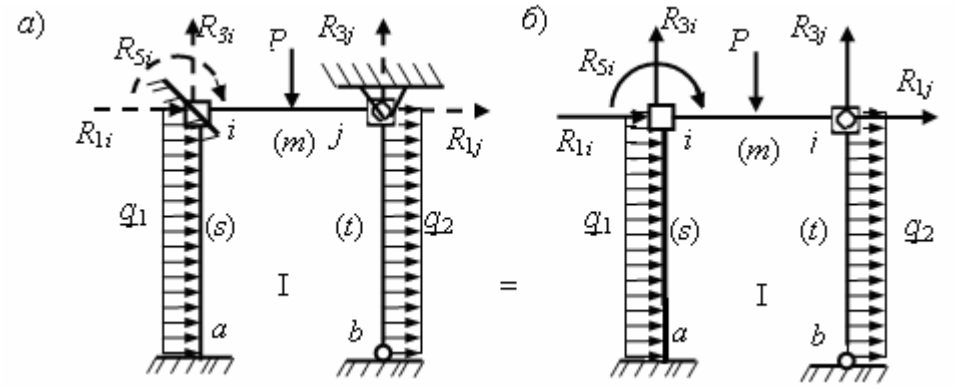


Рис. 8.3

Отсюда понятен смысл расчета рамы в состоянии II от действия узловых нагрузок (см. рис. 8.2, *в*), которые численно равны соответствующим узловым нагрузкам в состоянии I (см. рис. 8.3, *б*), но имеют противоположные им направления. Результатом расчета рамы в состоянии II являются эпюры $M_{\mathrm{II}}, Q_{\mathrm{II}}, N_{\mathrm{II}}$.

Суммирование нагрузок в состояниях I (см. рис. 8.3, *б*) и II (см. рис. 8.2, *в*) приводит к уничтожению узловых нагрузок и получению заданных нагрузок на раму (см. рис. 8.2, *а*). Поэтому эпюры усилий в заданной раме также получаются суммированием эпюр усилий в состояниях I и II (8.1).

8.2. Последовательность решения основной задачи МКЭ методом перемещений

Обозначения узловых величинв общей системе осей координат

Ход решения основной задачи МКЭ методом перемещений рассмотрим на примере расчетной схемы с узловой нагрузкой, изображенной на рис. 8.2, *в*.

Будем считать, что схема отнесена к общей системе осей координат, изображенной на рис. 3.2. Этим, как было показано в предыдущем подразделе, определяются индексы у обозначений узловых нагрузок, перемещений узлов и возникающих внутренних узловых усилий.

Примечания.

1. При изложении хода расчета стержневых систем МКЭ будем использовать обозначения и методику, принятые в изданных на кафедре СМ и ТУ СПбГПУ учебных пособиях [7, 8].

Верхний индекс в обозначениях величин обозначает номер конечного элемента.

Первый нижний индекс обозначает направление усилия или перемещения в соответствии с номером оси координат (общей или местной).

Второй нижний индекс обозначает номер узла в расчетной схеме.

Черта над символом усилий, перемещений или других величин означает принадлежность их к местной системе координат (МСК).

Строчными буквами полужирного шрифта обозначаются векторы-столбцы. Прописными буквами полужирного шрифта обозначаются прямоугольные матрицы. Символы $(\ )^{\text{т}}$ и $(\ )^{-1}$ означают соответственно операцию транспонирования и операцию обращения матриц.

2. В то же время учтено, что в программе SCAD плоская стержневая система расположена в плоскости XOZ (см. рис. 3.2).

В связи с этим (в отличие от учебных пособий [7, 8]), вертикальная ось обозначена Z (3), а направление перемещения узла в виде угла поворота UY происходит вокруг оси Y и обозначено номером 5 (см. рис. 3.2).

3. Переход от обозначения величин, принятых в УМК, к обозначениям, принятым в программе SCAD, сделан в пособии после рассмотрения основной задачи метода конечных элементов в форме метода перемещений.

Введем обозначения (8.2) векторов узловых нагрузок на раму (см. рис. 8.2, *в*):

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} P_{1i} \\ P_{3i} \\ P_{5i} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}_j = \begin{bmatrix} P_{1j} \\ P_{3j} \end{bmatrix}. \tag{8.2}$$

Действие внешней узловой нагрузки вызовет деформацию рамы. Ее узлы получат перемещения, которые представим в виде векторов (8.3).

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{3i} \\ u_{5i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{3j} \end{bmatrix}. \tag{8.3}$$

Во внутренних связях, присоединяющих стержневые конечные элементы типа 2 «Стержень плоской рамы» к узлам *i* и *j*, возникнут внутренние усилия.

Удалим внутренние связи, соединяющие элементы с узлами рамы, заменив их соответствующими усилиями, действующими и на узлы и на элементы. Это показано на примере узла i (рис. 8.4).

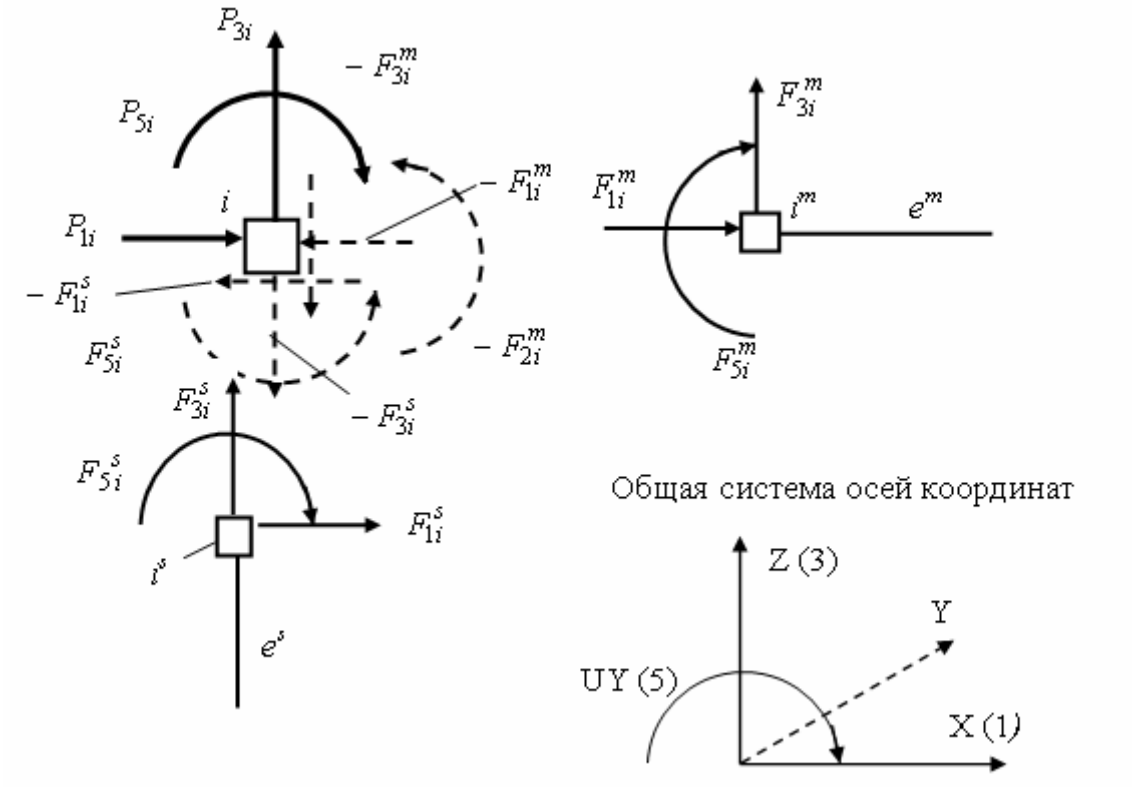


Рис. 8.4

Внешние узловые нагрузки, действующие на узел i, и ***внутренние усилия, действующие на узлы i элементов****, показаны в соответствии с приведенной общей системой осей координат как положительные величины.*

Внутренние усилия, ***действующие на вырезанный узел i системы****, будут иметь направления, обратные по сравнению с соответствующими усилиями, действующими на элементы и, следовательно,* ***будут отрицательными величинами*** (на рис. 8.4 они показаны штриховыми линиями).

Векторы внутренних усилий, действующие на концы (узлы) конечных элементов, представим в виде векторов

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} F_{1i} \\ F_{3i} \\ F_{5i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_j = \begin{bmatrix} F_{1j} \\ F_{3j} \end{bmatrix}. \tag{8.4}$$

Поскольку рассматривается линейно-деформируемая система, то *между вектором* **f** *(8.4) внутренних узловых усилий, действующих на конечные элементы, и вектором* **u** *(8.3) перемещений узлов имеется совпадение по*

правилу знаков и имеется линейная связь, которую можно представить в виде:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u}, \tag{8.5}$$

где $\mathbf{K}$ является *матрицей влияния* составляющих упругих перемещений узлов (элементов вектора $\mathbf{u}$) на составляющие внутренних узловых усилий (элементов вектора $\mathbf{f}$). Эта матрица называется также *матрицей жесткости* рассматриваемой совокупности соединенных элементов.

В соответствии со структурой векторов **f** (8.4)и **u** (8.3) выражение (8.5) можно также представить еще в двух формах записи:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}; \tag{8.6}$$

$$\begin{bmatrix} F_{1i} \\ F_{3i} \\ F_{5i} \\ \hline F_{1j} \\ F_{3j} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} K_{11ii} & K_{13ii} & K_{15ii} & K_{11ij} & K_{13ij} \\ K_{31ii} & K_{33ii} & K_{35ii} & K_{31ij} & K_{33ij} \\ K_{51ii} & K_{53ii} & K_{55ii} & K_{51ij} & K_{53ij} \\ \hline K_{11ji} & K_{13ji} & K_{15ji} & K_{11jj} & K_{13jj} \\ K_{31ji} & K_{33ji} & K_{35ji} & K_{31jj} & K_{33jj} \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{3i} \\ u_{5i} \\ \hline u_{1j} \\ u_{3j} \end{bmatrix}. \tag{8.7}$$

Получение разрешающей системы уравнений метода перемещений

После приложения узловых нагрузок к рассматриваемой системе и возникновения в ней усилий, она в целом и любые выделенные из нее части должны находиться в равновесии под действием приложенных нагрузок, реакций в опорах и внутренних усилий в сечениях стержней (разрезанных при выделении части системы).

Равновесие вырезанного узла i (см. рис. 8.4) на плоскости XOZ представляется тремя уравнениями равновесия, которые в матричной записи представляются одним уравнением

$$\mathbf{p}_i - \mathbf{f}_i = 0, \tag{8.8}$$

где вектор $\mathbf{p}_i$ заданных на узел i внешних узловых нагрузок и вектор $\mathbf{f}_i$ суммарных внутренних узловых усилий в элементах, сходящихся в узле i, имеют соответственно вид, приведенный соответственно в выражениях (8.2) и (8.4).

При этом для любого элемента F_{ki} вектора $\mathbf{f}_i$, где $k = 1, 3, 5$ – номер направления усилия, существует равенство (см. рис. 8.4):

$$F_{ki} = F_{ki}^s + F_{ki}^r = \sum_{r \in i} F_{ki}^r, \ (k = 1, 3, 5). \tag{8.9}$$

Для всего вектора $\mathbf{f}_i$ узла i:

$$\mathbf{f}_i = \sum_{r \in i} \mathbf{f}_i^r \ . \tag{8.10}$$

Матричное уравнение равновесия аналогичное (8.8) можно записать и для узла *j*. Тогда для всей расчетной схемы рамы в состоянии II (см. рис.8.2, *в*) получим

$$\mathbf{p} - \mathbf{f} = 0 . \tag{8.11}$$

Структура, входящих сюда векторов, понятна из (8.2) и (8.4).

Учитывая линейную зависимость (8.5), из (8.11) получим систему уравнений МКЭ в форме метода перемещений

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p} \tag{8.12}$$

для определения вектора $\mathbf{u}$ (8.3) узловых перемещений, соответствующих заданному вектору $\mathbf{p}$ (8.2) узловых нагрузок.

Систему уравнений (8.12) в соответствии со структурой векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{p}$ можно также представить в виде (6.13) и (8.14).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_j \end{bmatrix}; \tag{8.13}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} K_{11ii} & K_{13ii} & K_{15ii} & K_{11ij} & K_{13ij} \\ K_{31ii} & K_{33ii} & K_{35ii} & K_{31ij} & K_{33ij} \\ K_{51ii} & K_{53ii} & K_{55ii} & K_{51ij} & K_{53ij} \\ \hline K_{11ji} & K_{13ji} & K_{15ji} & K_{11jj} & K_{13jj} \\ K_{31ji} & K_{33ji} & K_{35ji} & K_{31jj} & K_{33jj} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_{1i} \\ u_{3i} \\ u_{5i} \\ \hline u_{1j} \\ u_{3j} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} P_{1i} \\ P_{3i} \\ P_{5i} \\ \hline P_{1j} \\ P_{3j} \end{array}\right]. \tag{8.14}$$

Для того чтобы решить эту систему уравнений необходимо сформировать матрицу жесткости K. Этому вопросу посвящен подраздел 8.6.

Решение системы уравнений метода перемещений

После того как сформированная система линейных алгебраических уравнений (8.12) будет решена, т.е. в состоянии II расчетной схемы рамы (см. рис. 8.2, *в*) определится вектор $\mathbf{u}$ (8.3) узловых перемещений, можно перейти к рассмотрению условий неразрывности

$$\mathbf{u}_i^s = \mathbf{u}_i^m = \mathbf{u}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_j^m = \mathbf{u}_j^t = \mathbf{u}_j , \tag{8.15}$$

соответственно отражающих равенство перемещений узлов i^s и i^m элементов, сходящихся в узле *i*, с перемещениями самого узла *i* (см. рис. 8.4) и перемещений узлов j^m и j^t элементов, сходящихся в узле *j*, с перемещениями самого узла *j*.

Используя эти условия неразрывности концевых сечений стержневых элементов и узлов в расчетной схеме II (см. рис. 8.2, *в*), найдем перемещения концевых сечений элементов s, m, t (узлов элементов, см., например, рис. 8.4).

Определение узловых усилий элементов в общей системе осей координат

Между вектором узловых перемещений и узловых усилий любого конечного элемента с номером r в общей системе координат существует линейная связь, аналогичная связи (1.5) для всей стержневой системы:

$$\mathbf{f}^r = \mathbf{K}^r \mathbf{u}^r . \qquad (8.16)$$

Используя эту связь, по определенному вектору $\mathbf{u}^r$ можно найти вектор $\mathbf{f}^r$ узловых усилий элемента r в общей системе координат. Эти узловые усилия в узле i^m элемента e^m и в узле i^s элемента e^s показаны на рис. 8.4.

Вопрос о построении матриц жесткости $\mathbf{K}^r$ для конечных элементов в общей системе координат будет рассмотрен в подразделе 8.5.

Определение узловых усилий элементов в местной системе осей координат

В программе SCAD все внутренние усилия, действующие на концы (узлы) конечных элементов определяются ***в местной системе осей координат каждого элемента*** (см. подраздел 3).

В отличие от обозначения $\mathbf{f}^r$ вектора узловых усилий элемента r в ОСК обозначение вектора усилий в узлах элемента r в МСК имеет сверху обозначения черту: $\bar{\mathbf{f}}^r$. Вектор $\bar{\mathbf{f}}^r$ узловых усилий элемента r в МСК определяется по вектору $\mathbf{f}^r$ узловых усилий элемента r в ОСК с помощью матрицы $\mathbf{C}^r$ преобразования векторов узловых усилий элемента r при повороте координатных осей:

$$\bar{\mathbf{f}}^r = \mathbf{C}^r \mathbf{f}^r . \qquad (8.17)$$

Вопрос о построении матрицы преобразования векторов будет рассмотрен в подразделе 8.5.

Построение эпюр усилий в конечных элементах в состоянии II (основная задача МКЭ) и окончательных эпюр усилий

Эпюры усилий в каждом конечном элементе строятся в местной системе осей координат. При узловой нагрузке на расчетную схему рамы в состоянии II (см. рис. 8.2, *в*) эпюры усилий на всех элементах будут линейными.

Окончательные эпюры усилий в заданной раме (см. рис. 8.2, *а*) получатся суммированием эпюр в соответствии с выражениями (8.1).

В программе SCAD вся процедура расчета МКЭ в форме метода перемещений автоматизирована.

При этом результаты расчета получаются как в графическом виде (в виде картины деформаций стержневой системы и в виде эпюр усилий), так и в табличной форме.

Значения перемещений в узлах расчетной схемы выдаются в программе SCAD в общей системе осей координат.

Усилия на элементе в назначенном числе сечений получаются в местной системе осей координат. Правила знаков для усилий в любом сечении элемента были приведены в подразделе 4.

Контроль полученных результатов расчета

Последним, но важным этапом решения задачи построения эпюр $M, Q.N$, является контроль результатов расчета. Выполнение различных проверок результатов расчетов продемонстрировано в подразделах 4 и 5 и в приложениях 1 и 2. К ним относятся:

1. Проверка вида эпюр усилий по признакам правильных эпюр.

2. Проверка соответствия друг другу эпюр M и Q с учетом уравнения равновесия $dM / dx = Q$ бесконечно малого стержневого элемента длиной dx.

3. Проверка равновесия всей стержневой системы и любой ее отсеченной части, в том числе:

3.1. Проверка равновесия моментов, действующих на любой узел i стержневой системы, с помощью уравнения равновесия узла $\sum M_i = 0$.

3.2. Проверка равновесия проекций всех сил, действующих на узел i, на любую ось, в том числе координатную ($\sum X_i = 0; \quad \sum Z_i = 0$).

Примечание. В приведенной выше последовательности расчета плоских стержневых систем типа «Плоская рама» ряд вопросов МКЭ пока оставлены без рассмотрения.

К ним относится вопрос о том, что вектору $\bar{\mathbf{f}}^r$ (8.17) в местной системе осей координат соответствует вектор $\bar{\mathbf{u}}^r$. Эти векторы связаны друг с другом формулой (8.20), аналогичной приведенному выше выражению (8.16), записанному в общей системе осей координат. Матрица $\bar{\mathbf{K}}^r$ в (8.20) является матрицей жесткости КЭ с номером r в местной системе осей координат. Связь между матрицами, входящими в выражения (8.16) и (8.20) осуществляется с помощью матрицы преобразования $\mathbf{C}^r$ в виде (8.17).

Построение матриц жесткости элементов в местной системе осей координат и в общей системе осей координат будут рассмотрены в подразделах 8.4 и 8.5.

В подразделе 8.5 будет рассмотрено и построение матриц преобразования $\mathbf{C}^r$ для перехода от векторов узловых перемещений и усилий из одной системы координат в любую другую систему координат;

Формирование матрицы жесткости для разрешающей системы уравнений будет рассмотрено в подразделе 8.6..

8.3. Плоские стержневые конечные элементы в местной системе осей координат

Предположим, что имеется состояние II плоской стержневой системы типа «Плоская рама» и в этом состоянии в совокупности стержневых конечных элементов имеется элемент e^r (r – номер элемента) с двумя жесткими узлами i и j (рис. 8.5), где i и j – номера узлов в расчетной схеме.

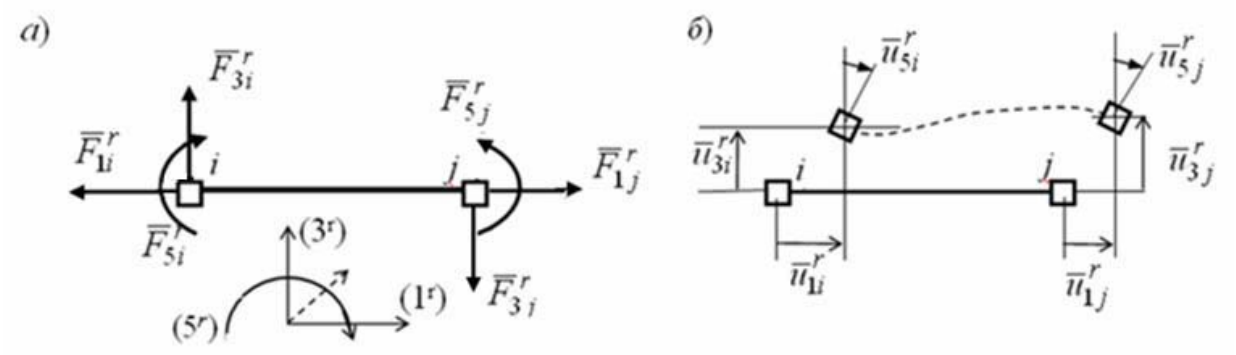


Рис. 8.5

Выделим этот элемент и отнесем его к местной системе осей координат, указывающей положительное направление усилий (рис. 8.5, *а*) и перемещений (рис. 8.5, *б*) в его узлах.

Введем обозначения составляющих узловых усилий и перемещений и обозначения соответствующих им векторов в местной системе осей координат (8.18), (8.19).

$$\overline{\mathbf{f}}^r = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{f}}_i^r \\ \overline{\mathbf{f}}_j^r \end{bmatrix}; \quad \overline{\mathbf{f}}_i^r = \begin{bmatrix} \overline{F}_{1i}^r \\ \overline{F}_{2i}^r \\ \overline{F}_{3i}^r \end{bmatrix}; \quad \overline{\mathbf{f}}_j^r = \begin{bmatrix} \overline{F}_{1j}^r \\ \overline{F}_{2j}^r \\ \overline{F}_{3j}^r \end{bmatrix}; \tag{8.18}$$

$$\overline{\mathbf{u}}^r = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}}_i^r \\ \overline{\mathbf{u}}_j^r \end{bmatrix}; \quad \overline{\mathbf{u}}_i^r = \begin{bmatrix} \overline{u}_{1i}^r \\ \overline{u}_{2i}^r \\ \overline{u}_{3i}^r \end{bmatrix}; \quad \overline{\mathbf{u}}_j^r = \begin{bmatrix} \overline{u}_{1j}^r \\ \overline{u}_{2j}^r \\ \overline{u}_{3j}^r \end{bmatrix} \tag{8.19}$$

Поскольку рассматриваемый элемент является линейно-деформируемым, то вектор $\overline{\mathbf{f}}^{\mathbf{r}}$ узловых усилий этого элемента линейно связан с вектором

$\overline{\mathbf{u}}^{\mathbf{r}}$ узловых перемещений. Так же как для общей системы осей координат (см. (8.16)) запишем эту связь в виде (8.20).

$$\overline{\mathbf{f}}^{r} = \overline{\mathbf{K}}^{r}\overline{\mathbf{u}}^{r}. \qquad (8.20)$$

В (8.20) матрица $\overline{\mathbf{K}}^{r}$ представляет собой матрицу влияния составляющих перемещений узлов элемента на составляющие усилий в этих узлах в местной системе осей координат. Она называется также матрицей жесткости рассматриваемого конечного элемента в местной системе осей координат. Ее структура соответствует структуре векторов $\overline{\mathbf{f}}^{\mathbf{r}}$ и $\overline{\mathbf{u}}^{\mathbf{r}}$ (см. выражения (8.18) и (8.19)). Поэтому вместо (8.20) можно также записать выражения (8.21) и (8.22):

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{f}}_i^r \\ \overline{\mathbf{f}}_j^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{ii}^r & \overline{\mathbf{K}}_{ij}^r \\ \overline{\mathbf{K}}_{ji}^r & \overline{\mathbf{K}}_{jj}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}}_i^r \\ \overline{\mathbf{u}}_j^r \end{bmatrix}; \qquad (8.21)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{F}_{1i}^r \\ \overline{F}_{3i}^r \\ \overline{F}_{5i}^r \\ \hline \overline{F}_{1j}^r \\ \overline{F}_{3j}^r \\ \overline{F}_{5j}^r \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \overline{K}_{11ii}^r & \overline{K}_{13ii}^r & \overline{K}_{15ii}^r & \overline{K}_{11ij}^r & \overline{K}_{13ij}^r & \overline{K}_{15ij}^r \\ \overline{K}_{31ii}^r & \overline{K}_{33ii}^r & \overline{K}_{35ii}^r & \overline{K}_{31ij}^r & \overline{K}_{33ij}^r & \overline{K}_{35ij}^r \\ \overline{K}_{51ii}^r & \overline{K}_{53ii}^r & \overline{K}_{55ii}^r & \overline{K}_{51ij}^r & \overline{K}_{53ij}^r & \overline{K}_{55ij}^r \\ \hline \overline{K}_{11ji}^r & \overline{K}_{13ji}^r & \overline{K}_{15ji}^r & \overline{K}_{11jj}^r & \overline{K}_{13jj}^r & \overline{K}_{15jj}^r \\ \overline{K}_{31ji}^r & \overline{K}_{33ji}^r & \overline{K}_{35ji}^r & \overline{K}_{31jj}^r & \overline{K}_{33jj}^r & \overline{K}_{35jj}^r \\ \overline{K}_{51ji}^r & \overline{K}_{53ji}^r & \overline{K}_{55ji}^r & \overline{K}_{51jj}^r & \overline{K}_{53jj}^r & \overline{K}_{55jj}^r \end{array}\right] \begin{bmatrix} \overline{u}_{1i}^r \\ \overline{u}_{3i}^r \\ \overline{u}_{5i}^r \\ \hline \overline{u}_{1j}^r \\ \overline{u}_{3j}^r \\ \overline{u}_{5j}^r \end{bmatrix}; \qquad (8.22)$$

Из сопоставления (8.20), (8.21) и (8.22) получаем (8.23), где каждый элемент $\overline{K}_{ltij}^r$ матрицы $\overline{\mathbf{K}}^r$ отражает влияние перемещения узла j в направлении t ($t = 1, 3, 5$) на усилие в узле i в направлении l ($l = 1, 3, 5$).

$$\overline{\mathbf{K}}^{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{ii}^r & \overline{\mathbf{K}}_{ij}^r \\ \overline{\mathbf{K}}_{ji}^r & \overline{\mathbf{K}}_{jj}^r \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \overline{K}_{11ii}^r & \overline{K}_{13ii}^r & \overline{K}_{15ii}^r & \overline{K}_{11ij}^r & \overline{K}_{13ij}^r & \overline{K}_{15ij}^r \\ \overline{K}_{31ii}^r & \overline{K}_{33ii}^r & \overline{K}_{353ii}^r & \overline{K}_{31ij}^r & \overline{K}_{33ij}^r & \overline{K}_{35ij}^r \\ \overline{K}_{51ii}^r & \overline{K}_{53ii}^r & \overline{K}_{55ii}^r & \overline{K}_{51ij}^r & \overline{K}_{53ij}^r & \overline{K}_{55ij}^r \\ \hline \overline{K}_{11ji}^r & \overline{K}_{13ji}^r & \overline{K}_{13ji}^r & \overline{K}_{11jj}^r & \overline{K}_{13jj}^r & \overline{K}_{15jj}^r \\ \overline{K}_{31ji}^r & \overline{K}_{33ji}^r & \overline{K}_{35ji}^r & \overline{K}_{31jj}^r & \overline{K}_{33jj}^r & \overline{K}_{35jj}^r \\ \overline{K}_{51ji}^r & \overline{K}_{53ji}^r & \overline{K}_{55ji}^r & \overline{K}_{51jj}^r & \overline{K}_{53jj}^r & \overline{K}_{55jj}^r \end{array}\right], \qquad (1.23)$$

Из выражения (8.22) видно, что физически элемент $\overline{K}_{ltij}^r$ матрицы $\overline{\mathbf{K}}^r$ представляет собой усилие, которое действует в узле i в направлении l в местной системе осей координат, при условии, что узел j получил единичное перемещение в направлении t ($\overline{u}_{tj}^r = 1$), а все остальные перемещения равны нулю.

Аналогичный смысл имеют и элементы других блоков матрицы $\overline{\mathbf{K}}^r$.

Отсюда следует способ определения элементов матрицы $\overline{\mathbf{K}}^r$: надо закрепить узлы i и j элемента от смещений по направлению их степеней свободы и задать перемещение: $\overline{u}_{tj}^r = 1$ (t = 1, 3, 5).

В качестве примера продемонстрируем получение первого и третьего столбцов матрицы $\overline{\mathbf{K}}^{\mathbf{r}}$.

Вычисление элементов первого столбца матрицы $\overline{\mathbf{K}}^{\mathbf{r}}$

Введем в узлы i и j элемента, изображенного на рис. 8.5, защемляющие опоры (рис. 8.6, *а*), что эквивалентно введению связей в направлениях 1^r, 3^r и 5^r местной системы осей координат (см. рис. 8.5, *а*).

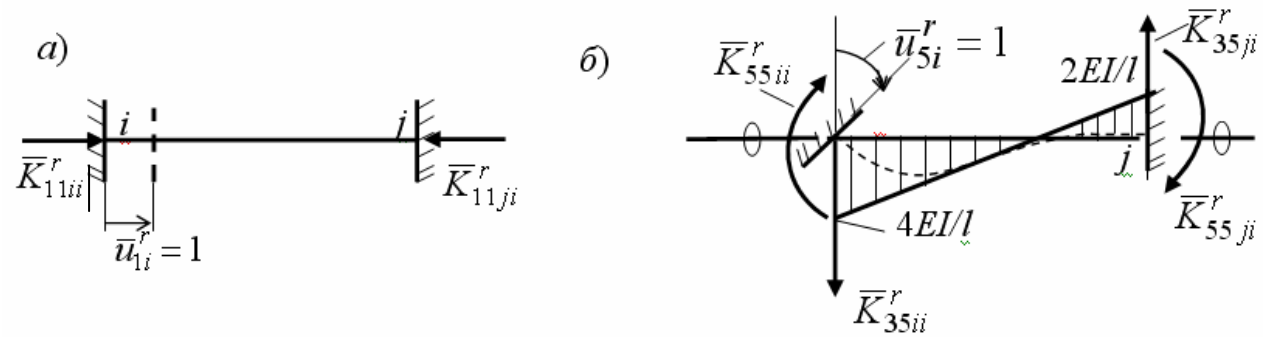


Рис. 8.6

Зададим в узле i перемещение $\overline{u}_{1i}^r = 1$ (см. рис. 8.6, *а*). Все другие перемещения узлов будем полагать равными нулю. В матричном выражении (8.22) это будет равносильно заданию вектора перемещений

$$\overline{\mathbf{u}}^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{8.24}$$

Умножив в матричном выражении (8.22) матрицу жесткости $\overline{\mathbf{K}}^r$ на этот вектор, получим вектор узловых усилий в виде

$$\overline{\mathbf{f}}^r = \begin{pmatrix} \overline{K}_{11ii}^r & \overline{K}_{31ii}^r & \overline{K}_{51ii}^r & \overline{K}_{11ji}^r & \overline{K}_{31ji}^r & \overline{K}_{51ji}^r \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{8.25}$$

При заданном перемещении узла i происходит только продольная деформация сжатия стержневого элемента (см. рис. 8.6, *а*). Изгибающие моменты и поперечные силы в сечениях элемента не возникают. Поэтому из шести введенных связей ненулевые реакции возникнут только в двух горизонтальных связях (см. рис. 8.6, *а*).

Реакция $\overline{K}_{11ii}^r$ отрицательна, так как ее направление в узле i

противоположно положительному направлению продольного усилия в узле i местной системы координат (см. рис. 8.5, *а*). Она определится из известной формулы $\Delta l^r = \dfrac{\overline{K}^r_{ltij} l^r}{(EF)^r}$, отражающей закон Гука при растяжении – сжатии элемента r. В приведенном примере имеем укорочение стержня на величину $\Delta l^r = -1$ и $\overline{K}^r_{ltij} = -(EF)^r / l^r$.

Реакция $\overline{K}^r_{11ji}$ определится из условия равновесия элемента на ось 1^r (см. рис. 8.6, *а*).

Если считать, что положительным продольным усилием в узле j будет, как и в узле I, растягивающее усилие (см. рис. 8.5, *а*), то получим, что $\overline{K}^r_{11ji} = \overline{K}^r_{11ii} = -(EF)^r / l^r$.

Примечание. В дальнейшем там, где это не вызывает сомнений жесткости конечных элементов и их длину будем обозначать без индекса r, т. е. в данном примере примем $\overline{K}^r_{11ji} = \overline{K}^r_{11ii} = -EF / l$.

Таким образом, записанный в выражении (8.23) первый столбец матрицы жесткости $\overline{\mathbf{K}}^r$ рассматриваемого элемента в местной системе координат *при принятом правиле знаков для перемещений и усилий в узлах* (см. рис. 8.5) теперь может быть представлен в виде

$$\begin{pmatrix} -EF/l & 0 & 0 & -EF/l & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \qquad (8.26)$$

Вычисление элементов третьего столбца матрицы $\overline{\mathbf{K}}^r$

В том же стержневом элементе с защемляющими опорами зададим в узле i перемещение (угол поворота вокруг оси Y, т.е. в направлении 5) $\overline{u}^r_{5i} = 1$ (см. рис. 8.6, *б*). Все другие перемещения узлов будем полагать равными нулю. В матричном выражении (8.22) это будет равносильно заданию вектора перемещений

$$\overline{\mathbf{u}}^r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \qquad (8.27)$$

Умножив в матричном выражении (1.22) матрицу жесткости $\overline{\mathbf{K}}^r$ на этот вектор, получим вектор узловых усилий, равный третьему столбцу матрицы жесткости $\overline{\mathbf{K}}^r$:

$$\overline{\mathbf{f}}^r = \begin{pmatrix} \overline{K}^r_{15ii} & \overline{K}^r_{35ii} & \overline{K}^r_{55ii} & \overline{K}^r_{15ji} & \overline{K}^r_{35ji} & \overline{K}^r_{55ji} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \qquad (1.28)$$

Эпюры усилий для такого стержня при заданном воздействии являются табличными (см., например, эпюру изгибающих моментов в табл. 7.2). Эта эпюра *M* приведена и на рис. 8.6, *б*. Там же указаны значения и направления соответствующих построенной эпюре опорных реакций. Направления реакций в соответствии с принятыми положительными направлениями, указанными на рис. 8.5, *а*, позволяют записать третий столбец рассматриваемой матрицы жесткости в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l & 0 & -6EI/l^2 & -2EI/l \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{8.29}$$

Вся матрица жесткости $\overline{\mathbf{K}}^r$ плоского стержневого элемента с жесткими узлами (см. рис. 1.9) в местной системе осей координат получится в виде:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -EF/l & 0 & 0 & EF/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l & 0 & 6EI/l^2 & 2EI/l \\ \hline -EF/l & 0 & 0 & EF/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & -2EI/l & 0 & -6EI/l^2 & -4EI/l \end{array}\right]. \tag{8.30}$$

Контролем построения матрицы жесткости является ее симметрия [8, 10. 12, 13].

В стержневых системах типа «Плоская рама» в местах расположения шарниров обязательно назначаются узлы разделения на элементы (см. рис. 3.9), поэтому получаются элементы, изображенные на рис. 8.7.

Для элементов, изображенных на рис. 8.7, *а*, *б*, и рис. 8.7, *в ,г* вместо векторов усилий (8.18) и перемещений (8.19) будем иметь соответствующие векторы в виде:

$$\overline{\mathbf{f}}^r = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{f}}_i^r \\ \overline{\mathbf{f}}_j^r \end{bmatrix}; \ \overline{\mathbf{f}}_i^r = \begin{bmatrix} \overline{F}_{1i}^r \\ \overline{F}_{2i}^r \\ \overline{F}_{3i}^r \end{bmatrix}; \ \overline{\mathbf{f}}_j^r = \begin{bmatrix} \overline{F}_{1j}^r \\ \overline{F}_{3j}^r \end{bmatrix}; \tag{8.31}$$

$$\overline{\mathbf{u}}^r = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}}_i^r \\ \overline{\mathbf{u}}_j^r \end{bmatrix}; \ \overline{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} \overline{u}_{1i}^r \\ \overline{u}_{2i}^r \\ \overline{u}_{3i}^r \end{bmatrix}; \ \overline{\mathbf{u}}_j = \begin{bmatrix} \overline{u}_{1j}^r \\ \overline{u}_{3j}^r \end{bmatrix}; \tag{8.32}$$

$$\overline{\mathbf{f}}_i^r = \begin{bmatrix} \overline{F}_{1i}^r \\ \overline{F}_{3i}^r \end{bmatrix}; \ \overline{\mathbf{f}}_j^r = \begin{bmatrix} \overline{F}_{1j}^r \\ \overline{F}_{3j}^r \end{bmatrix}; \ \overline{\mathbf{f}}^r = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{f}}_i^r \\ \overline{\mathbf{f}}_j^r \end{bmatrix}. \tag{8.33}$$

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} \overline{u}_{1i}^r \\ \overline{u}_{3i}^r \end{bmatrix}; \overline{\mathbf{u}}_j = \begin{bmatrix} \overline{u}_{1j}^r \\ \overline{u}_{3j}^r \end{bmatrix}; \overline{\mathbf{u}}^r = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}}_i^r \\ \overline{\mathbf{u}}_j^r \end{bmatrix}. \tag{8.34}$$

Линейная связь между узловыми усилиями и узловыми перемещениями в виде (8.20) остается без изменения.

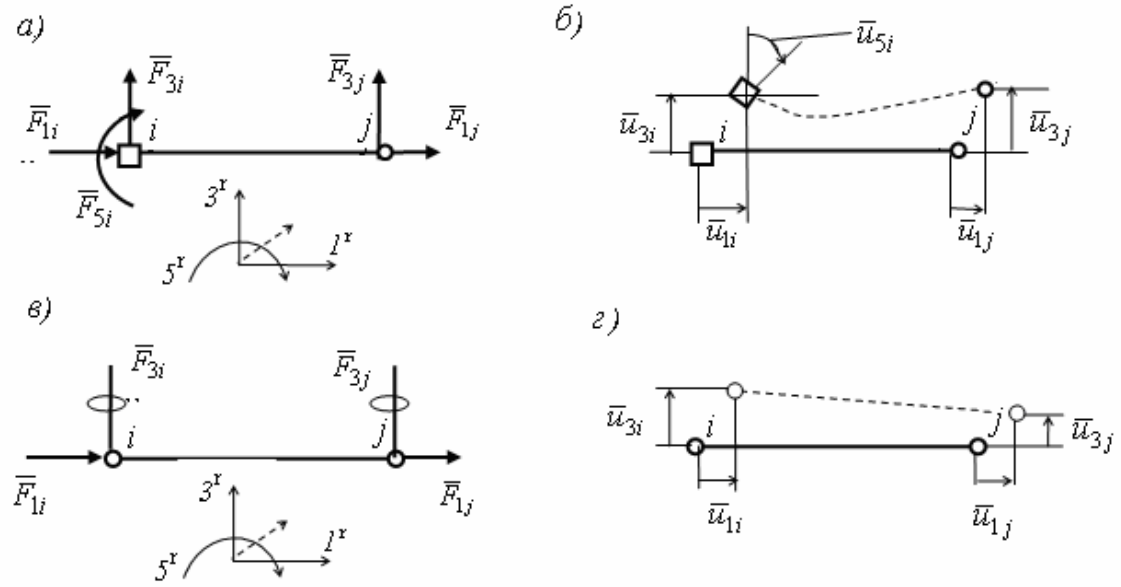


Рис. 8.7

Выражения (8.22) и (8.23) изменятся в связи с изменением структуры векторов узловых усилий и перемещений. Для элемента на рис. 8.7, *а* ,*б* получим:

$$\begin{bmatrix} \overline{F}_{1i}^r \\ \overline{F}_{3i}^r \\ \overline{F}_{5i}^r \\ \hline \overline{F}_{1j}^r \\ \overline{F}_{3j}^r \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \overline{K}_{11ii}^r & \overline{K}_{13ii}^r & \overline{K}_{15ii}^r & \overline{K}_{11ij}^r & \overline{K}_{13ij}^r \\ \overline{K}_{31ii}^r & \overline{K}_{33ii}^r & \overline{K}_{35ii}^r & \overline{K}_{31ij}^r & \overline{K}_{33ij}^r \\ \overline{K}_{51ii}^r & \overline{K}_{53ii}^r & \overline{K}_{55ii}^r & \overline{K}_{51ij}^r & \overline{K}_{53ij}^r \\ \hline \overline{K}_{11ji}^r & \overline{K}_{13ji}^r & \overline{K}_{13ji}^r & \overline{K}_{11jj}^r & \overline{K}_{13jj}^r \\ \overline{K}_{31ji}^r & \overline{K}_{33ji}^r & \overline{K}_{33ji}^r & \overline{K}_{31jj}^r & \overline{K}_{33jj}^r \end{array}\right] \begin{bmatrix} \overline{u}_{1i}^r \\ \overline{u}_{3i}^r \\ \overline{u}_{5i}^r \\ \hline \overline{u}_{1j}^r \\ \overline{u}_{3j}^r \end{bmatrix}. \tag{8.35}$$

$$\overline{\mathbf{K}}^{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{ii}^r & \overline{\mathbf{K}}_{ij}^r \\ \overline{\mathbf{K}}_{ji}^r & \overline{\mathbf{K}}_{jj}^r \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \overline{K}_{11ii}^r & \overline{K}_{13ii}^r & \overline{K}_{15ii}^r & \overline{K}_{11ij}^r & \overline{K}_{13ij}^r \\ \overline{K}_{31ii}^r & \overline{K}_{33ii}^r & \overline{K}_{35ii}^r & \overline{K}_{31ij}^r & \overline{K}_{33ij}^r \\ \overline{K}_{51ii}^r & \overline{K}_{53ii}^r & \overline{K}_{55ii}^r & \overline{K}_{51ij}^r & \overline{K}_{53ij}^r \\ \hline \overline{K}_{11ji}^r & \overline{K}_{13ji}^r & \overline{K}_{13ji}^r & \overline{K}_{11jj}^r & \overline{K}_{13jj}^r \\ \overline{K}_{31ji}^r & \overline{K}_{33ji}^r & \overline{K}_{33ji}^r & \overline{K}_{31jj}^r & \overline{K}_{33jj}^r \end{array}\right]. \tag{8.36}$$

Аналогично для элемента с двумя шарнирными узлами по концам получим матричные уравнения (8.37) и (8.38).

Вычисление столбцов матриц жесткости (8.36) и (8.38) производится так

же, как это было показано на примере стержня с жесткими узлами. Соответствующие конечные элементы с введенными в узлы связями приведены на рис. 8.8, *а* , *б*.

$$\begin{bmatrix} \overline{F}_{1i}^{r} \\ \overline{F}_{3i}^{r} \\ \overline{F}_{1j}^{r} \\ \overline{F}_{3j}^{r} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \overline{K}_{11ii}^{r} & \overline{K}_{13ii}^{r} & \overline{K}_{11ij}^{r} & \overline{K}_{13ij}^{r} \\ \overline{K}_{31ii}^{r} & \overline{K}_{33ii}^{r} & \overline{K}_{31ij}^{r} & \overline{K}_{33ij}^{r} \\ \hline \overline{K}_{11ji}^{r} & \overline{K}_{13ji}^{r} & \overline{K}_{11jj}^{r} & \overline{K}_{13jj}^{r} \\ \overline{K}_{31ji}^{r} & \overline{K}_{33ji}^{r} & \overline{K}_{31jj}^{r} & \overline{K}_{33jj}^{r} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \overline{u}_{1i}^{r} \\ \overline{u}_{3i}^{r} \\ \overline{u}_{1j}^{r} \\ \overline{u}_{3j}^{r} \end{bmatrix}. \tag{8.37}$$

$$\overline{\mathbf{K}}^{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{ii}^{r} & \overline{\mathbf{K}}_{ij}^{r} \\ \overline{\mathbf{K}}_{ji}^{r} & \overline{\mathbf{K}}_{jj}^{r} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \overline{K}_{11ii}^{r} & \overline{K}_{13ii}^{r} & \overline{K}_{11ij}^{r} & \overline{K}_{13ij}^{r} \\ \overline{K}_{31ii}^{r} & \overline{K}_{33ii}^{r} & \overline{K}_{31ij}^{r} & \overline{K}_{33ij}^{r} \\ \hline \overline{K}_{11ji}^{r} & \overline{K}_{13ji}^{r} & \overline{K}_{11jj}^{r} & \overline{K}_{13jj}^{r} \\ \overline{K}_{31ji}^{r} & \overline{K}_{33ji}^{r} & \overline{K}_{31jj}^{r} & \overline{K}_{33jj}^{r} \end{array}\right]. \tag{8.38}$$

Рис. 8.8

Выполнив процедуру вычисления столбцов матриц жесткости для элементов с шарниром в узле *j* и с шарнирами в обоих узлах, получим матрицы жесткости соответственно в виде:

$$\overline{\mathbf{K}}^{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{ii}^{r} & \overline{\mathbf{K}}_{ij}^{r} \\ \overline{\mathbf{K}}_{ji}^{r} & \overline{\mathbf{K}}_{jj}^{r} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -EF/l & 0 & 0 & EF/l & 0 \\ 0 & 3EI/l^3 & -3EI/l^2 & 0 & -3EI/l^3 \\ 0 & -3EI/l^2 & 3EI/l & 0 & 3EI/l^2 \\ \hline -EF/l & 0 & 0 & EF/l & 0 \\ 0 & 3EI/l^3 & -3EI/l^2 & 0 & -3EI/l^3 \end{array}\right]; \tag{8.39}$$

$$\overline{\mathbf{K}}^{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{ii}^{r} & \overline{\mathbf{K}}_{ij}^{r} \\ \overline{\mathbf{K}}_{ji}^{r} & \overline{\mathbf{K}}_{jj}^{r} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -EF/l & 0 & EF/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -EF/l & 0 & EF/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{8.40}$$

Все, рассмотренные в этом разделе матрицы жесткости, построены в принятой местной системе осей координат элементов (см. рис.8.5, *а*).

Поскольку в основном разрешающем уравнении МКЭ в форме метода перемещений (8.12) используется матрица жесткости **K** в общей системе осей координат, перейдем к рассмотрению вопроса о построении этой матрицы.

8.4. Преобразование векторов перемещений и усилий в узлах и матриц жесткости конечного элемента из общей системы осей координат в местную и наоборот

В общем случае плоский стержневой элемент e^r с «привязанной» к нему местной системой осей координат X1 (1^r), Y1 (2^r), Z1 (3^r) (см. рис. 8.5) в расчетной схеме стержневой конструкции оказывается повернутым по отношению к общей системе осей координат X,(1), Y(2), Z(3) (см. рис. 3.4).

Все введенные в подразделе (8.3) для конечного элемента обозначения величин в местной системе координат будут аналогичными для соответствующих величин и в общей системе координат, но не будут иметь сверху черты (см., например, (8.16) вместо (8.20)).

Переход от векторов узловых усилий $\mathbf{f}_i^r$ и перемещений $\mathbf{u}_i^r$ узла i стержневого элемента e^r, отнесенных к общей системе осей координат, к соответствующим векторам узловых усилий $\bar{\mathbf{f}}_i^r$ и перемещений $\bar{\mathbf{u}}_i^r$, отнесенных к местной системе осей координат, можно представить в виде [8, 11, 13]:

$$\bar{\mathbf{f}}_i^r = \mathbf{C}_i^r \mathbf{f}_i^r; \quad \bar{\mathbf{u}}_i^r = \mathbf{C}_i^r \mathbf{u}_i^r, \tag{8.41}$$

где $\mathbf{C}_i^r$ – матрица направляющих косинусов (косинусов углов между положительными направлениями осей общей и местной систем координат), являющаяся матрицей преобразования векторов узловых усилий и перемещений в общей системе координат в соответствующие вектора в местной системе координат.

Для жесткого и шарнирного узла i (при принятых на рис. 3.1 и рис. 8.5 числовых обозначениях осей общей и местной систем координат и направления угла поворота) эта матрица будет соответственно иметь вид:

$$\mathbf{C}_i^r = \begin{bmatrix} \cos(1^r,1) & \cos(1^r,3) & \cos(1^r,5) \\ \cos(3^r,1) & \cos(3^r,3) & \cos(3^r,5) \\ \cos(5^r,1) & \cos(5^r,3) & \cos(5^r,5) \end{bmatrix}; \tag{8.42}$$

$$\mathbf{C}_i^r = \begin{bmatrix} \cos(1^r,1) & \cos(1^r,3) \\ \cos(3^r,1) & \cos(3^r,3) \end{bmatrix}. \tag{8.43}$$

Для второго узла с номером j стержневого конечного элемента (см. рис. 8.5, рис. 8.7) в расчетной схеме МКЭ системы «Плоская рама» в

выражениях (8.42) − (8.43) изменяется только индекс, обозначающий номер узла.

Как уже отмечалось в комментариях к рис.3.4, встречаются два варианта поворота местной системы осей координат вместе со стержневым конечным элементом:

1. Для не вертикальных конечных элементов расположенных правее вертикали, совпадающей с осью Z, местная система осей координат поворачивается вместе с элементом вокруг оси Y общей системы осей координат только на угол $-90^o < \varphi < +90^o$.

2. Для вертикальных элементов и элементов, расположенных левее вертикали, совпадающей с осью Z, местная система осей координат поворачивается вместе с элементом вокруг оси Y общей системы осей координат сначала на угол $90^o \le \varphi \le 270^o$, а затем вокруг местной оси X1 на угол $\psi = 180^o$.

Получающиеся при этом матрицы $\mathbf{C}_i^r$ для жестких и шарнирных узлов *при выбранном правиле знаков для перемещений и усилий в узлах* i и j (см. рис. 8.5 и рис. 8.7) будут иметь вид (2.44), (2.45).

Жесткий узел

1. При повороте осей МСК на угол $-90^o < \varphi < +90^o$ и на угол $\psi = 0^o$

$$\mathbf{C}_i^r = \begin{bmatrix} \cos\varphi^r & -\sin\varphi^r & 0 \\ \sin\varphi^r & \cos\varphi^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

2. При повороте осей МСК на угол $90^o \le \varphi \le 270^o$ и на угол $\psi = 180^o$

$$\mathbf{C}_i^r = \begin{bmatrix} -\sin\varphi^r & -\cos\varphi^r & 0 \\ -\cos\varphi^r & \sin\varphi^r & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2.44)$$

Шарнирный узел

1) при повороте осей МСК на угол $-90^o < \varphi < +90^o$ и на угол $\psi = 0^o$

$$\mathbf{C}_i^r = \begin{bmatrix} \cos\varphi^r & -\sin\varphi^r \\ \sin\varphi^r & \cos\varphi^r \end{bmatrix}.;$$

2) при повороте осей МСК на угол $90^o \le \varphi \le 270^o$ и на угол $\psi = 180^o$

$$\mathbf{C}_i^r = \begin{bmatrix} -\sin\varphi^r & -\cos\varphi^r \\ -\cos\varphi^r & \sin\varphi^r \end{bmatrix} \qquad (2.45)$$

Тогда для всего стержневого элемента с узлами i и j получим

$$\bar{\mathbf{f}}^r = \mathbf{C}^r\mathbf{f}^r; \quad \bar{\mathbf{u}}^r = \mathbf{C}^r\mathbf{u}^r. \qquad (2.46)$$

С учетом структуры векторов узловых усилий и перемещений в виде выражений (8.18) и (8.19) и с учетом выражений (8.46) матрица $\mathbf{C}^r$ для стержневого элемента может быть представлена как диагональная блочная матрица

$$\mathbf{C}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i^r & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_j^r \end{bmatrix}. \tag{8.47}$$

Умножив выражения (8.46) на обратную матрицу $(\mathbf{C}^r)^{-1}$, получим

$$\mathbf{f}^r = (\mathbf{C}^r)^{-1}\bar{\mathbf{f}}^r; \quad \mathbf{u}^r = (\mathbf{C}^r)^{-1}\bar{\mathbf{u}}^r. \tag{8.48}$$

Подставим в первое равенство (8.46) вместо вектора $\bar{\mathbf{f}}^r$ его выражение (8.20), а затем второе равенство (8.46). Тогда получим

$$\mathbf{f}^r = (\mathbf{C}^r)^{-1}\bar{\mathbf{f}}^r = (\mathbf{C}^r)^{-1}\overline{\mathbf{K}}^r\bar{\mathbf{u}}^r = (\mathbf{C}^r)^{-1}\overline{\mathbf{K}}^r\mathbf{C}^r\mathbf{u}^r$$

или

$$\mathbf{f}^r = \mathbf{K}^r\mathbf{u}^r, \tag{8.49}$$

где

$$\mathbf{K}^r = (\mathbf{C}^r)^{-1}\overline{\mathbf{K}}^r\mathbf{C}^r \tag{8.50}$$

будет матрицей жесткости конечного элемента в общей системе осей координат.

Можно показать [8, 11, 13], что матрица $\mathbf{C}^r$ является ортогональной матрицей, для которой выполняется равенство $(\mathbf{C}^r)^{-1} = (\mathbf{C}^r)^{\mathrm{T}}$. Тогда

$$\mathbf{K}^r = (\mathbf{C}^r)^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{K}}^r\mathbf{C}^r. \tag{8.51}$$

8.5. Формирование матрицы жесткости для расчетной схемы рамы

Для формирования матрицы жесткости $\mathbf{K}$ расчетной схемы рамы, изображенной на рис. 8.2, *в*, рассмотрим выражение (8.6).

Из него следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= \mathbf{K}_{ii}\mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{f}_{ii} + \mathbf{f}_{ij}; \\ \mathbf{f}_j &= \mathbf{K}_{ji}\mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{jj}\mathbf{u}_j = \mathbf{f}_{ji} + \mathbf{f}_{jj}. \end{aligned} \tag{8.52}$$

Здесь составляющая f_{ij} вектора f_i по аналогии с выражением (8.10) может быть представлена в виде

$$\mathbf{K}_{ij}u_j = \mathbf{f}_{ij} = \sum_{r\in i,j}\mathbf{f}_{ij}^r = \sum_{r\in i,j}\mathbf{K}_{ij}^r\mathbf{u}_j^r. \tag{8.53}$$

Из условия неразрывности перемещений узлов i^s и i^m элементов, сходящихся в узле i (см. рис. 8.4), с перемещениями самого узла i в состоянии II расчетной схемы рамы (см. рис. 8.2, *в*) следует, что

$$\mathbf{u}_i^r = \mathbf{u}_i, \tag{8.54}$$

где для рассматриваемого примера $r = s, m$.

Тогда вместо (8.53) можно записать

$$\mathbf{K}_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{f}_{ij} = \sum_{r\in i,j} \mathbf{f}_{ij}^r = \sum_{r\in i,j} \mathbf{K}_{ij}^r \mathbf{u}_j^r = \sum_{r\in i,j} \mathbf{K}_{ij}^r \mathbf{u}_j \tag{8.55}$$

и вместо (8.52)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= \mathbf{K}_{ii}\mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{ij}\mathbf{u}_j = \sum_{r\in i} \mathbf{K}_{ii}^r \mathbf{u}_i + \sum_{r\in i,j} \mathbf{K}_{ij}^r \mathbf{u}_j; \\ \mathbf{f}_j &= \mathbf{K}_{ji}\mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{jj}\mathbf{u}_j = \sum_{r\in i,j} \mathbf{K}_{ji}^r \mathbf{u}_i + \sum_{r\in j} \mathbf{K}_{jj}^r \mathbf{u}_j. \end{aligned} \tag{8.56}$$

Отсюда следует принцип формирования для расчетной схемы МКЭ рассматриваемой рамы (см. рис. 8.2, *а*) элементов блочной матрицы жесткости, которая входит в систему уравнений вида (8.13):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{r\in i} \mathbf{K}_{ii}^r & \sum\limits_{r\in i,j} \mathbf{K}_{ij}^r \\ \sum\limits_{r\in i,j} \mathbf{K}_{ji}^r & \sum\limits_{r\in i,j} \mathbf{K}_{jj}^r \end{bmatrix}. \tag{8.57}$$

В рассматриваемой раме (см. рис. 8.2, *в*) узел i имеют элементы s и m, узел j − элементы m и t. Узлы i и j одновременно имеются только на элементе m. Поэтому из (8.57) получим

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{ii}^s + \mathbf{K}_{ii}^m) & \mathbf{K}_{ij}^m \\ \mathbf{K}_{ji}^m & (\mathbf{K}_{jj}^m + \mathbf{K}_{jj}^t) \end{bmatrix}. \tag{8.58}$$

Входящие сюда блочные матрицы для элементов s, m и t в общей системе осей координат получаются из выражения (8.51) с помощью матрицы жесткости $\overline{\mathbf{K}}^r$ соответствующего горизонтального типового элемента и соответствующей матрицы преобразования $\mathbf{C}^r$ при повороте координатных осей типового элемента до его положения в заданной раме.

Матрица жесткости $\mathbf{K}$ системы уравнений (8. 12) основной задачи МКЭ для стержневой конструкции с n степенями свободы узлов будет иметь вид:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1j} & \dots & \mathbf{K}_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{K}_{i1} & \dots & \mathbf{K}_{ij} & \dots & \mathbf{K}_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{K}_{n1} & \dots & \mathbf{K}_{nj} & \dots & \mathbf{K}_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{r\in 1,1}\mathbf{K}_{11}^{r} & \dots & \sum\limits_{r\in 1,j}\mathbf{K}_{1j}^{r} & \dots & \sum\limits_{r\in 1,n}\mathbf{K}_{1n}^{r}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum\limits_{r\in i,1}\mathbf{K}_{i1}^{r} & \dots & \sum\limits_{r\in i,1}\mathbf{K}_{ij}^{r} & \dots & \sum\limits_{r\in 1,1}\mathbf{K}_{in}^{r}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum\limits_{r\in n,1}\mathbf{K}_{n1}^{r} & \dots & \sum\limits_{r\in n,j}\mathbf{K}_{nj}^{r} & \dots & \sum\limits_{r\in n,n}\mathbf{K}_{nn}^{r}\end{bmatrix}; \qquad (8.59)$$

8.6. Обозначения узловых перемещений и усилий в сечениях стержней в программе SCAD

Перемещения узлов стержневой системы определяются в общей системе координат (см. рис. 3.1).

Обозначения перемещений любого узла стержневой системы типа «Плоская рама», принятые в программе SCAD, были даны в подразделе 3.1, откуда следует, что искомый вектор перемещений $\mathbf{u}$ (8.3) для рассматриваемой рамы (см. рис. 8.2, *а*) представляется в виде:

$$\mathbf{u}=\left[\mathrm{X}_i\ \mathrm{Z}_i\ \mathrm{UY}_i \,\vdots\, \mathrm{X}_j\ \mathrm{Z}_j\right]^{\mathrm{T}}. \qquad (8.60)$$

Искомые внутренние усилия в любом сечении k конечного элемента типа 2 системы «Плоская рама» с номером r определяются в программе SCAD в местной системе осей координат и представляются вектором (8.61).

Принятые в программе SCAD положительные направления внешних узловых нагрузок и внутренних усилий, действующих на узлы и элементы стержневых систем типа «Плоская рама», показаны в подразделах 3 и 4.

$$\bar{\mathbf{f}}_k^r=\begin{bmatrix}N_k^r\\ M_k^r\\ Q_k^r\end{bmatrix}, \qquad (8.61)$$

Для рамы, рассматриваемой в качестве примера для пояснения идеи и алгоритма МКЭ (см. рис. 8.1 и рис. 8.2), положительные направления внешних нагрузок, действующих на узлы, и внутренних усилий, действующих на элементы, при расчете по программе SCAD изображены на рис. 8.9.

Использование в учебных пособиях [8, 11, 13] и в программе SCAD различных обозначений перемещений узлов, усилий в сечениях стержней и принятых для них правил знаков принципиального значения для понимания МКЭ не имеют и на результаты расчета не влияют.

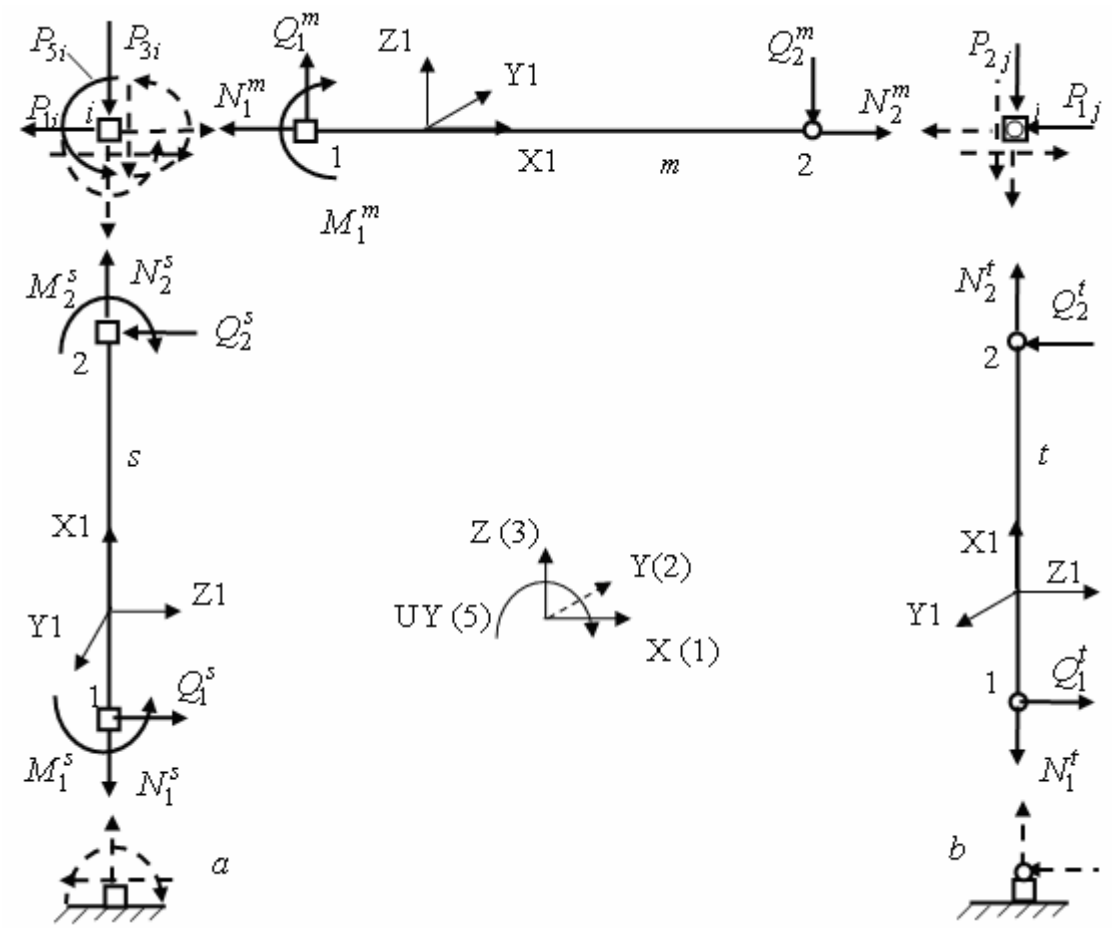


Рис. 8.9

П р и м е р. Выполним расчет рамы, изображенной на рис. 8.1, МКЭ в форме метода перемещений с использованием программы SCAD.

Зададим следующие характеристики ее материала и размеров:

Рама выполнена из железобетона (бетон класса В25 [14]).

Стойки и ригель имеют соответственно размеры поперечного сечения 40·40 см и 40·60 см.

Длина стоек и ригеля соответственно равны 6 м и 8 м.

Требуется с помощью программы SCAD построить эпюры усилий для следующих трех загружений рамы: 1. $q_1 = 1$ Т/м; 2. $q_2 = 1$ Т/м; 3. $P = 8$ Т.

Расчетная схема МКЭ принята в виде, приведенном на рис. 8.2, *а* при любом из вариантов постановки одиночного шарнира в узле j (вопрос о назначении шарниров см. в подразделе 3.3).

Последовательность расчета с использованием программы SCAD выполняется в соответствии с рекомендациями, данными в приложении 1 к УМК.

Представление результатов расчета и способы контроля известны учащемуся из подразделов 4 и 5, а также из приложения 1 к УМК.

Здесь результаты расчета для заданных трех вариантов загружения приведены только в виде эпюр M (рис. 8.10).

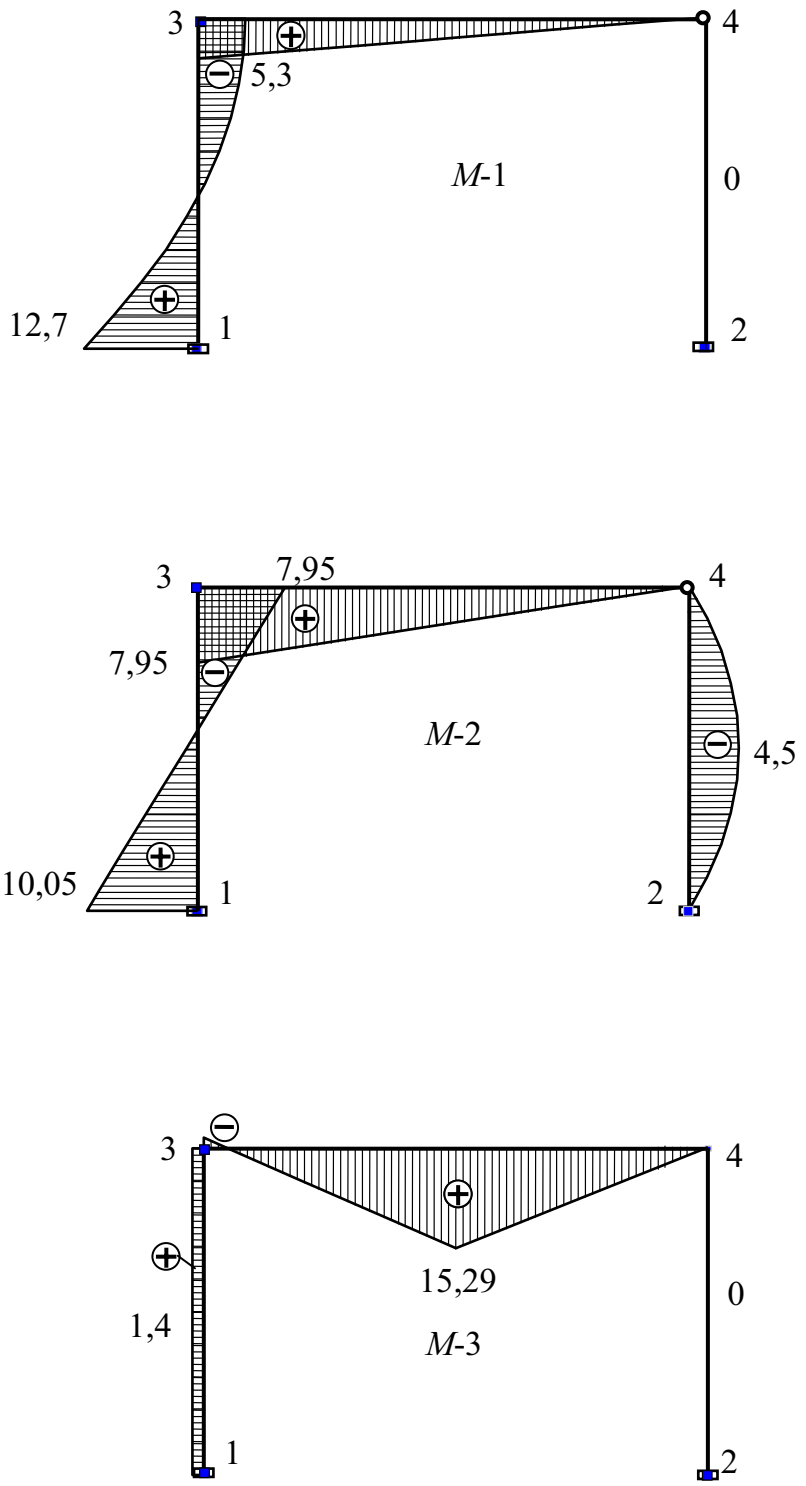


Рис. 8. 10

9. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОГРАММЫ SCAD ДЛЯ РАСЧЕТА И АНАЛИЗА РАБОТЫ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК И РАМ

В предыдущем разделе УМК на примере плоской рамы продемонстрирована последовательность ее расчета МКЭ в форме метода перемещений.

В этом разделе основное внимание уделено применению МКЭ в форме метода перемещений, реализованного с помощью программы SCAD на персональном компьютере, как инструмента, позволяющего быстро проанализировать особенность работы какой–либо стержневой системы и выполнить какое–либо исследование.

9.1. Расчет неразрезных балок МКЭ с пользованием программы SCAD

Напомним, что в подразделе 5 была рассмотрена методика расчета балки, разрезанной шарнирами на отдельные звенья. Причем число шарниров было подобрано таким, что она стала статически определимой. Подобную балку в учебном курсе строительной механики называют *шарнирной балкой*.

Неразрезной балкой называют статически неопределимую балку, не разрезаемую на части ни одним шарниром, в том числе и в месте ее опирания на промежуточные шарнирные опоры (рис. 9.1).

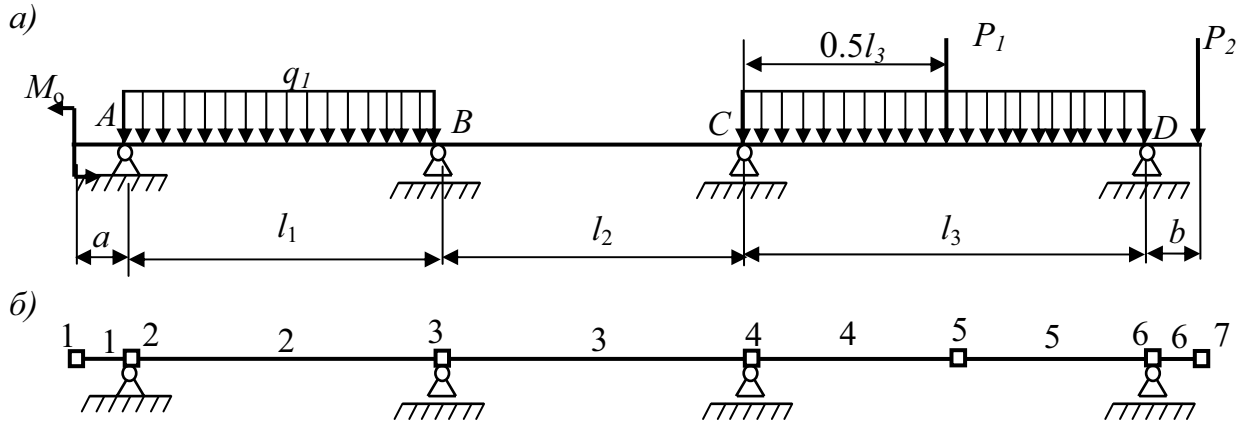


Рис. 9.1

Ход расчета неразрезных балок по программе SCAD практически не

отличается от хода расчета шарнирных балок (см. приложение 1 к УМК). Причем построение расчетной схемы МКЭ (рис. 9.1, *б*) для статически неопределимой неразрезной балки, (см. рис. 9.1, *а*, даже проще построения расчетной схемы для шарнирной балки (см. рис. П приложения 1 к УМК), поскольку не требуется устанавливать шарниры, а значит и не требуется назначать узлы сетки КЭ в местах постановки шарниров.

По этой причине в данном разделе вопросы процедуры расчета неразрезных балок с помощью программы SCAD при действии на них внешних нагрузок не рассматриваются.

Основное внимание при расчете неразрезных балок с помощью программы SCAD уделено вопросам исследования эпюр изгибающих моментов от действия на балки внешних нагрузок, а также вопросам расчета балок от осадки опор и температурного воздействия.

9.2. Определение усилий в однопролетных статически неопределимых балках на жестких опорах от поперечных к их осям нагрузок

Вопросы определения усилий M и Q однопролетных балок при действии по длине пролета различных нагрузок и при различных опорах по концам пролета (см. рис. 7.16 и рис. 7.18), были рассмотрены в разделе 7 при изучении метода сил. Результат расчета был приведен в виде эпюр усилий M и Q (см. табл. 7.1).

Все эти балки легко рассчитываются МКЭ с использованием программы SCAD. При составлении исходных данных для расчета и чтении результатов расчета необходимо помнить следующие сведения.

1. При поперечной к оси балки нагрузке продольные силы в балке равны нулю. Поэтому, значение продольной жесткости EF балки не влияет на искомые усилия M и Q и на перемещения (прогибы и углы поворота) сечений балки.

Следовательно, ***в программе SCAD для элементов типа 2, на которые балка разбивается в ее расчетной схеме МКЭ, продольная жесткость элементов может быть задана в виде произвольного значения, например,*** $EF = 1$**.**

2. В статически неопределимой балке при постоянной жесткости на изгиб EI ее значение также не влияет на искомые усилия M и Q, поскольку в уравнениях метода сил для определения лишних неизвестных, связанных с изгибом балки, величина EI может быть сокращена (см. раздел 7).

Поэтому *для балки, несущей только поперечную к ее оси нагрузку, и имеющей постоянную жесткость на изгиб* EI *эта жесткость* ***при определении усилий с помощью программы SCAD*** *может быть задана в виде произвольного значения* $EI_{\text{задан}}$, *например,* $EI_{\text{задан}} = 1$.

Однако произвольное задание значения жесткости $EI_{\text{задан}}$ ***влияет на величины всех перемещений балки при изгибе (прогибы и углы поворота сечений балки).***

Для получения действительных значений перемещений, соответствующих действительному значению жесткости на изгиб EI, *найденные расчетом перемещения при жесткости* $EI_{\text{задан}}$ *должны быть умножены на коэффициент* $k = EI_{\text{задан}} / EI$.

Это означает, например, что *для получения реальных перемещений сечений балки при изгибе, перемещения, вычисленные при значении жесткости* $EI_{\text{задан}} = 1$, *должны быть разделены на жесткость* EI .

9.3. Построение эпюр усилий в неразрезной балке от комбинации нескольких загружений

Строительные конструкции и сооружения рассчитываются на различного вида постоянные, временные и особые нагрузки, на их комбинации и сочетания.

В программе SCAD используются определенная процедура формирования комбинации загружений.

Комбинация загружений представляет собой сумму двух и более загружений. При этом нагрузки в суммируемых загружениях могут быть умножены на определенный коэффициент больше или меньше единицы. Иными словами, с помощью закона Гука и принципа суперпозиции (принцип независимости действия сил) может быть построено новое загружение.

В качестве примера рассмотрим балку (рис. 9.2, *а*) с пролетами равной длины $l = 6$ м и равной жесткостью на изгиб EI .

Предположим, что расчет балки с помощью программы SCAD выполняется при четырех загружениях поперечной к оси балки единичной равномерно распределенной нагрузкой, действующей соответственно на первом, втором, третьем пролетах и на консоли.

Так как все пролеты и консоль балки имеют одинаковую жесткость на изгиб, то эта жесткость при построении эпюр усилий может быть принята

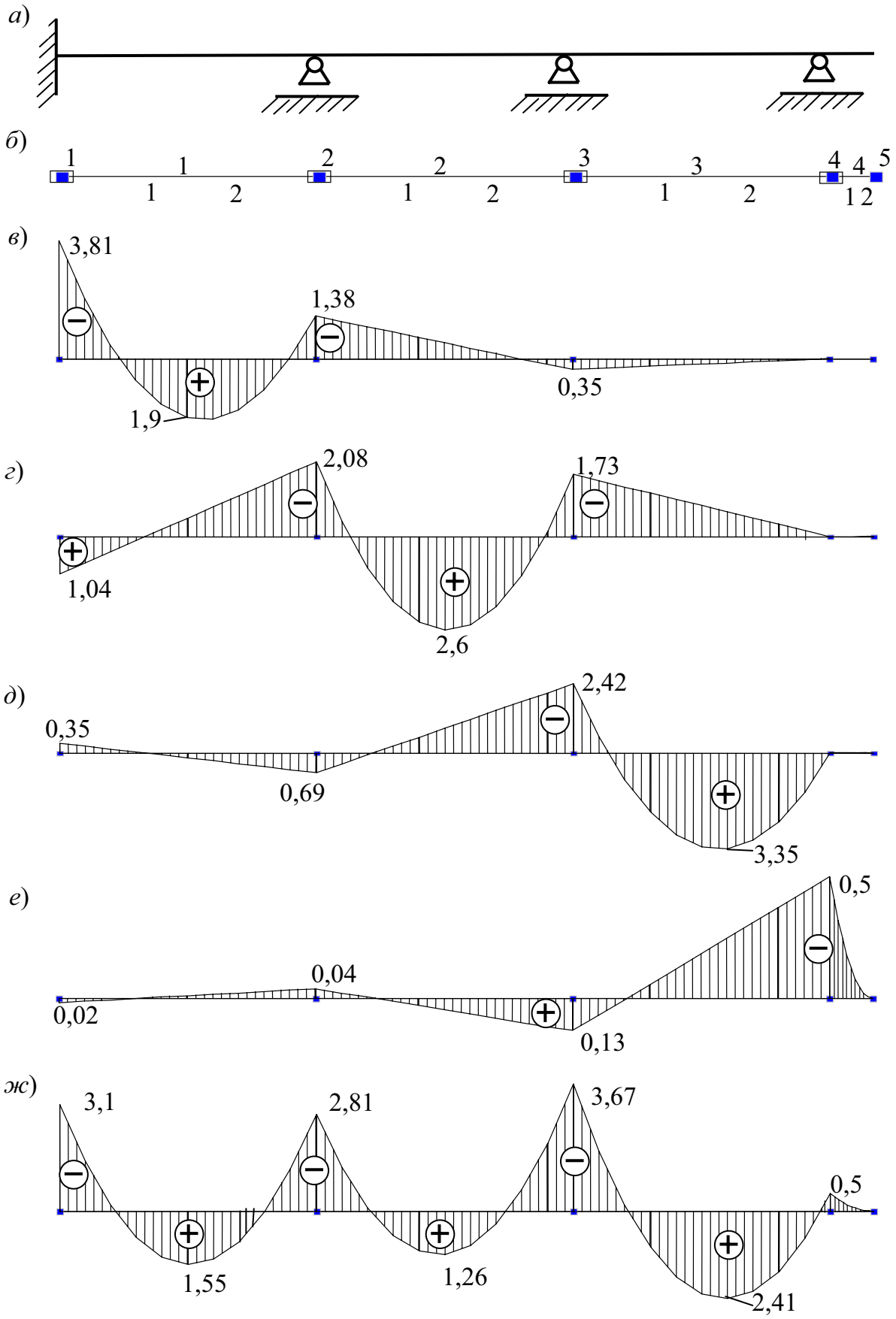

а)
б)
1
1
2
2
3
3
4
4
5
1
2
1
2
1
2
1 2
в)
3,81
1,38
0,35
1,9
г)
2,08
1,73
1,04
2,6
д)
2,42
0,35
0,69
3,35
е)
0,5
0,04
0,02
0,13
ж)
3,1
2,81
3,67
0,5
1,55
1,26
2,41

Рис. 9.2

равной единице (см. пояснения в подразделе 9.2). Требуемая для расчета по программе SCAD в качестве исходных данных продольная жесткость EF также может быть принята равной единичному значению.

Расчетная схема МКЭ балки для ее расчета с помощью программы SCAD представлена на рис. 9.2, *б* в виде совокупности четырех КЭ типа 2 (элемент плоской рамы).

Эпюры *M* в балке, получающиеся при указанных четырех загружениях балки, приведены соответственно на рис. 9.2 ,*в – е*. Моменты вычислялись в трех сечениях каждого элемента: в начале, середине и конце элемента. В таблице результатов расчета в программе SCAD они отмечены соответственно цифрами 1, 2, 3. В аналогичном виде могут быть представлены и эпюры поперечных сил *Q*.

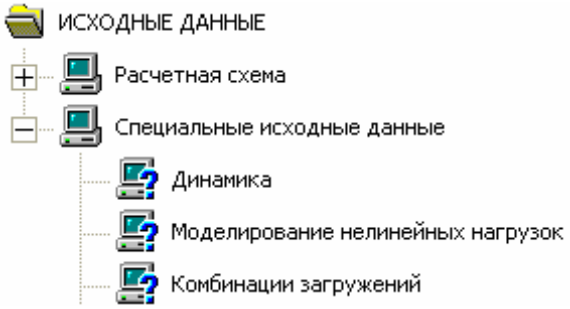
Из указанных загружений можно составить различные их комбинации и вычислить искомые величины усилий в намеченных сечениях стержней при этих комбинациях нагрузок на балку.

Если составить комбинацию в виде суммы всех четырех загружений при единичных коэффициентах для каждого загружения, то получим загружение всей балки единичной равномерно распределенной нагрузкой. В этом случае и все искомые величины в каждом сечении балки получатся алгебраическим (т.е. с учетом знака) суммированием соответствующих величин в этом сечении во всех загружениях.

В принципе эта комбинация загружений может быть предусмотрена сразу как загружение 5 на этапе создания загружений. Это и сделано в рассматриваемом здесь примере. Эпюра *M* для загружения 5 построена на рис. 9.2, *ж*. Аналогично может быть получена и эпюра *Q*.

Продемонстрируем способ получения загружения 5 балки единичной нагрузкой с помощью процедуры «Комбинация загружений».

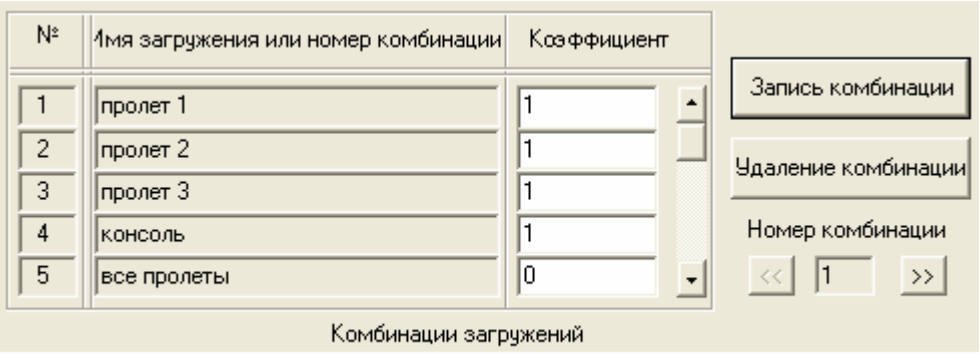
С этой целью после выполнения расчета балки от всех загружений (в том числе в рассматриваемом примере и от суммарного загружения 5) открываем окно **Дерево управления проектом** (ниже приведена его часть).



Заходим на ветвь **Специальные исходные данные** и открываем диалоговое окно **Комбинации загружений** (здесь также приведена только его часть).

В окне выполняются следующие действия:

1. Задаются коэффициенты, на которые умножаются соответствующие загружения при создании комбинации загружений (в нашем примере для всех загружений коэффициенты приняты равными единице). Эта первая комбинация отмечается в окне «Номер комбинации» номером 1.



1.(L1)*1+(L2)*1+(L3)*1+(L4)*1

2. Нажимается кнопка «Запись комбинации». В результате в окне «Комбинации загружения» будет записана формула, по которой формируется эта первая комбинация загружений (см. приведенный фрагмент окна).

3. Аналогично могут быть составлены и другие комбинации загружений, в которые могут быть включены и ранее созданные комбинации. В рассматриваемом примере, как видно из окна **Комбинации загружений,** была создана только одна комбинация.

4. После создания нужных комбинаций загружений нажатием кнопки «ОК» диалоговое окно закрывается.

5. На дереве управления проектом в разделе **Расчет** выполняется расчет **Комбинация загружений**.

В разделе **Результаты** дерева управления проектом можно убедится в том, что для выполненного примера результаты расчета от загружения 5 и от созданной комбинации загружений совпадают.

Обратим внимание на то, что при расчете от нагрузки в виде комбинации загружений ордината M_k эпюры M в любом сечении k балки получается алгебраическим (с учетом знака ординаты) суммированием по формуле

$$M_k = \sum_i M_{k,i} = \sum_i a_i \overline{M}_{k,i}\,, \tag{9.1}$$

где i – номер загружения (в примере $i = 1{-}4$); $M_{k,i} = a_i \overline{M}_{k,i}$ – положительный или отрицательный изгибающий момент в сечении k от i-го загружения; $\overline{M}_{k,i}$ – положительный или отрицательный изгибающий момент в сечении k от i-го

единичного загружения; a_i − коэффициент увеличения или уменьшения *единичной* нагрузки в загружении *i*.

Аналогично подсчитывается поперечная сила Q_k.

Так же может быть вычислена и продольная сила N_k, если в состав нагрузок загружений, из которых составляется комбинация загружений, входят и продольные нагрузки.

9.4. Построение огибающих эпюр $M_{\max}$ и $M_{\min}$ для неразрезной балки

Этот вопрос рассмотрим на примере неразрезной балки, изображенной на рис. 9.2, *а*. Предположим, что балка загружена следующей нагрузкой:

1. Постоянной, равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью p, действующей по всей длине балки. В этом варианте загружения балки в любом ее сечении k возникнет постоянный изгибающий момент $M_{k,p}$.

2. Временной, равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью v, которая может быть приложена в отдельности по длине каждого пролета и на консоли. Такие отдельные загружения отметим соответственно номерами $i = 1, 2, 3, 4$.

В сечении *k* балки от любого загружения временной нагрузкой с номером *i* возникает положительный (растягивающий нижнюю сторону сечения) или отрицательный (растягивающий верхнюю сторону сечения) изгибающий момент $M_{k,i}$.

Изгибающий момент в сечении *k* при действии на всю балку постоянной нагрузки и временной нагрузки в виде указанных четырех загружений можно получить в результате суммирования по формуле:

$$M_k = M_{k,p} + \sum_i M_{k,i}, \tag{9.2}$$

Будем считать, что временная нагрузка с номерами загружений $i = 1, 2, 3, 4$ может отсутствовать на балке или может быть приложена в любых комбинациях этих загружений: любое одно загружение, любые два загружения, любые три загружения, все загружения сразу.

Из формулы (9.2) видно (см. также рис. 9.2), что при разных комбинациях загружения балки временной нагрузкой в сечении *k* будут получаться разные величины изгибающих моментов.

Для расчета балки важно иметь данные о максимальном $M_{k,\max}$ и минимальном $M_{k,\min}$ изгибающих моментах, которые могут возникнуть в

любом ее сечении k при наихудших комбинациях временной нагрузки.

Максимальным изгибающим моментом $M_{k,\max}$ в каком-либо сечении k стержневой системы называется ***наибольший положительный*** (растягивающий нижнюю сторону стержня в рассматриваемом сечении) или, если нет положительных моментов в сечении, ***наименьший отрицательный*** (растягивающий верхнюю сторону стержня в рассматриваемом сечении) изгибающий момент.

Минимальным изгибающим моментом $M_{k,\min}$ в каком-либо сечении k стержневой системы называется ***наибольший отрицательный*** (растягивающий верхнюю сторону стержня в рассматриваемом сечении) или, если нет отрицательных моментов в сечении, ***наименьший положительный*** (растягивающий верхнюю сторону стержня в рассматриваемом сечении) изгибающий момент.

Очевидно, что для получения $M_{k,\max}$ и $M_{k,\min}$ соответственно должны использоваться формулы:

$$M_{k,\max} = M_{k,p} + \sum_i M_{k,i}^{+}, \tag{9.3}$$

$$M_{k,\min} = M_{k,p} + \sum_i M_{k,i}^{-}. \tag{9.4}$$

Из формулы (9.3) видно, что для получения максимального изгибающего момента в сечении k балки к постоянному моменту $M_{k,p}$ (он может иметь как положительный, так и отрицательный знак) должны добавляться только положительные изгибающие моменты $M_{k,i}^{+}$ от загружений временной нагрузкой.

Отрицательные изгибающие моменты, получающиеся в рассматриваемом сечении k от других загружений временной нагрузкой, при подсчете максимального изгибающего момента не учитываются, так как учет отрицательных моментов уменьшает значение положительного изгибающего момента или увеличивает значение отрицательного момента, если максимальный момент может иметь только знак минус.

Возможность не учета отрицательных ординат в рассматриваемом сечении означает предположение об отсутствии соответствующих временных нагрузок (см. перечисленные выше возможные варианты комбинаций загружений временной нагрузкой).

Аналогично в формуле (9.4) для получения минимального изгибающего

момента в сечении k балки к постоянному (положительному или отрицательному) моменту $M_{k,p}$ должны добавляться только отрицательные изгибающие моменты $M_{k,i}^{-}$ от загружений временной нагрузкой.

Положительные изгибающие моменты в этом сечении от каких-либо загружений временной нагрузкой не учитываются, так как учет этих моментов при подсчете минимального изгибающего момента уменьшает значение отрицательного изгибающего момента или увеличивает значение положительного момента, если минимальный изгибающий момент может иметь только знак плюс.

Таким образом, *для каждого сечения k балки рассматривается своя наихудшая комбинация загружений балки временной нагрузкой*.

При практическом решении задачи вычисление $M_{k,\max}$ и $M_{k,\min}$ выполняется только для наиболее характерных сечений. Такими сечениями являются: опорные сечения; сечения, в которых расположены узлы КЭ; сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные нагрузки; средние сечения элементов при равномерно распределенной нагрузке и т. д.

Отложив ординаты $M_{k,\max}$ и $M_{k,\min}$ от оси стержня и соединив соответственно их концы, получим так называемые **огибающие эпюры** $M_{\max}$ и $M_{\min}$.

Получив такие эпюры, можно выполнить подбор арматуры для железобетонной балки или произвести подсчет напряжений для металлической балки с последующим расчетом на прочность, жесткость и устойчивость.

П р и м е р. Для пояснения построения огибающих эпюр $M_{\max}$ и $M_{\min}$ выполним расчет неразрезной балки, изображенной на рис. 9.2, *а*, от загружения всей балки постоянной нагрузкой с интенсивностью $p = 2$ Т/м и от временной нагрузки интенсивностью $v_i = v = 4$ Т/м при загружении каждого пролета балки и консоли отдельно.

Поскольку на пролетах балки задана распределенная нагрузка, то при выборе числа элементов на пролетах балки можно назначить по одному элементу на каждом пролете.

При равномерно распределенной постоянной и временной нагрузке для построения эпюр $M_{\max}$ и $M_{\min}$ на балке на каждом элементе длиной равной длине пролета необходимо назначить минимум по три сечения.

Воспользуемся уже имеющимися результатами расчетов балки от единичных нагрузок (см. рис. 9.2).

Оставив нумерацию загружений такой же, какой она была при единичной нагрузке, формулы (9.3) и (9.4) запишем в виде:

$$M_{k,max} = \sum_{i=1}^{4} p_i \overline{M}_{k,p} + \sum_{i=1}^{4} v_i \overline{M}_{k,i}^{+}\,; \tag{9.5}$$

$$M_{k,max} = \sum_{i=1}^{4} p_i \overline{M}_{k,p} + \sum_{i=1}^{4} v_i \overline{M}_{k,i}^{-}\,. \tag{9.6}$$

По сути эти формулы являются соответственно формулами (9.3) и (9.4), так как $p_i\,\overline{M}_{k,p} = M_{k,p}$ и $v_i\,\overline{M}_{k,i}^{+} = M_{k,i}^{+}$; $v_i\,\overline{M}_{k,i}^{-} = M_{k,i}^{-}$.В этом примере $p_i = p = 2, v_i = v = 4$.

Вычисления по формулам (9.5) и (9.6) выполнены в начале, середине и конце элементов на пролетах балки (табл. 9.1).

На рис. 9.4 приведены: эпюра $M_{k,p}$ от постоянной нагрузки на балку и огибающие эпюры $M_{\max}$ и $M_{\min}$, построенные с помощью программы **Mikrosoft Excel**.

Ординаты этих эпюр отмечены соответственно ромбовидными, круглыми и квадратными значками в сечениях балки в начале, в середине и в конце элементов.

При анализе эпюр обратим внимание на то, что в опорных сечениях балки изгибающие моменты $M_{k,\max}$ получились со знаком « – », а в серединах первого и третьего пролетов изгибающие моменты $M_{k,\min}$ имеют знак « + ».

Таблица 9.1

Изгибающие моменты в сечениях k пролетов балки, Т·м									
	Пролет 1			Пролет 2			Пролет 3		
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$M_{k,1}$	–15,231	7,615	–5,538	–5,538	–2,077	1,385	1,385	0,692	0
$M_{k,2}$	4,154	–2,077	–8,308	–8,308	10,385	–6,923	–6,923	–3,461	0
$M_{k,3}$	–1,385	0,692	2,769	2,769	–3,461	–9,692	–9,692	13,154	0
$M_{k,4}$	0,077	–0,038	–0,154	–0,154	0,192	0,538	0,538	–0,731	–2
$\sum_i M_{k,i}^{+}$	4,231	8.307	2,769	2,769	10,557	1,923	1,923	13.846	0
$\sum_i M_{k,i}^{-}$	–16,616	–2,115	–14.000	–14.000	–5,538	–16.615	–16.615	–4,192	–2
$M_{k,p}$	**–6,192**	**3,096**	**–5,615**	**–5,615**	**2,519**	**–7,346**	**–7,346**	**4,827**	**–1**
$M_{k,\max}$	**–1,931**	**11.403**	**–2,846**	**–2,846**	**13.076**	**–5,423**	**–5,423**	**18.673**	**–1**
$M_{k,\min}$	**–22,808**	**0,981**	**–19.615**	**–19.615**	**–3,019**	**–23.961**	**–23.961**	**0,635**	**–3**

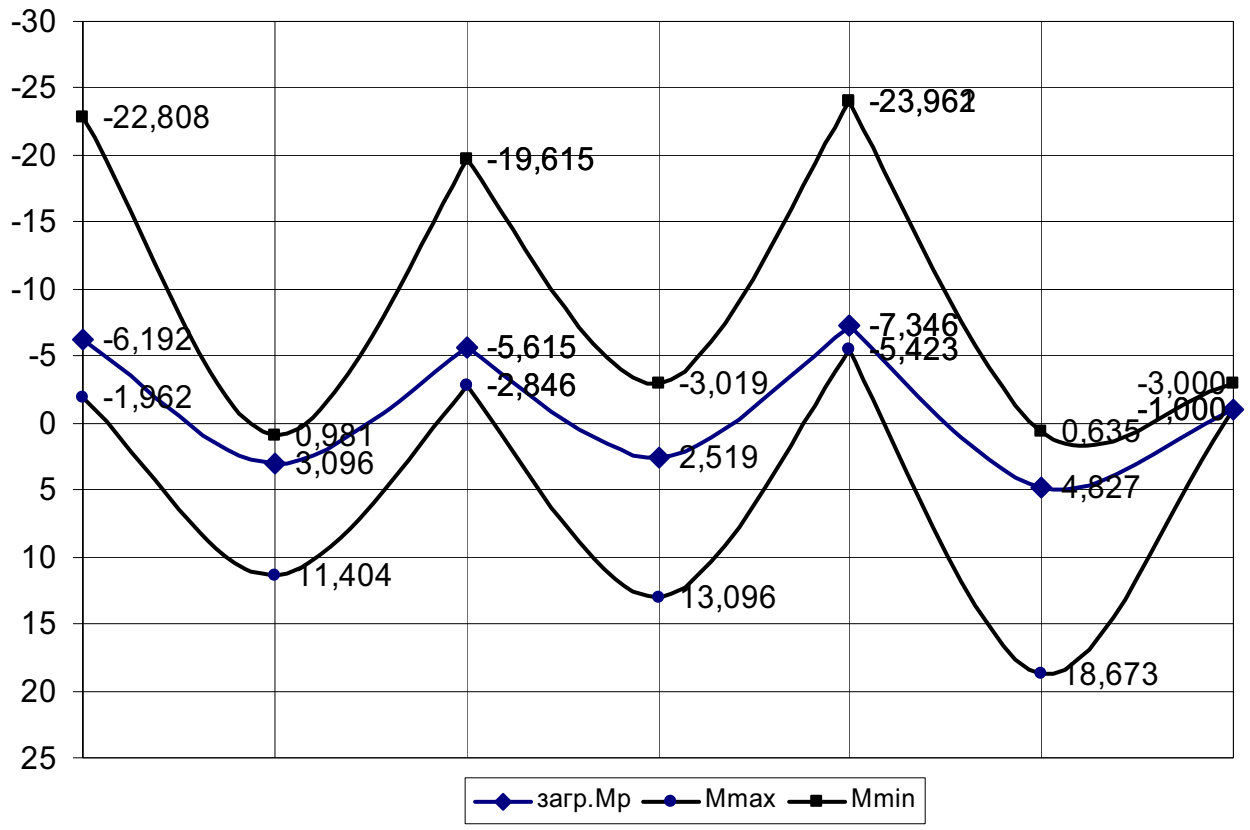


Рис. 9.4

Еще один пример построения огибающих эпюр приведен в приложении 3 УМК.

9.5. Использование фокусных точек на пролетах неразрезных балок для контроля эпюр изгибающих моментов при загружении одного пролета или консоли балки

Расчетчик, получив результат расчета стержневой системы МКЭ на ПК, должен уметь его проверять.

В приведенном выше примере расчета неразрезной балки МКЭ для проверки эпюр M обычно используют сведения, полученные при изучении метода сил применительно к расчету неразрезных балок и, в частности, следующие сведения о фокусных точках и их свойствах (см. раздел 7).

При нагрузке, расположенной только на каком-то одном пролете балки или только на ее консоли, эпюра M на каждом незагруженном внешней нагрузкой пролете прямолинейна и обязательно пересекает ось балки в так называемой ***фокусной точке****, находящейся в пределах дальней (по отношению к загруженной части балки) трети этого пролета.*

Прямая линия эпюры M на незагруженном пролете с номером r является линией, соединяющей ординату $M_{\text{пр}} = M_r$ эпюры на правой опоре с номером r

и левую ординату $M_{\text{лев}} = M_{r-1}$ эпюры на левой опоре с номером $r-1$, т. е. является *линией опорных моментов* (л.о.м.) на рассматриваемом пролете.

Если незагруженный пролет расположен левее загруженного пролета или загруженной консоли, то л.о.м. на незагруженном пролете пересекает ось балки в пределах левой трети пролета (см. рис. 9.2, *в – е*). Соответствующая точка пересечения л.о.м. с осью балки называется ***левой фокусной точкой*** рассматриваемого пролета.

При этом имеется соотношение ординат опорных моментов:

$$-\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{лев}}} = -\frac{M_r}{M_{r-1}} = K_r, \tag{9.7}$$

где K_r называется *левым фокусным отношением опорных моментов неразрезной балки на незагруженном пролете с номером r при загружении неразрезной балки справа от рассматриваемого незагруженного пролета*.

Как показано в разделе 7 УМК, левое фокусное отношение K_r определяется по формуле (7.35):

$$K_r = 2 + \frac{i_r}{i_{r-1}}(2 - \frac{1}{K_{r-1}}),$$

откуда следует, что оно зависит от соотношения погонной жесткости $i_r = (EI)_r / l_r$ рассматриваемого пролета и погонной жесткости $i_{r-1} = (EI)_{r-1} / l_{r-1}$ предыдущего слева незагруженного пролета с номером $r-1$ и левого фокусного отношения K_{r-1} опорных моментов на предыдущем слева пролете. Поскольку левое фокусное отношение для самого крайнего слева пролета в неразрезной балке известно [1], то можно определить левое фокусное отношение опорных моментов на любом пролете балки.

Если незагруженный пролет расположен правее загруженного пролета или загруженной консоли, то л.о.м. на незагруженном пролете пересекает ось балки в пределах правой трети пролета (см. рис. 9.2, в – е). Эта точка пересечения называется ***правой фокусной точкой*** рассматриваемого пролета.

При этом имеется соотношение ординат опорных моментов:

$$-\frac{M_{\text{лев}}}{M_{\text{пр}}} = -\frac{M_{r-1}}{M_r} = K'_r, \tag{9.8}$$

где K'_r называется *правым фокусным отношением опорных моментов неразрезной балки на незагруженном пролете с номером r при загружении неразрезной балки слева от рассматриваемого незагруженного пролета*.

Как показано в разделе 7 УМК, правое фокусное отношение K'_r определяется по формуле (7.38):

$$K'_r = 2 + \frac{i_r}{i_{r+1}}(2 - \frac{1}{K_{r+1}}),$$

откуда следует, что оно зависит от соотношения погонной жесткости $i_r = (EI)_r / l_r$ рассматриваемого пролета и погонной жесткости $i_{r+1} = (EI)_{r+1} / l_{r+1}$ следующего справа незагруженного пролета с номером $r+1$ и правого фокусного отношения K_{r+1} опорных моментов на следующем справа пролете.

Поскольку правое фокусное отношение для самого крайнего справа пролета в неразрезной балке известно (см. раздел 7), то можно определить правое фокусное отношение опорных моментов на любом пролете балки.

Как видим, *положение левых (правых) фокусных точек на пролете балки не зависит от нагрузок, расположенных справа (слева) от рассматриваемого пролета, а определяется только значениями жесткостей и длинами пролетов неразрезной балки*.

Этот вопрос был исследован в разделе 7 при применении к расчету неразрезных балок метода сил и способа его реализации для случая загружения только одного пролета балки или только ее консоли, названного **способом моментных фокусных отношений**.

Наглядное представление о работе неразрезных балок и использовании фокусных точек при их расчете дало рассмотрение в разделе 7 графического способа С.С.Голушкевича (см. также [17]).

В учебном процессе по строительной механике учащийся, выполнив на ПК с помощью программы SCAD расчет по построению эпюр усилий в балке для различных ее загружений (см. рис. 9.2), в качестве контроля выполняет расчет балки методом сил, в том числе с использованием фокусных точек. Как это делается, продемонстрировано в разделе 7 и в приложении 3.

В данном пособии ограничимся проверкой опорных моментов, полученных только при загружении консоли балки (см. рис. 9.2, *е*). Для этого воспользуемся левыми фокусными отношениями, определяемыми по формуле (7.35).

С учетом нумерации опор и пролетов неразрезных балок, принимаемых в методе сил, пролет с защемляющей опорой слева (см. рис. 9.2, *а*) имеет номер 2. Левое фокусное отношение опорных моментов на этом пролете известно (см. раздел 7):

$$-\frac{M_2}{M_1} = K_2 = 2 + \frac{i_2}{i_1}(2 - \frac{1}{K_1}) = 2 + \frac{i_2}{\infty}(2 - \frac{1}{\infty}) = 2\,. \qquad (9.9)$$

Тогда при равных погонных жесткостях реальных пролетов балки:

$$-\frac{M_3}{M_2} = K_3 = 2 + \frac{i}{i}(2 - \frac{1}{K_2}) = 2 + (2 - \frac{1}{2}) = 3.5\,; \qquad (9.10)$$

$$-\frac{M_4}{M_3} = K_4 = 2 + \frac{i}{i}(2 - \frac{1}{K_3}) = 2 + (2 - \frac{1}{3.5}) = 3.714. \qquad (9.11)$$

Обратным ходом по известному опорному моменту $M_4 = 0.5$ тс·м· (см. рис. 9.2, *е*) получим:

$$M_3 = -M_4/3.714 = 0.5/3.714 = 0.13 \text{ тс·м};$$

$$M_2 = -M_3/3.5 = -0.13/3.5 = -0.04 \text{ тс·м};$$

$$M_1 = -M_2/2 = -0.04/2 = 0.02 \text{ тс·м}.$$

Результаты расчета неразрезной балки от рассматриваемого загружения МКЭ совпадают с результатами ее расчета способом фокусных отношений.

9.6. Использование программы SCAD для расчета балок с упругими опорными связями конечной жесткости

Рассмотренные выше балки имели жесткие опорные связи. В реальных условиях балки опираются на какую-то деформируемую (будем полагать – упругую) систему. От давлений, передающихся в местах опирания балки, упругая система деформируется, в результате чего происходит упругое смещение опорных связей балки.

Податливость или жесткость системы, на которую опирается балка, в направлении опорных связей может быть определена (см. разделы 6 – 8 УМК).

Тогда вместо введения в расчетную схему неразрезной балки жестких опорных связей вводят связи с конкретной конечной жесткостью k_s (или податливостью δ_s). Такую балку можно рассматривать как балку, опирающуюся на упругие опоры с заданными характеристиками жесткости или податливости.

Связь с конечной жесткостью (или податливостью) обычно в расчетной схеме представляется пружиной (рис. 9.5).

На рис. 9.5, *а* упругая связь изображена в состоянии, когда на нее со стороны рассчитываемой системы (допустим, неразрезной балки) действует сжимающая пружину сила V_s. От этого воздействия верхний конец пружины получит упругое перемещение Δ_s по отношению к основанию пружины, которое будем полагать неподвижным.

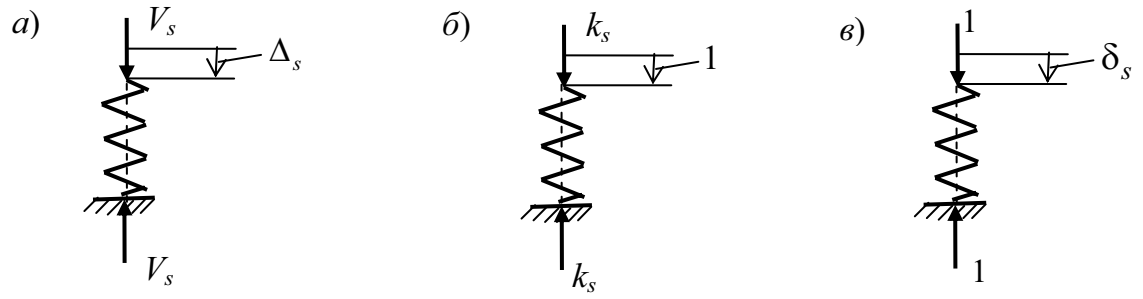


Рис. 9.5

По условию постановки всех изучаемых в данном учебном пособии упругих систем предполагается, что они подчиняются закону Гука. Этот закон применительно к рассматриваемой пружине можно представить в двух видах:

$$V_s = k_s \Delta_s \tag{9.12}$$

$$\Delta_s = \delta_s V_s \tag{9.13}$$

Величину k_s, которая, как видно из уравнения закона Гука (9.12), представляет собой силу, вызывающую единичное перемещение $\Delta_s = 1$, называют *жесткостью упругой опорной связи*. Ее размерностью будет «сила/перемещение» (тс/м, кН/м и т. д.).

Величина δ_s, которая, как видно из уравнения закона Гука (9.13), представляет собой перемещение, вызванное единичной силой $V_s = 1$, называется *податливостью упругой опорной связи*. Размерностью податливости будет «перемещение/сила» (м/тс, м/кН и т. д.).

Из уравнений закона Гука в виде (9.12) и (9.13) видно, что жесткость и податливость упругой связи являются величинами обратными по отношению друг к другу:

$$\delta_s = 1/r_s; \qquad r_s = 1/\delta_s; \qquad \delta_s \cdot r_s = 1. \tag{9.14}$$

В этом учебном пособии будем полагать, что связи являются двусторонними, т. е. работают как на сжатие, так и на растяжение, и имеют в обоих случаях одинаковую жесткость (или податливость).

Точно также можно представить упругую связь не только в вертикальном, но и в любом другом направлении.

Если упругая связь соответствует заделке, т. е. мешает опоре поворачиваться, то закон Гука можно представить в виде

$$M_s = m_s \Theta_s, \tag{9.15}$$

$$\Theta_s = \theta_s M_s. \tag{9.16}$$

Жесткость пружины, работающей на поворот, в (9.15) представляет собой

момент $M_s = m_s$, который соответствует повороту упругой заделки на угол $\Theta_s = 1$. Размерностью жесткости связи на поворот будет «момент/угол поворота» (тс·м/рад, кН·м/рад и т. д.).

Соответственно упругая податливость заделки на поворот в (9.16) представляет собой угол поворота заделки $\Theta_s = \theta_s$, вызванный единичным моментом $M_s = 1$, и имеет размерность «угол поворота/момент» (рад/ тс·м, рад/ кН·м и т. д.).

П р и м е р. Рассмотрим балку, изображенную на рис. 9.6, *а*. Для определенности расчетов будем полагать, что балка железобетонная и выполнена из бетона класса В25 [22]. Пролеты балки равны 6 м и равны между собой. Балка имеет прямоугольное поперечное сечение с размерами $b = 40\ см;\ h = 60\ см$.

Предположим, что крайние опоры неразрезной балки с достаточной степенью точности можно считать жесткими, а *средняя опора является упруго податливой и имеет некоторую жесткость* $k_2 = 5 \cdot 10^4$ тс.

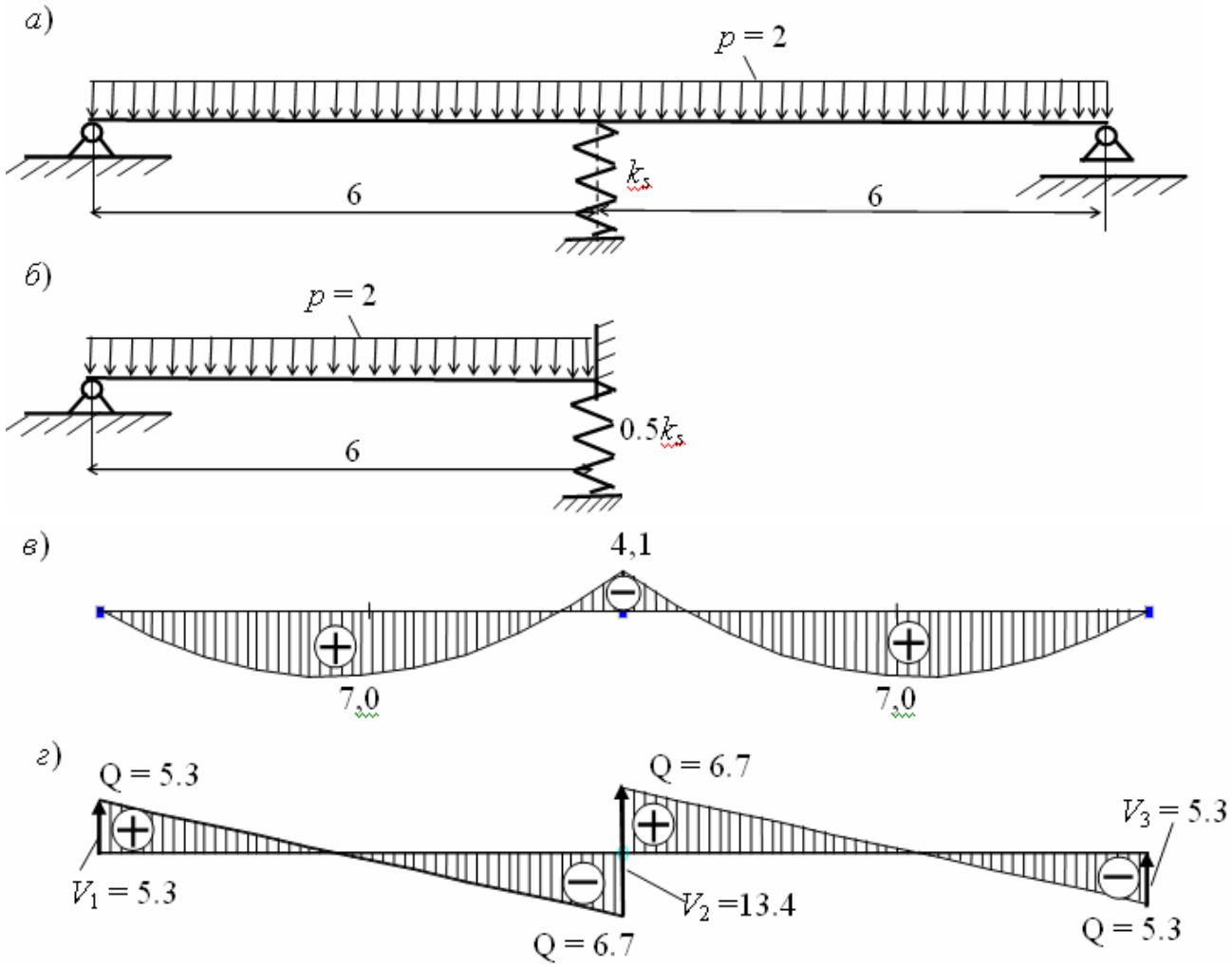


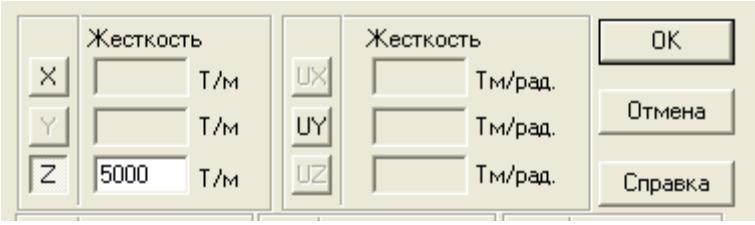
Рис. 9.6

С помощью программы SCAD требуется выполнить расчет по определению перемещений и усилий M и Q в сечениях балки, а также вертикального перемещения средней упругой опоры (пружины) и реакции в ней от загружения балки постоянной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $p = 2$ тс/м, включающей в себя и собственный вес балки.

Ход решения первой задачи с использованием программы SCAD обычный (см. приложение 1 к УМК). Предположим, что часть работы уже выполнена. Здесь рассмотрим только процедуру установки в расчетную схему балки упругой связи конечной жесткости.

Решение задачи без учета симметрии неразрезной балки

Для ввода упругой связи конечной жесткости в разделе **Узлы и элементы** открываем меню для ввода элементов и нажимаем кнопку «Ввод связей конечной жесткости». Откроется диалоговое окно **Связи конечной жесткости (**элемент типа 51**)**. Здесь приведен вид части этого окна для стержневой системы типа «Плоская рама» с введенной заданной жесткостью связи в направлении Z.



Подтвердив назначенную жесткость нажатием кнопки «ОК», закрываем окно и отмечаем узел балки, в который устанавливается упругая связь с этой жесткостью. После этого нажимается кнопка «ОК» на инструментальной панели назначения КЭ.

Если на фильтрах отображения нажаты соответствующие кнопки, то на расчетной схеме около узла, в который введена упругая связь в виде специального конечного элемента типа 51, появятся этот номер элемента и номер его жесткости.

Весь дальнейший расчет неразрезной балки проводится как обычно.

На рис. 9.6, *в* ,*г* соответственно изображены эпюра M и эпюра Q с опорными реакциями $V_s \quad (s = 1, 2, 3)$.

Решение задачи с учетом симметрии неразрезной балки

При наличии симметричности рассчитываемой системы и действующей на нее нагрузки всегда необходимо обратить на это внимание, поскольку все перемещения и усилия в такой системе будут симметричными относительно оси симметрии.

Это свойство может быть использовано при расчете уменьшением расчетной схемы в два раза. Продемонстрируем это на примере рассматриваемой балки.

Ось симметрии балки и нагрузки на нее проходит вертикально через среднюю опору. Обратим внимание на то, что горизонтальная связь на левой опоре (внешне как бы нарушающая симметрию балки) не нарушает симметрии НДС балки при заданной поперечной нагрузке, так как статически определимая реакция в этой связи при такой нагрузке равна нулю.

Из рассмотрения сечения балки над средней опорой, совпадающего с осью симметрии, с точки его перемещений видно, что угол поворота этого сечения при расчете

балки может получиться только равным нулю, поскольку он не возможен из условий симметрии.

По условию симметрии также невозможно горизонтальное перемещение этого сечения ни влево, ни вправо.

В вертикальном направлении, поскольку средняя опора представляет собой вертикальную упруго податливую связь, вертикальное перемещение сечения балки над средней опорой в зависимости от действующей нагрузки на балку возможно как вниз, так и вверх. Такое перемещение не нарушает условий симметрии перемещений и усилий.

С учетом этого анализа расчетную схему балки можно уменьшить следующим образом.

1. Рассмотрим только левую или только правую половину расчетной схемы (см. рис. 9.6, *б*, где изображена часть балки левее оси симметрии).

2. В сечении над опорой устанавливаем жесткую связь (заделку), не позволяющую сечению поворачиваться и горизонтальную связь, не позволяющую сечению смещаться горизонтально.

3. Жесткость вертикальной упругой связи (пружины) уменьшаем вдвое по сравнению с жесткостью такой же связи в расчетной схеме для всей балки.

Это связано с тем, что *для обеспечения вертикального перемещения упругой связи при рассмотрении половины расчетной схемы равного вертикальному перемещению аналогичной связи при рассмотрении всей балки* надо использовать закон Гука (9.12) и (9.13) и учесть, что давление V_s на пружину с половины балки уменьшится вдвое.

Поэтому, чтобы перемещение связи Δ_s не изменилось, и жесткость пружины k_s должна уменьшиться вдвое. Это уменьшенное вдвое значение жесткости пружины показано на рис. 9.6, *б*.

Результат расчета балки для рассматриваемой ее части получится полностью совпадающим с результатом расчета для этой части при рассмотрении полной расчетной схемы.

Результат расчета для второй половины балки (в данном случае правой) симметричен результату расчета рассчитываемой половины (в данном случае левой) и полностью совпадает с результатом расчета, полученном для всей балки (см. эпюру *M* на рис. 9.6, *в*)

В некоторых случаях, например при опирании неразрезной балки на фундаменты, возведенные на недостаточно изученном грунтовом основании, жесткость (податливость) опор известна недостаточно точно.

Поэтому расчетчику неразрезной балки на упруго податливых опорах придется провести исследование изменения усилий в сечениях балки и реакций ее опор в зависимости от изменения жесткости всех или части опор.

Исследование с помощью программы SCAD влияния жесткости упругих опор неразрезной балки на эпюру изгибающих моментов

Рассмотрим этот вопрос на примере двухпролетной неразрезной балки, изображенной на рис. 9.6, *а*.

Поставим задачу исследования изменения эпюр M и Q, вызванного изменением жесткости средней опоры в пределах $0 \le k_2 \le \infty$.

Эпюры M и Q для варианта жесткости средней опоры $k_2 = 5 \cdot 10^4$ Т были приведены соответственно на рис. 9.6, *в* ,*г*. Эти эпюры изображены сплошными линиями на рис. 9.7, *а* и рис. 9.7, *б*.

Для демонстрации влияния на искомые величины (перемещения и усилия) значения жесткости средней опоры выполним расчет балки при двух крайних значениях жесткости опоры: $k_s = \infty$ и $k_s = 0$.

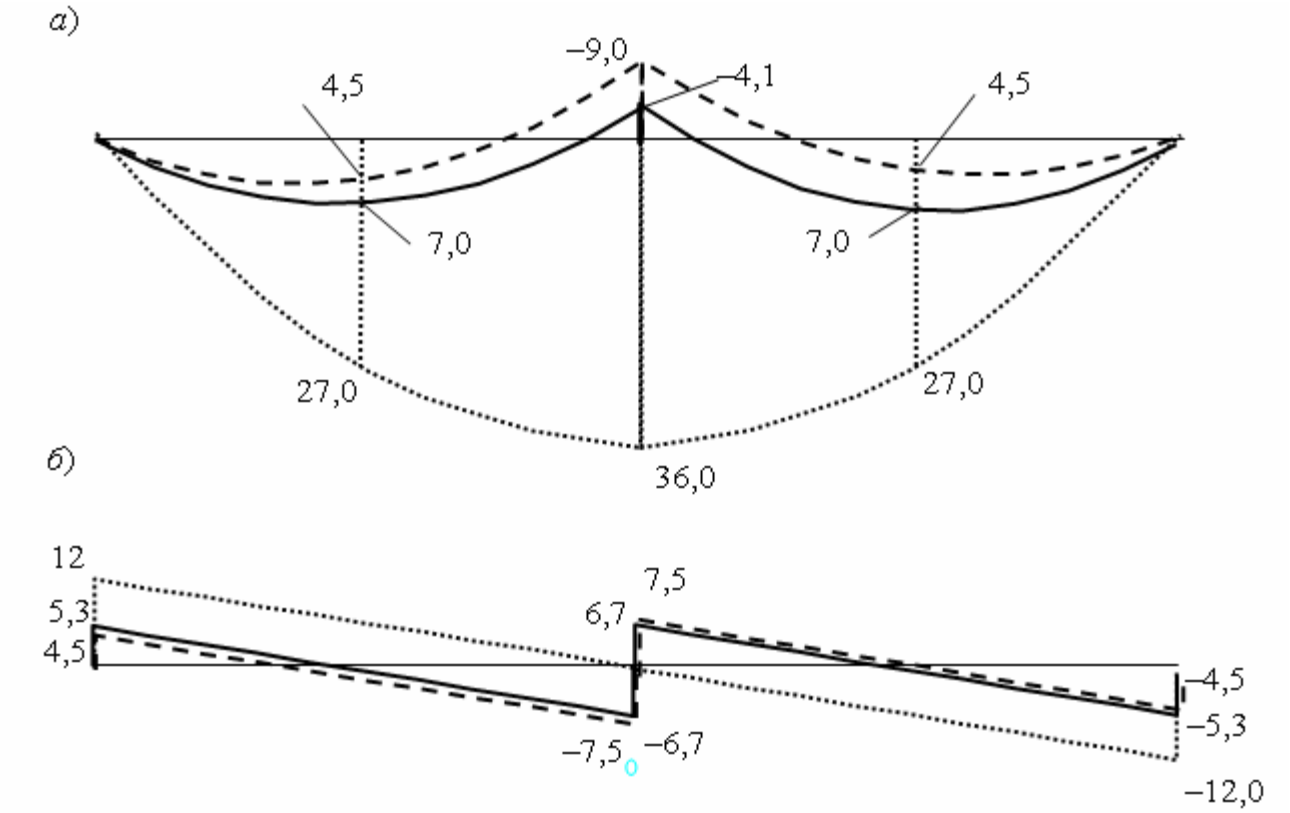


Рис. 9.7

При бесконечно большом значении жесткости средней опоры имеем вариант балки на жестких опорах. В этом случае можно просто рассмотреть левый и правый пролеты балки отдельно с тремя жесткими связями на средней опоре (в программе SCAD эти связи по направлению осей общей системы координат обозначаются X, Z, UY).

Эпюры M и Q для варианта с бесконечно жесткой средней опорой (заделкой) изображены штриховыми линиями соответственно на рис. 9.7, *а*, *б*.

Нулевое значение жесткости средней опоры соответствует варианту, когда средняя вертикальная связь отсутствует. Такая балка статически определима. Эпюры M и Q в ней известны и имеют вид, изображенный

точечными линиями соответственно на рис. 9.7, *а*, *б*.

Вертикальное перемещение среднего сечения изменяется от нулевого при абсолютно жесткой опоре до максимального прогиба балки, составляющего – 24.5 мм, при отсутствии средней опоры. Знак прогиба отрицательный, так как перемещения в программе SCAD вычисляются в общей системе координат (ось Z общей системы координат направлена вверх, а прогиб – вниз).

Как видим, значение жесткости средней опоры в вертикальном направлении существенно влияет на величины перемещений сечений и усилий в них, особенно на величины изгибающих моментов.

9.7. Использование теоремы об узле для контроля эпюр изгибающих моментов в рамах с линейно не смещающимися узлами

Метод конечных элементов, реализуемый на ПК с помощью, например, программы SCAD, позволяет достаточно просто и быстро получить эпюры усилий в стержневых системах, а также перемещения любых сечений стержней. При этом, оказывается возможным достаточно просто и быстро выполнить исследования изменения усилий и перемещений в стержневых системах в зависимости от изменения ее загружений и в зависимости от изменения различных параметров стержней, например их жесткости.

Возможность быстрого исследования стержневой системы в учебном процессе по строительной механике является весьма важной, так как позволяет демонстрировать учащимся «игру сил» в рассматриваемой стержневой системе, связанную с изменением тех или иных ее характеристик.

Однако быстрый результат расчета, полученный МКЭ на ПК с помощью какой-либо программы, не всегда отвечает на вопрос, почему получился такой результат. Поэтому часто для анализа результатов расчета, например, эпюр изгибающих моментов используют сведения из других методов расчета стержневых систем. Примеры использования таких понятий, как «фокусная точка», «фокусное отношение» опорных моментов на незагруженном пролете неразрезной балки (см. раздел 7 и подраздел 9.5) приведены выше для анализа и контроля эпюр изгибающих моментов в неразрезных балках при загружении их нагрузкой на каком – либо одном пролета.

В разделе 7 при рассмотрении графического способа расчета статически неопределимых балок и рам, разработанного С.С.Голушкевичем, были сформулированы и доказаны ***теорема об узле*** и ***теорема о стержне***. Они используется в графическом способе для определения фокусных точек и ординат эпюр изгибающих моментов в сечениях, где расположены фокусные

точки на стержнях балок и рам. Эти теоремы можно использовать и при контроле эпюр изгибающих моментов.

Ниже рассмотрено применение теоремы об узле для контроля эпюры изгибающих моментов в раме, не имеющей линейных смещений узлов, соответствующей действию сосредоточенного момента, приложенного к некоторому узлу u (рис. 9.8).

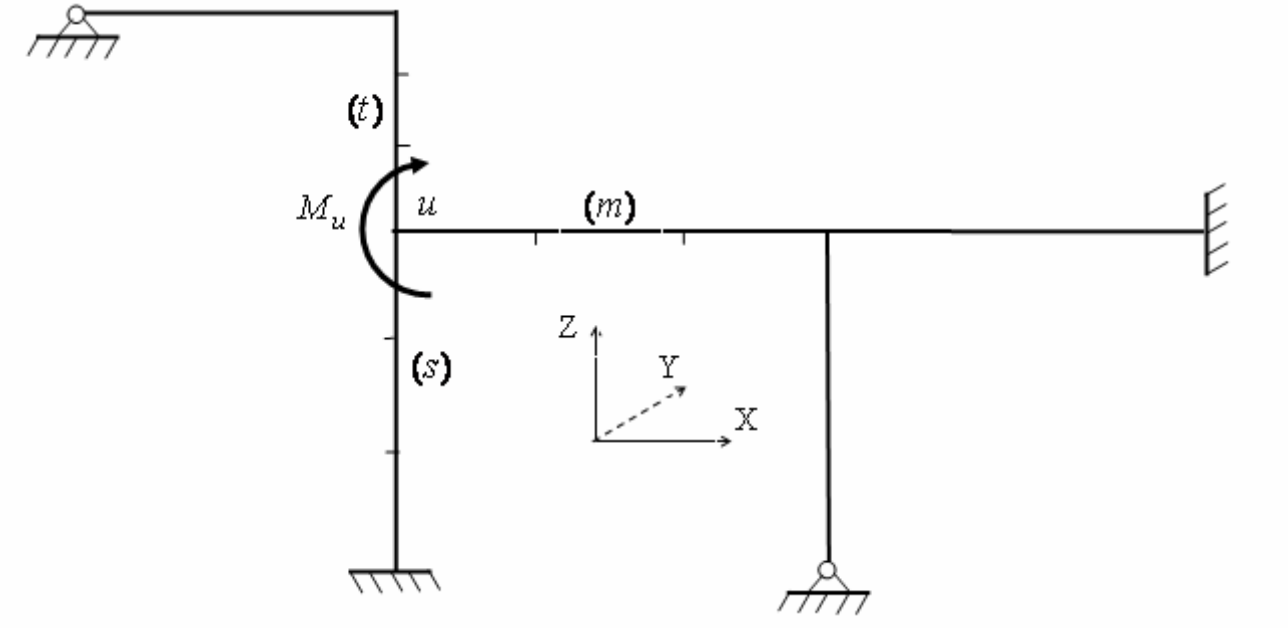


Рис. 9.8

Теорема об узле позволяет понять вопрос о факторах, влияющих на распределение момента M_u между стержнями, сходящимися в узле u (рис. 9.8, рис. 9.9, *а*).

Равновесие узла u по моментам, действующим на узел, выражается уравнением

$$M_u = \sum_{r \in u} M_u^r \ , \ r = s, m, t \, . \tag{9.17}$$

На рис. 9.9, *б* для узла u приведены некоторые вспомогательные построения, связанные с теоремой об узле (см. раздел 7):

- штриховыми линиями показан поворот осей стержней, сходящихся в жестком узле u, связанный с поворотом этого узла на некоторый угол α_u. При этом $\alpha_u^s = \alpha_u^m = \alpha_u^t = \alpha_u$;
- сплошными линиями показан ***вид эпюр изгибающих моментов на стержнях рамы, подходящих к узлу*** u, и ординаты этих эпюр M_u^s, M_u^m, M_u^t в сечениях стержней в узле;

- в соответствии с теоремой об узле, показаны ординаты z_s, z_m, z_t в сечениях стержней, расположенных на расстоянии ближайшей к узлу одной трети длины $l_r\,(r = s, m, t)$ стержней.

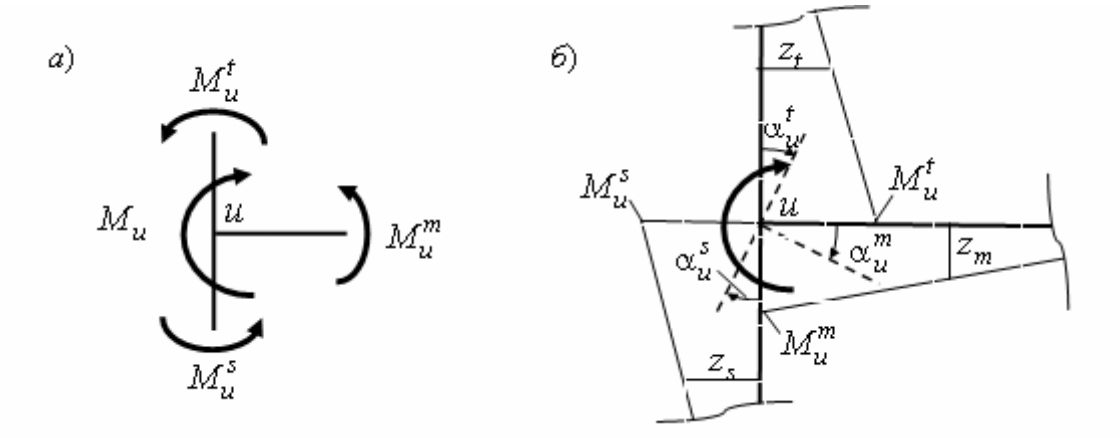


Рис. 9.9

Если в узле u рамы (см. рис. 9.8) приложить момент равный $2M_u$, то угол поворота узла также удвоится и будет равен $2\alpha_u$.

Примем $2\alpha_u = 1$. Тогда, как известно (см. теорему об узле в подразделе 7.4), получим, что все ординаты z_r $(r = s, m, t)$ эпюр изгибающих моментов на стержнях будут численно равны погонным жесткостям соответствующих стержней, т. е. $z_r = i_r$, где $i_r = EI_y^r / l_r$ представляет собой погонную жесткость стержня r при его изгибе относительно оси Y (индекс y далее для сокращения записи будем опускать). В этом состоит смысл теоремы об узле (подробнее см. в подразделе 7.4).

Изобразим для этого варианта (с углом $2\alpha_u = 1$ поворота узла u) эпюру изгибающих моментов на любом стержне с номером $r = s, m, t$, подходящим к узлу u (рис. 9.10).

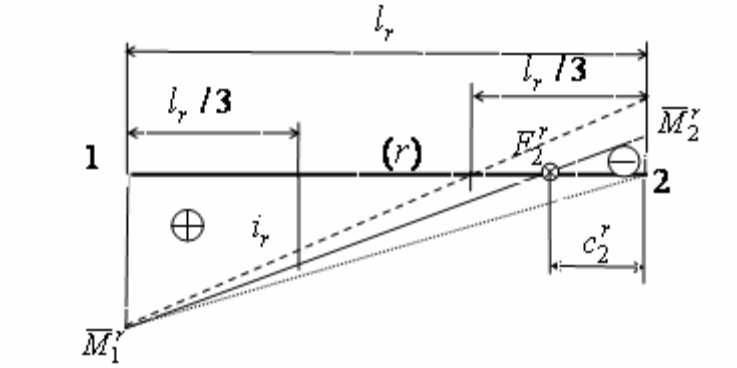


Рис. 9.10

Будем нумеровать концы стержня r так, как показано на рис. 9.10. Конец с номером 2 является дальним по отношению к загруженному узлу рамы (или загруженному стержню, если загруженным в раме является не узел, а какой-либо стержень).

Номера концов стержня r отразим индексами в обозначениях соответствующих ординат изгибающих моментов; в обозначении фокусной точки F_2^r, ближайшей к дальнему концу стержня 2 и в обозначении расстояния c_2^r от сечения 2 до ближайшей к нему фокусной точки F_2^r.

Черта в обозначениях ординат изгибающих моментов по концам стержня означает, что они соответствуют варианту, когда узел u повернулся на угол $2\alpha_u = 1$.

Из способа моментных фокусных отношений (см. раздел 7) известно, что фокусная точка F_2^r, через которую проходит эпюра моментов на стержне r при повороте узла u рамы на угол $2\alpha_u = 1$, находится в пределах дальней трети длины стержня по отношению к загруженной части стержневой системы и между моментами по концам стержня r существует соотношение

$$\overline{M}_2^r = -\overline{M}_1^r / K_2^r, \tag{9.18}$$

где K_2^r фокусное отношение моментов, значение которого зависит от положения фокусной точки F_2^r. Можно выразить K_2^r через расстояние c_2^r от узла 2^r до фокусной точки F_2^r (см. рис. 9.10):

$$K_2^r = (\frac{l_r}{c_2^r} - 1), \tag{9.19}$$

При этом, как видно (см. рис. 9.10), с учетом знаков изгибающих моментов

$$(i_r - \overline{M}_2^r) = \frac{2}{3}(\overline{M}_1^r - \overline{M}_2^r). \tag{9.20}$$

Используя (9.18), получим выражение для определения величины ординаты $\overline{M}_1^r$ на стержне r в узле 1 (см. рис. 9.10):

$$\overline{M}_1^r = a_r \cdot i_r, \;\; a_r = \frac{3}{(2 - \frac{1}{K_2^r})}, (r = s, m, t). \tag{9.21}$$

При шарнирной опоре стержня в узле 2 $\overline{M}_2^r = 0$ и фокусная точка совпадает с этим узлом ($c_{\text{пр}}^r = 0$; $K_2^r = \infty$). Тогда ордината $\overline{M}_1^r = 3i^r / 2 = 1.5i^r$.

При наличии в узле 2 стержня r жесткой заделки точка F_2^r будет находиться точно на расстоянии $l^r/3$ от заделки ($c_2^r = l^r/3; K_2^r = 2$). Тогда $\overline{M}_1^r = 2i^r$.

Соответствующие этим вариантам эпюры изгибающих моментов на стержне изображены точечной и штриховой линиями (см. рис. 9.10).

Таким образом, при повороте узла u рамы с линейно не смещающимися узлами на угол $2\alpha_u = 1$ (см. рис. 2.13) изгибающий момент $\overline{M}_1^r$, действующий в узле u на любой стержень r, подходящий к этому узлу, определится из выражения (2.21) по погонной жесткости стержня i_r и по фокусному отношению K_2^r.

Как видно, погонная жесткость стержня i_r и фокусное отношение K_2^r зависят от жесткости стержня на изгиб $(EI)_r$, от длины стержня l_r и от жесткости узла 2 стержня, которая и определяет значение фокусного отношения K_2^r и положение фокусной точки F_2^r на стержне.

При этом соотношение ординат изгибающих моментов, действующих на стержни, сходящиеся в узле u (см. рис. 9.9, *а*), при его повороте на угол $2\alpha_u = 1$, будет равно:

$$\overline{M}_1^s : \overline{M}_1^m : \overline{M}_1^t = a_s i_s : a_m i_m : a_t i_t, \tag{9.22}$$

где $$i_r = \frac{(EI)_r}{l_r}; \quad a_r = \frac{3}{(2 - \frac{1}{K_2^r})}, \ (r = s, m, t). \tag{9.23}$$

Уравнение равновесия (9.17) узла u при повороте его на угол $2\alpha_u = 1$ получится в виде:

$$\overline{M}_u = a_s i_s + a_m i_m + a_t i_t, \tag{9.24}$$

где $\overline{M}_u$ – сосредоточенный момент, действующий на узел u рамы (см. рис. 9.9, *а*), вызывающий угол поворота узла $2\alpha_u = 1$.

В соответствии с законом Гука имеем зависимость $2M_u = \overline{M}_u \cdot 2\alpha_u$ или

$$M_u / \overline{M}_u = \alpha_u, \tag{9.25}$$

Так как значение сосредоточенного момента M_u задано, то величина $\alpha_u = M_u / \overline{M}_u$ для заданной рамы известна и уравнение равновесия узла (9.17) получится из уравнения равновесия этого узла (9.24) умножением последнего на угол поворота узла u равный α_u. В результате получим

$$M_u = \overline{M}_u \alpha_u = (a_s i_s + a_m i_m + a_t i_t) \cdot \alpha_u . \qquad (9.26)$$

Полученную информацию можно использовать для контроля эпюры изгибающих моментов в рассматриваемой раме, построенной на ПК с помощью программы SCAD.

П р и м е р 1. Выполним расчет рамы (см. рис. 9.8) на ПК с использованием программы SCAD при следующих параметрах рамы: длина ригелей рамы равна 12 м; высота нижних стоек равна 8 м; верхняя стойка имеет высоту 4 м.

Схема рамы для ее расчета МКЭ с помощью программы SCAD приведена на рис. 9.11.

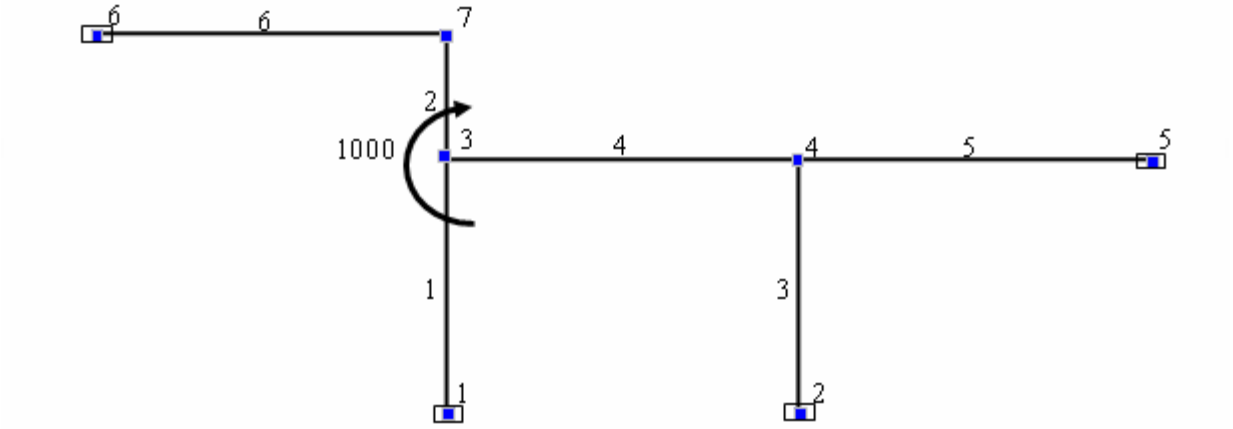


Рис. 9.11

Построим эпюру изгибающих моментов от действия заданного в узле 3 сосредоточенного момента M_u =1000 кНм. При этом условимся учитывать только изгибные деформации стержней. Продольные деформации стержней рамы примем равными нулю.

При любом способе задания продольной жесткости стержней EF для исключения продольных деформаций стержней в разделе «Назначения» будем использовать имеющуюся функцию «Объединение перемещений узлов» (см. приложение 1 к УМК).

Жесткость EIy на изгиб относительно оси Y общей системы координат для всех стержней в примере принята одинаковой. Следовательно, при расчете рамы можно задать эту жесткость равной любому удобному для расчета конечному значению (см. подраздел 9.2).

Для получения целых значений погонных жесткостей стержней (для использования теоремы об узле) примем $EIy = 24\,\text{кН}\cdot\text{м}^2$. Тогда получим: $i_1 = i_3 = 24/8 = 3$ кНм; $i_4 = i_5 = i_6 = 24/12 = 2$ кНм; $i_2 = 24/4 = 6$ кНм. Результат расчета представим в виде эпюры изгибающих моментов (рис.9.12).

Выполним контроль эпюры, используя фокусные точки и теорему об узле. Прежде всего, отмечаем, что все эпюры изгибающих моментов на незагруженных в их пролетах стержнях прямолинейны и проходят через фокусные точки F_2^r, дальние по отношению к загруженному узлу рамы. Причем положение некоторых фокусных точек F_2^r заведомо известно. К ним относятся фокусные точки на стержнях 3 и 6, которые совпадают с шарнирными опорами соответственно 2 и 6. К известным фокусным точкам относятся и

фокусные точки на стержнях 1 и 5, которые расположены на расстоянии равном одной трети длины соответствующих пролетов стержней от соответствующих защемляющих опор 1 и 5.

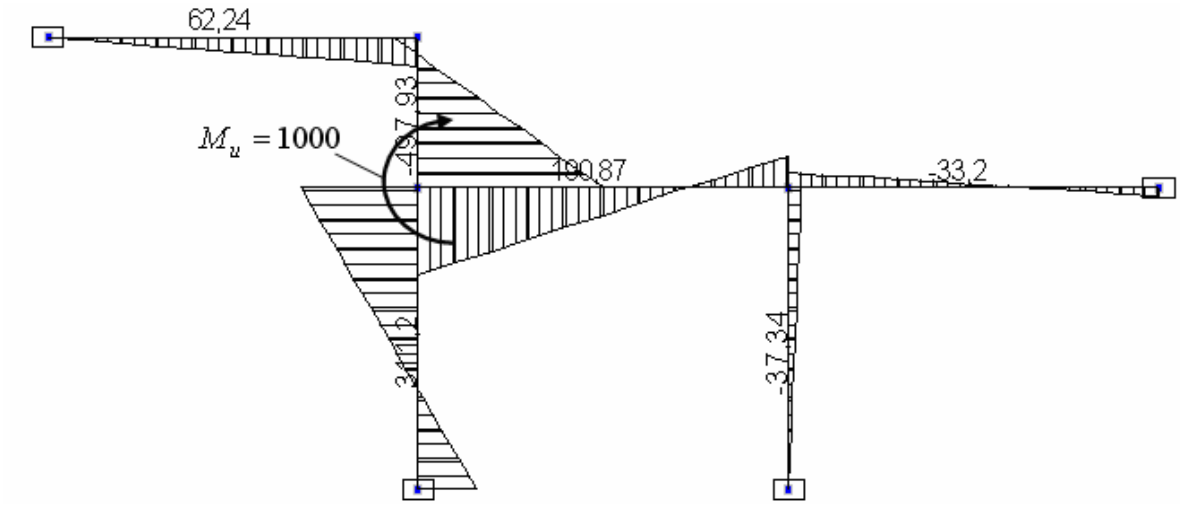


Рис. 9.12

Положение фокусных точек F_2^r на стержнях 2 и 4 не известно. Их положение достаточно просто и достаточно точно может быть определено с помощью теоремы об узле, применяемой отдельно к узлу 7 и к узлу 4.

Применение теоремы об узле к узлу 7для определения фокусной точки F_2^6

Подберем момент M_u, приложенный в узле 3 таким, чтобы узел 7 повернулся на угол равный единице. Тогда в соответствии с теоремой об узле, примененной к узлу 7, изгибающие моменты в сечениях стержней, сходящихся в узле 7, будут равны погонным жесткостям соответствующих стержней (рис. 9.13).

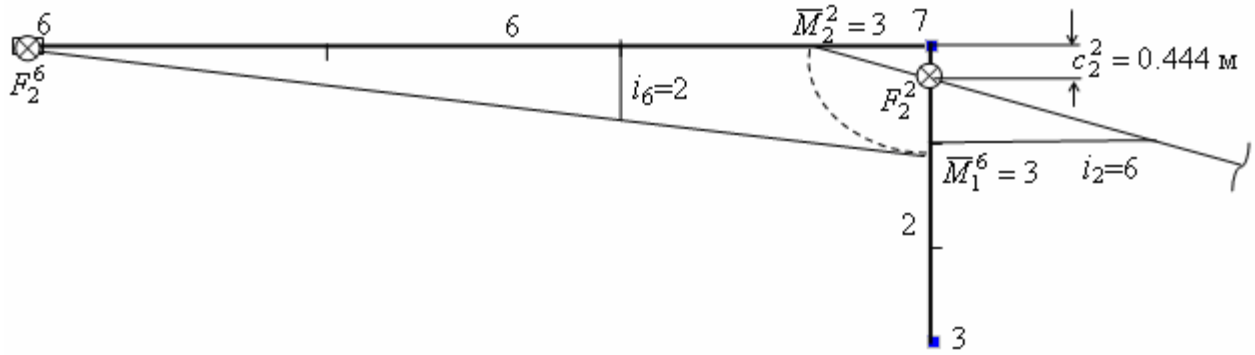


Рис. 9.13

При этом линейная эпюра изгибающих моментов на стержне 6 пройдет через фокусную точку F_2^6 и через вершину ординаты $i_6 = 2$ так, как показано на этом рисунке. В результате в узле 7 определится ордината $M_1^6 = 3$ и из равновесия этого узла ордината $M_2^2 = 3$.

По этой ординате и ординате $i_2 = 6$ проводим прямолинейную эпюру изгибающих

моментов на стержне 2. Она пересечет ось стержня 2 в фокусной точке F_2^2. Ее расстояние от узла 7 может быть определено приближенно (графическим построением в масштабе), как показано на рис. 2.16, или точно исходя из подобия треугольника с катетами, равными c_2^2 и $M_2^2 = 3$, и треугольника с катетами, равными $(l_2/3) - c_2^2$ и $i_2 = 6$. Тогда $\frac{c_2^2}{3} = \frac{(l_2/3) - c_2^2}{6}$ и $c_2^2 = \frac{3 \cdot 4}{9 \cdot 3} = 0.44(4)$ м.

Очевидно, что положение фокусной точки F_2^2 не изменится, если сосредоточенный момент, приложенный к раме в узле 3, будет изменяться. Это означает, что правое фокусное отношение (9.19) на стержне 2 будет равно $K_2^2 = (\frac{4}{0.444} - 1) = 8$. В приведенном на рис. 2.15 результате расчета это фокусное отношение равно $K_{\text{пр}}^2 = \frac{497.93}{62.24} - = 8$. Теорема об узле позволила определить это фокусное отношение достаточно просто и точно.

Применение теоремы об узле к узлу 4 для определения фокусной точки F_2^4

Подберем момент M_u, приложенный в узле 3 таким, чтобы узел 4 повернулся на угол равный единице. Тогда в соответствии с теоремой об узле, примененной к узлу 4, изгибающие моменты в сечениях стержней, сходящихся в узле 4, будут равны погонным жесткостям соответствующих стержней (рис. 9.14). При этом эпюры изгибающих моментов на стержнях 3, 4 и 5 пройдут так, как показано на рисунке.

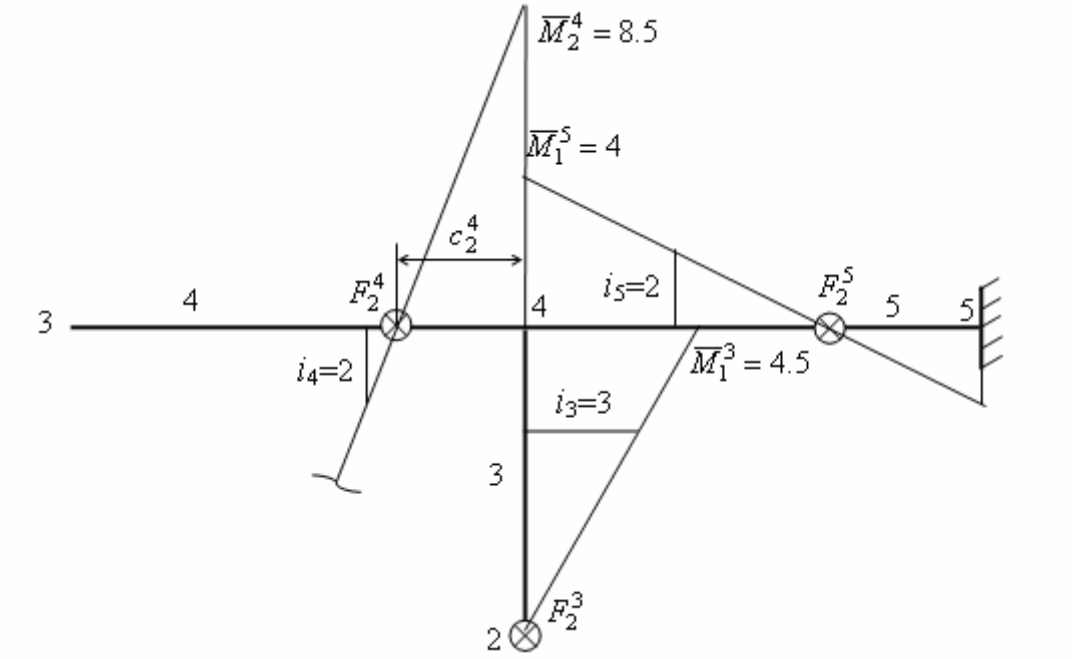


Рис. 9.14

Этим построением определится положение дальней по отношению к узлу 3 фокусной точки F_2^4. Ее расстояние от узла 4 может быть определено графическим построением в масштабе и точно, по аналогии с тем, как это сделано для узла 7. В результате получим

$$\frac{c_2^4}{8.5}=\frac{(l_4/3)-c_2^4}{2} \text{ и } c_2^4=\frac{8.5\cdot 12}{10.5\cdot 3}=3.24 \text{ м.}$$

Отсюда по формуле (9.19) получаем фокусное отношение $K_2^4=(\frac{12}{3.24}-1)=2.7$. Из результатов расчета рамы (см. рис. 2.12) получим $K_2^4=\frac{190.87}{70.54}-=2.7$.

Таким образом, теорема об узле 4 позволяет быстро и точно найти фокусное отношение моментов на стержне 4.

Распределение заданного в узле 3 рамы сосредоточенного момента $M_3=1000$ кНм ***между стержнями 1, 2 и 4, сходящимися в узле 3***

Для определения части момента $M_3=1000$ кНм, приходящейся на каждый стержень, используем соотношение (9.22). При этом погонные жесткости стержней при принятой изгибной жесткости стержней уже известны (см. выше). Вычислим по формуле (9.21) величины коэффициентов a^r:

$$a_1=\frac{3}{(2-\frac{1}{K_2^1})}=\frac{3}{(2-\frac{1}{2})}=2;\ a_2=\frac{3}{(2-\frac{1}{K_2^2})}=\frac{3}{(2-\frac{1}{8})}=1.6;\ a_4=\frac{3}{(2-\frac{1}{K_2^4})}=\frac{3}{(2-\frac{1}{2.7})}=1.84$$

Тогда при угле поворота узла 3 равном $2\alpha_3=1$ получим:

$$\overline{M}_1^1=2\cdot 3=6 \text{ тс·м};\ \overline{M}_1^2=1.6\cdot 6=9.6 \text{ тс·м};\ \overline{M}_1^4=1.84\cdot 2=3.68 \text{ тс·м.}$$

При этом из равновесия моментов в узле 3 следует, что

$$\overline{M}_3=6+9.6+3.68=19.28 \text{ тс·м.}$$

Так как в узле 3 рамы задан момент 1000 кНм, то для получения соответствующих ему моментов в сечениях стержней, подходящих к узлу $u=3$ заданной рамы, в предыдущее уравнение необходимо умножить на величину $\alpha_3=1000/19.28=51/867$ (см. (2.25)). Тогда получим:

$$M_3^1=\overline{M}_1^1\cdot\alpha_3=311.2\,02 \text{ кНм};\ M_3^2=497.92\,3 \text{ кНм};\ M_3^4=190.87\,0 \text{ кНм.}$$

Этот результат полностью совпадает с результатом, полученным расчетом рамы МКЭ с помощью программы SCAD (см. рис. 9.12). Очевидно, что соблюдается и уравнение равновесия (9.17) узла:

$$1000\cong(311.20+497.92+190.87)=999.99.$$

Имея фокусные отношения K_2^r стержней рамы, сходящихся в узле 3, по формуле (2.18) найдем ординаты изгибающих моментов на других концах стержней: $M_1^1=-311.2/2=155.6$ кНм; $M_7^2=-497.92/8=62.24$ кНм; $M_4^4=-190.87/2.7=70.69$ кНм.

Пришедший в узел 4 момент $M_2^4=70.69$ кНм (см. рис 9.125) распределится между сходящимися в этом узле стержнями 3 и 5 в таком же соотношении, как и при единичном угле поворота узла 4 при использовании теоремы об узле к узлу 4. Действительно, из равновесия узла 4 при использовании теоремы об узле (см. рис. 9.14) следует, что

$$\overline{M}_4=\overline{M}_2^4=\overline{M}_1^3+\overline{M}_1^5,$$

где $\overline{M}_4 = \overline{M}_2^4 = 8.5$ кНм; $\overline{M}_1^3 = 4.5$ кНм; $\overline{M}_1^5 = 4$ кНм.

В соответствии с законом Гука угол поворота узла 4 равен $\alpha_4 = M_4 / \overline{M}_4 = 70.69/8.5 = 8.316$. Тогда

$$M_4^3 = \overline{M}_1^3 \alpha_4 = 4.5 \cdot 8.316 = 37.422 \text{ кНм};$$

$$M_4^5 = \overline{M}_1^5 \alpha_4 = 4 \cdot 8.316 = 33.26 \text{ кНм}.$$

При этом соблюдается уравнение равновесия узла 4:

$$M_4 = M_4^3 + M_4^5 \text{ или } 70.69 \cong (37.42 + 33.26) = 70.68 \text{ кНм}.$$

Как видим, в случаях загружения неразрезных балок и рам с линейно не смещающимися узлами нагрузкой в виде сосредоточенного момента в узле или при загружении какого-либо одного стержня теорема об узле позволяет быстро и точно выполнить контроль эпюр изгибающих моментов построенных, например, на ПК с помощью какой-либо программы.

Возможности контроля эпюр изгибающих моментов увеличиваются, если использовать для этого также «теорему о стержне». Доказательство этой теоремы и ее применение было продемонстрировано в учебных пособиях [1, 6] при рассмотрении графического способа расчета неразрезных балок и рам.

Теорема об узле позволяет использовать ее для изменения картины усилий в балках и рамах в нужном направлении. Рассмотрим эту возможность на примере рамы, изображенной на рис. 9.15.

П р и м е р 2. Рассмотрим раму, изображенную на рис. 9.15, *а*. Требуется построить на ее стержнях эпюру изгибающих моментов.

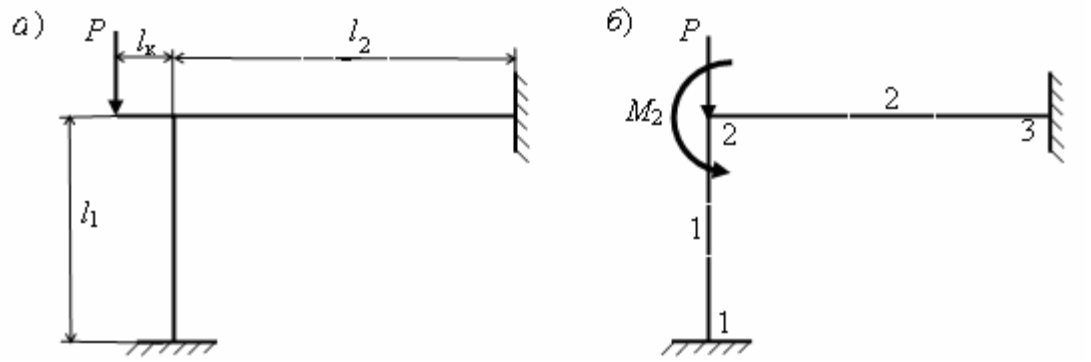


Рис. 9.15

Построив эпюру M на статически определимой консоли, получим сосредоточенную силу и момент, действующие на остальную часть рамы (рис. 9.15, *б*). Эта часть рамы трижды статически неопределима. Если пренебрегать влиянием продольных деформаций стержней на перемещения сечений стержней рамы, то при построении эпюры изгибающих моментов M на стержнях рамы можно рассматривать ее как раму с линейно не смещающимся узлом 2 (см. рис. 9.15, *б*). Тогда изгибные деформации стержней 1 и 2 будут вызываться только моментом $M_2 = Pl_к$ тс·м, действующим в узле 2.

В соответствии с теоремой об узле, действующий на узел 2 момент распределится между стержнями рамы в соотношении (см. обозначения в предыдущем подразделе):

$$\frac{M_2^1}{M_2^2} = \frac{\overline{M}_1^1 \cdot \alpha_2}{\overline{M}_1^2 \cdot \alpha_2} = \frac{a_1 i_1}{a_2 i_2}. \tag{9.27}$$

При этом соблюдаются уравнения равновесия

$$M_2 = M_2^1 + M_2^2, \ \overline{M}_2 = \overline{M}_2^1 + \overline{M}_2^2 \tag{9.28}$$

и уравнение закона Гука

$$M_2 / \overline{M}_2 = \alpha_2. \tag{9.29}$$

Поскольку в раме известно положение фокусных точек F_2^1 и F_2^2, фокусных отношений $K_2^1 = 2$ и $K_2^2 = 2$, то в соответствии с (2.21) $a_1 = a_2 = 2$ и

$$\frac{M_2^1}{M_2^2} = \frac{\overline{M}_1^1 \cdot}{\overline{M}_1^2 \cdot} = \frac{i_1}{i_2}. \tag{9.30}$$

где $i_1 = (EI)_1 / l_1$ и $i_2 = (EI)_2 / l_2$ – погонные жесткости стержней, сходящихся в узле 2.

Таким образом, теорема об узле позволяет увидеть, что в рассматриваемой раме эпюра моментов получится в зависимости от соотношения погонных жесткостей стержней.

Как видно из выражения для вычисления погонной жесткости стержня, она может изменяться с изменением длины стержня и жесткости стержня.

Представим изгибные жесткости стойки и ригеля соответственно в виде: $(EI)_1 = k_{1\text{мзг}} EI$; $(EI)_2 = k_{2\text{мзг}} EI$. Подставив выражения для погонных жесткостей стержней с учетом этих представлений их жесткостей в (2.30), получим

$$\frac{M_2^1}{M_2^2} = \frac{\overline{M}_1^1 \cdot}{\overline{M}_1^2 \cdot} = \frac{k_{1\text{изг}} \cdot l_2}{k_{2\text{изг}} \cdot l_1}. \tag{9.31}$$

Таким образом, вид эпюр изгибающих моментов на стержнях зависит от соотношения изгибных жесткостей стержней и соотношения длин стержней.

Рассмотрим вариант, когда длины стержней равны между собой и равны 6 м. Исследуем для принятых длин стержней влияние соотношения жесткостей стержней на вид эпюр M, на значения ординат эпюр и на их знаки для следующих трех вариантов значений коэффициентов $k_{i,\text{изг}}$ жесткостей на изгиб стойки и ригеля:

1. $k_{1,\text{изг}} = 1, \ k_{2,\text{изг}} = 1$;
2. $k_{1,\text{изг}} = 0, \ k_{2,\text{изг}} = 1,$;
3. $k_{1,\text{изг}} = 1, \ k_{2,\text{изг}} = 0$;

Примем силу $P = 1$ тс, длину консоли $l_\text{к} = 1.5$ м.

Для варианта 1 получаем эпюру моментов, изображенную на рис. 9.16, *а*. Заданный в узле момент $M_2 = 1.5$ тс·м в соответствии с теоремой об узле и соотношением (9.31) при заданных параметрах распределился между стержнями поровну.

На рис. 9.16, *б, в* показаны эпюры M в раме для следующих двух вариантов соотношения жесткости на изгиб стойки и ригеля.

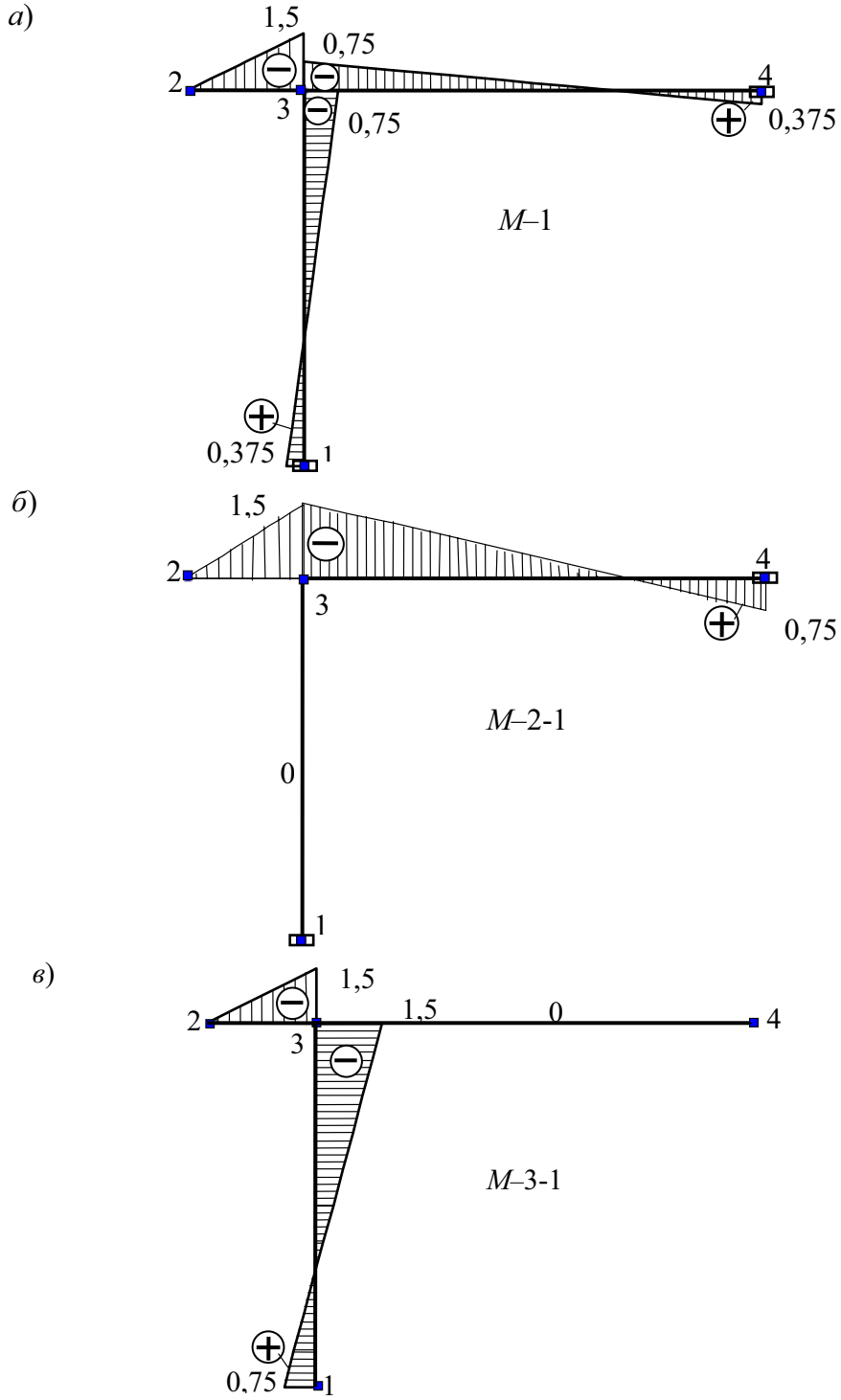


Рис. 9.16

Таким образом, теорема об узле и наличие фокусных точек на стержнях позволяют быстро получить эпюру изгибающих моментов на стержнях при различных соотношениях изгибных жесткостей стержней и различных соотношениях их длин

Примечание. Если в варианте 2 сделать предположение о том, что стойка рамы имеет не только нулевую жесткость на изгиб, но и равную нулю и продольную жесткость (в предыдущем варианте 2 (отметим его как вариант 2-1) она была принята бесконечно большой), то это будет равносильно отсутствию стойки. В варианте 2 с нулевой продольной

жесткостью стойки (отметим его как вариант 2-2) эпюра M будет иметь вид (M-2-2), приведенный на рис. 9.17. Аналогично в варианте 3 при отсутствии не только изгибной жесткости в ригеле, но и продольной жесткости, получим эпюру (M-3-2) на рис. 9.17.

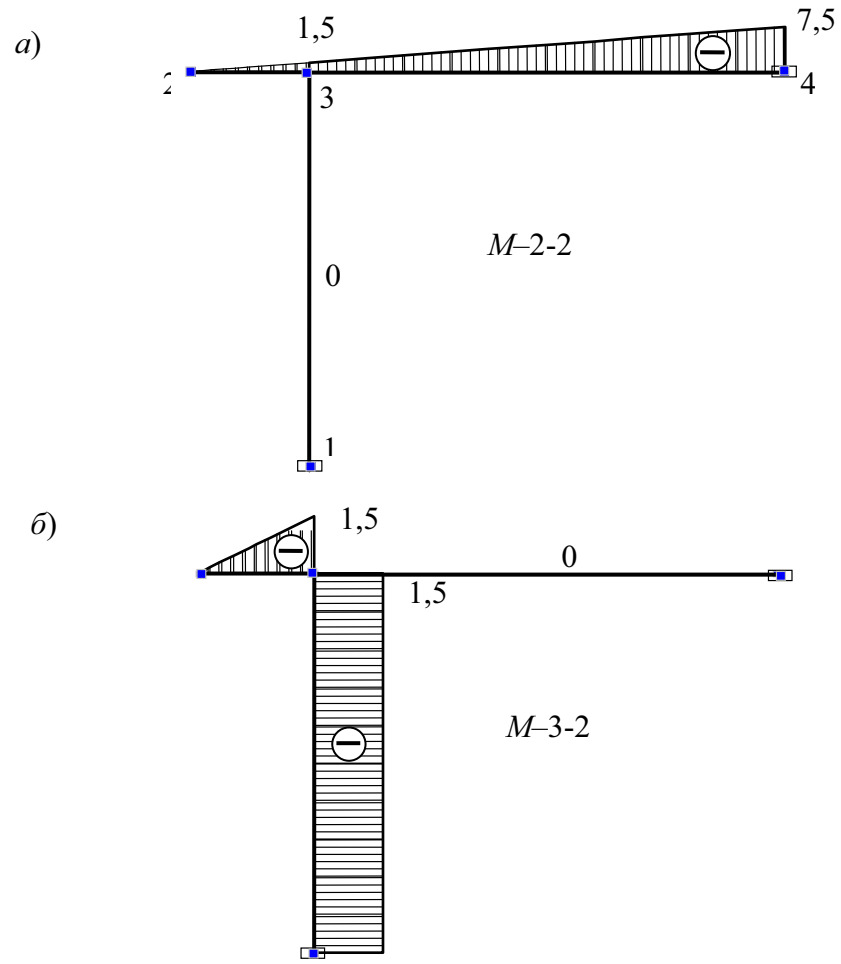


Рис. 9.17

Все построенные эпюры легко получаются на ПК при использовании для расчета рамы, например, программы SCAD. Однако выполненный анализ позволяет лучше понять влияние изменения параметров рамы на ее работу.

Рассмотренные в разделе 2 пособия примеры расчета балок и рам показывают, что с помощью программы SCAD для ПК, реализующей алгоритм расчета стержневых систем МКЭ, расчетчик может достаточно быстро выполнять исследования влияния различных факторов на искомые величины в стержневых системах.

Продемонстрировано также, что использование фокусных точек, их свойств и соответствующих теорем позволяет лучше понять работу неразрезных балок и рам и быстро проверять эпюры изгибающих моментов.

10. РАСЧЕТ БАЛОК И РАМ НА НЕПРЕРЫВНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ МОДЕЛИ ВИНКЛЕРА

10.1. Уравнение изгиба тонкой балки, опирающейся по своей длине на непрерывное упругое основание модели Винклера

Нагрузки, действующие на промышленные и гражданские сооружения, через фундаменты передаются на грунтовое основание. При проектировании сооружения возникает необходимость определения напряжений по площади контакта фундамента и основания, которые используются как для расчета грунтового основания, так и для расчета фундамента.

Иногда фундамент имеет вид балки, опирающейся по своей длине на грунт. Созданию расчетной схемы такой системы и методам ее расчета посвящено много работ, в том числе работы [14, 15, 23].

В данном УМУ рассматривается решение задачи об изгибе тонкой балки в общем случае переменной высоты $h(x)$, лежащей на грунтовом основании, на которую действует некоторая заданная на балку внешняя нормальная к оси балки нагрузка $q(x) = q(x, y) \cdot b$, где b – ширина балки (рис. 10.1).

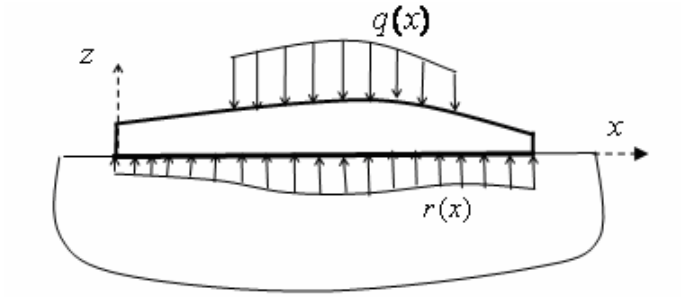


Рис. 10.1

При действии нагрузки система «Балка-основание» деформируется. Неразрывность вертикальных и горизонтальных перемещений площади контакта в каждой точке с координатами x, y приводит к возникновению нормальных $r(x, y)$ и касательных $\tau(x, y)$ напряжений.

Обычно при расчете тонких балок от нормальной к оси балки нагрузки влиянием касательных напряжений на изгибные деформации и нормальные напряжения в балке пренебрегают. Это равносильно допущению не учета неразрывности перемещений точек контактной плоскости в горизонтальном направлении.

Иными словами, в случае действия нормальной к оси балки нагрузки $q(x) = q(x, y) \cdot b$ при изгибе балки, лежащей на упругом основании, предполагается свободное (без трения) проскальзывание балки по плоскости контакта с основанием.

При таком допущении по площади контакта балки возникают только нормальные напряжения $r(x, y)$. При небольшой ширине b балки эти напряжения при одинаковой координате x считаются постоянными по ширине и приводятся к оси балки в виде реактивного удельного усилия $r(x) = r(x, y) \cdot b$ (см. рис. 10.1).

Заданная нагрузка $q(x) = q(x, y) \cdot b$ и реактивные усилия $r(x) = r(x, y) \cdot b$ перпендикулярны к оси балки и уравновешивают друг друга (их равнодействующие лежат на одной вертикали, равны друг другу и направлены в разные стороны).

Уравнение изгиба тонкой балки с переменной вдоль ее оси жесткостью на изгиб $EI(x)$ будет иметь вид [14]:

$$\frac{d^2}{dx^2}[EI(x)\frac{d^2 w(x)}{dx^2}] = q(x) - r(x), \tag{10.1}$$

или для балки с постоянной жесткостью на изгиб EI

$$EI\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) - r(x). \tag{10.2}$$

В уравнения (10.1) и (10.2) входят две неизвестных величины: прогиб балки $w(x)$ и нормальное реактивное удельное усилие $r(x)$, которые требуется определить как для расчета балки, так и для расчета грунтового основания.

Для решения такой задачи необходимо иметь еще одно уравнение, связывающее указанные две искомые функции. С этой целью в механике грунтов используют различные расчетные модели грунтового основания [23].

К наиболее простым моделям, применяемым в инженерной практике (в том числе и в программе SCAD), относится модель *коэффициента постели* или *модель Винклера*, названная так по имени немецкого инженера, впервые использовавшего эту модель в 1867 г. в задаче об изгибе рельсового пути [14].

Основное допущение этой модели отражается пропорциональной зависимостью

$$r(x, y) = c \cdot w(x, y), \tag{10.3}$$

где $w(x, y)$ – осадка основания в точке с координатами x, y плоскости контакта

балки и основания; $r(x, y)$ – нормальное давление на грунтовое основание в этой же точке; c – коэффициент, характеризующий жесткость упругого основания и называемый обычно в инженерной практике коэффициентом постели.

Из (10.3) видно, что, если размерности величин $r(x, y)$ и $w(x, y)$ принять соответственно Па=Н/м^2 и м, то для c получим размерность Н/м^3=Па/м.

Для балки с относительно небольшой шириной b уравнение (10.3) приводится к виду

$$r(x, y) \cdot b = c \cdot b \cdot w(x, y), \tag{10.4}$$

или с учетом того, что $r(x, y) \cdot b = r(x)$ и $w(x, y) = w(x)$, к виду

$$r(x) = c \cdot b \cdot w(x). \tag{10.5}$$

При расчете так называемых «балочных плит» [14, 15] из балочной плиты вырезается балка шириной $b = 1$. Тогда вместо (10.5) будем иметь

$$r(x) = c \cdot w(x). \tag{10.6}$$

Механически модель Винклера при опирании балки на основание представляется набором не связанных друг с другом пружин, имеющих жесткость c. Условно эта схема с пружинами изображена на рис. 10.2.

При использовании модели Винклера для грунтовых оснований следует помнить, что для большинства грунтов эта модель весьма условна. Об этом учащимся рекомендуется прочесть в учебном пособии [14], в учебнике по механике грунтов [23], а также в пособии к программе SCAD, написанном разработчиками этой программы.

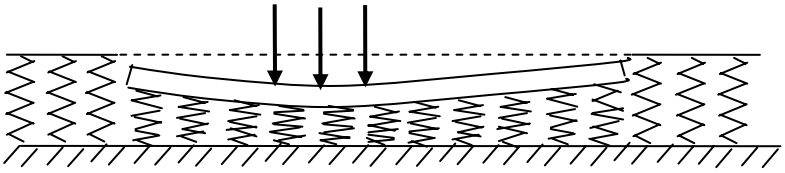


Рис. 10.2

Для реальных грунтов значения коэффициента постели определяются весьма приближенно, поэтому в справочных таблицах для одних и тех же грунтов обычно приводят диапазон возможного изменения коэффициента постели. В табл. 10.1 приведены значения коэффициентов постели, взятые из учебного пособия [15].

Ниже предполагается, что модель Винклера в виде (10.5) или (10.6) применима при расчете балки на грунтовом основании.

Таблица 10.1

Коэффициенты жесткости основания для различных грунтов [15]	
Материал основания	c (МПа/м)
Плывун. Песок свеженасыпанный. Глина мокрая размягченная	1 – 5
Песок слежавшийся балластный. Гравий насыпной. Глина влажная	5 – 50
Песок плотнослежавщийся. Гравий плотнослежавшийся. Щебень. Хрящ. Глина малой влажности	50 – 100
Песчано-глинистый, искусственно уплотненный. Глина твердая	100 – 200
Мягкая трещиноватая скала. Известняк. Песчаник. Мерзлота.	200 – 1000
Хорошая твердая скала	1000 – 15000
Бетон	8000 – 15000
Свайное основание	50 – 150

Подставив, например, выражение (10.5) в уравнения (10.1), (10.2) изгиба балки, лежащей на упругом основании Винклера, получим соответственно следующие уравнения для определения прогиба балки:

$$\frac{d^2}{dx^2}[EI(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}]+c\cdot b\cdot w(x)=q(x) \qquad (10.7)$$

или для балки с постоянной жесткостью на изгиб EI

$$EI\frac{d^4w(x)}{dx^4}+c\cdot b\cdot w(x)=q(x). \qquad (10.8)$$

Имеется большое число работ, в которых демонстрируются различные, в том числе и численные [14, 15], методы решения этой задачи.

10.2. Применение программы SCAD для расчета балки, лежащей на упругом основании модели Винклера

Вопросы, связанные с выбором модели грунтового основания при расчете сооружений, опирающихся какой-то своей частью (например стороной балки) на непрерывное упругое основание, обычно рассматриваются только после изучения теории упругости и механики грунтов. Поэтому в данном пособии при использовании программы SCAD, построенной на основе МКЭ, для расчета указанных сооружений применена наиболее простая модель грунтового основания – модель Винклера.

Идея МКЭ и ход расчета этим методом плоских стержневых систем были рассмотрены в разделе 8 УМК.

Для расчета плоских стержневых систем, имеющих по каким-то стержням опирание на упругое винклеровское основание, используется все тот же элемент плоской рамы (тип 2 по классификации программы SCAD), у которого при задании жесткости необходимо ввести значение коэффициента постели грунтового основания (см. рис. 10.3).

Элемент соединяется с узлами расчетной схемы для МКЭ стержневой системы в узлах 1 и 2 местной системы координат, а с грунтовым основанием во всех точках по длине элемента. При этом предполагается, что соединение балки с основанием, когда соблюдаются условия (3.5), (3.6), является двухсторонним, что означает возможность возникновения как сжимающих, так и растягивающих усилий $r(x)$.

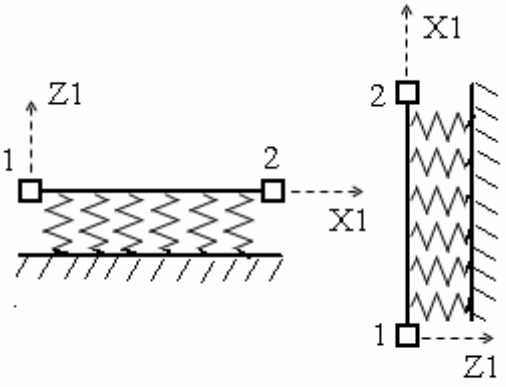


Рис. 10.3

В реальных условиях растягивающих усилий $r(x)$ по подошве балки и на поверхности основания возникнуть не может, поскольку грунтовое основание физически не может передать таких усилий на балку, а балка – на основание.

В этом случае балка просто оторвется от грунта. Иными словами, в реальных условиях связь балки с основанием в каждой точке имеет только односторонний характер.

Вопрос о расчете систем с односторонними связями является более сложным и в данном учебном пособии не рассматривается. Поэтому в приведенных ниже примерах связи предполагаются двусторонними.

П р и м е р. Рассмотрим пример расчета балки, приведенный в учебном пособии [15]. Расчет выполнен МКЭ для балки длиной 30 м постоянной жесткости на изгиб EI = $1\cdot10^6$ кН·м^2, опирающейся на основание с коэффициентом постели c = 400 кН/м^3. Рассмотрены три загружения: 1) сосредоточенным моментом M = 200 кН·м, приложенным к правому концу балки в направлении по часовой стрелке; 2) сосредоточенной силой P = 100 кН, приложенной к правому концу балки в направлении сверху вниз; 3) равномерно распределенной нагрузкой q = 50 кН/м, приложенной по всей длине балки в направлении сверху вниз.

В расчетной схеме МКЭ балка была разбита на три равных по длине КЭ, вида, изображенного на рис. 10.3.

В табл. 10.2 приведены прогибы балки (мм) в узлах КЭ, полученные в работе [15] в результате точного решения и в результате численного решения МКЭ с использованием конечного элемента, построенного на базе точного решения, и конечного элемента с кубической аппроксимацией функции прогибов.

В данном учебном пособии в таблицу дополнительно внесены прогибы при суммарном загружении, когда усилия $r(x)$ получаются сжимающими по всей плоскости опирания балки на грунтовое основание и в реальных условиях отрыва балки от грунта не происходит.

Таблица 10.2

x, м	*w*, мм				
	Точное решение	Численное решение в работе [10]		Расчет по программе SCAD	
		КЭ, полученный на базе точного решения	КЭ с кубической аппроксимацией функции прогибов	Разбивка балки на три КЭ типа 2	Разбивка балки на 15 КЭ типа 2
Загружение1					
0	–0.282	–0.282	–0.272	0.272	0.282
10	–1.872	–1.872	–1.865	1.864	1.872
20	–1.178	–1.178	–0.118	1.179	1.177
30	10.004	10.004	9.986	–9.986	–10.000
Загружение 2					
0	–5.650	–5.650	–5.591	5.590	5.650
10	–3.349	–3.349	–3.346	3.345	3.348
20	10.193	10.192	10.112	–10.110	–10.190
30	50.328	50.327	50.152	–50.150	–50.320
Загружение 3					
0	125	125	125	–125	–125
10	125	125	125	–125	–125
20	125	125	125	–125	–125
30	125	125	125	–125	–125
Суммарное загружение					
0	119.1	119.1	119.1	–119.1	–119
10	120.5	119.8	119.8	–119.7	–119.7
20	134.0	134.0	135.0	–133.9	–134.0
30	185.3	185.3	185.1	–185.1	–185.3

Выполним решение этой же задачи с использованием программы SCAD.

Разбиение балки на конечные элементы оставим таким же, как в работе [15] (три КЭ типа 2 «Плоская рама» с дополнительным введением коэффициента постели).

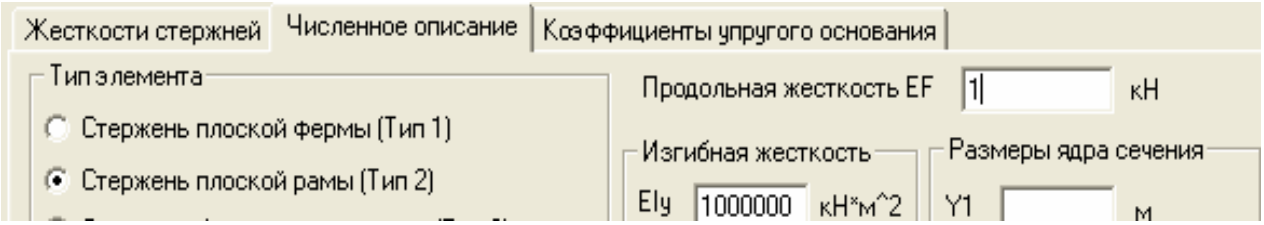
Последовательность расчета при использовании программы SCAD учащемуся уже известна(см. приложение 1 к УМК). Здесь обратим внимание только на процедуру задания жесткости балки, при которой задается и коэффициент постели основания.

Задание жесткостей элементов балки может быть выполнено либо на этапе создания расчетной схемы балки в разделе **Схема,** либо – в разделе **Назначение** соответственно с помощью кнопок «Генерация прототипа рамы» и «Назначение жесткостей стержней» [2].

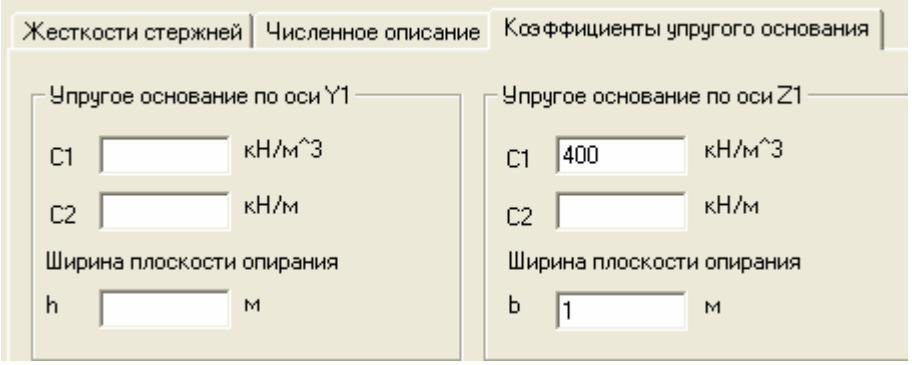
В обоих случаях рассматриваются три окна **Жесткость стержневых элементов**. Первое окно соответствует разделу меню «Жесткости стержней».

Здесь отмечаем «Численное описание» и переходим в одноименный раздел.

В открывшемся окне (ниже приведена только его часть) отмечаем «Стержень плоской рамы» и записываем заданное значение жесткости балки на изгиб.



В окне «Продольная жесткость EF » вносим значение «1» (см. подраздел 2.1 этого учебного пособия). После этого входим в раздел «Коэффициенты упругого основания» верхнего меню окна. При этом откроется третье окно, часть которого приведена ниже.



В программе SCAD коэффициент постели грунтового основания, соответствующий прогибам балки перпендикулярным ее оси, обозначен $C1$.

В соответствии с местной системой координат горизонтального элемента (см. рис. 10.3) записываем заданное в примере значение $C1$ в поле «Упругое основание по оси Z1». В окне указывается и ширина плоскости опирания балки.

После нажатия в окне кнопки «ОК» окно закроется. Далее необходимо выполнить действия по присвоению заданной жесткости нужным элементам (см. описание этой процедуры в приложении 1 к УМК).

В рассматриваемом примере жесткость балки на изгиб для всех конечных элементов одинакова. Соответствующие им коэффициенты постели также одинаковы.

Все остальные операции процедуры расчета по программе SCAD известны.

Прогибы балки, полученные с использованием программы SCAD в узлах КЭ (табл. 10.2) приведены для двух вариантов разбиения балки: на три и на 15 КЭ.

Анализ этих результатов показывает их практическое совпадение с соответствующими результатами в работе [15].

Отличие знаков перемещений, полученных в работе [15] и при расчете по программе SCAD, связано с принятыми противоположными направлениями вертикальных осей координат в работе [15] и в программе SCAD.

Вид эпюр осадок для трех загружений и их суммарной комбинации приведены соответственно на рис. 10.4, *а, б, в, г*.

В соответствии с пропорциональной зависимостью модели Винклера (10.6) аналогичные эпюры имеют и реактивные усилия $r(x)$ для принятых загружений.

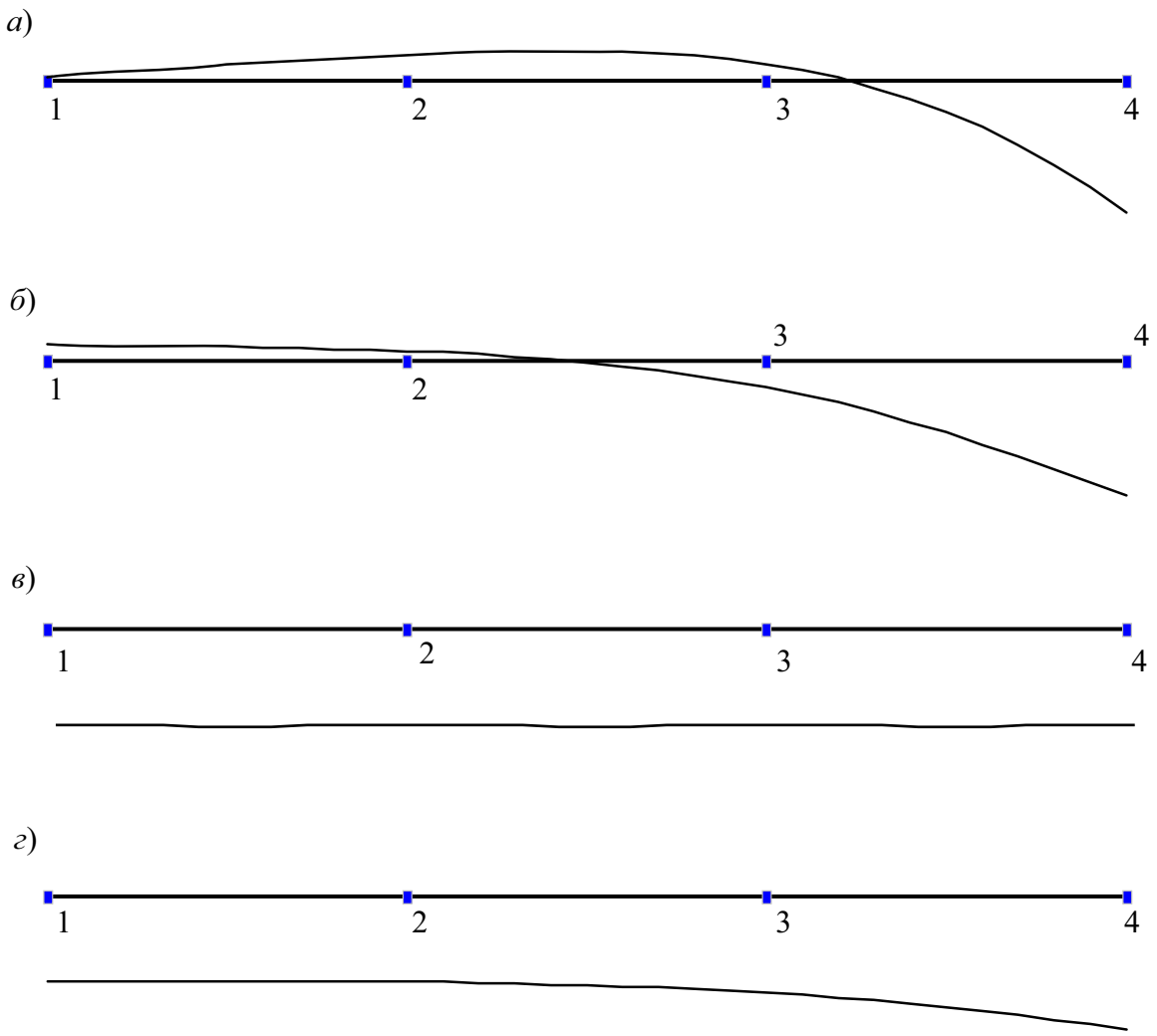


Рис. 10.4

Обратим внимание на то, что при загружении 3 равномерно распределенной по всей длине балки нагрузкой (в данном примере интенсивностью $q(x) = 50$ кН/м^2) и при использовании для грунтового основания модели Винклера получается (см. рис. 10.4, *в*):

равномерная по всей длине осадка балки (в данном примере 125 мм = 0.125м);

равномерно распределенное по длине балки реактивное усилие (в данном примере $r(x) = 400 \cdot 0.125 = 50$ кН/м^2, см. (3.6)).

Это означает, что балка, загруженная по всей длине равномерно распределенной внешней нагрузкой $q(x) = q$ и равномерно распределенным реактивным отпором грунта $r(x) = r = q$, не будет изгибаться (см. рис. 10.4, *в*) и в ней не будет изгибающих моментов и поперечных сил.

На рис. 10.5, *а* ,*б* приведены соответственно эпюры M ,Т·м, и Q , Т, в балке для суммарной комбинации загружений, которому соответствует вид эпюр осадок $w(x)$ и реактивных усилий $r(x)$, изображенный на рис. 10.4, *г*.

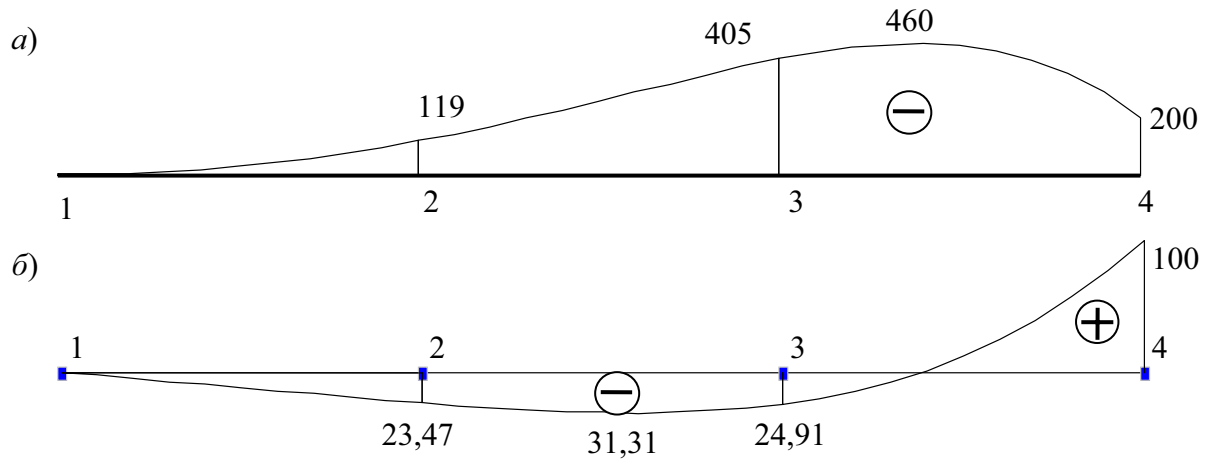


Рис. 10.5

10.3. Учет переменности жесткости балки на изгиб и переменности коэффициента постели по длине балки при расчете МКЭ

Балка, имеющая по своей длине переменную жесткость на изгиб

В инженерной практике часто встречаются случаи [14], когда балка, лежащая на упругом основании, имеет непрерывно или скачками (например, при изменении высоты железобетонной балки в каком-то сечении) изменяющуюся по длине балки жесткость на изгиб.

Метод конечных элементов позволяет решить эту задачу без затруднений. Для иллюстрации рассмотрим балку переменного сечения, рассчитанную в работе [15] МКЭ, и повторим ее расчет с использованием программы SCAD (рис. 10.6, *а*).

П р и м е р. Расчет балки выполним при следующих параметрах: $h_1 = 0.3$ м, $h_2 = 0.6$ м, $h_3 = 0.4$ м, $P_1 = 150$ кН, $P_2 = 200$ кН, $P_3 = 250$ кН, $P_4 = 230$ кН, $M_1 = 450$ кН/м $q_1 = 40$ кН/м, $q_1 = 60$ кН/м. Модуль упругости материала балки: $E = 2 \cdot 10^7$ кН/м^2, коэффициент постели грунтового основания в направлении Z: $C1 = 1800$кН/м^3.

Результаты расчета в виде эпюры прогибов балки, мм, а также в виде эпюр усилий *M*, Т·м, и *Q,* Т, приведены соответственно на рис. 10.6, *б, в, г*.

Эти результаты близко совпадают с результатами приведенными в работе [15] при использовании конечных элементов, построенных на основе точного решения уравнения изгиба балки на упругом основании Винклера.

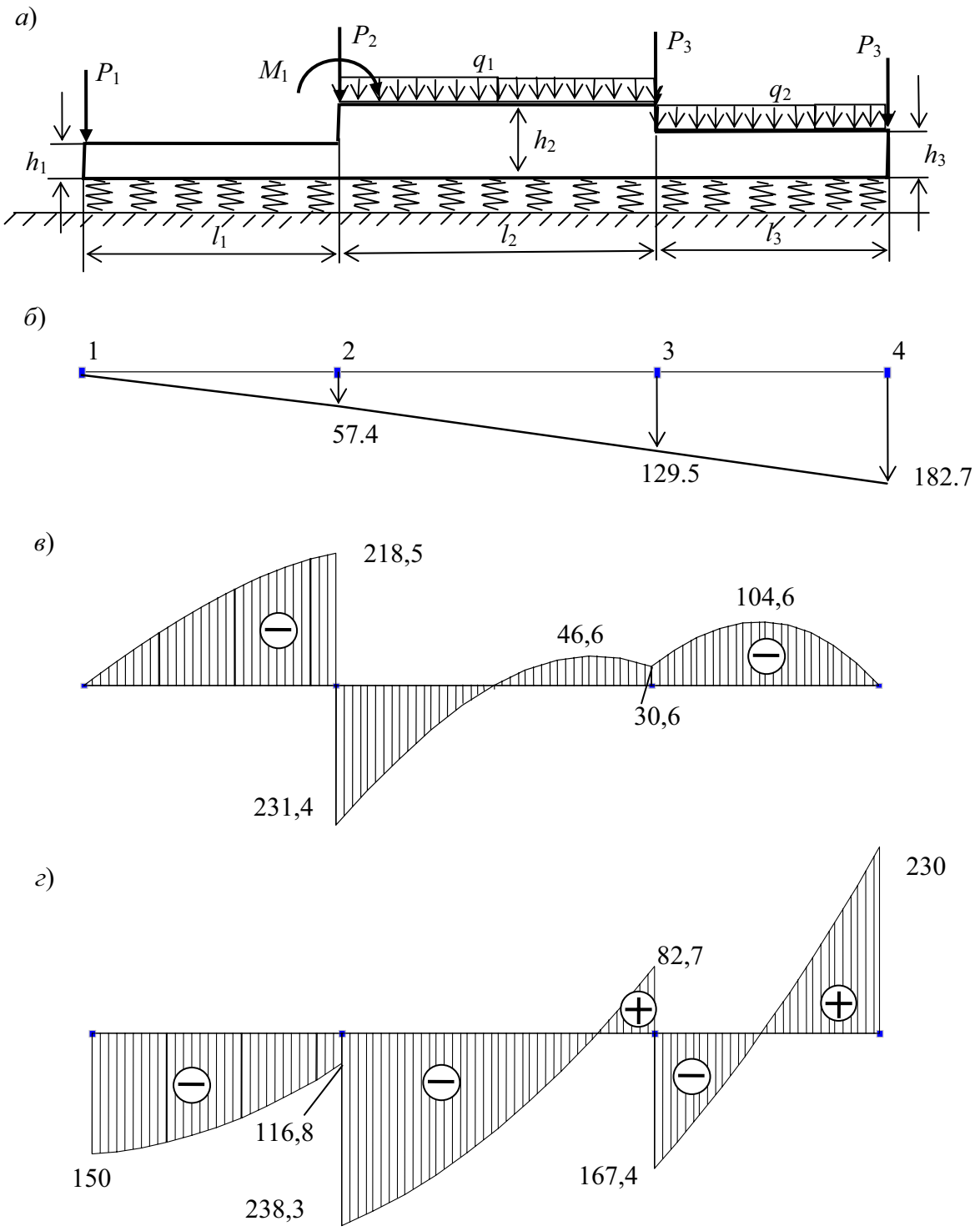


Рис. 10.6

Балка, лежащая на грунтовом основании модели Винклера с переменным коэффициентом постели

В реальных условиях балка может лежать на грунтовом основании с физико-механическими характеристиками, произвольно изменяющимися по длине балки. Могут быть самые различные варианты этого изменения.

Метод конечных элементов при использовании для учета контакта балки с грунтовым основанием модели Винклера позволяет рассчитывать и балки с переменным коэффициентом постели. Необходимо только при разбиении балки на конечные элементы, опирающейся на участки грунтового основания с различными коэффициентами постели, учитывать то обстоятельство, что в пределах каждого конечного элемента необходимо назначить постоянное (осредненное) значение коэффициента постели.

Возможность достаточно быстрого решения подобных задач с помощью программы SCAD позволяет исследовать изменение осадок и усилий в балке и на поверхности грунтового основания вследствие изменения жесткости основания на отдельных участках контакта балки с основанием или под всей балкой.

П р и м е р. Сначала для балки постоянной жесткости, рассмотренной в примере подраздела 3.2, исследуем изменение прогибов балки и усилий в ней при увеличении жесткости основания под всей балкой в сто раз (со значения $C1 = 0.4$ МПа/м до значения C1= 40 МПа/м).

Результаты расчета для суммарной комбинации всех загружений (см пример в подразделе 10.2) в виде эпюр осадок $w(x)$ и эпюр усилий M, Q приведены соответственно на рис. 10.7, *а, б, в*.

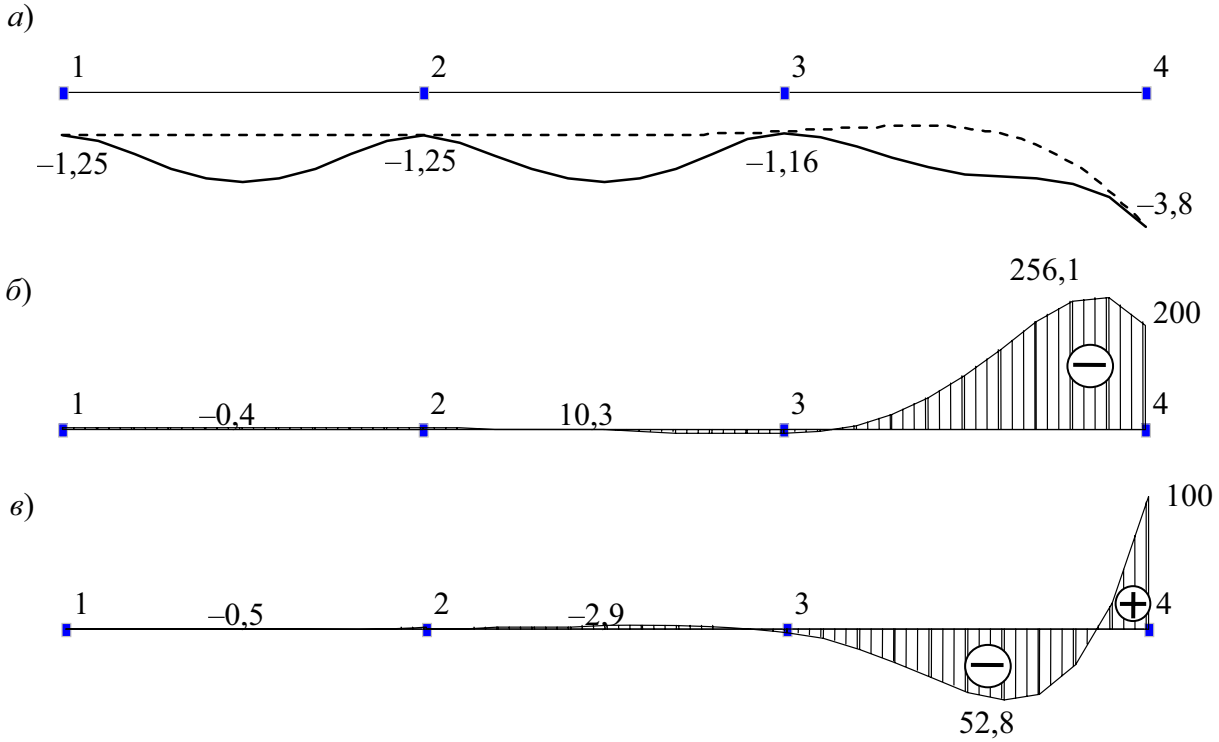


Рис. 10.7

Как видно из сопоставления рис. 10.7, *а* с рис. 10.4, *г*, при увеличении жесткости

основания в сто раз по сравнению с балкой, рассмотренной в примере подраздела 10.2, балка становится относительно гибкой. В этом случае более точный характер ее деформирования получается при достаточно большом числе элементов (пунктиром показан вариант с 15 КЭ).

Для гибкой балки все деформации происходят в зоне, близкой к приложенным сосредоточенным усилиям. Эпюры M и Q при этом также имеют в этой зоне наибольшие ординаты. Указанное увеличение жесткости основания привело к существенному изменению вида эпюр усилий и их значений.

Теперь выполним исследование, изменив только что назначенный коэффициент постели основания, уменьшив его в пределах третьего конечного элемента балки (в варианте расчетной схемы балки с тремя элементами), до нулевого значения. Это означает, что третьим элементом балка не опирается на основание, а представляет собой консоль.

Результаты расчета, аналогичные представленным на рис. 10.7, *а, б, в* при суммарном загружении балки, приведены на рис. 10.8, *а, б, в*.

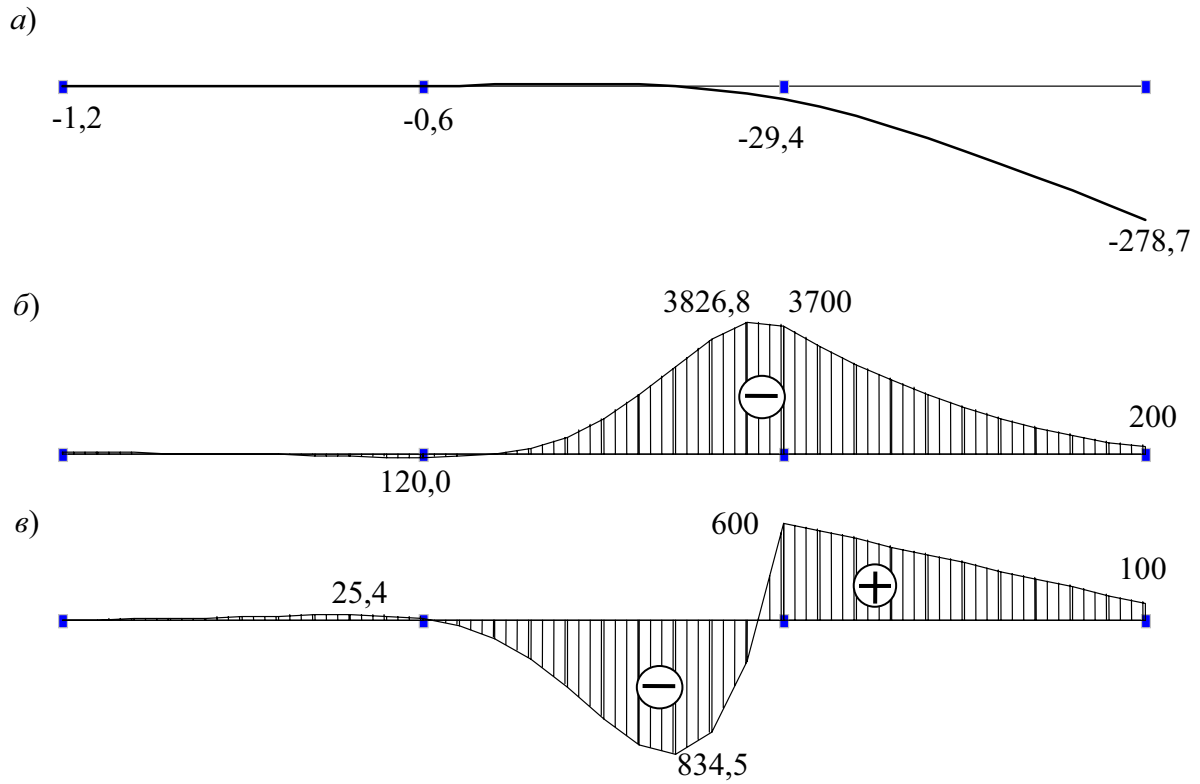


Рис. 10.8

Из рисунка видно, что при отсутствии грунта под крайним справа конечным элементом, балка в пределах этого элемента работает как консоль от приложенных на нее нагрузок.

10.4. Расчет рам, имеющих стержни с непрерывным контактом по своей длине с упругим основанием модели Винклера

В инженерной практике необходимость в использовании конечного элемента типа 2, который по своей длине имеет непрерывный контакт с упругим основанием модели Винклера, встречается и при расчете плоских рам.

Пример такой рамы (рис. 10.9) приведен в работе [13]. Выполним ее расчет с помощью программы SCAD.

П р и м е р. В примере расчета трубы приняты следующие параметры: $a = 2.5$ м; $h = 0.5$ м; $q = 1$ тс/м; модуль упругости железобетона $E = 2.4 \cdot 10^6$ тс/м^2.

Труба частично находится в грунте с коэффициентом постели С1= 500 тс/м^3.

Длина трубы значительно превышает размеры ее поперечного сечения. Показанная на рис.3.9 нагрузка, а также параметры трубы и грунта остаются одинаковыми по всей длине трубы. В этом случае для расчета осадок трубы и усилий в ее поперечных сечениях можно выделить слой шириной равной b =1 м в направлении длины трубы, т.е. выполнить расчет для плоской рамы.

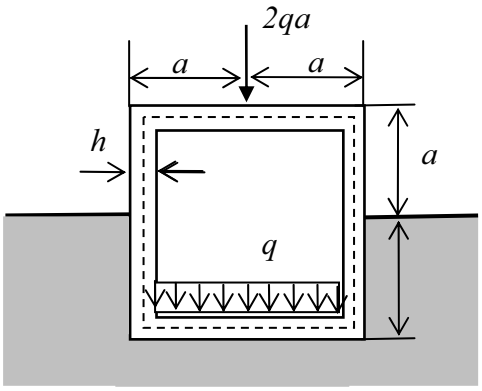


Рис. 10.9

В работе [13] и в данном примере предполагается, что труба уже возведена. Расчет по схеме плоской рамы выполнялся только от действия сосредоточенной силы $P = 2qa$ и равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (без учета собственного веса рамы и способа ее возведения и без учета давления грунта на трубу после ее засыпки).

При назначении расчетной схемы рамы в работе [13] сделан ряд допущений.

Длины стержней были приняты по внешнему размеру поперечного сечения трубы.

При назначении жесткости стержней на изгиб не учитывались так называемые «жесткие вставки» по длине стержней в зоне узлов рамы.

В рассматриваемом примере с использованием программы SCAD была принята аналогичная расчетная схема.

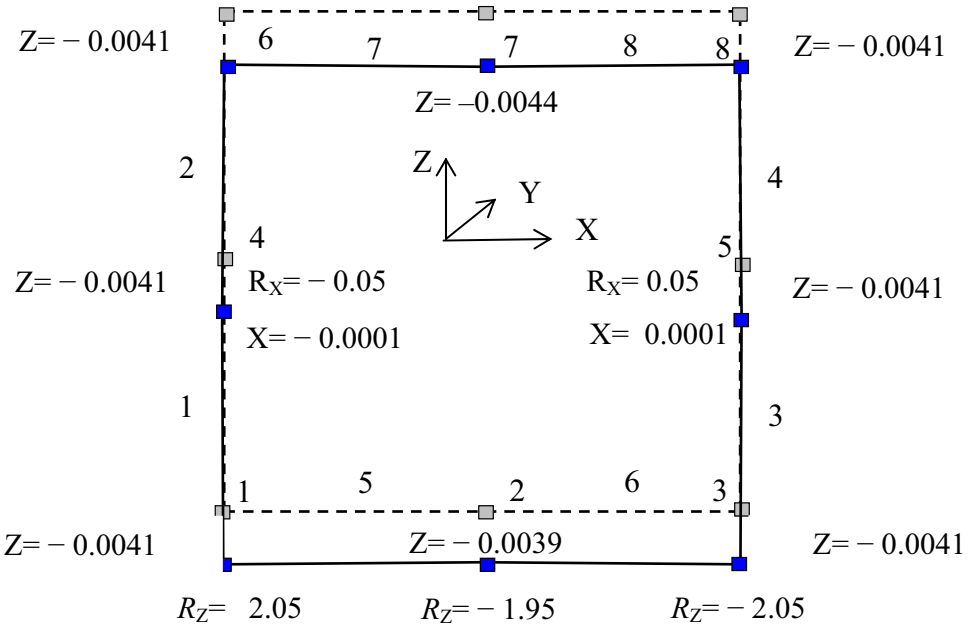


Рис. 10.10

Процедура построения расчетных схем рам в программе SCAD рассматривалась в разделе 3. Поэтому построение расчетной схемы заданной рамы трудности не представляет (рис. 10. 10).

Для рассматриваемой плоской рамы на каждом стержне назначено по два конечных элемента типа 2. При назначении жесткости конечных элементов, имеющих контакт по их длине с основанием типа Винклера, вводится значение заданного в задаче коэффициента постели.

На рис. 10.10 изображена картина перемещений Z, м, всех узлов КЭ от загружения рамы силой $P = 5$ Т и нагрузкой $q = 1$ Т/м .

Кроме того, в узлах 4 и 5 приведены величины горизонтальных перемещений и соответствующие им горизонтальные реактивные давления. Величины вертикальных реактивных давлений указаны в узлах 1, 2, 3.

Соответствующая эпюра M , Т·м, изображена на рис. 10.11.

б

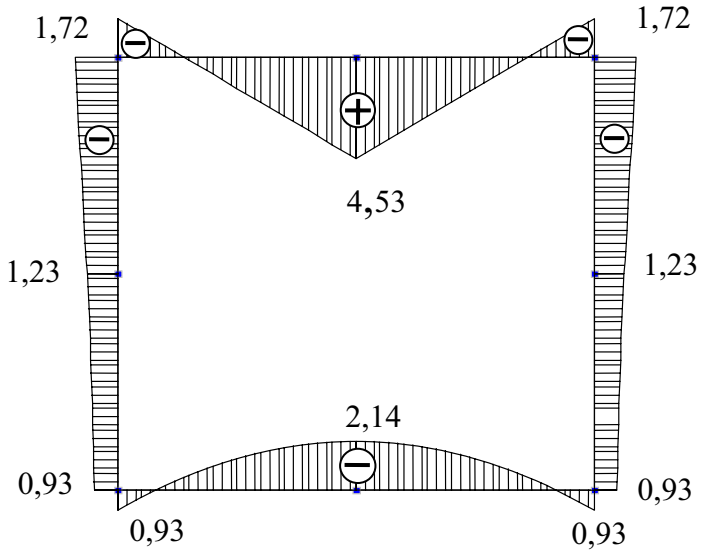


Рис. 10.11

Полученные результаты практически совпадают с соответствующими результатами в работе [13].

Программа SCAD для рассматриваемой задачи позволяет построить более совершенную расчетную схему (учесть в формировании усилий в раме этап ее возведения, учесть жесткие вставки на стержнях и т. д.). Однако эти вопросы прямо не относятся к поставленной задаче данного учебного пособия и поэтому здесь не рассматриваются.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ПРОГРАММЫ SCAD ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ УЧЕБНЫХ РАСЧЕТНЫХ РАБОТ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие вопросы применения программы SCAD для расчета плоских стержневых систем при статической нагрузке……...…. 274
2. Построение эпюр M и Q в шарнирной балке…….……..... 289
3. Построение эпюр M, Q, N в раме……...……..…….... 301
4. Определение усилий в стержнях фермы.…….. 315

П1.1. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОГРАММЫ SCAD ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

Процедура выполнения заданий по строительной механике стержневых систем с помощью программы SCAD в учебном процессе условно разделена на следующие этапы.

Э т а п 1. ***Запуск программы и подготовка к созданию расчетной схемы***

1.1. Запуск программы SCAD.

1.2. Создание нового проекта для выполнения расчета заданной стержневой системы и его наименование.

1.3. Задание имени файла в директории SDATA, в котором будет сохраняться вся информация по введенным исходным данным. Выход на схему «Дерево проекта» для начала работы.

1.4. Открытие окна «Расчетная схема» для формирования расчетной схемы МКЭ рассматриваемой стержневой системы.

Э т а п 2. ***Создание расчетной схемы стержневой системы для МКЭ***

2.1. Графическое представление расчетной схемы в общей системе осей координат. Контроль за направлением осей местной системы координат на каждом элементе.

2.2. Назначение типа элементов.

2.3. Назначение жесткости элементов.

2.4. Назначение опорных связей.

2.5. Назначение шарниров в узлах элементов.

2.6. Печать или сохранение расчетной схемы.

Э т а п 3. ***Загружение расчетной схемы МКЭ***

3.1. Задание узловой нагрузки.

3.2. Задание нагрузки на элемент.

3.3. Сохранение загружения.

3.4. Печать или сохранение расчетной схемы с созданным загружением.

Э т а п 4. ***Выполнение линейного расчета и представление его результатов***

4.1. Выполнение линейного расчета.

4.2. Графическое представление полученных результатов расчета стержневой системы. Их сохранение и печать.

4.3. Табличное представление полученных результатов расчета стержневой системы. Их сохранение и печать.

В разделе П1.1 рассматриваются некоторые общие вопросы выполнения данной последовательности расчета на этапах 1÷3.

Конкретные действия на этих этапах приведены в разделах П1.2 ÷ П1.5, где рассматриваются примеры выполнения расчетных работ для статически определимых стержневых систем. Там же рассмотрены действия расчетчика на этапе 4 применения программы SCAD.

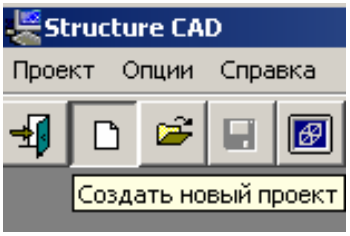
Вопросы определения перемещений в статически определимых стержневых системах с помощью программы SCAD рассмотрены только в разделе П1.6.

Нумерация, использованная внутри подразделов, выполнена в соответствии с указанной выше нумерацией этапов и делением их на подэтапы.

Э т а п 1. *Запуск программы и подготовка к созданию расчетной схемы*

1.1. Запуск программы SCAD

После запуска программы на экране появится окно, информирующее о загрузке программы с указанием на операционную систему, в которой она работает. Окно имеет меню из трех разделов – **Проект**, **Опции, Справка** и инструментальную панель из 5 кнопок.



1.2. Создание нового проекта для выполнения расчета заданной стержневой системы и его наименование

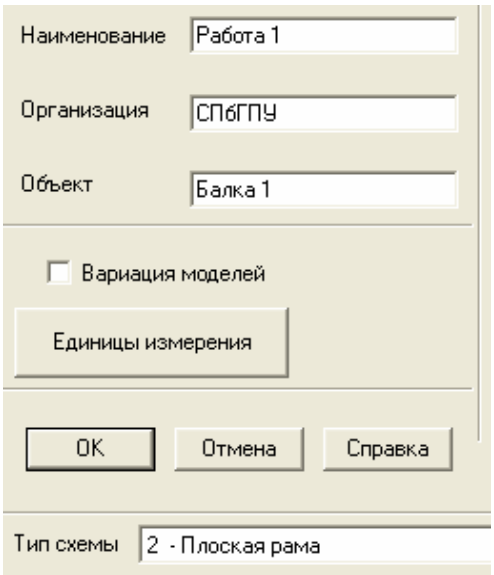
Курсор устанавливается на одноименной кнопке «Создать новый проект» и нажимается левая кнопка мыши. На экран выводится диалоговое окно **Новый проект.** Вид этого окна в разных версиях SCAD различается.

В данном варианте (ниже приведена только часть окна) выполним следующие действия.

Ввод наименования проекта. Введем, например, «Работа 1».

Ввод названий: организации, выполняющей расчет, и объекта. В окне «Организация» учащемуся можно ничего не записывать. В нашем примере записано: СПбГПУ. В окне «Объект» введем, например, «Балка 1».

Установка единиц измерения. Открываем окно «Единицы измерения» и в соответствии с выбранной расчетчиком системой (СИ или технической, например, МТС) назначаются единицы измерения основных величин.



Выбор типа схемы. При расчете плоской балки используется конечный элемент типа 2 «Стержень плоской рамы». Поэтому при расчете плоских балок и рам в этом диалоговом окне надо выбрать: «2. Плоская рама».

При расчете плоской фермы используется конечный элемент типа 1 «Стержень плоской фермы». Поэтому на поле «Тип схемы» необходимо выбрать «Плоская шарнирно-стержневая система».

Пояснения по указанным типам стержневых элементов частично были приведены в разделе 3 и будут рассмотрены далее на этапе 2 последовательности расчета.

Сохранение нового проекта. Для сохранения введенных данных о новом проекте курсор подводится к кнопке «ОК» в рассматриваемом диалоговом окне и нажимается левая кнопка мыши. При этом на экран будет выведено окно **Создание нового проекта SCAD** с открытой папкой SDATA (здесь это окно не приводится).

*1.3 Задание имени файла в директории SDATA. Выход на схему «**Дерево проекта**» для начала работы*

В учебном классе кафедры СМ и ТУ в открывшемся окне с папкой SDATA будут находиться папки с номерами групп. Надо выбрать папку с номером своей группы и открыть ее. В папке группы и задается имя файла проекта.

Примечание к пункту 1.3. Для того чтобы студенты не выбирали произвольно вымышленных названий своих проектов, в компьютерном классе кафедры СМ и ТУ принят вид имени файла, состоящий из двух частей, соединенных дефисом (без пробела):

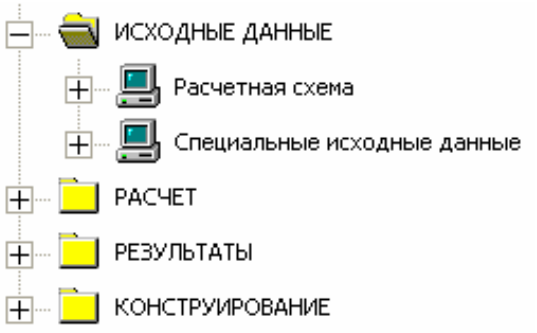
1. Часть, состоящая из четырехзначного цифрового шифра ABCD, выданного студенту на все время изучения дисциплины «Строительная механика стержневых систем (статика)» для выбора расчетных схем стержневых систем из сборника задач (см. приложение 2 к УМК).

2. Часть, состоящая из первой буквы наименования рассчитываемой системы и следующего за ней (без пробела) порядкового номера рассматриваемого типа схемы (в приведенном выше примере вводится: б1).

Например, при выданном студенту гр. 3015-1 шифре ABCD = 0102 он должен открыть в папке SDATA папку «30151» и в ней задать имя файла: 0102-б1.

Команда «Сохранить» открывает окно со схемой, которая называется **Дерево проекта** (здесь изображена только его часть).

Созданный файл будет храниться в папке SDATA, а затем имя файла будет присвоено всем служебным файлам и порождаемым в процессе работы комплекса файлам с результатами. Эти рабочие файлы будут храниться в рабочей папке SWORK.



Примечание к этапу 1. При необходимости повторной работы с созданным проектом, после запуска программы SCAD на инструментальной панели из 5 кнопок надо нажать кнопку «Открыть существующий проект». Появится окно **Открытие проекта SCAD**. Далее надо поступить так же, как это было только что описано в подразделе 1.3. Различие в виде второго окна по сравнению с описанным выше будет состоять в том, что в нем уже будет находиться имя созданного ранее файла 0102-б1. Открытие этого файла приведет к открытию схемы **Дерево проекта**. Далее выполняем следующие действия.

1.4. Открытие окна «Расчетная схема»

Дерево проекта содержит четыре папки: **Исходные данные**, **Расчет**, **Результаты** и **Конструирование** (см. приведенную выше часть дерева).

В первую очередь необходимо войти в папку **Исходные данные** и открыть ветвь **Расчетная схема**.

В результате откроется рабочее окно по созданию расчетной схемы, в котором имеется шесть функциональных разделов (их названия указаны ниже информационной панели).

Каждому разделу соответствует своя инструментальная панель с рабочими кнопками. Сначала окно откроется с активной инструментальной панелью раздела **Управление**.

Одновременно в окне появятся две подвижные инструментальные панели: **Фильтры отображения** и **Визуализация**. Можно изменять размеры сторон этих панелей и сделать их удобными для одновременного размещения в поле окна вместе с расчетной схемой.

Панели видны только в том случае, если на инструментальной панели раздела **Управление** соответственно нажаты кнопки и .

Прежде чем перейти к **Этапу 2** (см. подраздел П1.1) вернемся к рассмотрению предварительных сведений (см. раздел 3 УМК).

В разделе 3 были предварительно рассмотрены следующие общие вопросы, связанные с применением конечных элементов в плоских стержневых системах:

1) о типах плоских конечных элементов, которые используются для

построения расчетных схем плоских стержневых систем;

2) об общей и местной системах осей координат;

3) о нумерации концевых узлов конечных элементов в местной системе координат и общей нумерации узлов и элементов в расчетной схеме. стержневых систем;

4) о задании жесткостей конечных элементов на растяжение – сжатие EF и на изгиб $EI = EI_y$;

Здесь дадим некоторые дополнительные сведения по этим вопросам.

К вопросу 2). В программе SCAD в разделе **Назначения** предусмотрена возможность смены направления оси X1 местной системы координат. Это делается следующим образом.

1. На инструментальной панели этого раздела нажимается кнопка «Перевернуть местную ось стержня».

2. На построенной расчетной схеме с помощью курсора и левой клавиши мыши отмечается элемент (его ось на экране становится красной), в котором изменяется направление оси, и нажимается кнопка «ОК» на инструментальной панели раздела. После этого цвет элемента восстанавливается, а ось X1 оказывается повернутой в обратном направлении по сравнению с первоначальным направлением. При этом изменится положение начала осей координат, что приведет к замене номеров 1 и 2 узлов элемента соответственно на номера 2 и 1 (см. рис. 3.11). Изменятся также положение осей Z1, Y1 и положительные направления усилий M и Q.

К вопросу 3). В расчетной схеме стержневой системы, которая будет строиться в рабочем окне (см. п. 1.4. этапа 1) нумеруются и узлы и элементы. В принципе эта нумерация может быть произвольной.

Впервые вопрос о нумерации узлов и элементов в расчетной схеме МКЭ, которая строится с помощью программы SCAD, встретился на примере рамы (см. рис. 3.1). Там было отмечено, что в программе SCAD указанная нумерация выдается автоматически. Эта нумерация связана с последовательностью ввода узлов и конечных элементов.

Так узлы элементов балки обычно вводятся последовательно слева направо. Поэтому первый номер будет у левого крайнего узла, а наибольший номер – у крайнего правого.

На рис. П1.1 показана расчетная схема балки, состоящая из двух элементов типа 2 (наличие опорных связей в крайних узлах показано условно прямоугольниками).

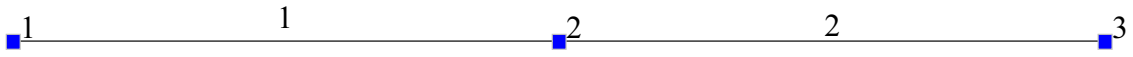


Рис. П1.1

Нумерация узлов и элементов в раме была показана на рис. 3.1, *б*, При указанной нумерации узлов, отражающей порядок их ввода, местные системы координат в горизонтальных и вертикальных конечных элементах будут направлены так, как показано на рис. 3.10.

Нумерация узлов и элементов в ферме продемонстрирована на рис. П1.2.

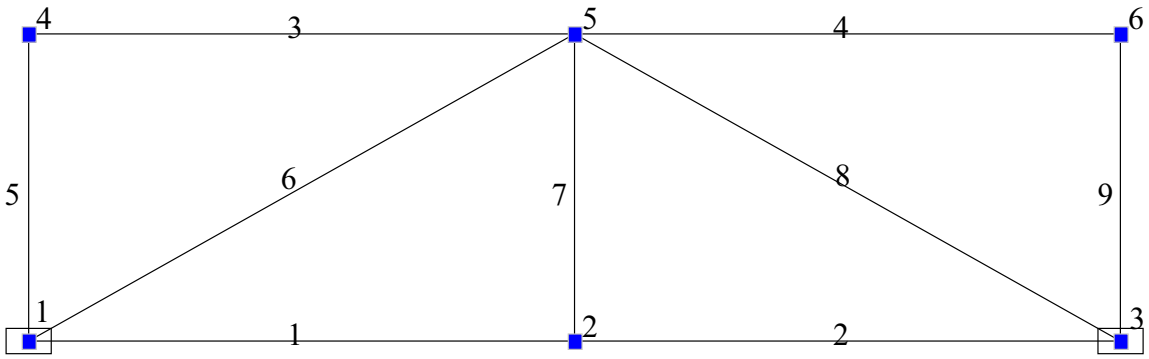


Рис. П1.2

Номера элементов и узлов на расчетной схеме изображаются при нажатых на панели **Фильтры отображения** кнопках и .

Теперь вернемся к продолжению этапов расчета, приведенных в подразделе П1.1, и выполним действия, соответствующие этапу 2.

Э т а п 2. *Создание расчетной схемы стержневой системы для МКЭ*

2.1. Графическое представление расчетной схемы

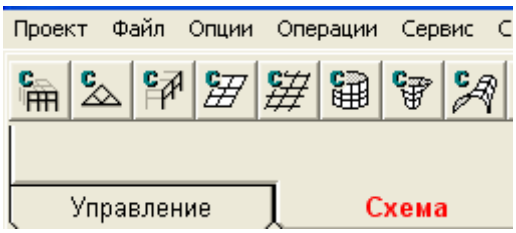
Геометрическое изображение расчетных схем плоских балок, рам и ферм, встречающихся в заданиях (см. приложение 2), в программе SCAD может быть выполнено двумя способами (или их комбинацией):

1) использованием типовых схем плоских стержневых систем;

2) последовательным вводом сначала узлов элементов расчетной схемы, а затем изображением самих элементов (вводом элементов).

Использование типовых схем. Для создания расчетной схемы этим способом необходимо войти в раздел **Схема**. С этой целью курсор устанавливается на закладке **Схема** и нажимается левая кнопка мыши.

Появится инструментальная панель (здесь приведена только ее часть), соответствующая разделу **Схема**.



Для построения расчетной схемы плоской балки или рамы необходимо нажать первую кнопку на инструментальной панели **Схема**, а для построения плоской фермы следует нажать вторую кнопку.

Выполнение построения конкретных расчетных схем с помощью типовых схем показано в примерах расчета балок, рам и ферм.

Построение расчетной схемы способом последовательного ввода узлов и элементов. В этом способе каждый стержневой элемент расчетной схемы вводится отдельно. Перед выполнением этой операции учащемуся рекомендуется сначала изобразить на бумаге вид расчетной схемы с предварительным указанием номеров узлов и элементов. Затем необходимо выбрать узел, в котором будет находится начало общей системы осей координат, и изобразить направление координатных осей (см., например, рис. 3.1, *б* для рамы).

После этого можно начать процедуру ввода узлов по их координатам в общей системе координат.

Ввод узлов. Для ввода узлов открываем раздел **Узлы и элементы** и нажимаем кнопку «Узлы». Появляется инструментальная панель для работы с узлами расчетной схемы, в которой нажимаем кнопку «Ввод узлов».

В результате откроется одноименное диалоговое окно. Первый узел вводится с нулевыми координатами и нажимается кнопка «Добавить». В результате (при нажатой на панели фильтра отображения кнопке) в поле окна для изображения расчетной схемы появится изображение узла, а при нажатой кнопке - номер узла.

Затем, в соответствии с предварительно назначенными номерами узлов, вводятся остальные узлы.

Ввод элементов. Ввод стержневого элемента представляет собой соединение прямой линией его концевых узлов. Для этого необходимо на инструментальной панели раздела **Узлы и элементы** нажать кнопку и на

появившейся инструментальной панели нажать кнопку «Добавление стержней».

Изменивший форму курсор подвести к узлу, который предполагается быть узлом 1 (по нумерации в местной системе координат), и нажать левую клавишу мыши.

Не отпуская нажатую клавишу провести линию до узла 2 (по нумерации в местной системе координат). Отпустить клавишу и снова нажать и отпустить.

Если при этом на фильтре отображения нажата кнопка «Номера элементов», то появится номер введенного элемента.

При нажатии на фильтре отображения кнопки будет обозначена местная система осей координат элемента. Направление оси X1 будет совпадать с направлением рисования оси элемента. Например, для получения местной системы координат на горизонтальном элементе 2 (см. расчетную схему балки на рис. П1.1) ось элемента надо рисовать от узла 2 к узлу 3. Аналогично следует рисовать горизонтальные элементы на рамах слева направо.

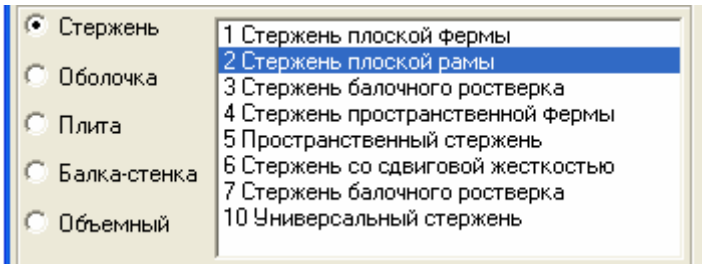
Желательно также, чтобы у всех вертикальных элементов рамы местная система осей координат имела вид, изображенный на рис. 3.10, *б*. Поэтому все вертикальные элементы надо рисовать снизу вверх.

2.2. Назначение типа элементов

После построения расчетной схемы, рекомендуется с помощью фильтра отображения проверить тип элементов нажатием кнопки .

Если на введенном элементе не будет обозначен его тип (или выбран не тот тип), то необходимо открыть раздел **Назначения** и на его инструментальной панели нажать кнопку .

Откроется окно **Назначение типа элементов** (ниже показана только его часть).



При расчете стержневой системы в диалоговом окне необходимо выбрать «Стержень» и указать назначаемый тип стержня (в приведенной части окна выбран тип 2 «Стержень плоской рамы»).

Нажатие кнопки «ОК» приводит к закрытию окна. Курсор при этом примет иную форму.

Теперь курсором на расчетной схеме надо **выделить** стержень, которому будет назначаться выбранный тип элемента. Это выделение состоит в следующем.

Курсор подводится к изображению элемента. Нажимается и отпускается левая клавиша мыши (слышится щелчок). Линия, изображающая элемент, изменит первоначальный цвет на красный.

На инструментальной панели нажимается кнопка «ОК». При этом элементу возвращается исходный цвет и (при нажатой на панели фильтров отображения кнопке) появится номер типа элемента.

Если подобным образом надо отметить сразу несколько элементов, то их можно **выделить все сразу** с помощью вызова правой кнопкой мыши окна **Выбор узлов и элементов.** Как это делается, будет показано в примерах расчета.

2.3. Назначение жесткостей элементов

Как уже отмечалось, некоторые общие вопросы, связанные с особенностями задания жесткостей стержней стержневых систем при выполнении учащимся расчетных заданий, взятых из сборника задач (см. приложение 2), были предварительно рассмотрены в подразделе 3.6

В программе SCAD предусмотрены различные способы задания этих жесткостей, которые будут пояснены далее в конкретных примерах расчета.

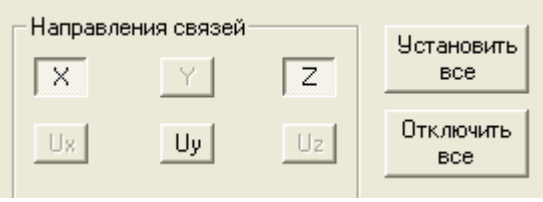
2.4. Назначение опорных связей

Стержневая система часто опирается на основание, которое считается жестким. В этом случае в узел, который присоединяется к жесткому основанию, вводятся жесткие связи.

Плоские стержневые системы, которые встречаются в учебных заданиях по расчету статически определимых стержневых систем, имеют только жесткие опоры различного типа (см. приложение 2).

Поэтому ниже в УМК рассматривается вопрос о назначении только жестких опорных связей.

Для установки жестких связей в опорных узлах плоской стержневой системы (с помощью курсора и левой клавиши мыши) нажмем кнопку «Установка связей в узлах» инструментальной панели раздела **Назначения**. Появится диалоговое окно **Связи**.



В открывшемся диалоговом окне (здесь приведена только его часть) для назначения связей предусмотрено их назначение для пространственного узла (6 связей в соответствии с 6 степенями свободы жесткого узла в пространственной задаче).

В общей системе осей координат связи X, Y, Z означают закрепление узла в направлении одноименных осей общей системы координат.

Связи UX, UY, UZ означают закрепление узла от поворотов относительно указанных осей общей системы координат.

В плоской стержневой системе, расчетная схема которой находится в плоскости XOZ, для закрепления жесткого узла используются следующие три связи:

связь X для закрепления узла от линейных смещений в направлении оси X;

связь Z для закрепления узла от линейных смещений в направлении оси Z;

связь UY для закрепления узла от поворота вокруг оси Y.

В приведенном окне продемонстрирована установка горизонтальной и вертикальной связей в узел 1 расчетной схемы балки (см. рис. П1.1)

С помощью курсора и левой мыши нажимаем кнопки X и Z и ОК. Подводим курсор к узлу 1 построенной расчетной схемы балки и нажимаем левую клавишу мыши. На цветном дисплее квадратик, обозначающий узел, становится красным.

Подтверждаем ввод этих связей нажатием на инструментальной панели кнопки ОК. При этом узел теряет красный цвет и, если на фильтре отображения нажата позиция , узел со связями отмечается прямоугольником.

Аналогично вводится вертикальная связь Z в узле 3, который соответствует шарнирно подвижной опоре балки (см. рис. П1.1).

Если в плоской балке или раме необходимо в расчетной схеме установить опору в виде заделки, то в приведенном окне одновременно должна быть нажата кнопка с обозначением UY. Это будет означать установку связи в жестком узле для закрепления его от поворота вокруг оси Y.

Вопрос о назначении упругих опор или непрерывного упругого основания был рассмотрен в разделе 9, посвященном примерам расчета статически неопределимых стержневых систем.

2.5. Назначение шарниров в узлах элементов

В расчетной схеме фермы шарниры устанавливать не требуется, поскольку используются типовые элементы типа 1 (см. рис. П1.2). Вопрос назначения шарниров в узлах конечных элементов типа 2 рассмотрен в примере построения расчетной схемы для рамы в разделе 3.

Здесь рассмотрим процедуру установки шарниров на примере плоской рамы, изображенной на рис. П1.3.

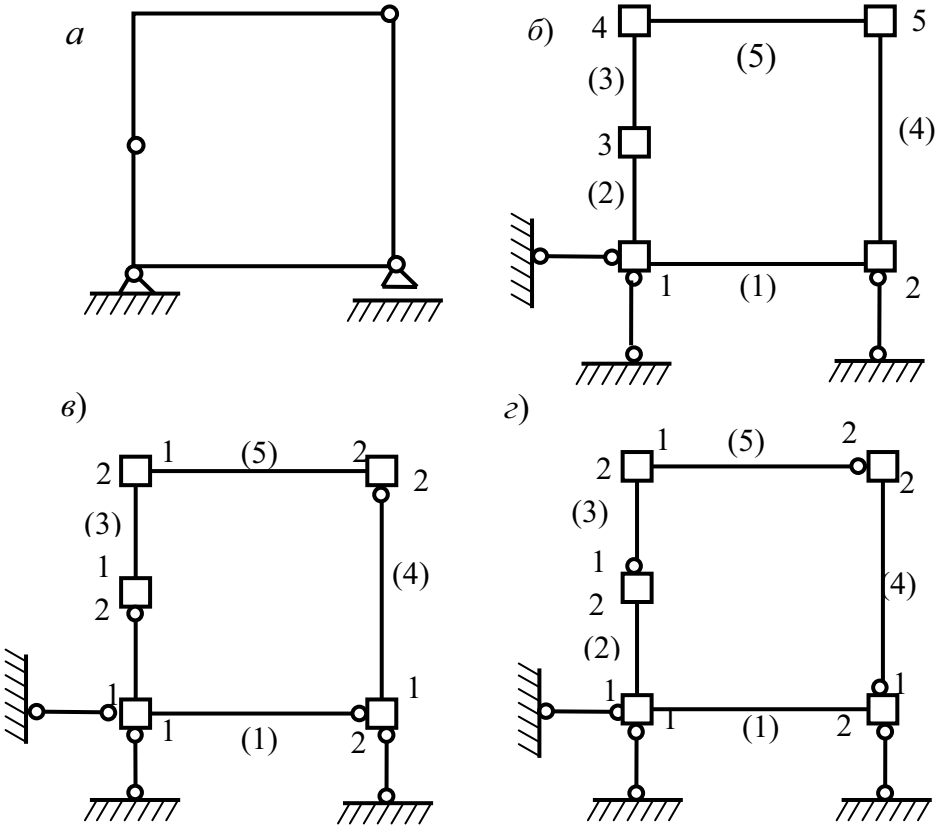
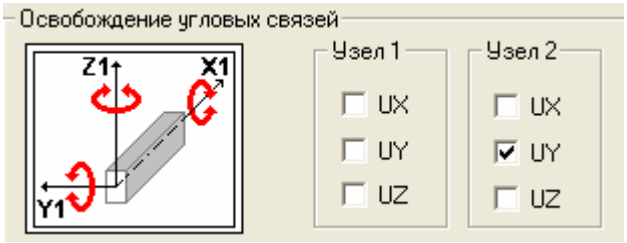


Рис.П1.3

Установка шарниров выполняется в разделе **Назначения**. Необходимо нажать кнопку «Установка шарниров». Откроется окно **Условия примыкания стержней** (приведена только его часть).



Постановка одиночного шарнира в узлах 2, 3 и 5 (см. рис. П1.3, *б*) должна быть выполнена *на любом*

одном элементе, примыкающем к указанным узлам.

Элементы при постановке шарниров рассматриваются в местной системе осей координат. В связи с этим на рис. П1.3, *в, г* узлы всех элементов отмечены цифрами 1 и 2 в соответствии с направлением оси X1 на элементах.

Открывшееся окно может использоваться как в пространственной, так и в плоской задачах. В рассматриваемой плоской задаче на рис. П1.3, *в* рассмотрен вариант, когда на элементах 1, 2, и 5 освобождена только одна угловая связь UY в узле 2 каждого из этих элементов.

Если такую связь освободить в узле 2 элементов 1, 2 и 4, то это равносильно поставке шарниров заданной на рис. П1.3, *в* рамы.

Для подтверждения выбранного варианта удаления связи необходимо нажать в окне кнопку «ОК». Тогда это диалоговое окно исчезнет, а на экране в окне раздела **Наэначение** появится рассматриваемая схема рамы.

На расчетной схеме необходимо подвести курсор к элементу 1 и нажать левую клавишу мыши. Элемент 1 выделится красным цветом. Тоже сделать с элементом 2 и, например, с элементом 4. Затем нажать кнопку «ОК» с зеленой галочкой на инструментальной панели раздела **Назначения**. Тогда красное выделение указанных элементов исчезнет, а на расчетной схеме (при нажатой кнопке на панели **фильтры отображения**) на строящейся расчетной схеме рамы появятся введенные шарниры (рис. П1.3, *в*).

Еще один вариант удаления связей показан на рис. П1.3, *г*. Здесь удалена связь UY в узле 1 элементов 3, 4 и в узле 2 элемента 5. Процедура удаления этих связей аналогична только что рассмотренной процедуре. В результате получим расчетную схему, показанную на рис П1.3, *г*, которая будет так же аналогична заданной на рис. П1.3, *а* раме.

Очевидно, что возможны и другие варианты постановки шарниров в рассматриваемой расчетной схеме рамы для МКЭ.

2.6. Печать или сохранение расчетной схемы

Имеются различные возможности печати и сохранения созданной расчетной схемы и ее дальнейшего использования для отчета по работе. Отметим следующие три.

1. Самым простым и быстрым для выполнения в программе SCAD является печать расчетной схемы сразу с экрана. Для этого в меню окна с расчетной схемой необходимо войти в раздел **Файл** и выполнить указанные действия для печати.

Эта печать будет воспроизводить на странице не только изображение

расчетной схемы, но и специальный формат оформления страницы, предложенный разработчиками программы.

2. Для получения распечатки только расчетной схемы (без специального формата листа) можно с помощью клавиши «Print Screen SysRq» на клавиатуре компьютера зафиксировать вид страницы в разделе **Файл** (при просмотре) и скопировать его в рабочее окно программы Paint. Затем из полученного в рабочем окне программы Paint изображения страницы вырезать только вид расчетной схемы и скопировать его в документ с расширением doc отчета по работе

3. Для отложенной по времени печати можно сохранить вид сформированной для МКЭ расчетной схемы в файле. Необходимо выйти в меню раздела **Управление** и нажать кнопку с изображением фотоаппарата .

Далее надо выполнить ряд операций, описание которых дано разработчиками программы в справке, и сохранить образ расчетной схемы в файле с расширением wmf в рабочей папке SWORK.

Затем, при написании отчета о работе в документ с расширением doc, можно сделать вставку рисунка из указанного файла.

Э т а п 3. *Загружение расчетной схемы МКЭ*

Предварительное рассмотрение этого вопроса было выполнено в разделе 3. Здесь рассмотрим только вопрос, о влиянии вида загружения конечного элемента на дробление его на более мелкие элементы.

Дробление плоского стержневого элемента типа 2, связанное с видом нагрузки на конечный элемент . В принципе в программе SCAD на элемент типа 2 предусмотрено задание по его длине любой сосредоточенной и распределенной нагрузки (см. например, нагрузку, изображенную на рис. П1.4.

Однако в учебном процессе учащимся для упрощения анализа эпюр усилий и для получения перемещений в местах приложения сосредоточенных сил рекомендуется намечать узлы и в местах приложения сосредоточенных сил и в местах начала и конца участка стержня с распределенной нагрузкой.

Поясним это на примере одного конечного элемента (рис. П1.4, *а*). Пусть на него действует нагрузка, указанная на рис. П1.4, *б*.

В результате расчета стержневой системы с помощью программы SCAD в таблице с результатами усилий выдаются усилия (в местной системе координат) в любом числе заранее назначенных сечений этого элемента.

Более просто анализируются результаты расчета при указанной нагрузке, если дополнительно разбить элемент 1 с узлами 1 и 2 на четыре элемента с

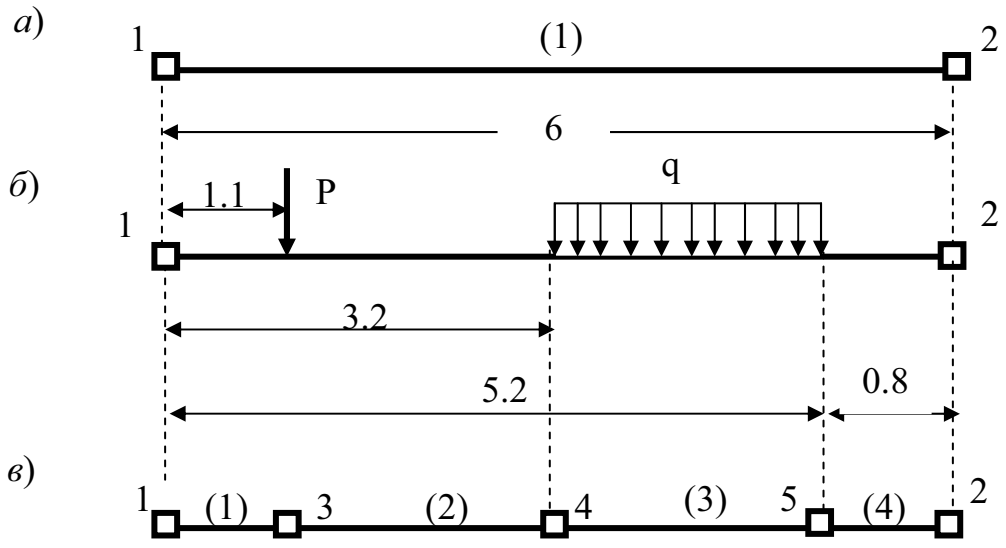


Рис. П1.4

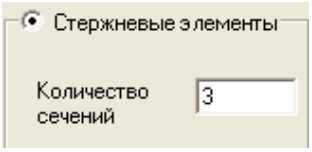
с пятью узлами (см. рис. П1.4,*в*).

Если такое разбиение можно предусмотреть сразу, то тогда нумерация узлов и конечных элементов слева направо на схеме будет последовательной. На рис. П1.4, *в* показан другой вариант, когда дополнительное разбиение элемента сделано после первого разбиения на элемент с узлами 1 и 2.

В любом случае в окне **Расчетная схема** необходимо выбрать раздел **Назначения** и в меню выбрать кнопку «Назначение промежуточных сечений для расчета усилий». При ее нажатии открывается локальное окно, в котором необходимо указать необходимое расчетчику число сечений по длине стержня.

При четном числе сечений n_c^r на элементе r он разбивается на нечетное число $(n_c^r - 1)$ равных участков. При нечетном числе сечений n_c^r элемент разбивается на $(n_c^r + 1)$ равных участков.

Ниже приведена только часть окна для заказа вычисления усилий в трех сечениях элемента (например, элемента (3) на рис. П1.4, *в*).



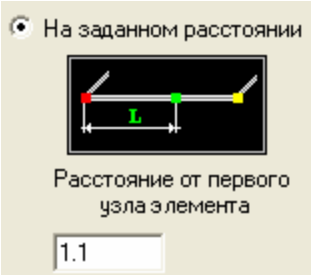
На элементах без какой-либо нагрузки по его длине, необходимо назначить только два сечения по его концам.

В этих сечениях в таблице с результатами усилий и будут выданы (в местной системе координат для каждого элемента) их значения и знаки.

Если положение нагрузки таково, что деление на равные участки не дает желаемого результата, то целесообразно разделить элемент на более мелкие равные или неравные элементы, выбрав в разделе **Узлы и элементы** подраздел

«Элементы» и в нем опцию «Разбивка стержня».

При нажатии последней кнопки откроется одноименное окно (приведем только его часть).



Для того, чтобы в результирующей таблице усилий получить усилия в месте приложения сосредоточенной силы и в сечениях в начале и конце участка с равномерно распределенной нагрузкой, сначала в окне «Разбивка стержня» выбираем функцию «На заданном расстоянии».

Введем значение расстояния сосредоточенной силы от узла 1 (1.1 м). Нажимаем в окне кнопку ОК и с помощью курсора и левой клавиши мыши **выделяем** стержень, на котором вводим дополнительный узел. После нажатия кнопки «ОК» на инструментальной панели подраздела «Элементы» раздела **Узлы и элементы** на стержне появляется изображение узла и его номер 3 (для этого на панели **фильтры отображения** должны быть нажаты кнопки и). При этом элемент 1 разделится на два элемента с номерами 1 и 2 (для появления номеров на панели **фильтры отображения** должна быть нажата кнопка).

Аналогично введем узел 4 на расстоянии 2.1 м от узла 3 (появится узел 4 и элементов станет три) и узел 5 на расстоянии 2 м от узла 4 (появится узел 5 и элементов станет 4, см. рис. П1. 4, *в*).

Обратим внимание на то, что во вновь полученных элементах направление осей местной системы координат и номера узлов 1 и 2 останутся без изменения (см. рис. 3.10, *а*).

П1.2. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР *M* и *Q* НА ШАРНИРНОЙ БАЛКЕ

Постановка задачи и анализ заданной расчетной схемы балки. Построение вручную расчетной схемы МКЭ

В подразделе 5.2 УМК приведен пример построения эпюр M и Q вручную способом использования уравнений равновесия с учетом конструктивной особенности шарнирной балки, как системы жестких дисков в виде этажной схемы (см. рис. 5.1).

Расчет был выполнен для варианта, когда

$$l_1 = l_2 = l; \quad l_3 = 1.4l; \quad a = b = d = 0.2l; \quad c = 0.15l;$$
$$q_1 = 2q; \quad q_2 = q; \quad P_1 = P_2 = 0.6ql; \quad M_o = 0.2ql^2.$$

Выполним построение этих эпюр с помощью ПВК SCAD при l = 6 м и q =10 кН/м.

Перед началом работы на компьютере необходимо выполнить следующие две операции с заданной расчетной схемой балки.

1. Выяснить принадлежность балки к статически определимым или к статически неопределимым системам.

Необходимость в этом связана с тем, что для статически определимых систем при определении в них только усилий упрощается задание жесткостей стержней при использовании программы SCAD (см. подраздел 3.6).

2. Вручную разбить балку на конечные элементы типа 2 (стержневой элемент плоской рамы, см. рис. П1.6) с учетом особенностей ее конструкции и вида, действующей на нее нагрузки.

Первая операция состоит из следующих двух пунктов.

1, *а*. Подсчитывается степень статической неопределимости n балки**.** Для этого используется формула (2.21):

$$n = n_{\text{оп}} - (3 + n_{1\text{ш}}), \qquad (\text{П1.1})$$

где $n_{\text{оп}}$ – число неизвестных составляющих опорных реакций во всех опорах балки;

$n_{1\text{ш}}$– число уравнений равновесия вида $\sum M_{1\text{ш}} = 0$, которые можно записать для каждого одиночного шарнира дополнительно к имеющимся трем уравнениям равновесия для всей балки.

В заданной балке $n_{\text{оп}}$ = 5; $n_{1\text{ш}}$ = 2. В результате по указанной формуле

получаем необходимое условие статической определимости балки: $n = 0$.

1, *б*. Исследуется геометрическая неизменяемость рамы. В данном случае для этого достаточно использовать структурный анализ балки (см. рис. 2.7 и рис. 5.1, *б*).

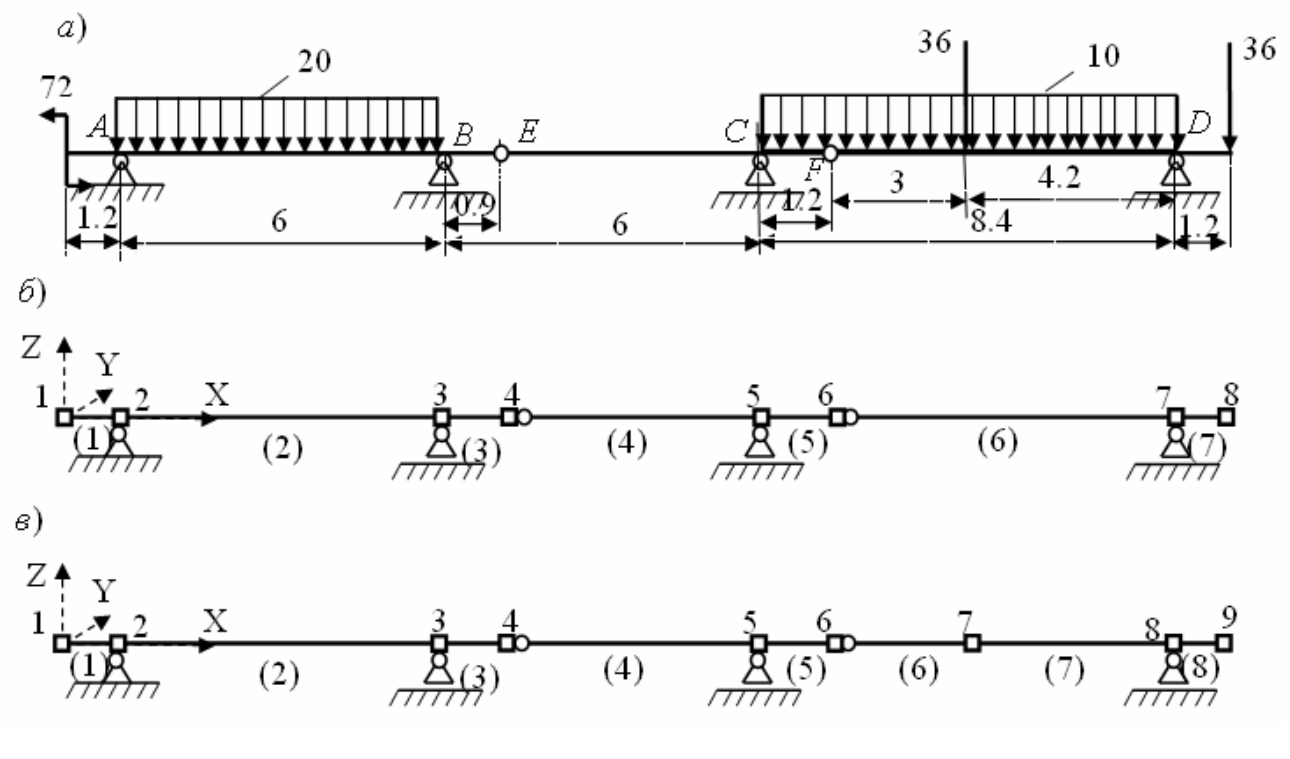


Рис. П.1.5

Действительно, заданную балку (рис. П1.5, *а*) можно рассматривать как систему, состоящую из трех жестких дисков (*ABE*, *ECF* и *FD*) (см. рис. 2.7 и рис. 5.1, *б*).

Диск *ABE* неподвижно прикреплен к основанию тремя опорными связями и, таким образом, геометрически неизменяем.

Диск *ECF* прикреплен двумя связями к неподвижному диску *ABE* и одной связью с неподвижным основанием, поэтому он также геометрически неизменяем.

Аналогично доказывается, что диск *FD* геометрически неизменяем, а значит, геометрически неизменяема и вся заданная шарнирная балка.

Таким образом, на основании исследований, выполненных в пунктах 1, *а* и 1. *б*, делаем вывод о том, что заданная балка является статически определимой системой.

Второй подготовительной операцией перед переходом к расчету с помощью программы SCAD является изображение расчетной схемы МКЭ

заданной балки вручную:

- Изображаем заданную расчетную схему балки, на которой с учетом расположения опор и шарниров и с учетом вида нагрузки (см. указания в разделе 3 и на этапе 3 раздела П1.1), разбиваем стержни на конечные элементы.

Примечание. Приведено два варианта разбиения заданной балки: без учета вида нагрузки на конечных элементах (рис. П1.5, *б*) и рекомендуемое при выполнении расчетного задания разбиение с учетом вида нагрузки (рис. П1.5, *в*).

- Нумеруем узлы и элементы.
- Выбираем начало общей системы координат.
- Указываем значения длин элементов для последующего более быстрого их ввода при работе непосредственно на компьютере.

Такая заранее подготовленная в тетради вспомогательная расчетная схема позволит более рационально использовать время по созданию соответствующей расчетной схемы с использованием возможностей программы SCAD.

Инструкция по выполнению расчета балки с помощью программы SCAD

Э т а п 1. *Запуск программы и подготовка к созданию расчетной схемы*

Действия при запуске программы SCAD и открытии окна **Новый проект** (пункты 1.2 и 1.3 этапа 1) остаются такими же, какими они описаны в разделе П1.1.

Поэтому здесь сразу начинем выполнение этапа 2 по формированию расчетной схемы балки по заранее заготовленному образцу (см. рис. П2.1, *в*).

Э т а п 2. *Создание расчетной схемы балки для МКЭ*

2.1. Синтез расчетной схемы балки

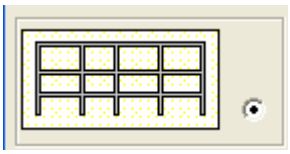
Для создания расчетной схемы шарнирной балки из конечных элементов типа 2 (синтез расчетной схемы) можно использовать два способа.

1. Использовать заготовку для построения расчетной схемы плоской рамы. В этом варианте необходимо войти в раздел **Схема**. С этой целью курсор устанавливается на закладке **Схема** и нажимается левая кнопка мыши. Появится инструментальная панель, соответствующая разделу **Схема**.

2. Использовать способ построения расчетной схемы шарнирной балки с помощью последовательного введения узлов балки в общей системе координат и затем последовательного соединения этих узлов стержневыми элементами. Для этого надо войти не в раздел **Схема**, а в раздел **Узлы и Элементы**.

Рассмотрим более простой первый способ. Входим в раздел **Схема** и

нажимаем кнопку «Генерация прототипа рамы». Появится окно **Выбор конфигурации рамы** (здесь приведена только его часть).



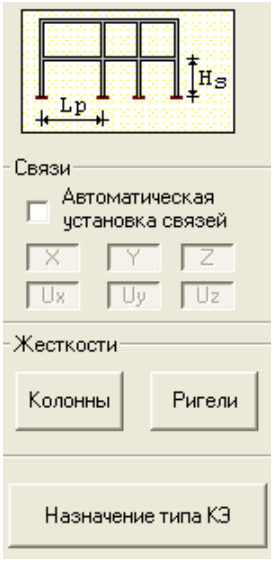
Для построения схемы балки (см. рис. П1.2, *в*), выбирается тип рамы, отмеченный точкой, и нажимается кнопка «ОК». На экране появится окно **Задание параметров регулярной рамы** (здесь приведены две его части)**.**

	Длины пролетов	Количество пролетов
1	1.2	1
2	6	1
3	0.9	1
4	5.1	1
5	1.2	1
6	3	1
7	4.2	1
8	1.2	1
9		
10		
11		

Все размеры м

Этим окном можно воспользоваться для построения расчетной схемы заданной шарнирной балки для МКЭ.

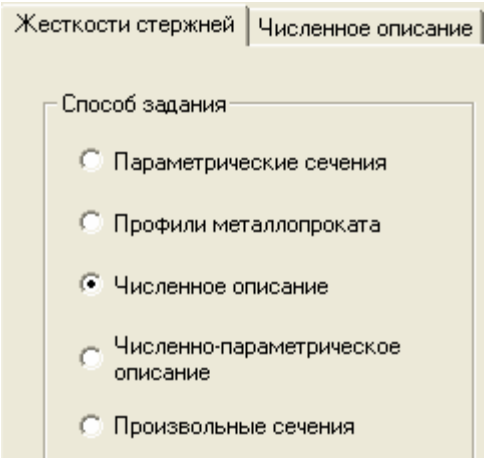
Действительно, конечные элементы, намеченные на заранее подготовленной расчетной схеме (см. рис. П1.2, *в*) можно рассматривать как пролеты L_p ригелей рамы, показанной в окне. *В таблицу вместо длин пролетов рамы вводятся длины конечных элементов.*



После ввода длин элементов и их количества уберем галочку в окне «Автоматическая установка связей» (установим опорные связи позже).

Затем рекомендуется нажать кнопку «Назначение типа КЭ». Появится одноименное окно (см. с. 10). В нем будет отмечено «Стержень плоской рамы», если ранее в окне **Новый проект** был указан тип схемы «Плоская рама» (см. с. 276).

При наличии такой отметки нажимаем кнопку «ОК», выходим в окно **Задание параметров регулярной рамы** и переходим к заданию жесткостей конечных элементов.

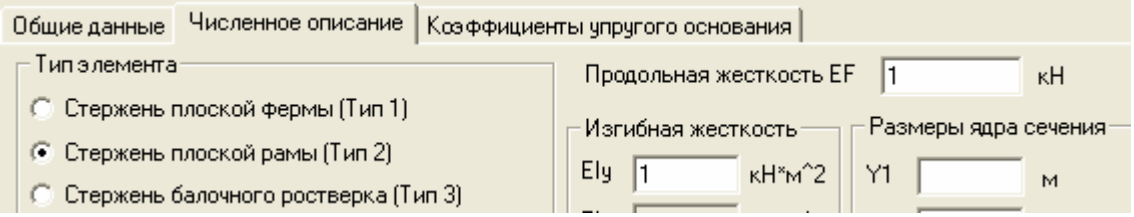


С этой целью на поле «Жесткости» нажимаем кнопку «Ригели».

Откроется первое диалоговое окно «Жесткость стержней».

Выберем способ задания жесткости КЭ в виде «Численное описание» (поставим точку в соответствующем круглом окне страницы) и выйдем во второе диалоговое окно, которое называется «Численное описание» (далее приведена только его часть) .

Здесь точкой отметим тип элемента «Стержень плоской рамы» (тип 2) и, поскольку поставлена задача определения только усилий в статически определимой балке, зададим единичные жесткости в окнах «Продольная жесткость» и «Изгибная жесткость».



Подтверждаем выбранную жесткость нажатием кнопки «ОК». Снова появится окно **Задание параметров регулярной рамы,** которое теперь можно закрыть, нажав в нем кнопку «ОК». Появится расчетная схема балки (рис. П1.6).

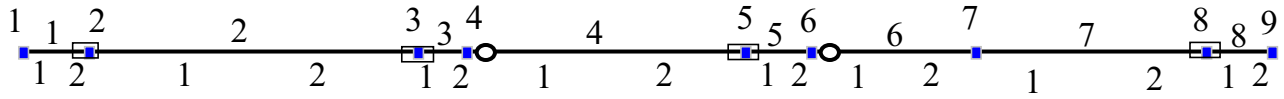


Рис. П1.6

Примечания. 1. Нажимать кнопку «Колонны» при построении расчетной схемы балки не нужно, так как стоек в этой стержневой системе нет.

2. Кнопку «Назначение типа КЭ» также можно не нажимать, так как тип КЭ (тип 2) был уже назначен в окне **Новый проект**.

На расчетной схеме балки (в результате нажатия соответствующих кнопок на панели «Фильтры отображения») отображены: узлы элементов; их номера (верхние числа выше оси балки); номера КЭ (в серединах элементов выше оси); тип заданной для расчета жесткости КЭ (цифра 1 ниже оси), тип КЭ (цифра 2 ниже оси).

Примечание. На появившейся на экране расчетной схеме МКЭ (см. рис. П1.6) еще не будет прямоугольников, которыми на приведенной схеме отмечены опоры. Для того, чтобы они появились, необходимо ввести опорные связи и отобразить их ввод с помощью панели «Фильтры отображения».

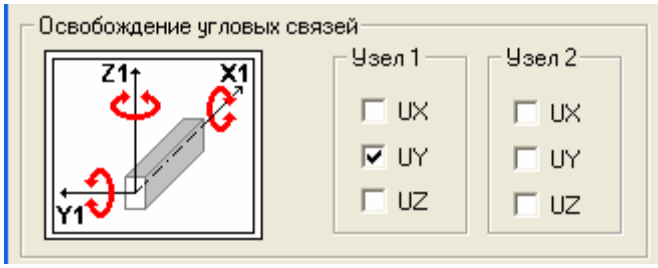
Для назначения опорных связей следует войти в раздел **Назначения** и нажать кнопку . (на панели «Фильтры отображения» необходимо нажать кнопку . «Связи»). Далее все нужно сделать так же, как это описано в пункте 2.4 инструкции к этапу 2 в подразделе П1.1.

Аналогично в разделе **Назначения** выполнена установка изображенных на схеме шарниров. С этой целью нажать кнопку «Установка шарниров». Откроется окно **Условия примыкания стержней**.

Поскольку шарнир в шарнирной балке позволяет подходящим к нему сечениям элементов балки поворачиваться вокруг оси Y, его установка в каком либо узле балки означает *освобождение в этом узле угловой связи*, которая в программе SCAD обозначена UY.

Для пояснения рассмотрим шарниры *E* и *F* (см. рис. П1.5, *а*).

В расчетной схеме МКЭ (см. рис. П1.5, *в*) эти одиночные шарниры отнесены соответственно к узлу *1* элемента *4* и узлу *1* элемента *6* (номера узлов в местной системе координат). Поэтому для элементов *4* и *6* в демонстрируемом диалоговом окне галочкой отмечено, что связь UY удалена в каждом из этих элементов в узле *1*.



После подтверждения выбранного варианта постановки шарниров нажатием в диалоговом окне кнопки «ОК» снова появится расчетная схема балки в окне раздела **Назначения**. На расчетной схеме необходимо подвести курсор к элементу 4 и нажать левую клавишу мыши. Элемент 4 выделится красным цветом. Тоже надо сделать с элементом 6. Затем нажать кнопку «ОК» на инструментальной панели раздела **Назначения**. Тогда красное выделение указанных элементов исчезнет, а на расчетной схеме (при нажатой кнопке на панели **Фильтры отображения** появятся введенные шарниры).

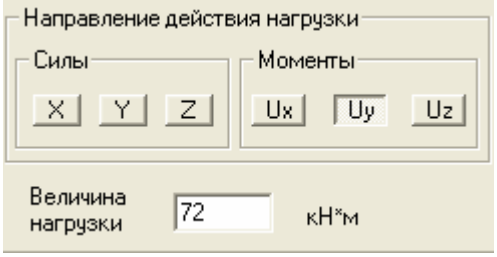
Способы печати расчетной схемы, изображенной на рис. П1.6, были изложены в пункте 2.6 этапа 2 процедуры расчета балки.

Э т а п 3. *Загружение расчетной схемы балки*

3.1. Загружение узлов балки и ее элементов

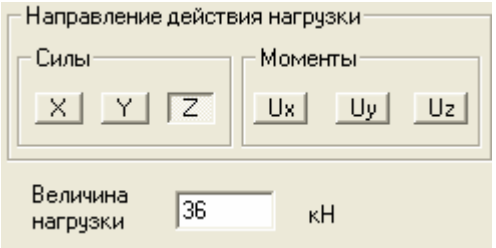
Процедура загружения узлов балки сосредоточенными нагрузками (узлы 1, 7 и 9). Сначала введем внешний момент, заданный в узле 1 (см. рис. П1.5, *а*). В разделе **Загружения** нажимаем кнопку «Узловые нагрузки». В появившемся диалоговом окне (ниже приведена только его часть) на поле «моменты» выбираем «UY».

Момент считается положительным при его действии по часовой стрелке, если смотреть с положительного конца оси Y. Поэтому в нашем примере вводим величину момента 72 кН·м.

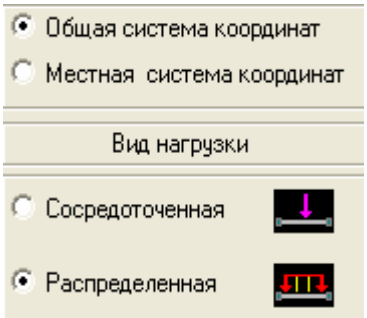


После нажатия кнопки «ОК» снова появится расчетная схема. На ней надо выделить узел, на который действует момент, и нажать кнопку «ОК» на меню панели **Загружения**. При нажатых на панели **Фильтры отображения** кнопках и на расчетной схеме балки в узле 1 появятся обозначение момента и его значение и знак (рис. П1.7).

При задании сосредоточенных сил $P_1 = P_2 = 36$ кН используется это же окно (приведена только его часть), но нажимается кнопка Z в поле силы и указывается соответствующая величина вводимой сосредоточенной силы.



Процедура загружения элементов балки равномерно распределенной нагрузкой (элементы 2, 5, 6 и 7). В меню раздела **Загружения** необходимо нажать кнопку «Нагрузки на стержни». Появится окно **Задание нагрузки на стержневые элементы** (отдельно показаны две его части, в которых задана нагрузка на элемент 2, см. рис. П1.5, *а*, *в*).



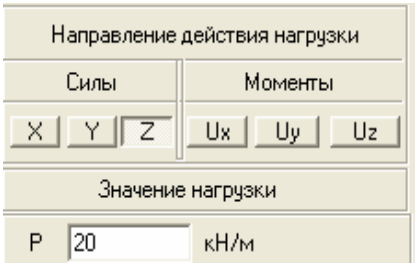
В первой части окна выполнены следующие операции.

Выбирается общая система координат, в которой задается нагрузка.

Отмечается, что нагрузка распределенная.

Во второй части окна: отмечается направление «Z» действия нагрузки в общей системе координат; задается знак нагрузки (в данном случае он положителен, см. пояснение в подразделе 3.7) и ее значение.

После нажатия на кнопку «ОК» появится рассматриваемая расчетная схема балки.



С помощью курсора и левой клавиши мыши выделим элемент 2, к которому следует приложить заданную нагрузку, и нажимаем кнопку «ОК» на панели раздела **Загружения**.

При нажатых на панели **Фильтры отображения** кнопках и на элементе 2 расчетной схемы появятся изображение равномерно распределенной нагрузки, ее значение и знак (см. рис. П1.7).

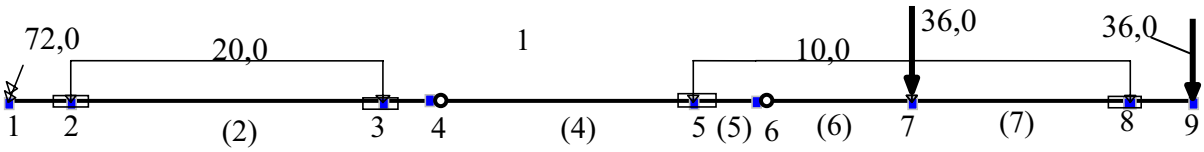


Рис. П1.7

Аналогично загружаем элементы 5, 6 и 7 равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью 10 кН/м.

Если загружение балки с одновременно действующими нагрузками сформировано, его необходимо сохранить как загружение с определенным номером. С этой целью на инструментальной панели раздела **Загружения** нажимаем кнопку «Сохранить/Добавить загружение» в результате чего появится окно **Сохранить загружение.** (его вид не приводится).

Задаем имя загружения (в рассматриваемом примере: «суммарное») и подтверждаем сохранение загружения под этим именем нажатием кнопки «ОК». Появится сообщение «Загружение будет записано под номером 1». При согласии нажимаем кнопку «Да». При несогласии нажимаем кнопку «Нет» и задаем нужный номер в окне **Сохранить загружение**.

Вид расчетной схемы с каждым загружением можно сохранить в соответствующем файле с расширением wmf в рабочей папке SWORK и при необходимости вставить в текст отчета по работе (см. рис. П1.7).

После назначения номеров загружений можно выйти в раздел **Управление** и, нажав кнопку , – в окно с деревом проекта для выполнения линейного расчета сразу для всех заданных загружений.

Однако перед выходом на дерево проекта рекомендуется решить вопрос о назначении числа сечений на элементах расчетной схемы, в которых необходимо иметь численные результаты искомых усилий (в данном случае *M* и *Q*).

Как уже было показано в раздле П1.1 при рассмотрении этапа 3 последовательности расчета с помощью программы SCAD, для этой цели в

окне **Назначения** используется кнопка , нажатие которой открывает диалоговое окно **Вычисление усилий в дополнительных сечениях**.

На стержневых элементах с линейной эпюрой *M* для ее построения достаточно иметь только по две ординаты. Поэтому в окошке с названием «Количество сечений» надо ввести цифру 2 и нажать кнопку «ОК». На появившейся снова расчетной схеме отметить элементы, в которых ожидается линейная эпюра *M* (в рассматриваемом примере такая эпюра *M будет на конечных элементах с номерами 1, 3, 4, 8*), и нажать кнопку «ОК» с зеленой галочкой на инструментальной панели раздела **Назначения**.

Аналогично на элементах с равномерно распределенной нагрузкой (*2*, *5*, *6*, *7*) рекомендуется иметь усилия не менее чем в 3 сечениях по длине элемента: в сечениях по концам элемента и в среднем сечении. При этом последовательно выполняются только что описанные действия для назначения трех сечений на отмеченных элементах.

Переход к выполнению линейного расчета после выполнения этих действий является более рациональным.

Э т а п 4. *Выполнение линейного расчета и анализ результатов*

Теперь, когда все необходимые для расчета параметры балки и нагрузки на нее заданы, нужно войти в раздел **Управление** и нажать кнопку для выхода на схему **Дерево проекта.**

На дереве проекта в группе функций **Расчет** выбираем «Линейный».

Нажатие кнопки

открывает окно **Параметры расчета**. Здесь необходимо выбрать функцию «Полный расчет» и нажать в окне кнопку «ОК».

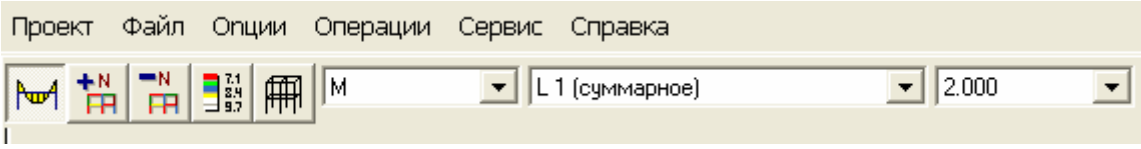
Возникнет информационное окно о прохождении математических расчетов по формированию и решению системы уравнений для МКЭ. По окончании решения появится информация «Задание выполнено».

После этого необходимо нажать кнопку «Выход», что приведет к появлению окна со схемой **Дерево проекта**, в котором становится доступным раздел **Результаты**.

Примечание. Если режим расчета не доступен на дереве проекта будет значок . Это означает, что введены не все исходные данные. Надо вернуться в окно **Расчетная схема** и проверить ввод исходных данных.

4.2. Представление полученных результатов в виде эпюр усилий M, Q в балке. Их сохранение и печать

Установим курсор на позицию **Графический анализ** раздела **Результаты** дерева проекта и нажмем левую кнопку мыши. Появится окно для вывода эпюр усилий (приведена только его часть для выбора эпюры M).



При указанном выборе в окне на экране компьютера будет построена эпюра M.

Студенту рекомендуется не спешить. Выбрать наглядный масштаб эпюры и далее напечатать ее в отчете по работе одним из трех, указанных ранее, способов (см. подраздел 2.6 этапа 2 процедуры расчета).

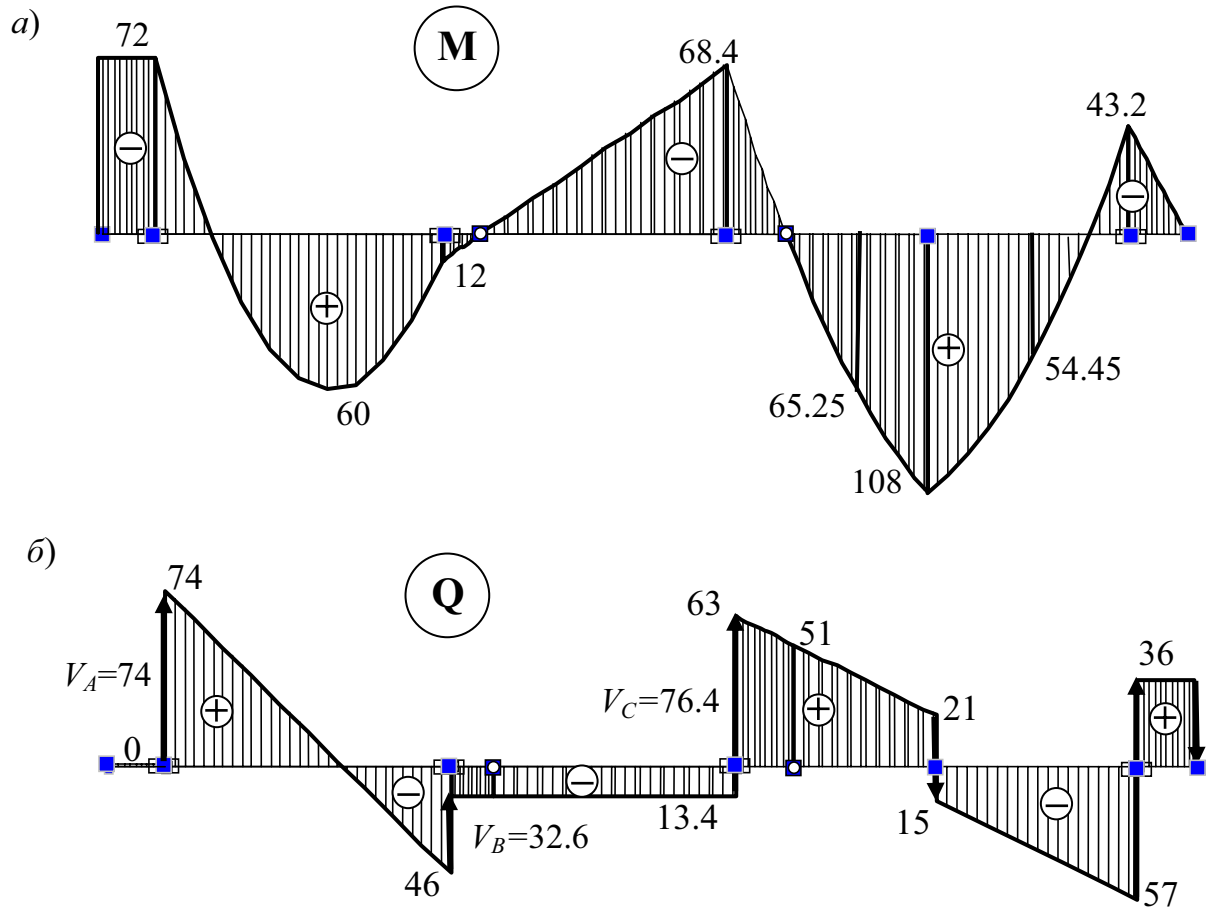


Рис. П1.8

Далее на распечатанной эпюре вручную, или с помощью компьютера, необходимо отметить знаками участки с положительными и отрицательными ординатами (рис. П1.8, *а*) и отметить на эпюре значения характерных ординат в узлах элементов и их средних сечениях в средних сечениях по длине конечных

элементов с равномерно распределенной нагрузкой (на коротких консольных элементах значения ординат в средних сечениях элементов можно не отмечать (см. рис. П1.8, *а*).

Чтобы изобразить эти ординаты вручную, необходимо сначала открыть таблицу с результатами расчета. Для этого надо выйти на схему **Дерево проекта**.

4.3. Таблица усилий в стержнях фермы

В разделе **Результаты** дерева проекта есть подраздел **Печать таблиц**. Если войти в этот подраздел, то откроется окно **Оформление результатов расчета**.

Для печати таблицы усилий в намеченных сечениях балки отметим точкой соответствующее окно «Усилия и напряжения» и нажмем кнопку «Параметры вывода». Откроется дополнительная информация «Состав выходных таблиц».

Последовательно заходим в имеющиеся там разделы и выполняем ряд операций:

- *Список элементов*. Отмечаем: «Все элементы» и «ОК»;
- *Список загружений*. Отмечаем «Все загружения» и «ОК»;
- *Параметры оформления*. Здесь для уменьшения числа значащих цифр в таблице с результатами решения простых учебных задач рекомендуется в графе «Точность печати усилий» поставить цифру 3. Кроме того, выбрать положение таблицы на странице и размер шрифта. При завершении работы в окне нажать «ОК».
- *Выходные единицы измерения*. В начале расчета были заданы *входные* единицы измерения сил: в кН. При печати результатов рекомендуется убедиться в том, что и полученные усилия в стержнях получатся в этих же единицах. При необходимости можно изменить размерность. Завершается работа с окном «Состав выходных таблиц» нажатием кнопки «ОК».

После этого последовательно нажимаем кнопки «Формирование документа» и «Просмотр результатов». Появляется окно с таблицей искомых усилий M, Q.

Эта таблица может быть распечатана сразу или скопирована в отчет (в документ с расширением doc).

Возможно использование этой таблицы в любое другое время, так как результаты расчета в программе SCAD сохраняются в папке рабочих файлов

SWORK (в нашем примере под номером 0102-б1.Р06.

Усилия *M*, кН·м и *Q*, кН в назначенных сечениях элементов балки при суммарном загружении для первых четырех элементов приведены в отредактированной табл. П1.1.

Таблица П1.1

У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ									
	1-1	1-2	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	4-1	4-2
	1 - суммарное								
M	-72	-72	-72	60,03	12,07	12,07	0	0	-68,4
Q	0	0	73.89	13.95	-45.98	-13.41	-13.41	-13.41	-13.41

Примечание к таблице П1.1. Во второй строке таблицы каждая первая цифра означает номер конечного элемента в расчетной схеме МКЭ балки (см. рис. П1.5, *в* и рис. П1.7). Вторая цифра означает для незагруженных конечных элементов: (1) – сечение в начале элемента; (2) – сечение в конце элемента. Для элементов загруженных равномерно распределенной нагрузкой вторые цифры (1), (2), (3) означают соответственно начало, середину и конец конечного элемента.

Из этой таблицы и следует взять значения ординат и указать их на эпюре *M* (см. рис. П1.8, *а*).

Аналогично строится и эпюра поперечных сил *Q* на балке (рис. П1.8, *б*). С помощью этой эпюры определяются опорные реакции балки. Они равны в выбранном масштабе ординат эпюры «скачкам» ординат эпюры на опорах балки. Направление вектора опорной реакции вадно по направлению излома эпюры *M* в месте действия реакции. Это направление соответствует и направлению скачка ординат эпюры *Q* при движении по эпюре слева направо.

Примечание. После построения эпюр усилий необходимо выполнить их контроль, в соответствии с указаниями, приведенными в подразделе 4.4 УМК.

Этот контроль применительно к рассмотренной шарнирной балке приведен в сборнике с примерами расчетных работ в приложении 3 к УМК.

Там же приведена рекомендуемая форма оформления отчета по расчетной работе, выполняемой студентом в соответствии с выданным ему заданием в сборнике заданий (см. приложение 2 к УМК).

П1.3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР *M, Q, N* В РАМАХ

Постановка задачи и анализ расчетной схемы рамы

Для плоской рамы, изображенной на рис. 4.1 (длины, м), требуется построить эпюры усилий M, Q, N от указанной на рисунке постоянной нагрузки в виде сосредоточенной силы, кН, и распределенной нагрузки, кН/м.

Расчет выполним на ПК с помощью программы SCAD, в которой реализуется метод конечных элементов строительной механики.

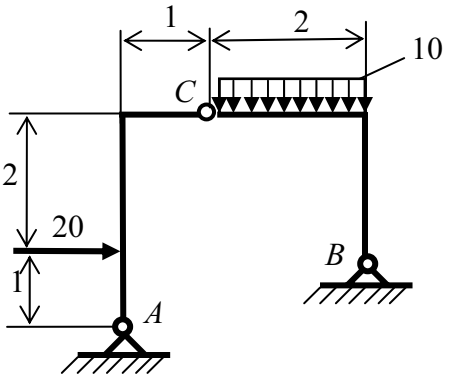


Рис. П1.9

Перед началом работы на компьютере необходимо выполнить две подготовительных операции:

1. Проверить, является ли заданная рама статически определимой системой. Это связано с тем, что для статически определимых систем при нахождении в них только усилий упрощается задание жесткостей стержней при использовании программы SCAD (см. подраздел 3.6).

2. Вручную разбить раму на конечные элементы типа 2 (стержневой элемент плоской рамы, см. рис. 3.10) с учетом особенностей ее конструкции и вида, действующей на нее нагрузки.

При этом выбрать начало общей системы осей координат и продумать вопрос о методике построения расчетной схемы МКЭ с помощью программы SCAD.

Первая операция состоит из следующих двух частей.

1, *а*. Сначала подсчитываем степень статической неопределимости *n* рамы. Для этого используем формулу (2.21):

$$n = n_{\text{н}} - n_{\text{ур}} = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) - (3 + n_{\text{1ш}})$$

где $n_{\text{оп}}$ — число неизвестных составляющих опорных реакций во всех опорах рамы;

$n_{\text{к}}$ — число замкнутых контуров в раме;

$3n_к$ — число неизвестных усилий, которые необходимо определить в каждом контуре, чтобы построить в них эпюры указанных усилий;

$n_{1ш}$— число уравнений равновесия вида $\sum M_{1ш} = 0$, которые можно записать для каждого одиночного шарнира дополнительно к имеющимся трем уравнениям равновесия для всей стержневой системы.

В рассматриваемой раме (см. рис. П1.9) $n_{оп} = 4$; $n_к = 0$; $n_{1ш} = 1$ и $n = 0$.

1, *б*. Затем исследуем геометрическую неизменяемость рамы. В данном случае для этого достаточно выполнить структурный анализ рамы.

Действительно, заданную раму (см. рис. П1.9) можно рассматривать как систему, состоящую из трех жестких дисков (*AC*, *BC* и неподвижного жесткого диска в виде основания), которые соединены шарнирами.

Такую систему можно рассматривать как жесткий треугольник (см. раздел 2 УМК). Поэтому такая конструкция является геометрически неизменяемой системой.

Таким образом, на основании исследований, выполненных в пунктах 1, *а* и 1, *б*, делаем вывод о том, что заданная рама является статически определимой системой.

Второй подготовительной операцией перед началом работы на ПК является формирование расчетной схемы МКЭ рамы вручную.

Изображается расчетная схема рамы с разбивкой на элементы, которая учитывает расположение узлов рамы, опор, шарниров и вид нагрузки (рис.П1.10).

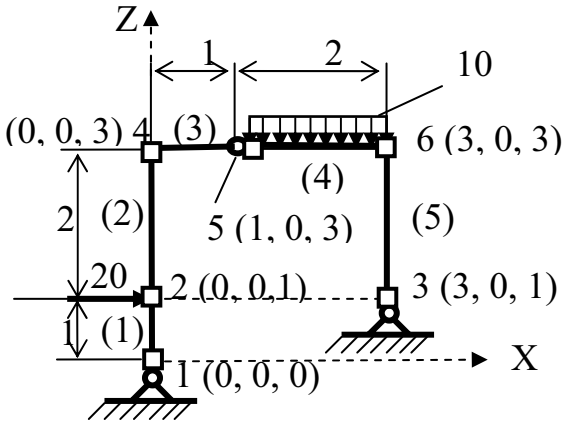


Рис. П1.10

Выбирается начало общей системы координат (в данном примере выбираем начало осей координат совпадающим с опорой *A*).

Нумеруются элементы и узлы с учетом рекомендаций подраздела 3 УМК

и пояснений по нумерации узлов и элементов в подразделе П1.1.

Примечание. Если построение расчетной схемы МКЭ рамы в программе SCAD предполагается выполнить с использованием предварительно изображенной схемы узлов рамы, где каждый узел введен по его координатам в назначенной общей системе координат, то рядом с номерами узлов на вручную подготавливаемой схеме (см. рис. П1.9) указываются их координаты в общей системе координат в последовательности X, Y, Z (так как рама плоская, координата Y у всех узлов равна нулю).

Если в программе SCAD предполагается строить схему рамы с использованием типовой схемы рамы (она уже использовалась при построении расчетной схемы шарнирной балки), то координаты узлов на подготавливаемой вручную схеме приводить не нужно.

Инструкция по выполнению задания с помощью программы SCAD

Подготовка исходных данных для построения расчетной схемы МКЭ рамы с целью построения эпюр усилий в ее стержнях, расчет и вывод результатов производится в диалоговом режиме в последовательности, указанной в подразделе П1.1.

Процедуру использования возможностей программы SCAD при построении схемы рамы, будем рассматривать в сокращенном виде в тех пунктах инструкции, которые уже были описаны в инструкциях в разделах П1.1 и П1.2.

Э т а п 1. *Запуск программы и подготовка к созданию расчетной схемы*

Процедура запуска программы SCAD и процедура выхода в окно **Новый проект** остаются таким же, как и при расчете фермы и шарнирной балки.

В окне **Новый проект** (см**.** с. 4) выполняем следующие действия.

Вводим: наименование проекта (Работа 2); № группы (если по умолчанию не указана организация); объект расчета и его номер (Рама 1).

В соответствии с выбранной системой (например, СИ или технической) назначаем единицы измерения основных величин.

В окне «Тип схемы» выбираем: «2. Плоская рама».

Сохраняем сделанный ввод нажатием кнопки «ОК».

Далее в появившемся окне **Создание нового проекта SCAD** с открытой папкой SDATA выполняется процедура задания имени файла, в котором будет сохраняться проект (см. пункт 1.3 этапа 1 в подразделе П1.1 и аналогичный пункт в примере расчета балки).

При расчете рамы 1 файлу присваиваем имя: 0102-р1, где 0102 – цифровой шифр, выданный студенту на все время изучения дисциплины «Строительная механика стержневых систем (статика)» для выбора расчетных схем стержневых систем из сборника заданий (см. приложение 2).

р – первая буква наименования рассчитываемой системы; 1 – порядковый номер рамы в программе SCAD у конкретного расчетчика;

Команда «Сохранить» сохраняет имя файла в папке SDATA и открывает окно со схемой, которая называется **Дерево проекта** (см. с. 10).

Нажимаем на дереве проекта кнопку «Расчетная схема» и в открывшемся рабочем окне начинаем выполнение этапа 2 по формированию расчетной схемы рамы по заранее заготовленному образцу (см. рис.П1.10).

Э т а п 2. *Создание расчетной схемы рамы для МКЭ*

Для создания схемы рамы из конечных элементов типа 2 можно использовать два способа, изложенных в пункте 2.1 этапа 2 подраздела П1.1.

2.1. Первый способ построения расчетной схемы рамы

Входим в раздел **Схема**. Нажимаем первую кнопку панели – «Генерация прототипа рамы» (см. с. 8). Появится окно **Выбор конфигурации рамы**.

В соответствии с подготовленной на рис. П1.9 расчетной схемой рамы для МКЭ выбирается конфигурация рамы, отмеченная точкой в круглом светлом окне (см. с. 20), и нажимается кнопка «ОК».

На экране появится окно **Задание параметров регулярной рамы** (приводится только его часть).

Этим окном можно воспользоваться для построения расчетной схемы рамы для МКЭ, которая предварительно была построена на рис. П1.10.

Сначала построим схему вспомогательной рамы с двумя указанными в окне пролетами и этажами (см. рис. П1.11).

В поле окна «Связи» уберем галочку из окошка «Автоматическая установка связей». Войдем в окно «Назначение типа КЭ», выберем: «2. Стержень плоской рамы» и после нажатия кнопки «ОК» снова выйдем в окно **Задание параметров регулярной рамы.**

Для установки жесткостей у элементов ригеля рамы нажмем кнопку «Ригели». Появится первая страница диалогового трехстраничного диалогового окна по назначению жесткости конечных элементов. Назначение жесткости стержневым элементам типа 2 выполним так же, как это было

показано в инструкции для шарнирной балки. Аналогично назначаются жесткости элементов колонн рамы.

После выхода из окна **Задание параметров регулярной рамы** на экране появится расчетная схема вспомогательной рамы в виде осей введенных колонн и ригелей.

Используем панель **Фильтры отображения** для анализа полученной расчетной схемы. Сначала с помощью кнопки отметим узлы построенной расчетной схемы. Затем с помощью кнопок на расчетной схеме соответственно появляются номера элементов, узлов, типа элементов и жесткости (рис. П1.11).

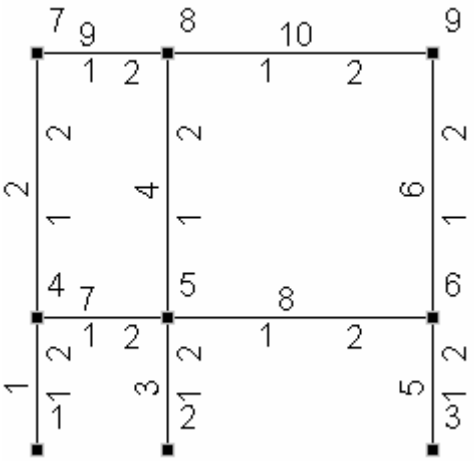


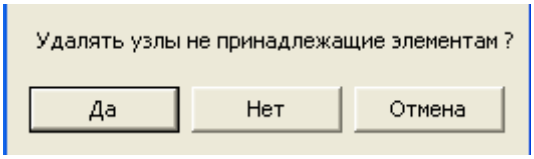
Рис. П1.11

Как видно, в полученной вспомогательной расчетной схеме по сравнению с предварительно намеченной схемой (см. рис. П1.10) имеется различие: в ней лишними являются 5 стержней (3, 4, 7, 8 и 5).

Для их удаления войдем в раздел **Узлы и Элементы**. Нажав в двухкнопочном меню кнопку «Элементы», откроем меню для выполнения операций с элементами и нажмем кнопку «Удаление элементов».

Далее с помощью курсора и левой клавиши мыши выделяем указанные пять стержней и в меню нажимаем кнопку «ОК» с зеленой галочкой (см. описание этой процедуры в пункте 2.2 этапа 2 подраздела 2.2). Удаляемые стержни исчезнут, но нумерация оставшихся элементов и узлов останется без изменения.

Чтобы удалить из расчетной схемы и узлы, которые соединяли удаленные элементы и произвести перенумерацию оставшихся видимых узлов и элементов надо выполнить так называемую «Упаковку данных». Это достигается нажатием кнопки .



При этом появляется диалоговое окно SCAD (см. его часть**),** в котором надо нажать кнопку «Да». После этого расчетная схема рамы примет вид, изображенный на рис.П1.12.

Полученная расчетная схема еще не имеет опорных связей, шарниров и к ней не приложена нагрузка.

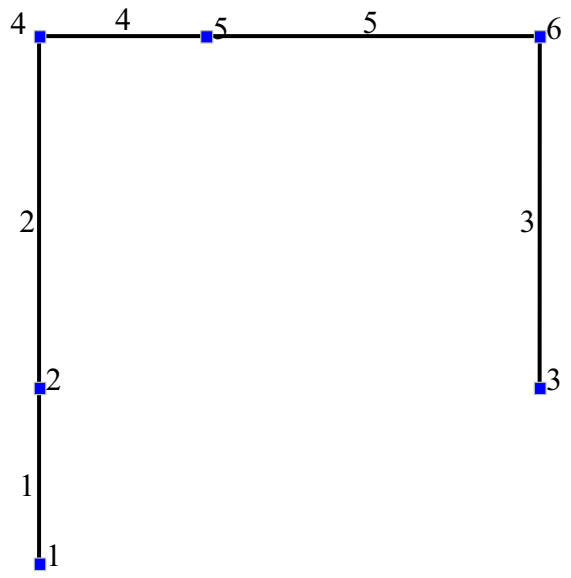


Рис. П1.12

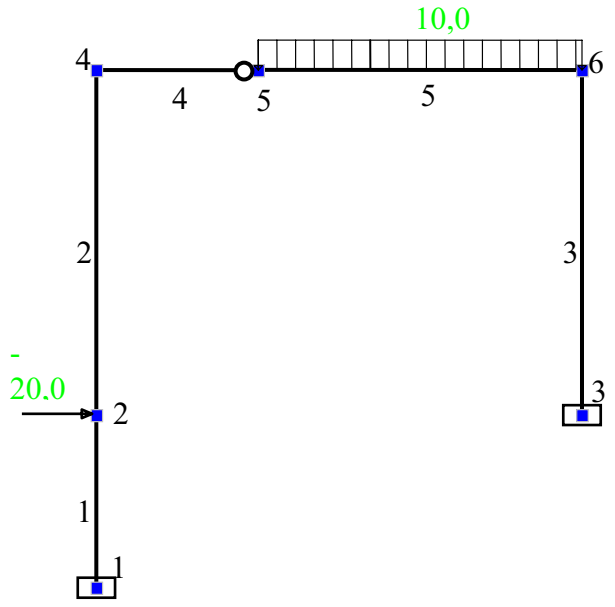


Рис. П1.13

Процедуры назначения опорных связей, введения шарниров и нагрузок уже были рассмотрены в разделах 3, П1.1 и П1.2. Поэтому обратим внимание только на следующее:

1. Поставим одиночный шарнир в узле 2 (нумерация местной системы координат) элемента 4;

2. Введем значение заданной на раму (см. рис. П1.10) сосредоточенной силы в узле 2 (нумерация узлов в общей системе координат) как силу, действующую по направлению оси X в общей системе координат и имеющую знак «минус», так как она направлена в положительном направлении оси X (см. подраздел 3.7 и пример расчета балки в разделе П1.2).

В результате получим расчетную схему рамы для МКЭ построенную для расчетов по программе SCAD в виде, приведенном на рис. П1.13 (вариант суммарного загружения двумя заданными нагрузками).

2.2. Второй способ построения расчетной схемы рамы

Построение расчетной схемы рамы этим способом вручную начинается с ввода ее узлов.

Для того, чтобы при ручном вводе узлов получить раму с теми же номерами узлов, что и при ее построении первым способом, их надо вводить в указанной последовательности (см. рис. П1.10), где отмечены и номера узлов

и их координаты). Получится схема расположения узлов, показанная на рис. П1.10, с использованием которой рисуются элементы в программе SCAD.

Последовательность ввода элементов должна быть также в соответствии с предварительно намеченной схемой (см. рис. П1.10).

После изображения узлов и осей элементов рамы, как и в предыдущем способе построения расчетной схемы рамы вводятся опорные связи, шарнир на элементе 4 (узел 2 в местной системе координат) и выполняется загружение рамы и его сохранение.

При использовании второго способа получим расчетную схему рамы для МКЭ в том же виде, в каком она была получена первым способом (см. рис. П1.13).

Операции по выходу в **Дерево проекта,** выполнению линейного расчета, графическому анализу и печати таблиц с найденными усилиями уже выполнялись в предыдущих примерах.

Результаты расчета рамы при заданном загружении приведены соответственно в виде эпюр *M* (рис. П1.14, *а*), *Q* (рис. П1.14, *б*), *N* (рис. П1.14, *в*) и в виде табл. П1.2 с усилиями в заданных для расчета сечениях.

Таблица П1.2

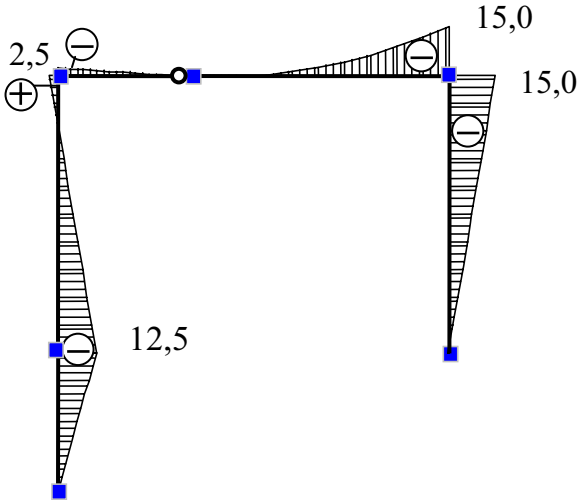
У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ											
	1-1	1-2	2-1	2-2	3-1	3-2	4-1	4-2	5-1	5-2	5-3
1 - суммарное											
N	-2.5	-2.5	-2.5	-2.5	-17.5	-17.5	-7.5	-7.5	-7.5	-7.5	-7.5
M	0	-12.5	-12.5	2.5	0	-15.	-2.5	0	-2.e-5	-2.5	-15.
Q	-12.5	-12.5	7.5	7.5	-7.5	-7.5	2.5	2.5	2.48	-7.51	-17.5

Примечание. После построения эпюр усилий необходимо выполнить их контроль, в соответствии с указаниями, приведенными в подразделе 4.4 УМК.

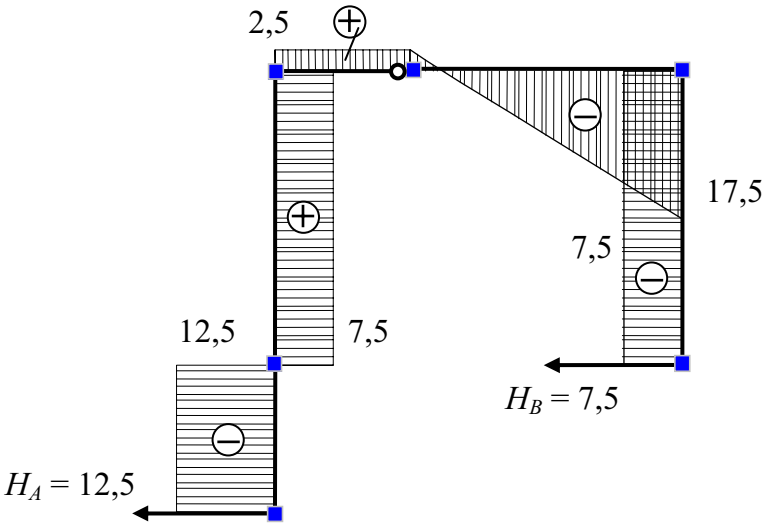
Этот контроль применительно к рассмотренной раме приведен в сборнике с примерами расчетных работ в приложении 3 к УМК.

Там же приведена рекомендуемая форма оформления отчета по расчетной работе, выполняемой студентом в соответствии с выданным ему заданием в сборнике заданий (см. приложение 2 к УМК).

а)



б)



в)

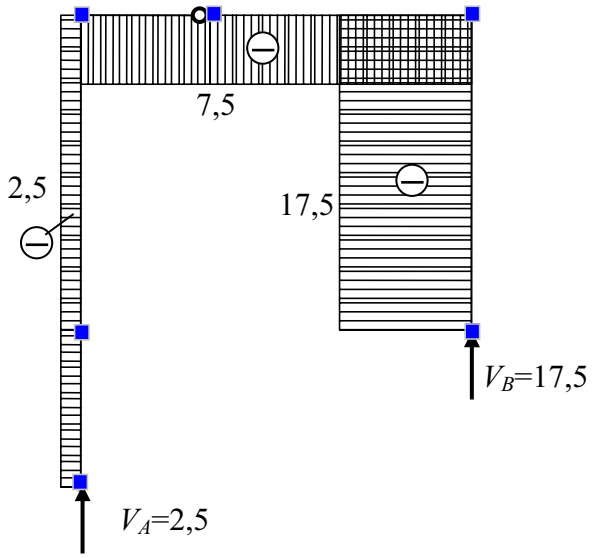


Рис. П1.14

Построение и загружение расчетной схемы рамы с наклонными стержнями

Построим эпюры усилий в раме, имеющей наклонный стержень, загруженный равномерно распределенной нагрузкой (рис. П1.15).

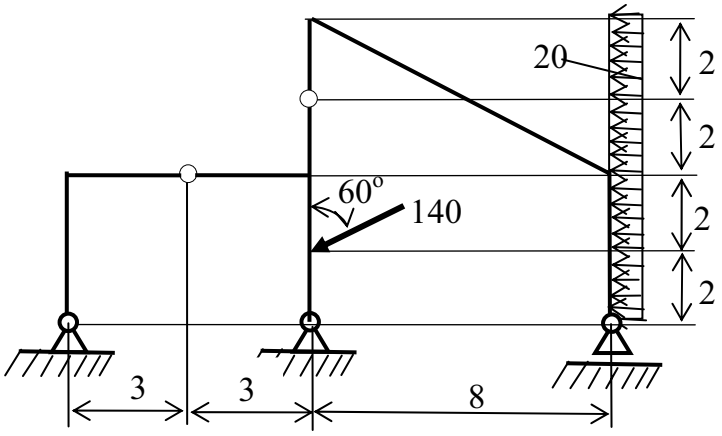


Рис. П1.15

Вся процедура расчета рамы по программе SCAD остается такой же, как в предыдущем примере. Будем считать, что две подготовительные операции перед началом работы на ПК выполнены:

1. Установлено, что рама статически определима.
2. Построена вручную расчетная схема МКЭ рамы (рис. П1.16).

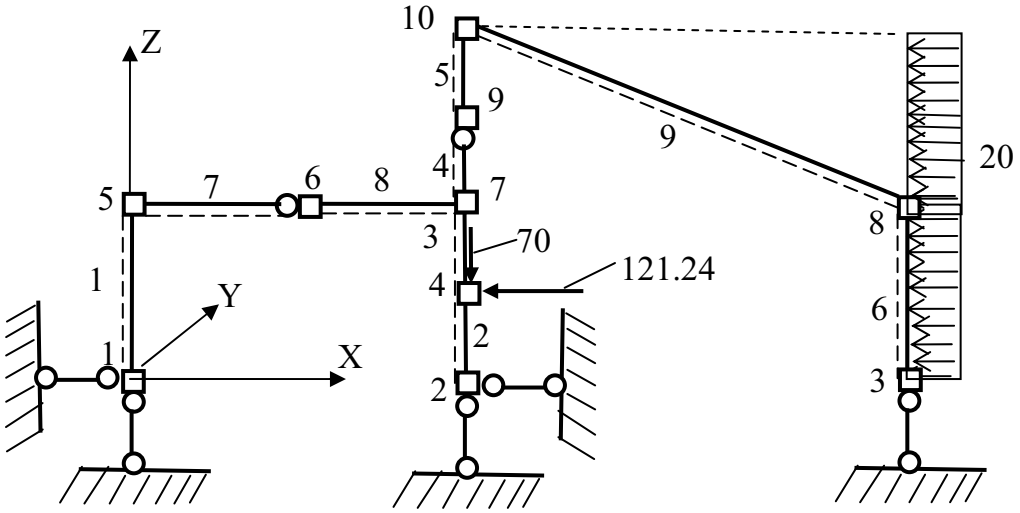


Рис. П1.16

Далее отметим только некоторые особенности работы с программой SCAD, связанные с наличием: наклонного стержня, наклонной силы, равномерно распределенной нагрузки на наклонном стержне.

Особенность построения расчетной схемы заданной рамы с наклонным стержнем. Используем для построения расчетной схемы комбинацию двух способов, описанных в пункте 2.1 этапа 2 (см. подраздел П1.1).

В разделе **Схема** открываем окно **Выбор конфигурации рамы** (см. с. 8) и затем окно **Задание параметров регулярной рамы**. Фрагменты последнего окна были продемонстрированы при расчете шарнирной балки (см. с. 20) и при расчете предыдущей рамы (см. с. 32).

Для получения схемы заданной рамы сначала построим схему вспомогательной рамы (рис. П1.17, *а*). С этой целью введем исходные данные, показанные в приводимой части последнего окна.

Длины пролетов	Количество пролетов	Высоты этажей	Количество этажей
6	1	4	2
8	2		

Затем из вспомогательной рамы удалим элементы 2, 6, 8, 9, 10 и выполним операцию «Упаковка данных». Схема после удаления указанных элементов и упаковки данных изображена на рис. П1.17, *б*.

Наклонный элемент заданной рамы (см. рис. П1.15) достроим по узлам 6 и 7 (см. пункт 2.1 этапа 2 в подразделе П1.1).

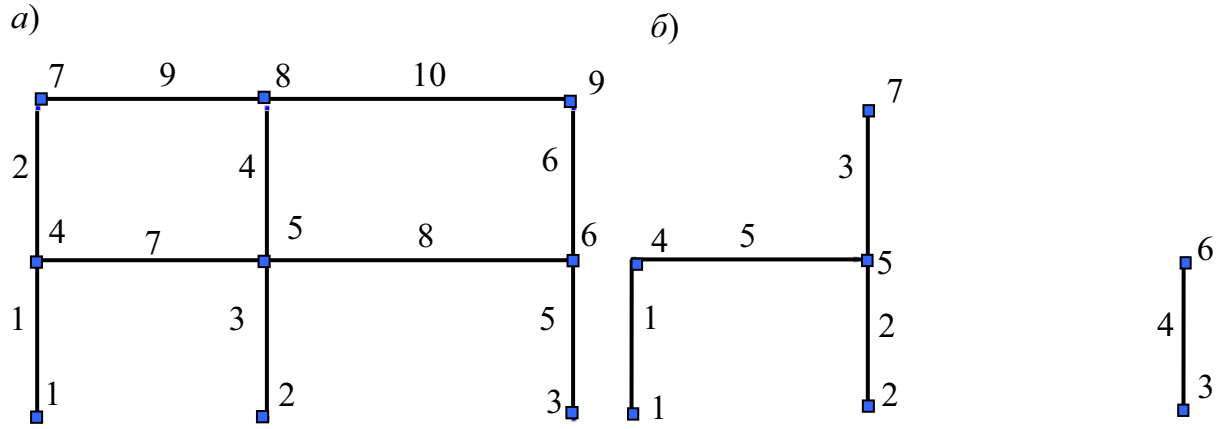


Рис. П1.17

Для установки шарниров на элементах 3 и 5 и для назначения узла в точке приложения сосредоточенной силы на элементе 2 разобьем каждый из этих элементов на два (см. пояснения к рис. П1.4 в подразделе П1.1).

Окончательная расчетная схема рамы с введенными дополнительными узлами, опорными связями и шарнирами изображена на рис. П1.18.

Нумерация узлов и элементов на рис. П1.18 получена в программе SCAD автоматически с учетом последовательности их ввода и соответствующей упаковки данных в процессе выполненного конструирования схемы.

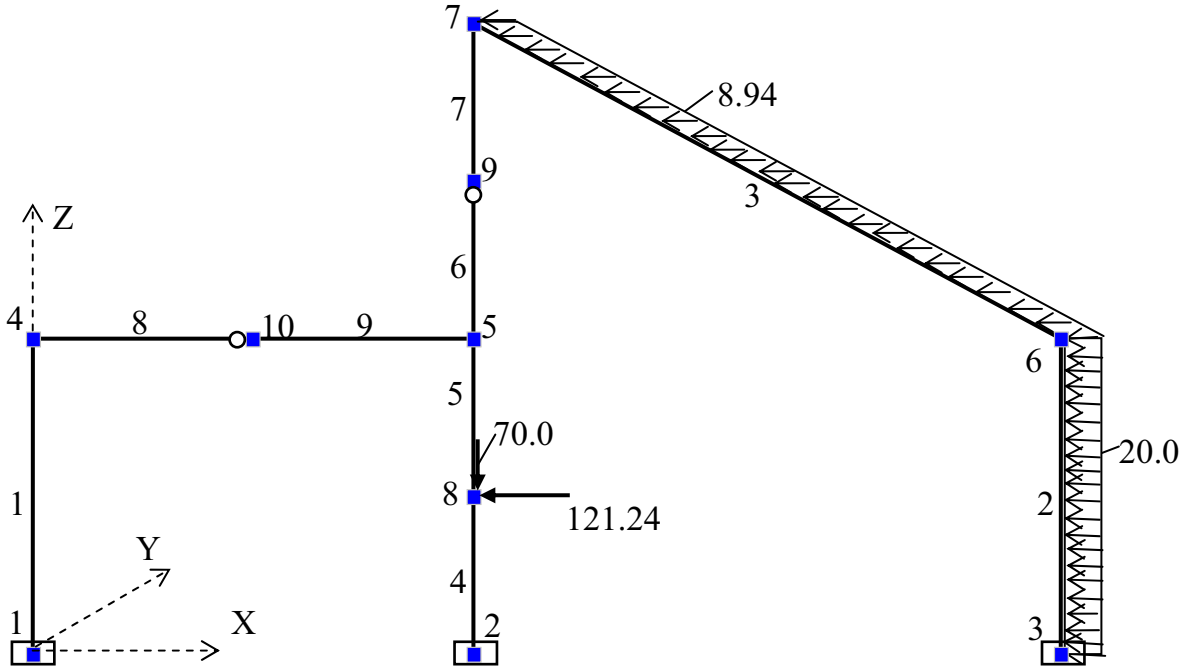


Рис. П1.18

Как видим, эта нумерация не совпала с намеченной на построенной вручную предварительной расчетной схеме (см. рис. П1.16).

Однако, во-первых, результат расчета рамы не изменяется от последовательности ввода ее узлов и конечных элементов и, следовательно, от получившейся их нумерации.

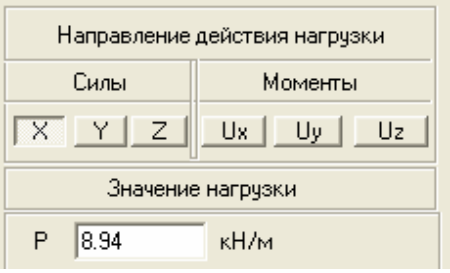
Во-вторых, можно получить совпадения нумерации узлов и элементов в предварительно построенной вручную расчетной схеме и в схеме, построенной с помощью программы SCAD. Для этого надо при использовании программы SCAD сначала ввести узлы рамы (по их координатам в общей системе координат) в намеченной на предварительной схеме последовательности, а затем в последовательности, соответствующей предварительно намеченной нумерации элементов, ввести эти элементы, используя соответствующую процедуру программы SCAD (см. подраздел П1.1).

Построенная таким образом расчетная схема приведена в примере расчета этой рамы в работе 2 приложения 3 к УМК.

Особенности загружения рамы. Обратим внимание на следующие два момента процедуры загружения заданной рамы.

1. Наклонная сосредоточенная сила, приложенная к узлу 8

(см. рис. П1.18), разложена на две составляющие: горизонтальную (121.24 кН), параллельную оси X обшей системы координат; вертикальную (70 кН), параллельную оси Z общей системы координат. Обе составляющие задаются со знаком «плюс» (см. этап 3 в подразделе П1.7).



2. Для загружения наклонного элемента 3 горизонтальной равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. П1.15) необходимо:

- найти равнодействующую горизонтальной нагрузки $R_3 = 20 \cdot 4 = 80$ кН, соответствующей проекции наклонного стержня 3 на ось Z (см. рис. П1.15).
- найти длину наклонного стержня 3: $l_3 = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$;
- определить интенсивность горизонтальной равномерно распределенной нагрузки $q' = R_3 / l_3 = 80/\sqrt{80} = \sqrt{80} = 8.94$ кН/м, действующей по длине стержня 3 (см. рис.П1.18), и задать ее в диалоговом окне **Задание нагрузки на стержневые элементы** (см. приведенный здесь фрагмент этого окна).

Анализ эпюр усилий. Эпюры усилий *M, Q, N* в рассматриваемой раме приведены соответственно на рис. П1.19, *а*, *б*, *в*.

При анализе этих эпюр обратим внимание на направление и знак поперечной силы Q на наклонном стержне. Здесь надо иметь в виду следующее.

1. Ручное построение оси наклонного элемента по узлам 7 и 6 (см. рис. П1.16, *б*) было выполнено от узла 7 к узлу 6. Это означает, что узел 7 в местной системе координат имеет номер 1, а узел 6 − номер 2.

2. Знак плюс на эпюре Q показывает, что вектор поперечной силы, действующей на стержень слева, совпадает с положительным направлением оси Z1 местной системы координат (см. рис. 3.10, *а*) и что при $dx_1 > 0$ производная $dM > 0$ и поэтому $Q = dM / dx_1 > 0$.

3. При другом направлении построения оси наклонного стержня на рис. П1.15, *б* (от узла 6 к узлу 7), или при смене направления оси X1 в предыдущем построении (см. рис. 3.11, *а*), первым узлом по нумерации местной системы координат станет узел 6. Изменится и знак поперечной силы: в этом варианте при $dx_1 > 0$ на наклонном элементе 3 будем иметь $dM < 0$ и $Q = dM / dx_1 < 0$. Изменят знак и векторы поперечных сил в узлах элемента (см. рис. 3.11).

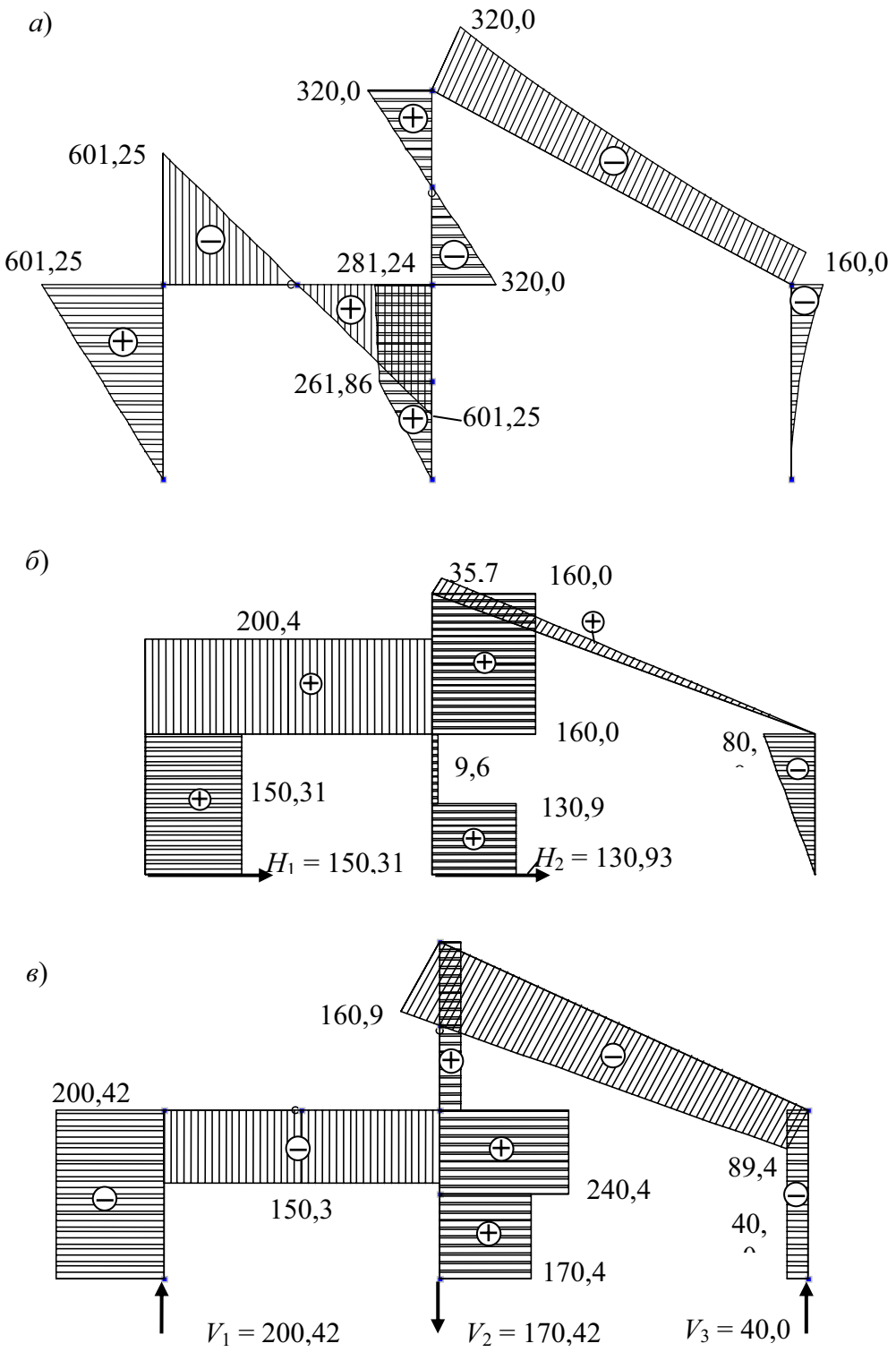


Рис. П1.19

Определение опорных реакций рамы. Направления и значения опорных реакций в раме легко определяются по соответствующим эпюрам усилий (см. рис. П1.18, *а*, *б*, *в*).

Реакции рамы в программе SCAD можно также определить, используя

процедуру определения нагрузок (давлений) от стоек рамы на фундаменты. Эти давления будут иметь противоположное направление по сравнению с соответствующими реакциями.

Для решения поставленной задачи, прежде всего в основном рабочем окне, где была создана расчетная схема, войдем в раздел **Группы.**

На открывшейся инструментальной панели, состоящей из пяти кнопок, изображения которых приведены здесь, выполним следующие действия.

1.Нажмем первую кнопку «Отметка группы узлов».

2. На схеме рамы отметим группу опорных узлов, в которых предполагается определить опорные реакции (на цветном дисплее узлы станут красными).

3. С помощью третьей кнопки откроем окно для задания имени этой группы и ее сохранения.

4. На поле «Имя группы» записываем «Опоры рамы» и нажимаем кнопку «Добавить группу». В поле для списка групп появится номер созданной группы и ее имя.

5. Выходим из окна, нажав кнопку «ОК», и нажимаем последнюю кнопку «Сброс всех отметок» (отметка узлов красным цветом исчезнет).

Те же действия выполним для создания группы элементов стоек 1, 4, 2 рамы, к которым относятся опоры. Придадим им имя «Стойки рамы».

Далее на дереве проекта, заходим на ветвь **Специальные исходные данные** и открываем окно **Нагрузки от фрагмента схемы**. В этом окне уже будут указаны наименования групп узлов и элементов и их номера. Подтверждаем назначение исходных данных нажатием кнопки «ОК».

Снова окажемся на дереве проекта, где в разделе **Расчет** выберем наименование «Нагрузки от фрагмента схемы».

После выполнения этого расчета последовательно заходим в разделы: **Результаты, Графический анализ, Постпроцессоры**.

Нажимаем кнопку: «Анализ нагрузок от фрагмента схемы», а затем кнопку «Отображение нагрузок от фрагмента схемы». В опорных узлах на схеме рамы появятся векторы усилий (по выбору: R_X, R_Z, R_{UY}), представляющие собой нагрузки (давления) на фундамент.

При нажатой на фильтре отображения кнопке «Оцифровка изополей изолиний» у векторов усилий будут поставлены значения.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ

4.1. Постановка задачи и анализ заданной расчетной схемы фермы

Рассмотрим ферму, расчетная схема которой изображена на рис. П1.20.

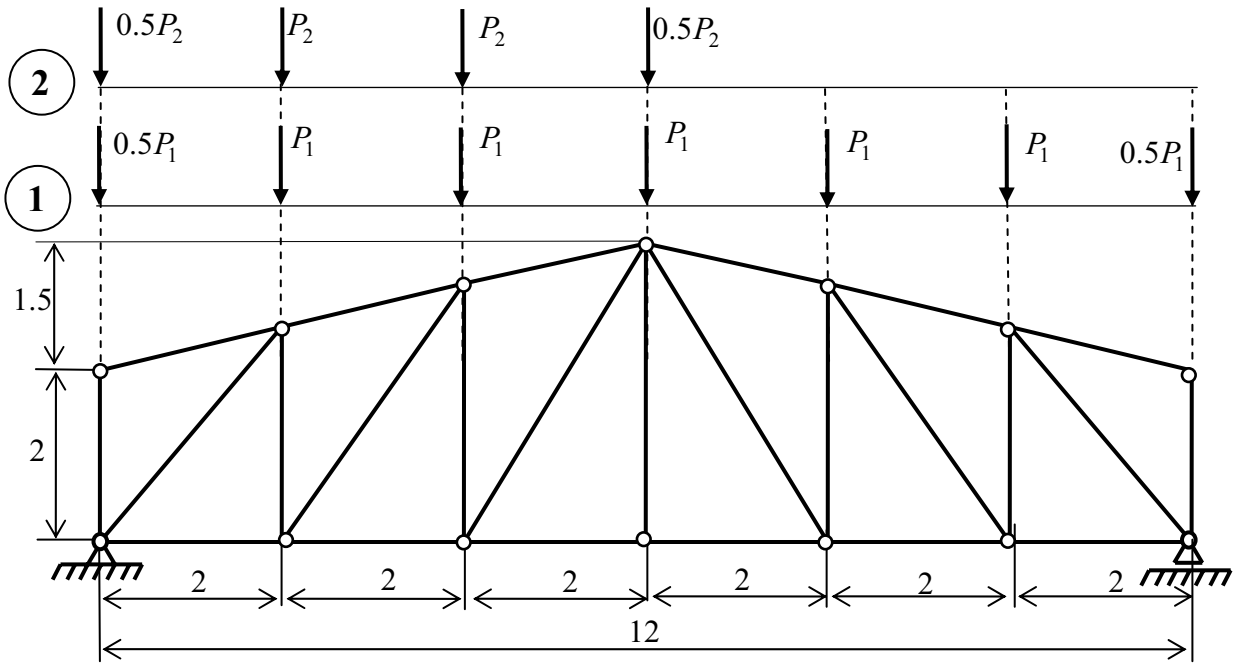


Рис. П1.20

Требуется определить. продольные усилия во всех стержнях фермы (в том числе и опорных) от указанных на рис. П1.20 двух вариантов ее загружения .

Прежде чем приступить к расчету по программе SCAD, необходимо проверить является ферма статически определимой или статически неопределимой. С этой целью выполняются две операции:

1. Подсчитывается степень статической неопределимости (2.23):

$$n = (n_{\text{с}} + n_{\text{оп}}) - 2n_{\text{у}}, \qquad \text{(П1.3)}$$

где $n_{\text{с}}$, $n_{\text{оп}}$, $n_{\text{у}}$ − соответственно число стержней решетки фермы, число опорных стержней, число узлов фермы.

Необходимым, но недостаточным условием статической определимости фермы является результат $n = 0$. Он означает, что число неизвестных усилий в стержнях фермы и в ее опорах равно числу уравнений равновесия, которые можно записать для всех узлов фермы. Чтобы сделать окончательный вывод о статической определимости фермы кроме условия (П1.3) должна соблюдаться геометрическая неизменяемость фермы. Поэтому выполняется операция 2:

2. Проверяется геометрическая неизменяемость фермы.

В нашем примере получаем:

1. $n = (25 + 3) - 2 \cdot 14 = 0$;

2. Структурный анализ фермы показывает, что она является жестким диском, прикрепленным к жесткому основанию тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными. Таким образом, ферма геометрически неизменяема.

Эти два результата позволяют сделать вывод, что заданная ферма является статически определимой системой.

Инструкция по использованию программы SCAD

В инструкции не повторяется описание тех операций, которые были рассмотрены в предыдущих подразделах приложения 1. Поэтому при выполнении этапа 1 «Запуск программы SCAD и подготовка к созданию расчетной схемы фермы» необходимо руководствоваться инструкцией, приведенной в подразделе П1.1.

Здесь продолжим конкретное выполнение инструкции, начиная с этапа 2 (см. подраздел П1.1 пособия).

Э т а п 2. *Создание расчетной схемы фермы для МКЭ*

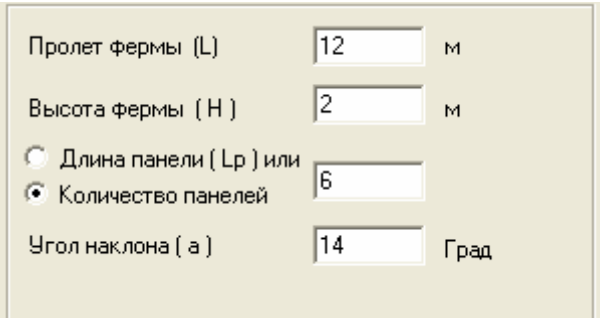
2.1. Графическое представление расчетной схемы фермы

Расчетную схему заданной фермы можно построить с использованием имеющихся в программе SCAD типовых схем. С этой целью после открытия окна для создания расчетной схемы фермы необходимо войти в раздел **Схема**. Курсор устанавливается на закладке **Схема** и нажимается левая кнопка мыши. Появится инструментальная панель, соответствующая разделу **Схема** (ее часть была приведена в подразделе П1.1, см. с. 8).

На этой панели нажимается вторая кнопка слева «Генерация прототипа фермы». Появится окно **Конфигурация поясов фермы,** в котором из представленных типов ферм выбирается «Двускатная ферма». После подтверждения выбора нажатием кнопки «ОК» появится очередное диалоговое

окно **Параметры схемы,** в котором изображены 8 типовых схем двускатных ферм.

В соответствии с заданием (см. рис. П1.20), выбираем восьмой сверху тип фермы и вводим для нее требуемые в окне исходные данные (см. приведенную здесь часть окна **Параметры схемы**).



После подтверждения нажатием кнопки «ОК» назначенных параметров на экране появится окно с созданной расчетной схемой фермы для МКЭ.

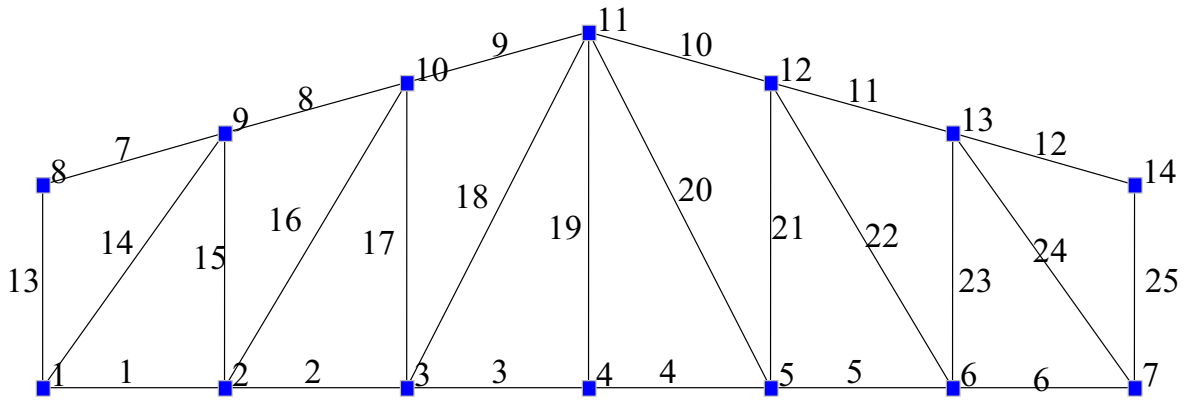


Рис. П1.21

Как уже отмечалось в подразделе П1.1 (см. этап 1, пункт 1.4), вместе со схемой фермы в окне появятся две подвижных панели: **Фильтры отображения** и **Визуализация**, форма которых может быть изменена расчетчиком.

Нажатые на панели **Фильтры отображения** кнопки позволили отобразить на схеме фермы узлы и номера узлов и элементов. Можно отобразить также общую систему координат и местные системы координат всех элементов.

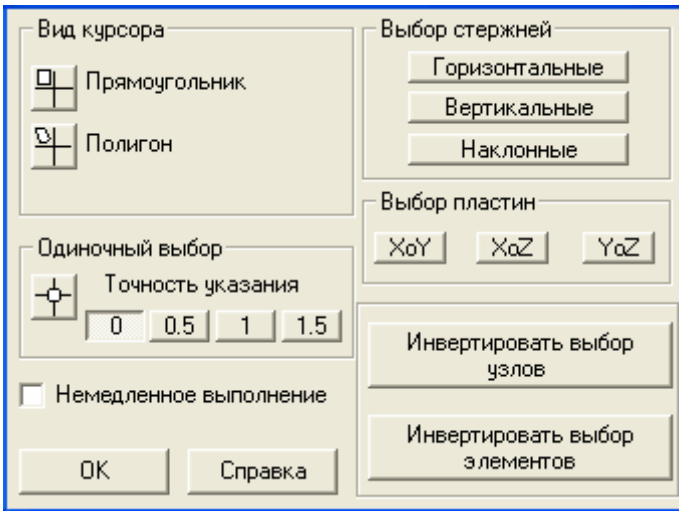
Однако одновременно нажимать много кнопок на этой панели не рекомендуется, так как некоторые цифровые информации будут накладываться друг на друга. Рекомендуется выполнять контроль заданных параметров фермы постепенно.

2.2.Назначение типа элементов

В окне **Создание нового проекта** (оно здесь не приводится, но его вид и работа с ним были рассмотрены в пункте 1.2 этапа 1 инструкции, см. с. 3-4) должен быть назначен тип схемы «Плоская шарнирно стержневая система».

Поэтому при нажатии на панели **Фильтры отображения** кнопки «Типы элементов» все элементы будут отмечены цифрой 1. Если же выбор типа схемы не был сделан, или его надо изменить, то для назначения типа элементов надо войти в раздел **Назначения**, которому будет соответствовать своя инструментальная панель.

На этой панели нажимаем кнопку «Назначение типов конечных элементов» и в появившемся одноименном окне (его часть была показана на с. 10) последовательно выбираем: «Стержень»; «1. Стержень плоской фермы». Подтверждаем выбор нажатием кнопки «ОК».



Для придания выбранного типа элемента сразу всем стержням фермы **выделим все ее элементы.** С этой целью подведем курсор к схеме фермы и нажмем правую клавишу мыши. Появится окно **Выбор узлов и элементов** (здесь приведена его часть).

Нажимаем кнопку «Инвертировать выбор элементов». При этом на цветном дисплее все линии, изображающие стержни фермы, выделятся красным цветом.

Подтверждаем операцию выделения нажатием в этом же окне кнопки «ОК». Окно исчезнет и снова появится расчетная схема фермы.

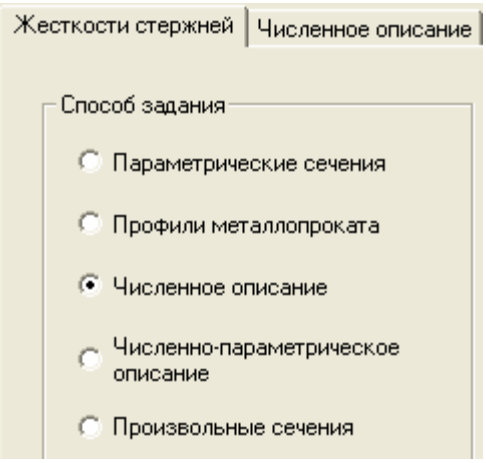
Заключительной операцией выбора типа элементов является нажатие на инструментальной панели раздела **Назначения** кнопки «ОК». Все стержни на расчетной схеме снова станут белыми (при черном поле на дисплее) или черными (при белом поле). Если на фильтре отображения будет нажата кнопка «Тип элемента», то все стержни расчетной схемы фермы отметятся цифрой 1.

2.3. Назначение жесткости элементов фермы

В задании к расчету поставлена задача определения только усилий в стержнях фермы. Так как ферма статически определима, жесткости стержней фермы в ПВК SCAD могут быть заданы в виде произвольных значений,

например равными единице (см. подраздел 3.6)

Для назначения жесткостей стержневых конечных элементов типа 1 на инструментальной панели раздела **Назначения** нажимаем кнопку .. Откроется первая страница трехстраничного диалогового окна **Жесткости стержневых элементов** (приведен только фрагмент первой страницы).



Для задания единичной жесткости, выбираем в первом диалоговом окне способ задания «Численное описание» (подведем курсор к круглому окошечку и щелчком левой кнопки мыши поставим в окне точку).

Затем нажатием кнопки «Численное описание» в верхнем меню перейдем на вторую страницу диалогового окна **Жесткость стержневых элементов**.

На второй странице с помощью курсора и левой клавиши мыши отмечаем тип элемента (тип 1) и вводим единичное значение продольной жесткости (EF=1). На этой же странице нажатием кнопки «ОК» подтверждается сделанное назначение жесткости.

Для придания указанной жесткости всем стержням фермы снова выполняем процедуру выделения стержней (см. окно **Выбор узлов и элементов** в предыдущем подразделе 2.2 этапа 2). Окончательное подтверждение, что жесткость назначается всем выделенным красным цветом стержням фермы, является нажатие на инструментальной панели раздела **Назначения** кнопки «ОК».

2.4. Назначение опорных связей фермы

Процедура была рассмотрена в пункте 2.4 этапа 2 в подразделе П1.1.

2.5. Назначение шарниров в узлах элементов

Поскольку при формировании расчетной схемы фермы для МКЭ использовались конечные элементы типа 1 (см. рис. П1.20), то все узлы в расчетной схеме МКЭ будут шарнирными. Поэтому использовать процедуру ввода шарниров в узлы, описанную в пункте 2.5 подраздела П1.1 для элемента типа 2, при расчете фермы не требуется.

2.6. Сохранение созданной расчетной схемы и ее печать

Способы печати созданной на экране расчетной схемы рассмотрены в

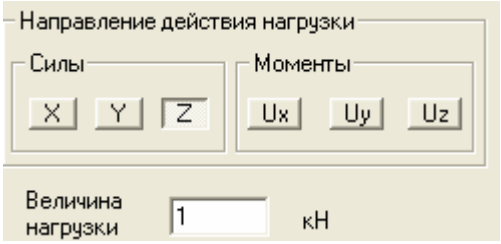
пункте 2.6 подраздела П1.1. В данном примере использован описанный там третий способ. Сформированная промежуточная расчетная схема фермы была приведена на рис. П1.21. Окончательная расчетпосле создания загружения 1.

Э т а п 3. Загружение расчетной схемы фермы

3.1. Создание загружений узлов фермы

Управление функциями задания нагрузок выполняется в разделе **Загружения** с помощью соответствующей этому разделу инструментальной панели.

Так как в соответствии с заданием на расчетную схему фермы действуют только узловые нагрузки (см. рис. П1.20), то для их ввода с помощью курсора и левой клавиши мыши нажимаем кнопку «Узловые нагрузки». В результате этого откроется диалоговое окно «Ввод узловых нагрузок».



В этом диалоговом окне продемонстрирован вариант задания в узле направленной вниз вертикальной нагрузки, равной 1 кН. Нагрузка имеет положительный знак, т. к. она имеет направление обратное по отношению к положительному направлению оси Z.

Подтверждением выбранной нагрузки является нажатие в окне кнопки «ОК». При этом окно исчезнет и снова появится расчетная схема фермы (см. рис. П1.21).

Для приложения заданной сосредоточенной силы к узлам расчетной схемы фермы, на которые она действует (см. рис. П1.20), можно применить следующие два способа.

1. Последовательно подводим курсор к загружаемым узлам и нажимаем левую клавишу мыши. При этом узлы отметятся красным цветом.

2. Правой кнопкой мыши вызываем уже использованное ранее окно **Выбор узлов и элементов**, в котором выбираем вид курсора «Прямоугольник». и подтверждаем выбор нажатием кнопки «ОК». На схеме фермы с помощью курсора заключаем нагружаемые узлы в прямоугольник и щелчком левой кнопки мыши выделяем эти узлы красным цветом.

Окончанием процедуры загружения выделенных узлов в обоих вариантах будет нажатие кнопки «ОК» на инструментальной панели раздела **Загружения**.

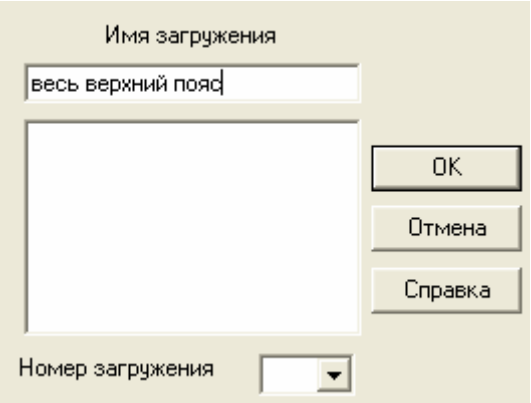
В результате загружаемые узлы потеряют красный цвет их выделения и,

если будут нажаты кнопки «Узловая нагрузка» и «Значения нагрузок» на панели **Фильтры отображения**, то в указанных узлах появятся изображения вертикальных сосредоточенных сил и указание их значений.

Аналогично загружаются другие узлы фермы, если на них одновременно с рассмотренными силами действуют другие сосредоточенные силы. Так как вариантов загружений может быть несколько, то их нумеруют. Номера присваиваются при сохранении конкретного загружения.

3.2. Сохранение созданного загружения фермы

Для сохранения созданного загружения фермы нажмается кнопка . «Сохранить /Добавить/ загружение» на инструментальной панели **Загружения.** Появится диалоговое окно **Сохранить загружение**, в котором задается имя загружения и нажимается кнопка «ОК».



В демонстрируемом окне присвоено имя «весь верхний пояс» первому варианту загружения фермы (см. рис. П1.20).

Появится окно с сообщением о присвоении загружению номера 1.

При согласии с присвоенным номером в окне сообщения нажимается кнопка «ОК». При несогласии номер загружения присваивается расчетчиком в окне **Сохранить загружение.**

Аналогично производится второе загружение фермы (с номером 2).

3.3.Сохранение расчетной схемы с созданным загружением и ее печать

Для сохранения вида расчетной схемы с загружением и ее печати можно использовать способы, описанные в пункте 2.6 подраздела П1.1.

На рис. П1.22 приведена схема фермы с загружением 1, вставленная в этот текст с помощью третьего способа.

Э т а п 4. Выполнение линейного расчета и анализ результатов

4.1. Линейный расчет

Теперь, когда все необходимые параметры фермы и нагрузки заданны, нужно войти в раздел **Управление** и нажать кнопку для выхода в дерево управления проектом.

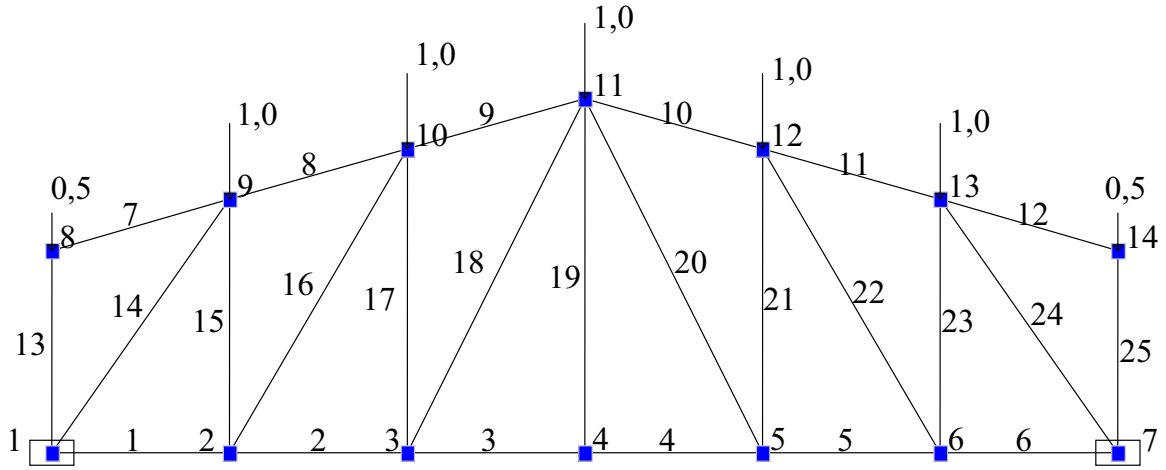


Рис. П1.22

В дереве проекта, в группе функций **Расчет** выбираем «Линейный».

Нажатие кнопки

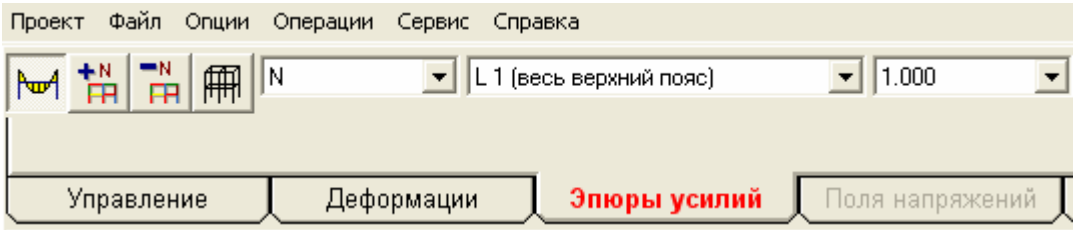
открывает диалоговое окно **Параметры расчета,** в котором выбираем «Полный расчет» и «ОК».

Возникает информативное окно о прохождении этапов расчета в виде протокола. По окончании расчета будет сообщение «Задание выполнено». После этого надо нажать кнопку «Выход», что приведет к появлению окна с деревом проекта, в котором становятся доступным раздел **Результаты**.

Примечание. Если режим расчета не доступен на дереве проекта будет значок . Это означает, что введены не все исходные данные. Надо вернуться в окно **Расчетная схема** и проверить ввод исходных данных.

4.2. Представление полученных результатов в виде эпюр усилий в стержнях фермы. Их сохранение и печать

Установим курсор на позицию **Графический анализ** раздела **Результаты** дерева проекта и нажмем левую кнопку мыши. Появится окно для вывода различных результатов.



Для получения эпюры *N* продольных сил в стержнях фермы войдем в раздел **Эпюры усилий.** В трех светлых рабочих окнах надо выбрать (слева направо): обозначение усилия, для которого предполагается построить эпюру (для фермы это будет *N*); номер загружения с соответствующим названием,

если оно было задано); масштабный коэффициент для ординат эпюры.

Нажмем кнопку «Эпюры усилий». При этом на экране появится расчетная схема фермы с эпюрой *N* для выбранного загружения 1 (рис. П1.23, *а*).

Аналогично можно получить эпюру *N* при загружении 2 фермы (рис. П1.23, *б*).

Для этого необходимо выбрать вариант второго загружения (в окне будет записано: L2 (верхний пояс слева).

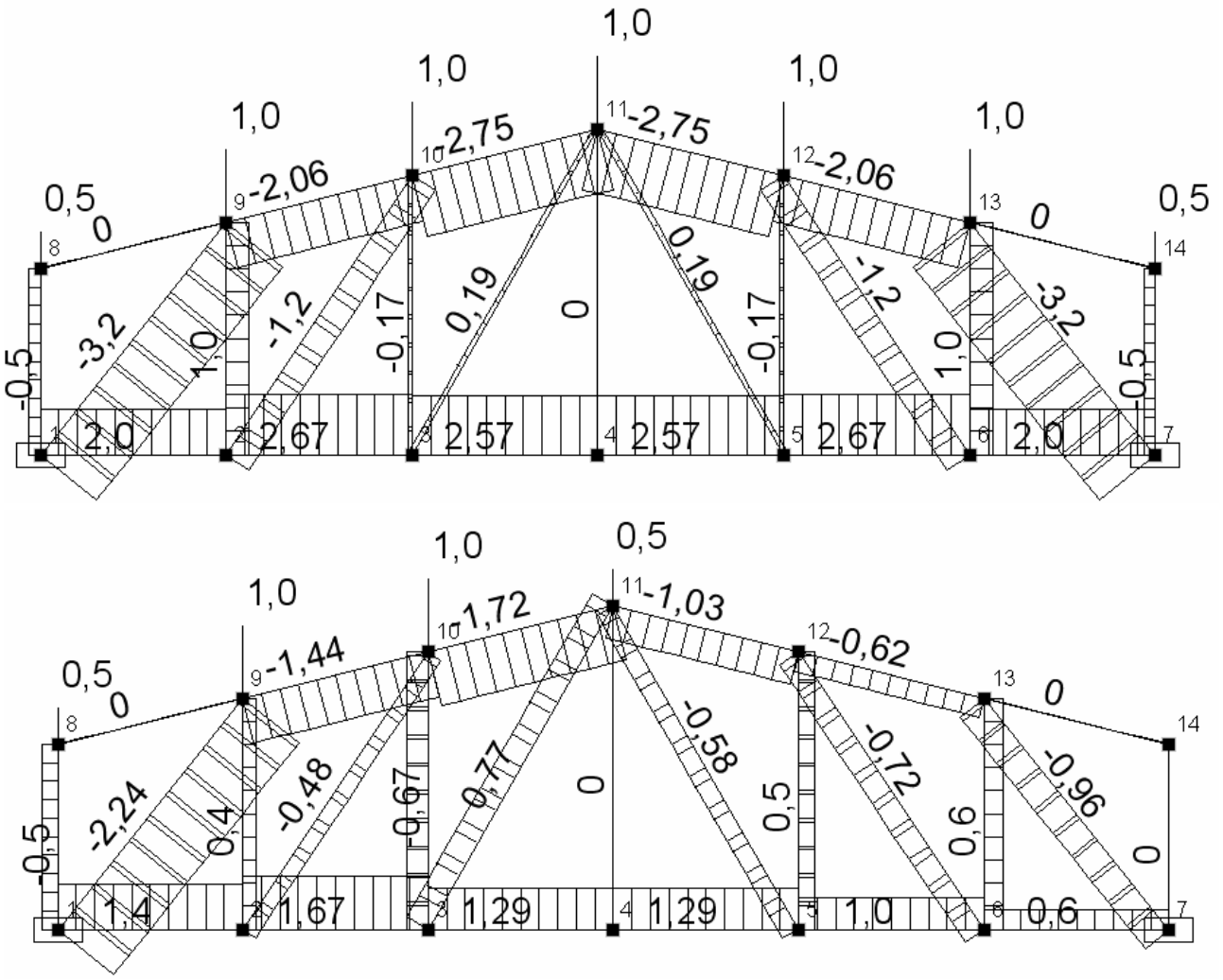


Рис. П1.23

Примечание. Рис. П1.23, *а* и рис. П1.23, *б* скопированы с экрана компьютера с помощью программы **Paint**.

4.3. Таблица усилий в стержнях фермы

В разделе **Результаты** дерева проекта есть подраздел **Печать таблиц**. Если войти в этот подраздел, то откроется окно **Оформление результатов**

расчета.

Для печати таблицы продольных усилий в стержнях фермы отметим точкой соответствующее окно «Усилия и напряжения» и нажмем кнопку «Параметры вывода». Откроется дополнительная информация «Состав выходных таблиц».

Последовательно заходим в имеющиеся там разделы и выполняем ряд операций:

- *Список элементов*. Отмечаем: «Все элементы» и «ОК»;
- *Список загружений*. Отмечаем «Все загружения» и «ОК»;
- *Параметры оформления*. Здесь для уменьшения числа значащих цифр в таблице рекомендуется в графе «Точность печати усилий» поставить цифру 3. Кроме того, выбрать положение таблицы на странице и размер шрифта. При завершении работы в окне нажать «ОК».
- *Выходные единицы измерения*. В начале расчета были заданы *входные* единицы измерения сил: в кН. При печати результатов рекомендуется убедиться в том, что и полученные усилия в стержнях получатся в этих же единицах. При необходимости можно изменить размерность. Завершается работа с окном «Состав выходных таблиц» нажатием кнопки «ОК».

После этого последовательно нажимаем кнопки «Формирование документа» и «Просмотр результатов». Появляется окно с таблицей продольных усилий *N*.

Эта таблица может быть распечатана сразу, или скопирована в отчет (в документ с расширением doc).

Возможно получение этой таблицы в любое другое время, так как результаты расчета в программе SCAD сохраняются в папке рабочих файлов SWORK (в нашем примере под номером 0102-ф1.P06.

Часть этой таблицы для первых четырех элементов продемонстрирована в данном пособии в виде табл. П1.3 (значения усилий даны в кН).

Таблица П1.3

1	У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ								
2		1-1	1-2	2-1	2-2	3-1	3-2	4-1	4-2
3		1	1	2	2	3	3	4	4
4		2	2	3	3	4	4	5	5
5	1 -	весь верхний пояс							
6	N	2.001	2.001	2.669	2.669	2.574	2.574	2.574	2.574
7	2 -	верхний пояс слева							
8	N	1.4	1.4	1.668	1.668	1.287	1.287	1.287	1.287

Примечания к табл. П1.3.

1.Если студент, оформляющий отчет по работе, привел результат определения усилий в виде эпюр *N* (см. рис П1.23, *а* и рис. П1.23, *б*), то таблицу с усилиями в отчете по работе (см. приложение 3 к УМК) можно не приводить.

2. Расчет фермы был выполнен при P_1 = 1 и P_2 = 1 (см. рис. П1.20). Так как рассматриваемая ферма предполагается линейно–деформируемой (по допущениям, принятым при изучении строительной механики стержневых систем), то при конкретно заданных значениях P_1 и P_2 все полученные в результате расчетов усилия должны быть умножены: в первом загружении на P_1; во втором загружении на P_2.

3. В табл. 1 строки имеют следующее назначение.

Строка 2 − номера элементов в ОСК и номера узлов по их концам в МСК.

Строки 3 и 4 − номера соответственно левого и правого (в МСК) узлов элементов по их концам в ОСК.

Строки 5 и 7 − номера загружений и их наименование.

Строки 6 и 8 − значения и знаки продольных усилий *N*, кН в стержнях фермы.

Примечание к подразделу П1.4. В данном подразделе рассматривается только последовательность расчета ферм на ПК с использованием программы SCAD.

Вопрос контроля полученных результатов с помощью уравнений равновесия будет рассмотрен в приложении 3 в отчете 4 по расчету фермы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

СБОРНИК УЧЕБНЫХ ЗАДАНИЙ ПО РАСЧЕТУ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие……. 327

Расчетные работы по построению эпюр усилий в статически определимых стержневых системах……..……..…… 328

1. Построение эпюр M и Q в многопролетной шарнирной балке…….. ……. 328

2. Построение эпюр M, Q, N в раме……. 331

3. Построение эпюр M, Q, N в арке..…… 337

4. Определение продольных усилий N в стержнях фермы…… 339

Расчетные работы по построению эпюр усилий в статически неопределимых стержневых системах……..…… 343

5. Построение огибающих эпюр изгибающих моментов $M_{\max}$ и $M_{\min}$ в неразрезной балке…….. 343

6. Построение методом сил эпюры изгибающих моментов в неразрезной балки при загружении одного ее пролета ……... 347

7. Расчет фундаментной балки, опирающейся на непрерывное упругое основании модели Винклера..…….…… 348

8. Расчет рамы промышленного здания от различных нагрузок и их комбинаций……. 349

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первый сборник учебных заданий по дисциплине «Строительная механика» на кафедре «Строительная механика и теория упругости» был издан в 1981 г. [18]. Он используется в учебном процессе до настоящего времени.

Однако в связи с внедрением в учебный процесс персональных компьютеров (ПК) и использованием для решения учебных задач по строительной механике программы SCAD [1-5] постановка и методика выполнения приведенных в сборнике заданий [18] изменилась.

Эти изменения для студентов специальности ПГС отражены в настоящем сборнике.

В разделе учебного пособия, посвященном статически определимым стержневым системам (СО СС), расчетные схемы шарнирных балок, рам и арок взяты из первого сборника [18]. Изменения сделаны в постановке заданий и в методических указаниях по их выполнению.

Задания по расчету ферм и все задания в разделе, посвященном статически неопределимым стержневым системам (СН СС), составлены заново.

Кроме заданий по расчетным работам, в приложениях П3.1 и П3.2 УМК приведены расчетные схемы простейших стержневых систем, предназначенные для контрольных работ и быстрой контрольной проверки знаний и умений студента по дисциплине «Строительная механика».

В приложении П1.3 к сборнику заданий по расчетным работам приведены также вопросы для подготовки учащихся к зачетам и экзаменам по разделам «Расчет статически определимых стержневых систем» и «Расчет статически неопределимых стержневых систем».

Представляемый сборник заданий и задач имеется в электронном виде в локальных сетях учебных классов ПК кафедры «Строительная механика и теория упругости» (СМ и ТУ) и отделения «Энергетические, промышленные и гражданские сооружения» (Э и ПГС) кафедры «Гражданское строительство и прикладная экология» (ГС и ПЭ). Сборник заданий и задач размещен также на сайте http://smitu,cef.spbstu.ru кафедры СМ и ТУ. На сайте он находится в учебно-методическом комплексе (УМК) по применению программы SCAD в учебном процессе по дисциплине «Строительная механика».

Примеры оформления отчетов по расчетным работам в соответствии с требованиями, приведенными в заданиях к работам, даны в приложении 3 к УМК и в учебных пособиях [4, 5].

РАСЧЕТНЫЕ РАБОТЫ ПО ПОСТРОЕНИЮ ЭПЮР УСИЛИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M и Q В МНОГОПРОЛЕТНОЙ ШАРНИРНОЙ БАЛКЕ

Для расчета задана балка, схема которой выбирается (табл. 1) в соответствии с двумя первыми цифрам шифра *ABCD*, выданного студенту преподавателем.

Схема загружения балки, размеры балки и значения нагрузок определяются по данным табл. 2 и 3.

Требуется:

1. Построить эпюры усилий M и Q в балке расчетом на ПК с использованием программы SCAD и по эпюрам усилий определить опорные реакции балки (см. разделы 3, 4, 8 и приложение 1 к УМК);

Методические указания.

Перед началом работы на ПК с применением программы SCAD выполнить предварительные действия:

- Проверить выполнение условий статической определимости балки (см. разделы 1, 2 УМК и учебные пособия [1, 2, 4].
- Построить вручную расчетную схему балки для МКЭ (см. рис. 2 отчета по работе 1 в приложении 3 к УМК).
- Выполнить расчет балки на ПК с применением программы SCAD (см. методические указания в приложении 1 к УМК). Результаты расчета представить в виде рис. 3 отчета по работе 1 в приложении 3 к УМК.

2. Выполнить контроль результатов расчета на ПК по признакам правильных эпюр и с использованием вручную уравнений равновесия (см. разделы 4 и 5).

Методическое указание.

Пример представления операций по контролю приведен в отчете по работе 1 приложения 3 к УМК.

Таблица 1

АВ	Схема балки

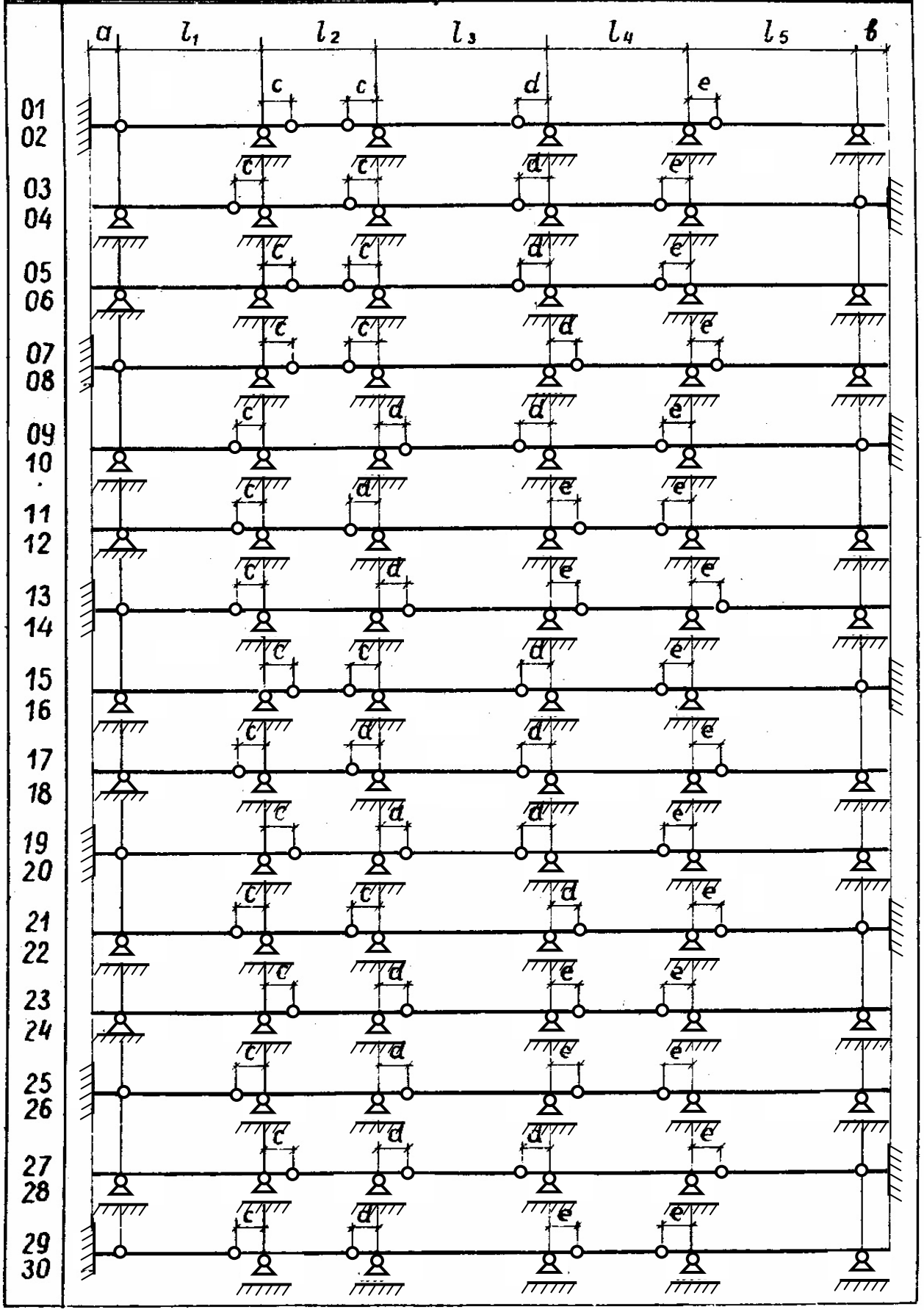


Таблица 2

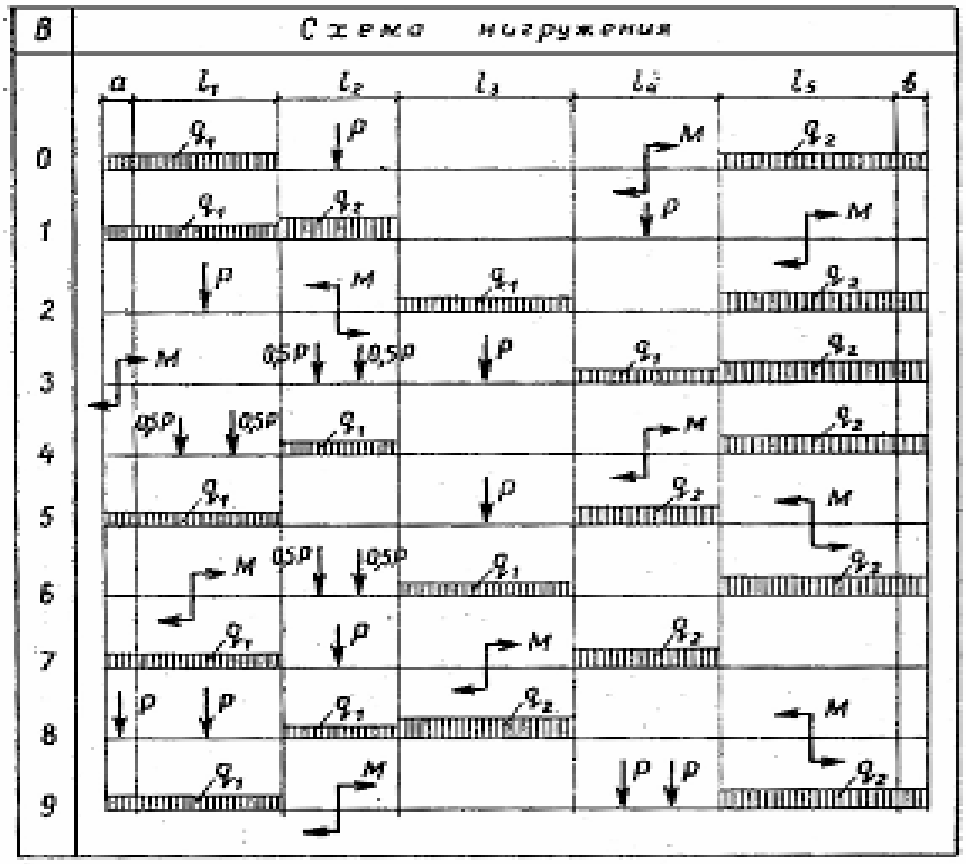


Таблица 3

C	Размеры в м										D	Нагрузки			
	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	a	b	c	d	e		q_1 кН/м	q_2 кН/м	P кН	M кН·м
0	10	8	8	6	6	2	1.5	1	1.2	1.2	0	20	40	80	100
1	8	8	10	8	8	1.5	1.2	1.2	0.8	0.8	1	25	36	100	120
2	10	6	8	6	10	1.6	1.2	0.9	0.8	0.9	2	30	44	120	110
3	9	8	7	8	9	1.5	1.5	0.8	1	0.8	3	15	32	90	90
4	8	9	6	6	10	1.2	2	0.8	0.8	1.2	4	20	50	100	80
5	10	10	8	6	7	1.2	0.8	0.8	1.2	1.2	5	28	46	70	100
6	8	9	8	10	8	1.5	1.6	0.9	1.2	1	6	32	60	90	130
7	6	8	10	9	6	1.2	1.2	0.6	1.2	0.6	7	18	34	120	70
8	9	9	8	10	9	2	1.6	1	0.6	1.2	8	22	48	130	120
9	6	9	8	10	9	1.5	1.8	1.1	0.9	0.9	9	26	42	80	100

2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M, Q, N В РАМЕ

Для расчета задана рама, схема которой выбирается (табл. 4) в соответствии с двумя первыми цифрам шифра ABCD, выданного студенту преподавателем. Размеры рамы (табл.5) выбираются по последней цифре C шифра.

Схема нагружения рамы (табл. 4) изображается в соответствии с нагрузками, значения которых определяются по цифре D шифра (табл. 5).

Требуется:

1. Построить эпюры усилий M, Q, N в раме расчетом на ПК с использованием программы SCAD и по эпюрам усилий определить опорные реакции рамы (см. разделы 3, 4, 8 и приложение 1 к УМК);

Методические указания.

Перед началом работы на ПК с применением программы SCAD выполнить предварительные действия:

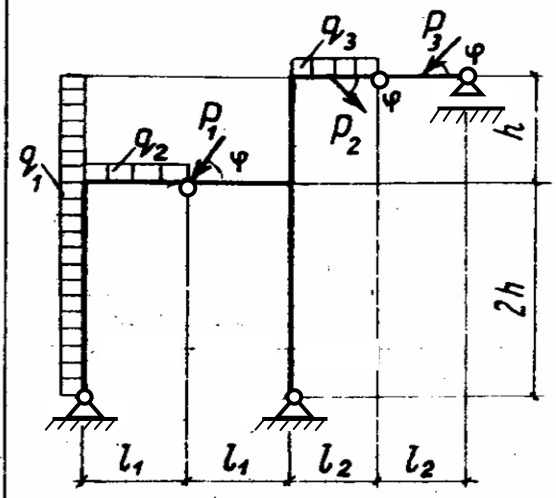
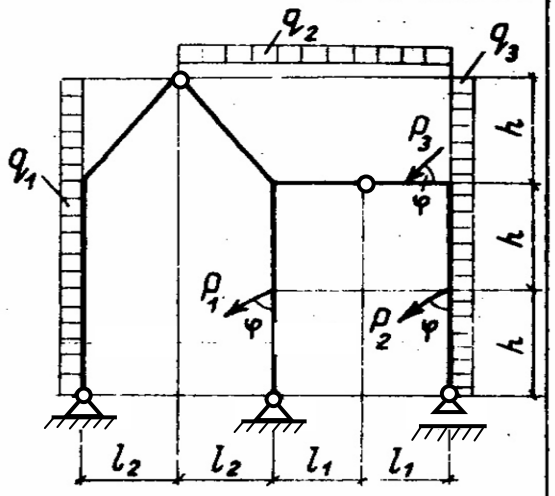
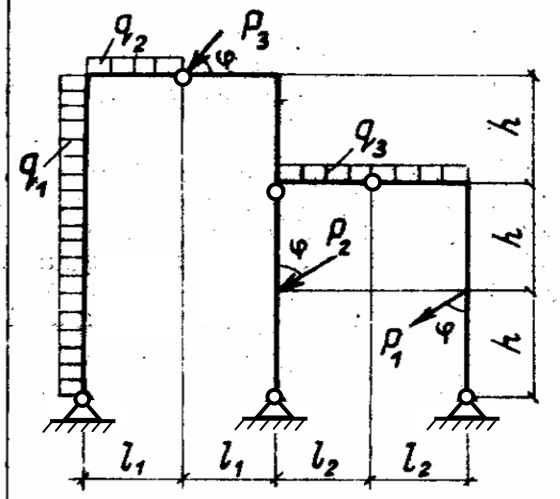
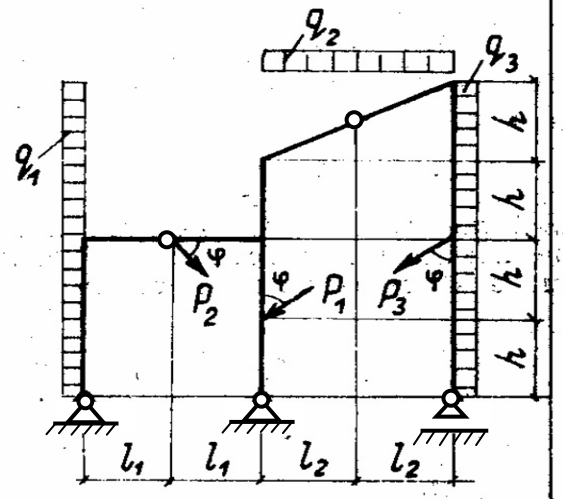
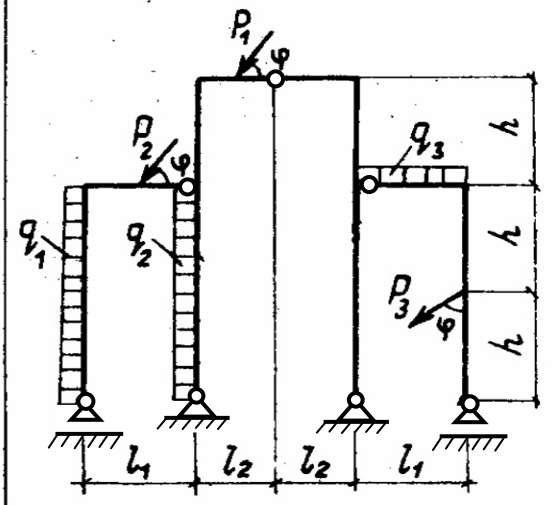
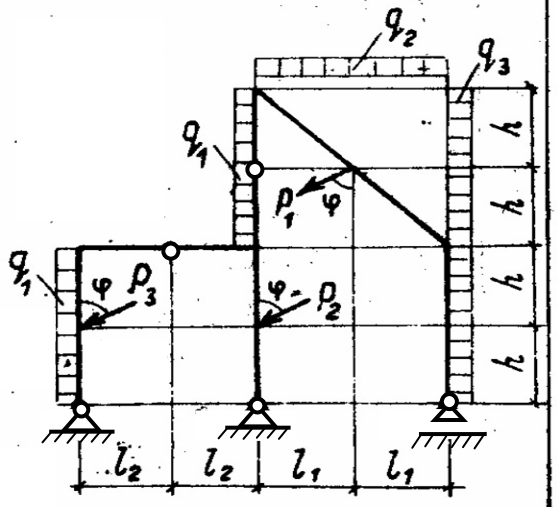
- Проверить выполнение условий статической определимости балки (см. разделы 1, 2 УМК и учебные пособия [1, 2, 4].
- Построить вручную расчетную схему рамы для МКЭ (см. рис. 2.2 отчета по работе 1 в приложении 3 к УМК).
- Последовательность операций по расчету рамы на ПК с помощью программы SCAD, реализующей МКЭ, и пример расчета приведены в приложении 1 и в учебных пособиях [2, 4].
- Результаты расчета рамы на ПК с использованием программы SCAD представляются в виде рис. 2.3 отчета по работе 2 в приложении 3 к УМК.

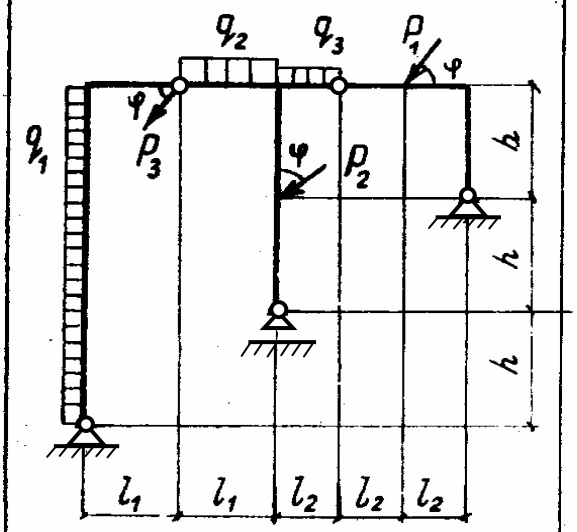
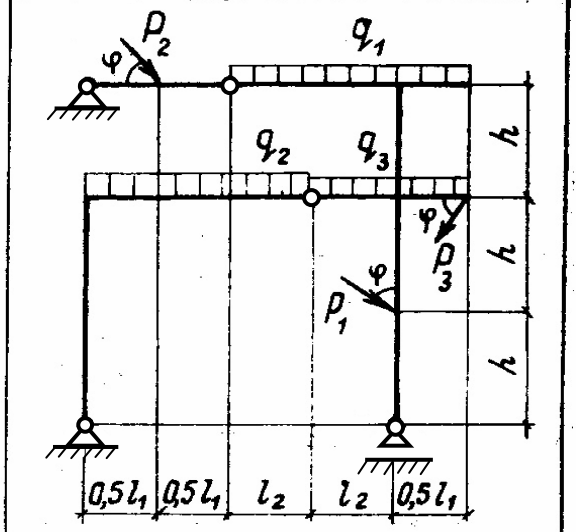
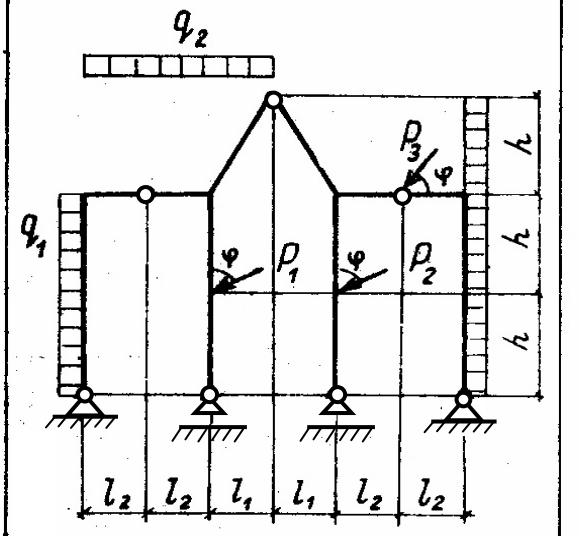
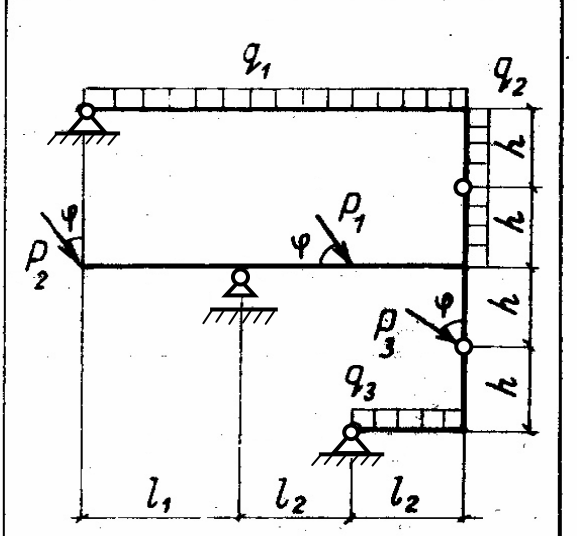
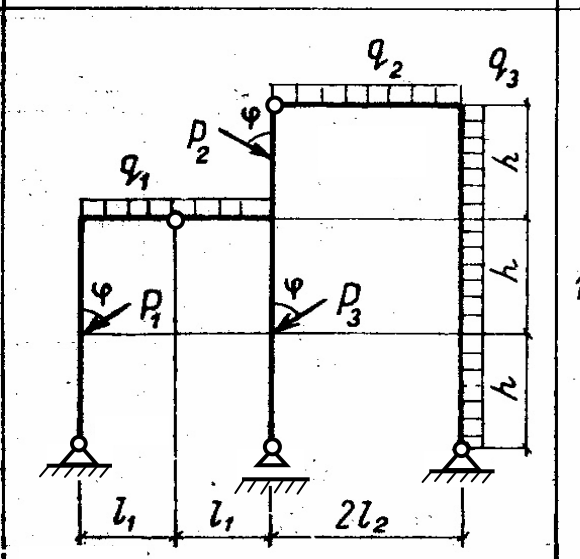
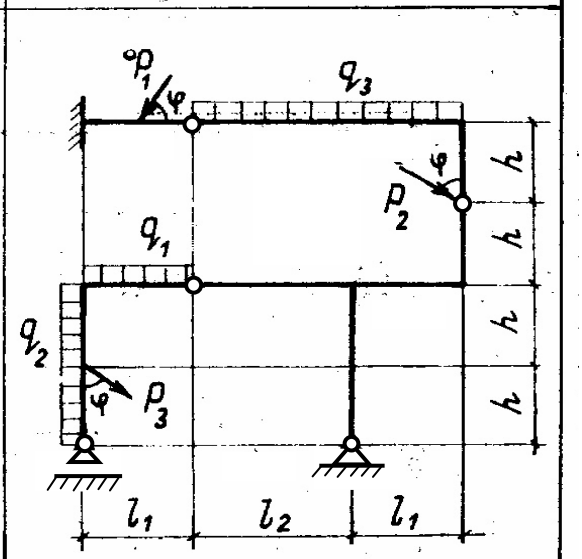
2. Выполнить контроль результатов расчета на ПК по признакам правильных эпюр и с использованием вручную уравнений равновесия (см. разделы 4 и 5).

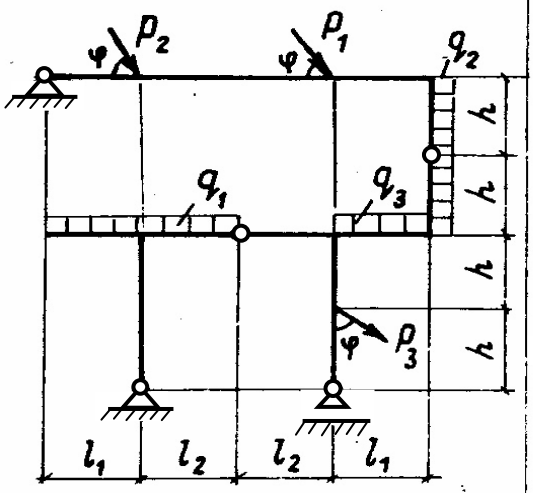
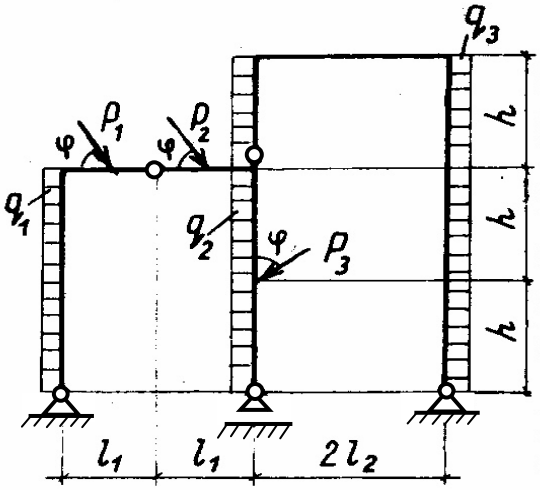
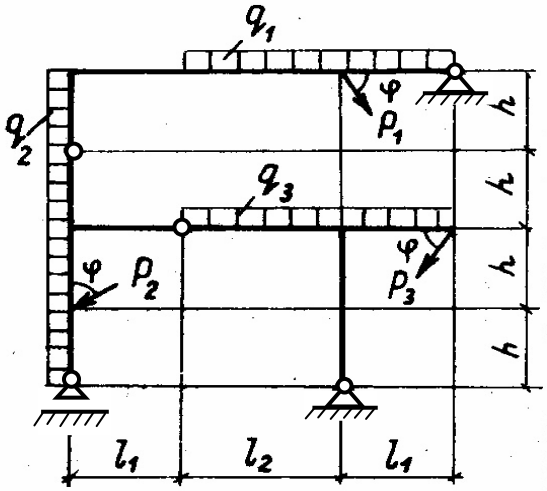
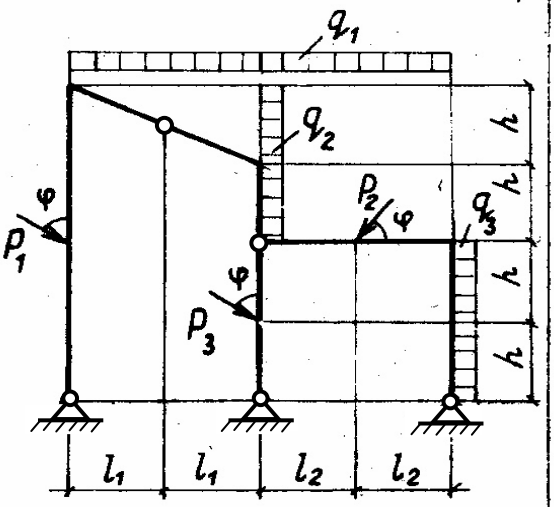
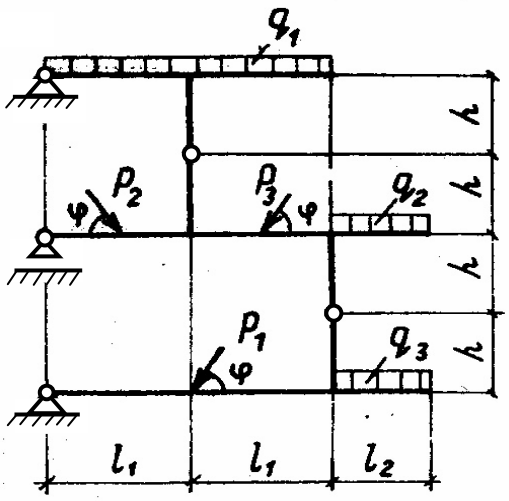
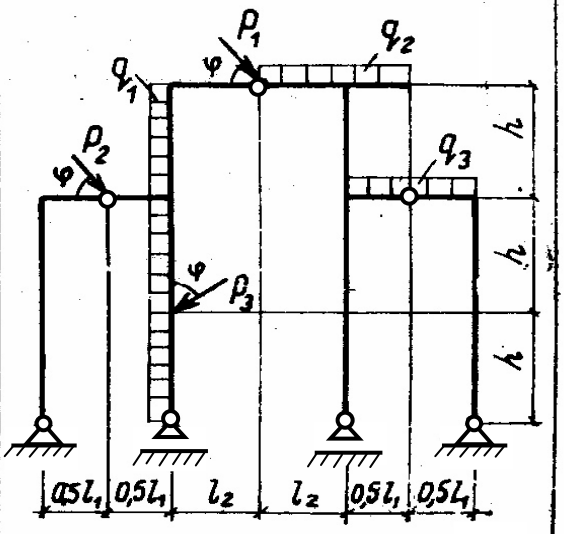
Методическое указание.

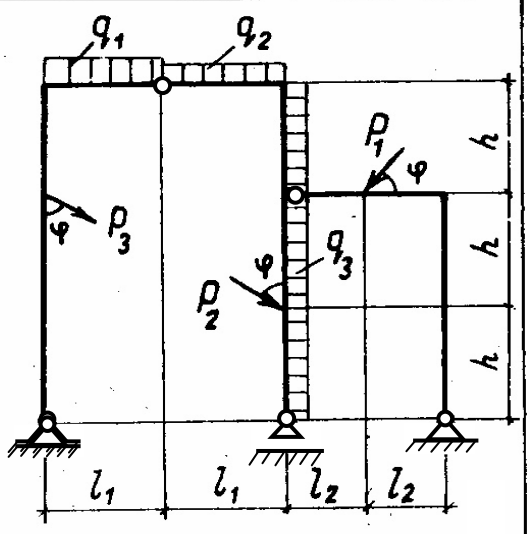
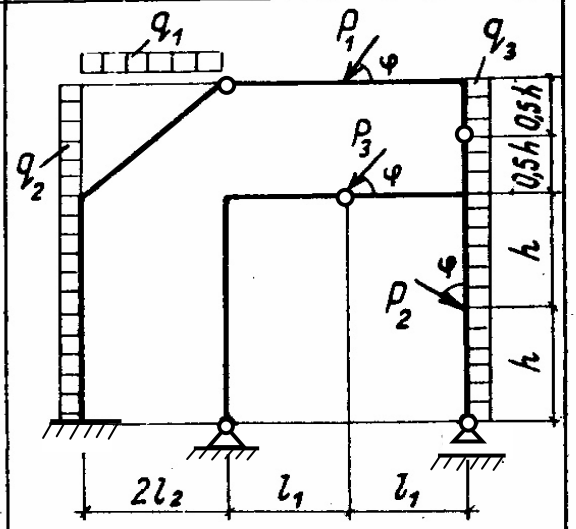
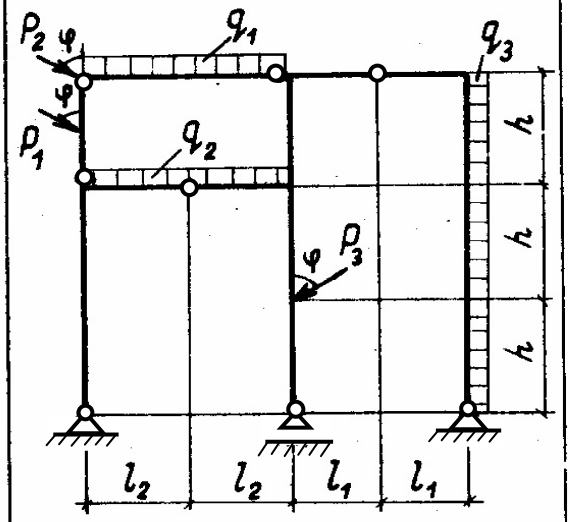
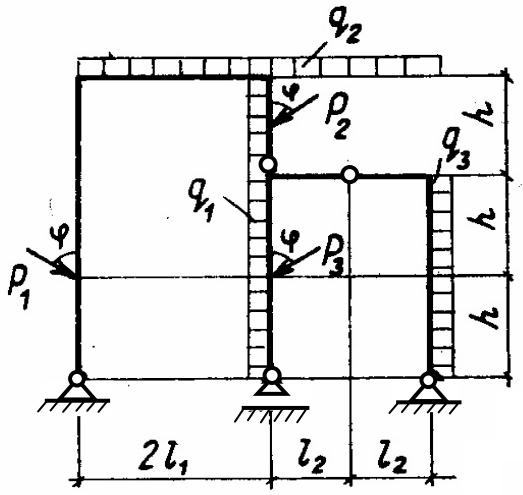
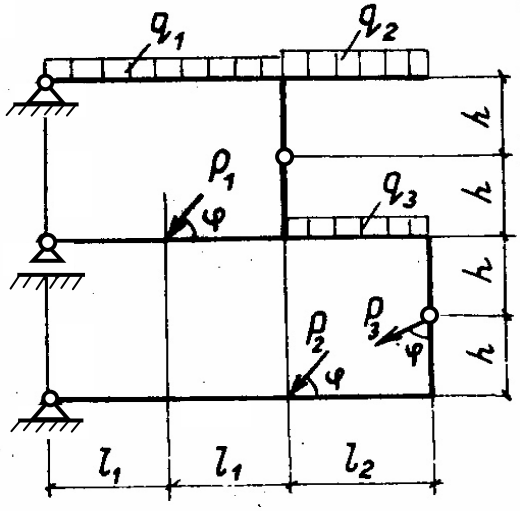
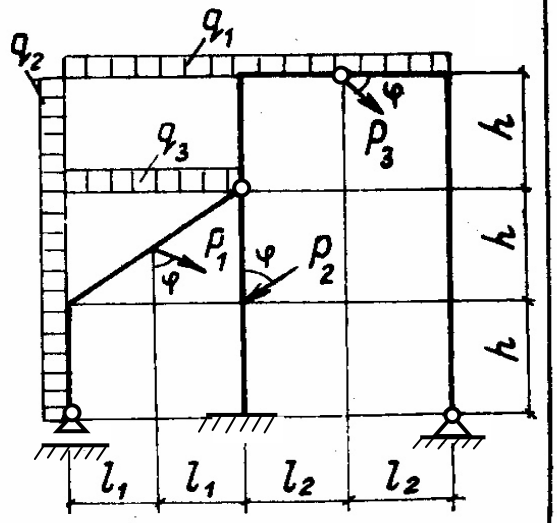
- Пример представления операций по контролю приведен в отчете по работе 2 приложения 3 к УМК.
- Представляемые при контроле рисунки должны иметь вид аналогичный рис. 2.4 – 2.6 в отчете по работе 2 приложения 3 к УМК.

Таблица 4

АВ	Схема рамы	АВ	Схема рамы
01		04	
02		05	
03		06	

АВ	Схема рамы	АВ	Схема рамы
07		10	
08		11	
09		12	

АВ	Схема рамы	АВ	Схема рамы
13		16	
14		17	
15		18	

АВ	Схема рамы	АВ	Схема рамы
19		22	
20		23	
21		24	

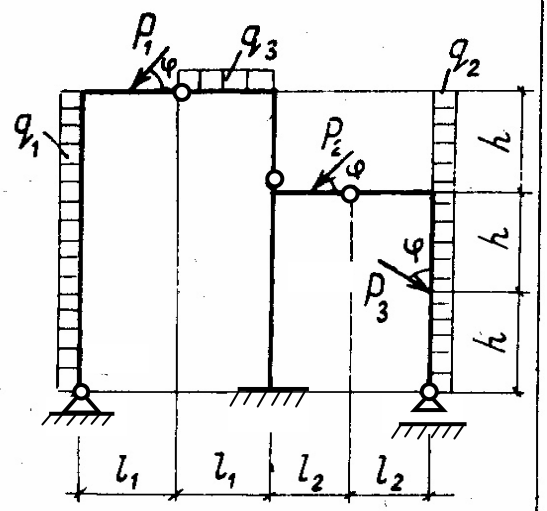
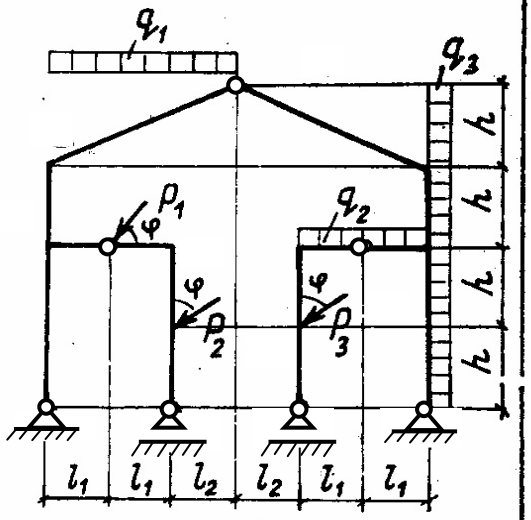
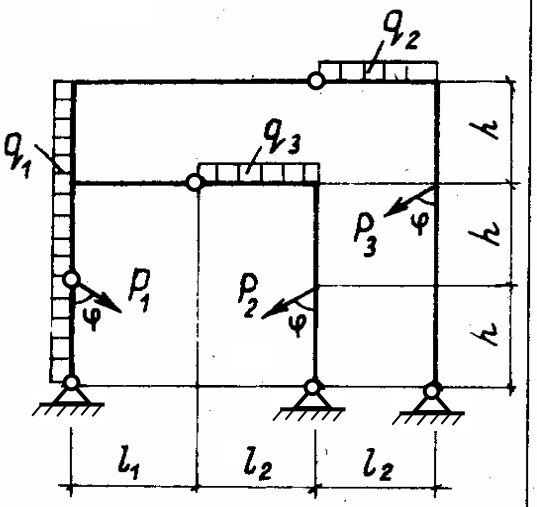
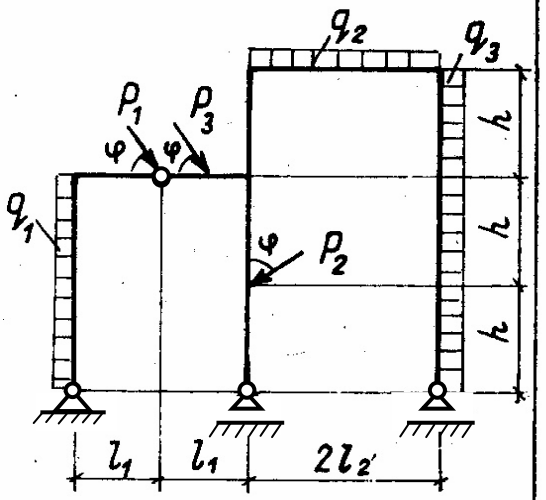
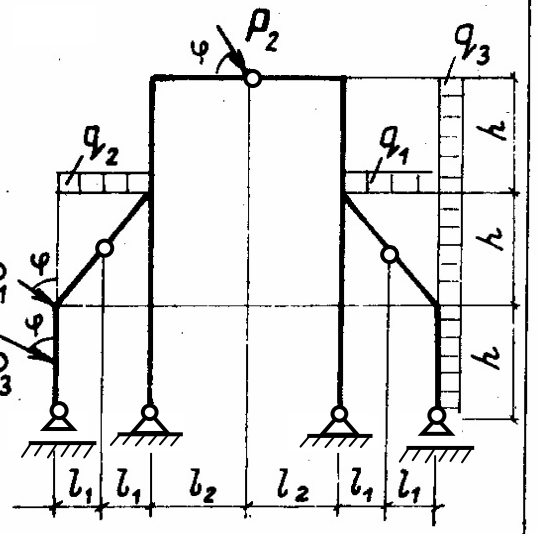
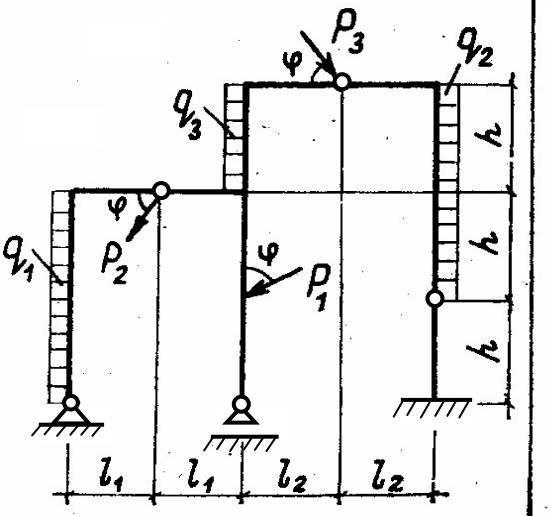
АВ	Схема рамы	АВ	Схема рамы
25		28	
26		29	
27		30	

Таблица 5

C	Размеры				D	Нагрузки					
	l_1 м	l_2 м	h м	φ град		q_1 кН/м	q_2 кН/м	q_3 кН/м	P_1 кН	P_2 кН	P_3 кН
0	3	2	2	45	0	20	0	0	80	0	0
1	3	2	2,5	60	1	0	30	0	0	160	0
2	5	4	3	45	2	0	0	20	0	0	120
3	5	4	4	60	3	30	0	0	0	90	0
4	3	2,5	2,5	45	4	0	20	0	0	0	100
5	4	3	2	60	5	0	0	30	110	0	0
6	4	4	3	45	6	20	0	0	0	0	130
7	5	3	3	60	7	0	30	0	150	0	0
8	4	3	2,5	45	8	0	0	20	0	140	0
9	4	3	3	60	9	0	40	0	0	120	0

3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M, Q, N В АРКЕ

Для расчета задана арка, схема и размеры которой выбираются (табл. 6) в соответствии с цифрам A, B и C шифра ABCD, выданного студенту преподавателем. Загружение арки выбирается из табл. 7 по цифрам B и D шифра ABCD.

Требуется:

1. Проверить выполнение условий статической определимости арки (см. разделы 1 и 2 в УМК и в учебных пособиях [1, 2, 4].

2. Определить с помощью уравнений равновесия вертикальные опорные реакции арки и распор арки [1, 2, 4].

3. Построить эпюры M, Q, N арки на ПК с использованием либо программы ARKA, имеющейся в учебных классах ПК на кафедрах СМ и ТУ и Э и ПГС, либо с помощью программы SCAD. В пособии [4] с примерами расчета использована программа ARKA.

Методические указания.

- Для статически определимых арок программа ARKA реализует определение усилий по формулам, приведенным в подразделе 5.5 УМК и в подразделе 4.5 учебного пособия [1].
- При использовании программы SCAD последовательность операций по расчету выполнить в соответствии с указаниями приложения 1 УМК и учебного пособия [2].

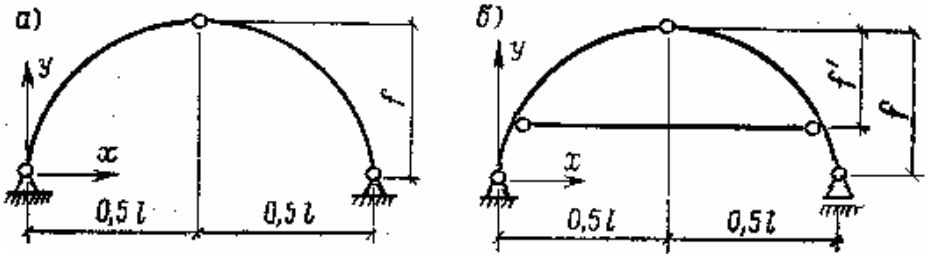


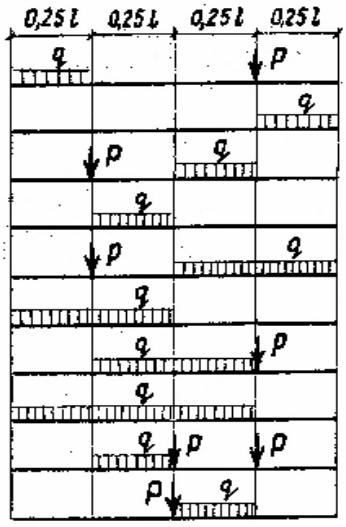
Рис. П1.1

Таблица 6

А	Очертание арки	С	Размеры, м		
			l	f	f'
0;2	Круговое, $y = f - R(1 - \cos\alpha_x)$, $R = \frac{l^2}{8f} + 0{,}5f$, $\alpha_x = \arcsin\left(\frac{l}{2R} - \frac{x}{R}\right)$	0	40	10	6
		1	38	8	5
		2	36	9	7
		3	34	7	5
1;3	Параболическое, $y = 4f(lx - x^2)/l^2$	4	32	6	4
		5	30	10	7
		6	28	9	6
		7	26	7	4
		8	24	8	6
		9	22	6	5

В	Схема арки
0;2;4;6;8	Рис.П1.1,*а*
1;3;5;7;9	Рис.П1.1,*б*

Таблица 7

В	Схема нагружения	Д	Значения нагрузок	
			q, кН/м	P, кН
0		0	16	100
1		1	20	80
2		2	24	110
3		3	28	90
4		4	32	120
5		5	36	160
6		6	40	140
7		7	42	150
8		8	46	130
9		9	50	180

- Формирование расчетной схемы арки, разбитой на конечные элементы типа 2 в программе SCAD выполняется с помощью кнопки «Генерация элементов по дуге» на инструментальной панели раздела «Узлы и элементы/Элементы».
- Результаты расчета представляются в виде эпюр M, Q, N.

4. Выполнить контроль построенных эпюр M, Q, N.

Методические указания.

- Результаты контроля по признакам правильных эпюр и по соответствию эпюр M и Q путем использования уравнения равновесия $Q = dM / dx$ бесконечно малого элемента ds арки приводятся устно при сдаче работы преподавателю.
- Результаты контроля построенных эпюр путем использования уравнений равновесия в виде формул характерных для определения усилий M, Q, N в любом сечении арки (см. подраздел 5.5 в УМК и подраздел 4.5 в учебном пособии [1]) приводится для одного из сечений, выбранных расчетчиком.
- При оформлении отчета по работе рекомендуется использовать примеры, приведенные в отчетах по работам 3-*а* и 3-*б* в приложении 3 к УМК и учебном пособии [4].

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ

Для расчета задана ферма, схема которой выбирается (табл. 8) в соответствии с двумя первыми цифрам шифра ABCD, выданного студенту преподавателем.

Размеры фермы выбираются из табл. 9 по цифре C шифра ABCD. Нагрузка на ферму задана в виде единичных вертикальных сосредоточенных в узлах верхнего пояса (крайние силы равны 0.5). Размерность сил принята в кН.

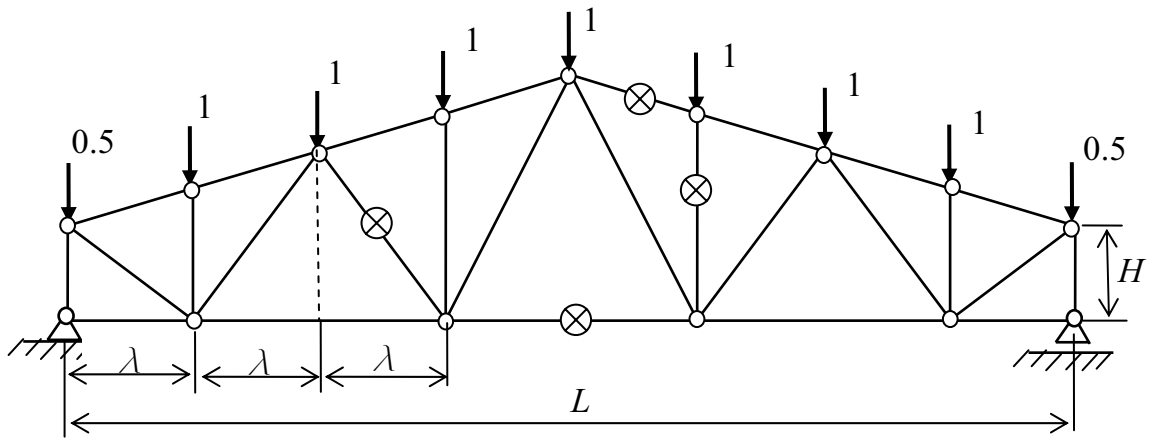
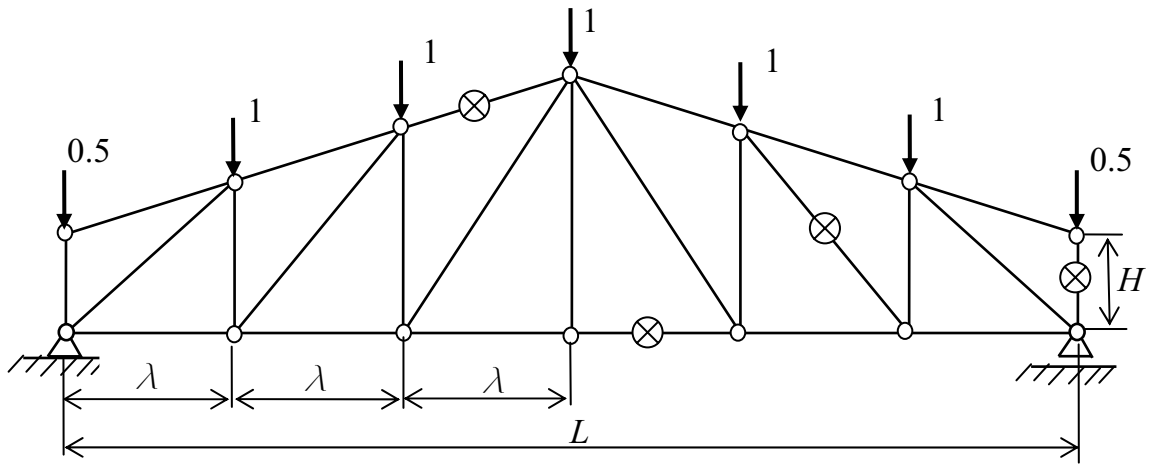
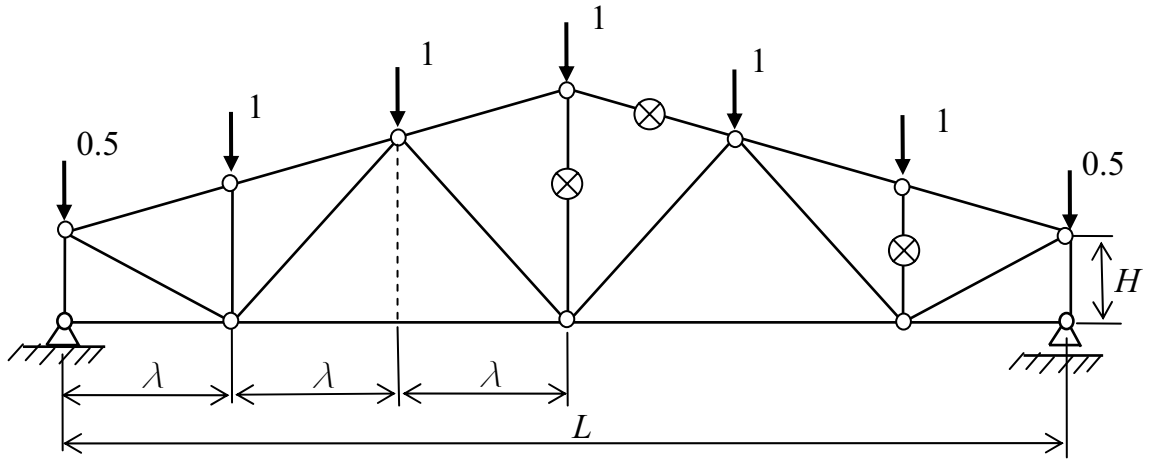
Требуется:

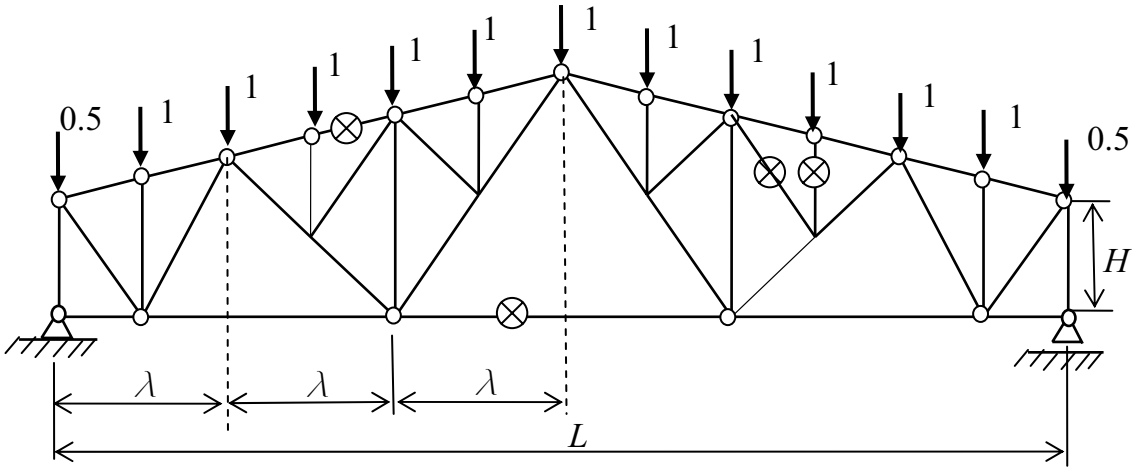
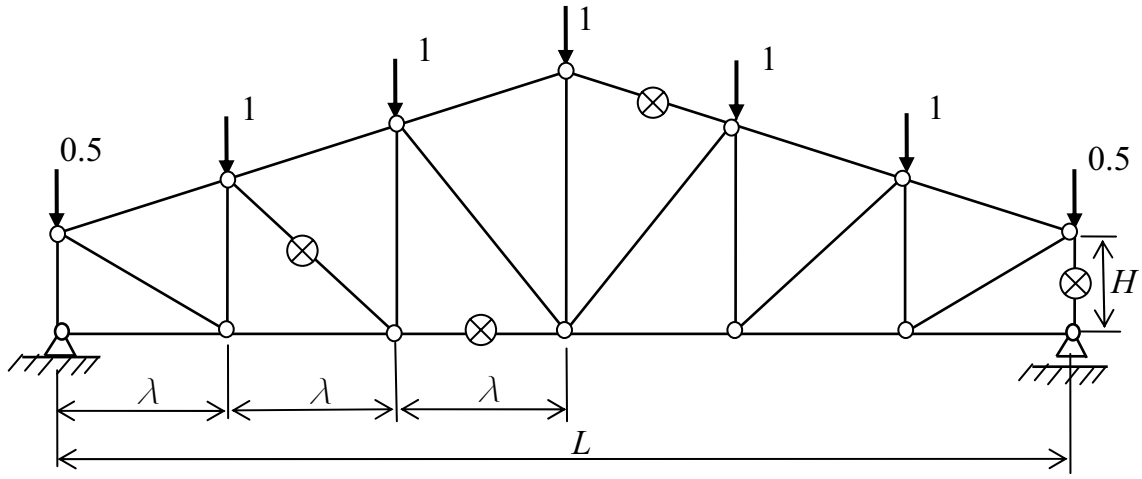
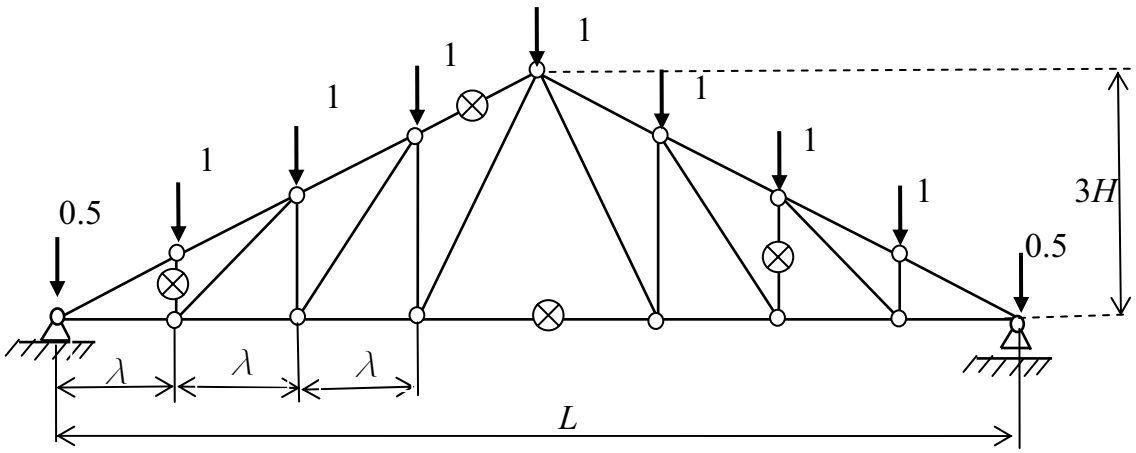
.1. Определить усилия в отмеченных стержнях с помощью уравнений равновесия, выбрав наиболее рациональный способ для каждого заданного стержня.

Методические указания

- Выполнить два пункта проверки статической определимости фермы (см. подраздел 2.6 в УМК и в учебном пособии[1].
- Определить опорные реакции фермы.
- Проверить соблюдение уравнений равновесия всей фермы.
- Отметить все явно нулевые стержни при заданной нагрузке.
- Выбрать рациональный способ (вырезания узлов, сечений, комбинированного)

Таблица 8

AB	Типовая схема фермы
01	
02	
03	

AB	Продолжение таблицы 8
04	
05	
06	

определения усилия в каждом отмеченном стержне с помощью уравнений равновесия.

2. Определить продольные силы во всех стержнях фермы, выполнив расчет на ПК с помощью программы SCAD.

Методические указания.

- Последовательность операций по расчету фермы на ПК с использованием программы SCAD и пример расчета приведены в приложении 1 к УМК и в учебных пособиях [2, 4].
- Результаты расчета представляются в виде:

1) заданной в табл. 8 расчетной схемы, построенной в масштабе, с заданной нагрузкой (см. рис.4.1 в [4]);

2) расчетной схемы, построенной в программе SCAD либо на основе заданной в программе типовой схемы в разделе **Схема**, либо построенной по координатам узлов (схема печатается на принтере ПК, см. рис. 4.2 в [4]);

3) расчетной схемы, построенной в рабочем окне раздела **Графический анализ** программы SCAD с эпюрами усилий N в стержнях фермы с указанием величин усилий (оцифровка с помощью панели фильтров отображения), см. рис. 4.3 в [4]).

3. Сопоставить усилия в отмеченных стержнях, найденные вручную (с помощью рациональных для данного усилия уравнений равновесия) и расчетом всей фермы МКЭ, реализованном на ПК с помощью программы SCAD.

Таблица 9

Цифры шифра: ***АВ***	01, 11, 21, 31,	02, 12, 22, 32,	03, 13, 23, 33,	04, 14, 24, 34,	05, 15, 25, 35,	06, 16, 26, 36,	07, 17, 27, 37,	08, 18, 28, 38,	09, 19, 29, 39,	10, 20, 30, 40.
№ схемы	01	02	03	04	05	06	01	02	03	04
Цифра шифра: **С**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L, м	12	18	24	12	18	24	24	18	12	12
H, м	1	1.5	1	1.2	1	1.4	1.2	1.3	1.4	1.5
Число панелей у фермы, шт	8	6	6	6	6	8	6	8	8	8
α ,град	15	15	15	15	15	15	10	10	10	30

Методическое указание. При построении расчетной схемы фермы рекомендуется использовать схемы типовых ферм, приведенных в разделе «Схема» программы SCAD.

РАСЧЕТНЫЕ РАБОТЫ ПО ПОСТРОЕНИЮ ЭПЮР УСИЛИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

5. ПОСТРОЕНИЕ ОГИБАЮЩИХ ЭПЮР ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ $M_{\max}$ И $M_{\min}$ В НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКЕ

Исходные данные

1. Расчетная схема неразрезной балки выбирается из табл.10 по первым двум цифрам (AB) шифра (ABCD), выданного студенту для получения заданий по самостоятельной работе.

2. Схема загружения пролетов балки выбирается из табл. 11, а значения нагрузок берутся из табл. 12 по четвертой цифре (D) шифра.

3. Длины пролетов и консолей балки выбираются из табл. 12 по третьей цифре (C) шифра.

3.1. Нагрузка в виде сосредоточенных сил P и равномерно распределенной нагрузки p является *постоянной нагрузкой*.

Примечания.

1. Если на схеме балки имеется одна или две консоли, то распределенной нагрузке p на пролете соответствует такая же нагрузка на консоли.
2. Если в пролете действует одна, две или три сосредоточенные силы P, то на консоли действует только одна сосредоточенная сила, приложенная на ее конце.
3. Постоянная нагрузка действует *одновременно на все пролеты и консоли балки*.

3.2. Нагрузка в виде сосредоточенных сил G и равномерно распределенной нагрузки g является *временной нагрузкой*.

Примечания.

1. Если на схеме балки имеется одна или две консоли, то временная распределенная нагрузка g может действовать отдельно и на консоли.
2. Если в пролете действует одна, две или три сосредоточенные силы G, то на каждой консоли также может действовать отдельно одна временная сосредоточенная сила G, приложенная на конце консоли.
3. Загружение каждого пролета и каждой консоли балки временной нагрузкой производится отдельно.

Значения постоянных и временных нагрузок берутся из табл. 11.

Поперечное сечение балки постоянно для всех пролетов.

***Требуется*:**

1. На ПК с помощью программы SCAD реализующей МКЭ, построить эпюры изгибающих моментов в сечениях балки от следующих загружений:

1.1. От заданной постоянной нагрузки (Загружение 1).

1.2. От отдельных загружений консолей и пролетов балки временной нагрузкой (Загружения $i =$ 2, 3, 4,…).

2. Взять из таблицы усилий, полученных в результате расчета, величины изгибающих моментов в намеченных узлах КЭ, на которые разбита балка, и внести эти значения (с рациональным округлением) в табл. 13.

3. Подсчитать в загружениях от временной нагрузки суммы $\sum_i M^{+}_{i,\text{врем}}$ только положительных и $\sum_i M^{-}_{i,\text{врем}}$ только отрицательных ординат для каждого узла и внести эти суммы в соответствующие ячейки табл. 13 (или отредактировать таблицу с результатами расчета, полученную в программе SCAD, см. пример оформления отчета по работе в учебном пособии [4]).

4. Подсчитать ординаты $M_{\max}$ и $M_{\min}$ в каждом узле по формуле, приведенной в учебном пособии [3] и внести эти величины в соответствующие ячейки табл. 13 (или отредактировать таблицу с результатами расчета, полученную в программе SCAD, см. пример оформления отчета по работе в учебном пособии [4]).

5. По внесенным в табл. 13 величинам изгибающих моментов построить соответствующие эпюры: $M_{\text{пост}}$, $M_{i,\text{врем}}$, $M_{\max}, M_{\min}$ либо вручную, либо с помощью компьютера, использовав, например, программу *Mikrosoft Excel* (см. пример построения этих эпюр на рис. 5.4 и 5.5 в отчете по работе 5 в приложении 3 к УМК и на рис. 2.3 и 2.4 в учебном пособии [3]).

Методические указания по выполнению работы.

1. Прежде чем строить расчетную схему с помощью программы SCAD необходимо построить ее вручную в тетради (см. раздел 9 УМК, отчет по работе 5 в приложении 3 и в учебных пособиях [3, 4]). При этом узлы КЭ необходимо назначить на концах консолей, на опорах и в точках приложения постоянных или временных сосредоточенных сил. На схеме вручную проставить номера узлов и элементов (слева направо) и указать длины элементов в метрах.

2. Подготовить табл. 13 при выполнении пунктов 2 – 5 задания, либо отредактировать таблицу с результатами расчета в программе SCAD (см. табл. 5.1 в отчете по работе 5 в приложении к УМК и в учебном пособии [4]).

Таблица 10

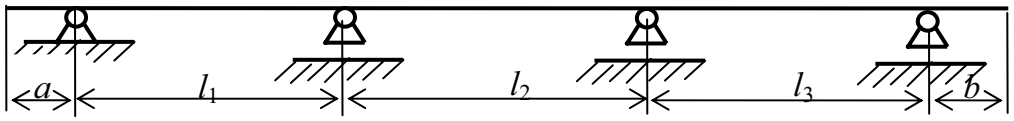
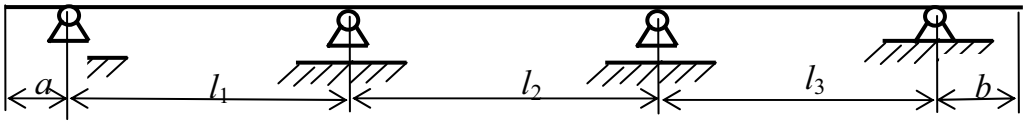
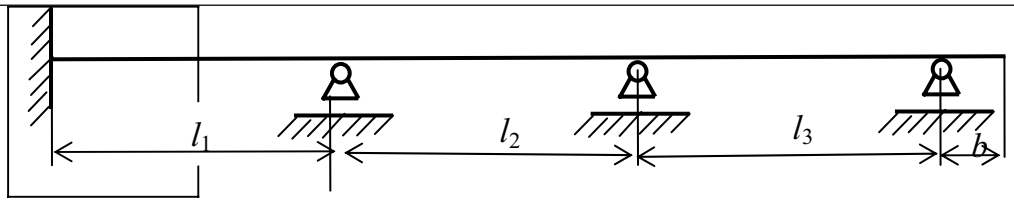
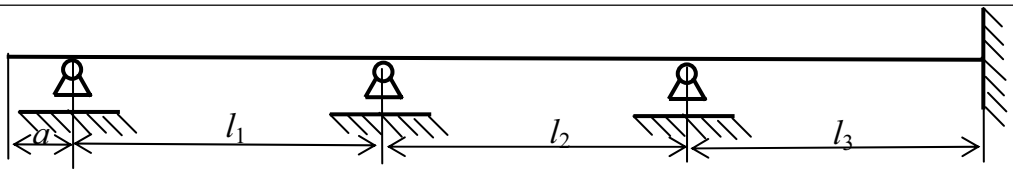
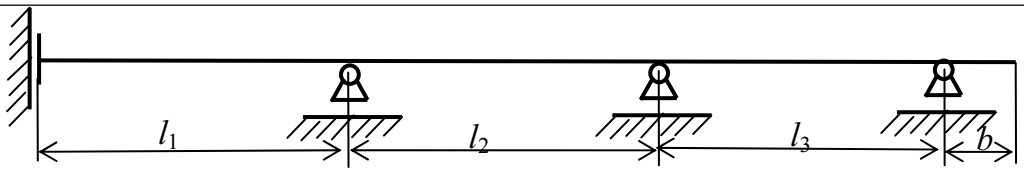
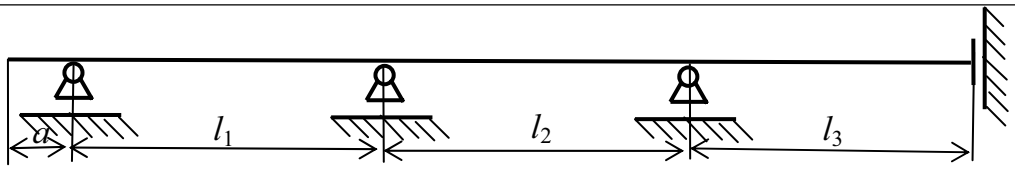
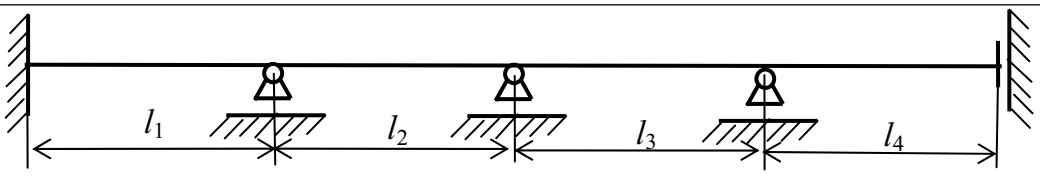
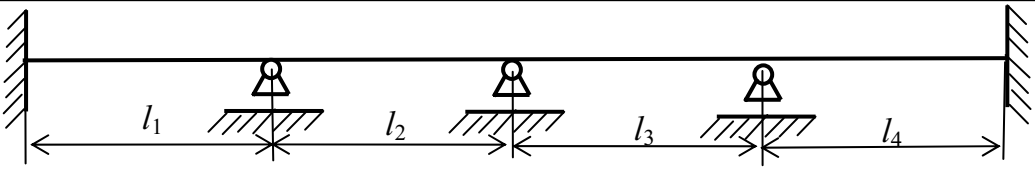
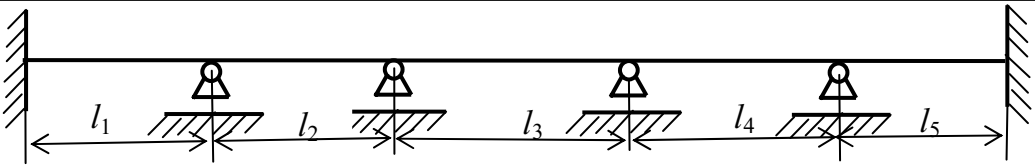
AB	Схема неразрезной балки
01 10 19 28	
02 11 20 29	
03 12 21 30	
04 13 22 31	
05 14 23 32	
06 15 24 33	
07 16 25 34	
08 17 26 35	
09 18 27 36	

Таблица 11

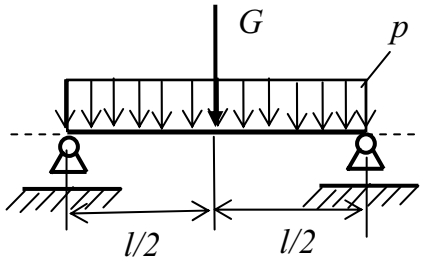
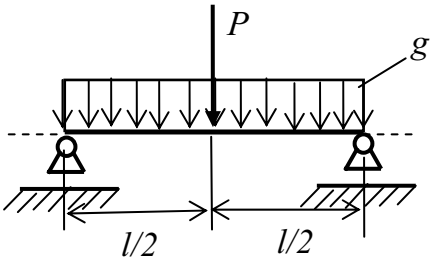
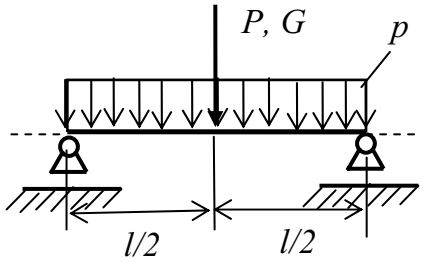
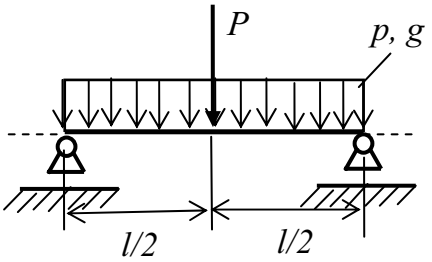
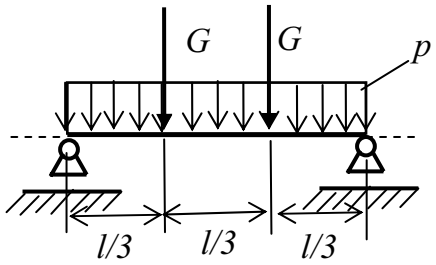
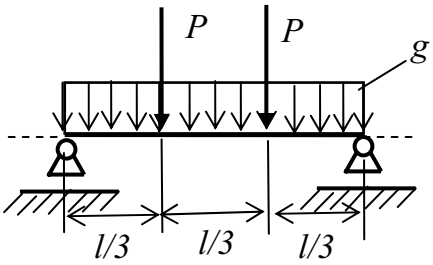
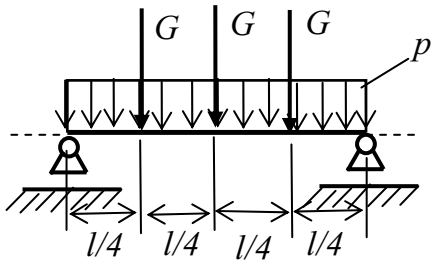
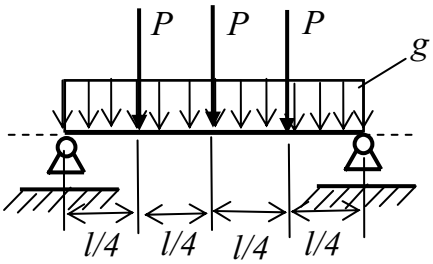
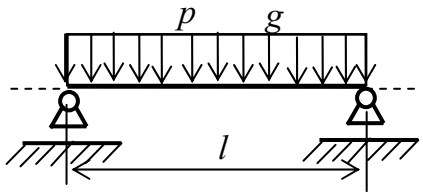
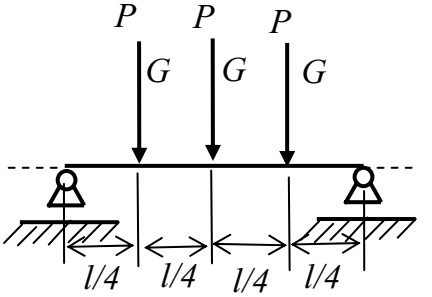
D	Схема нагрузки на пролетах неразрезной балки	***D***	Схема нагрузки на пролетах неразрезной балки
0		1	
2		3	
4		5	
6		7	
8		9	

Таблица 12

Данные для всех расчетных схем балок												
C	Длины пролетов и консолей балки, м							***D***	Нагрузка на пролеты балки			
	a	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	b		P, кН	G, кН	p,кН/м	g,кН/м
0	1	6	8.4	9	8.4	6	1	0	40	60	10	20
1	1	7.5	9	12	9	7.5	1	1	50	100	20	40
2	1	8.4	12	12	12	8.4	1	2	30	70	10	10
3	1	9	9	12	9	9	1	3	20	40	10	20
4	1	6	9	8.4	9	6	1	4	40	80	20	50
5	1	9	6	12	6	9	1	5	40	60	10	20
6	1	12	9	9	9	12	1	6	50	100	20	40
7	1	12	9	12	12	9	1	7	30	70	10	10
8	1	8	10	8	10	8	1	8	20	40	10	20
9	1	10	8	12	8	10	1	9	40	80	20	50

Примечания.

1. Если консоли или пролета с указанным номером на расчетной схеме нет, то из таблицы соответствующие длины не берутся.
2. Аналогично по цифре шифра ***D*** выбираются значения только тех нагрузок, которые указаны на схеме в табл.11.

6. ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОМ СИЛ ЭПЮРЫ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ В НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКЕ ПРИ ЗАГРУЖЕНИИ ОДНОГО ЕЕ ПРОЛЕТА

Для рассмотренной в работе 5 неразрезной балке выбрать одно из ее загружений временной нагрузкой.

Требуется:

1. Выполнить расчет по построению эпюры $\square$ в сечениях неразрезной балки для выбранного загружения двумя способами реализации метода сил (см. раздел 7 в УМК и раздел 6 в учебном пособии [1].

1.1. Способом решения системы уравнений метода сил, составленной с помощью общего уравнения трех моментов, с использованием стандартной программы решения системы алгебраических уравнений.

1.2. Способом решения системы уравнений метода сил, составленной с помощью общего уравнения трех моментов, с использованием моментных фокусных отношений (способ аналитической прогонки).

3. Сопоставить результаты расчета, выполненного в задании 5 на ПК с использованием программы SCAD и выполненных двумя способами реализации метода сил.

Примечание. Учащимся рекомендуется ознакомиться в разделе 7 УМК с методикой построения эпюры M графическим способом С.С. Голушкевича (способ графической прогонки)

. РАСЧЕТ ФУНДАМЕНТНОЙ БАЛКИ, ОПИРАЮЩЕЙСЯ НА НЕПРЕРЫВНОЕ ГРУНТОВОЕ ОСНОВАНИЕ МОДЕЛИ ВИНКЛЕРА

Исходные данные

Дана балка (рис. 7.1), лежащая на грунтовом основании модели Винклера (см. раздел 9 в УМК и раздел 3 в учебном пособии [3].

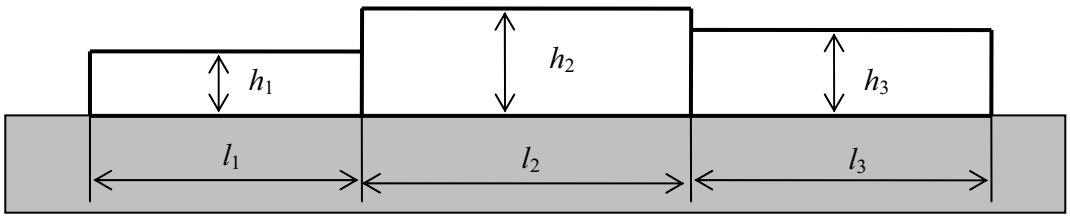


Рис. 7.1

1. Длины участков балки для заданной схемы балки и вид грунта основания выбираются из табл. 14 по второй цифре (*B*) шифра (*ABCD*), выданного студенту для получения заданий по самостоятельной работе.

2. Коэффициент постели грунтового основания модели Винклера выбирается из табл. 15 в соответствии с заданным в табл. 14 № типа грунта основания балки.

3. Высота балки $\square$ на участках длиной l_i выбирается из табл. 14 по третьей цифре (*C*) шифра. Ширина балки принимается равной 1 м.

4. Вид нагрузок на участках, их значения и последовательный вид нагрузок на участках выбираются из табл. 14 по четвертой цифре (*D*) шифра. Сосредоточенные силы *P* и моменты *M* прикладываются по середине участка. Распределенная нагрузка *q* занимает весь участок.

С помощью программы SCAD требуется выполнить следующие расчеты балки

1. Построить эпюру осадок балки с указанием характерных ординат эпюры в узлах сетки КЭ (см. рис. 7.2 в [4]).

2. Построить эпюру давления балки на грунт с указанием характерных ординат эпюры в тех же узлах (см. линейную зависимость (3.6) в [3] и 7.1 в [4] и рис. 7.3 в [4]).

3. Построить эпюры M и Q с указанием характерных ординат эпюр и проанализировать их вид и соответствие друг другу, а также заданным нагрузкам и эпюре реакции грунтового основания (см. рис. 7.4 в [4]).

Результаты расчета представляются в виде, приведенном в примере отчета по работе 7 [4].

8. РАСЧЕТ РАМЫ ПРОМЫШЛЕННОГО ЗДАНИЯ ОТ РАЗЛИЧНЫХ НАГРУЗОК И ИХ КОМБИНАЦИЙ

Работа выполняется в рамках комплексного проекта по дисциплине «Каркасные здания и сооружения». В соответствии с этим получается расчетная схема рамы, ее геометрические параметры и нагрузки на нее.

Расчет выполняется методом конечных элементов (МКЭ), реализуемом на ПК с помощью программы SCAD, в соответствии с учебными пособиями [1-5].

Результаты расчета представляются в виде, необходимом для комплексного проекта. Вариант такого представления результатов приведен в учебном пособии [5].

Таблица 13

Загру-жения	Номера узлов конечных элементов															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1. $M_{\text{пост}}$																
2. $M_{\text{конс}}$																
3. $M_{\text{пр1}}$																
4. $M_{\text{пр2}}$																
5. $M_{\text{пр3}}$																
6, $M_{\text{пр4}}$																
7. $M_{\text{конс}}$.																
$\sum M^{+}_{i,\text{врем}}$																
$\sum M^{-}_{i,\text{врем}}$																
$M_{\max}$																
$M_{\min}$																

Таблица 14

B	Длины участков балки			№ типа грунта по табл. 2	**C**	Высота балки на участках			**D**	Нагрузка			Характер нагрузок на участках
										q Т/м	*P* Т	*M* Т·м	
0	3	4	6	1	0	1.2	1.6	1	0	3	10	20	*q, P, M*
1	3	5	4	2	1	1.2	1.0	0.8	1	4	10	30	*M, q, P*
2	4	3	4	2	2	1.3	1.2	1.5	2	3	10	40	*P, q, M*
3	5	3	5	3	3	1.4	1.7	1.5	3	3	10	50	*q, M, P*
4	6	4	4	4	4	1.5	2	1.2	4	2	10	10	*P, M, P*
5	3	5	4	1	5	2	1.2	1.6	5	2	12	20	*M, q, M*
6	4	6	3	2	6	1.6	1.3	1.8	6	4	12	30	*q, P, q*
7	5	3	4	3	7	1	1.4	1.2	7	4	12	40	*M, P, q*
8	6	3	4	4	8	1.2	1.5	1.2	8	5	12	50	*P, q, P*
9	3	4	3	2	9	1.5	1.2	1.4	9	2	12	20	*P, M, q*

Таблица 15

Коэффициенты жесткости основания для различных грунтов [2]		
№ типа грунта	Материал основания	*c* (МПа/м)
1	Плывун. Песок свеженасыпанный. Глина мокрая размягченная.	1 – 5
2	Песок слежавшийся балластный. Гравий насыпной. Глина влажная.	5 – 50
3	Песок плотнослежавщийся. Гравий плотнослежавшийся. Щебень. Хрящ. Глина малой влажности.	50 – 100
4	Песчано-глинистый, искусственно уплотненный. Глина твердая.	100 – 200
5	Мягкая трещиноватая скала. Известняк. Песчаник. Мерзлота.	200 – 1000
6	Хорошая твердая скала.	1000 – 15000
7	Бетон.	8000 – 15000
8	Свайное основание.	50 – 150

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ УЧЕБНЫХ РАСЧЕТНЫХ РАБОТ

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 353

1. Построение эпюр M и Q в многопролетной шарнирной балке 354

2. Построение эпюр M, Q, N в статически определимой раме…….….. 363

3-а. Построение эпюр M, Q, N в статически определимой арке без затяжки…….….. 371

3-б. Построение эпюр M, Q, N в статически определимой арке с затяжкой…….…. 380

4. Определение усилий в стержнях статически определимой фермы……..… 388

5. Построение огибающих эпюр $M_{\max}$ и $M_{\min}$ в многопролетной статически неопределимой неразрезной балке…….……..…..…… 396

6. Построение эпюры M в неразрезной балке при загружении одного из ее пролетов или консоли с использованием уравнения трех моментов и фокусных точек……. 402

7. Построение эпюр M, Q в балке, лежащей на непрерывном грунтовом основании модели Винклера……..…….. 414

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении дисциплины «Строительная механика» учащийся специальности ПГС дневной, вечерней и заочной форм обучения самостоятельно выполняет несколько расчетных работ. Задания по этим работам даны в сборнике заданий, приведенном в приложении 2 УМК и в отдельном сборнике [4].

Однако анализ отчетов студентов о выполнении самостоятельных расчетных работ показывает, что учащиеся, особенно вечерней и заочной форм обучения, испытывают затруднения при оформлении отчетов и не всегда представляют результаты расчетов в том виде, который интересует преподавателя. Этим объясняется появление данного сборника примеров оформления отчетов по учебным расчетным работам .

Обратим внимание, что в приведенных примерах отчетов много пояснений и примечаний, которые в отчете, выполняемом самим учащимся, приводить не нужно. В тоже время необходимо, чтобы методика решения задачи была достаточно полно отражена в отчете.

Кроме того, из приведенных примерах отчетов исключены такие их формальные элементы, как оглавление и список литературы. Это связано с тем, что: сам объем отчета по работе небольшой, поэтому оглавление не требуется. Общий для всех разделов УМК библиографический список приведен в конце данного учебного пособия.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики и теории упругости

ОТЧЕТ
о выполнении расчетной работы 1

Построение эпюр M и Q в многопролетной шарнирной балке

(шифр задания ……)

Выполнил :
студент гр. ……
……
Принял :
преподаватель
……..

С.-Петербург
2007

По шифру АВСВ из сборника заданий, приведенного в сборнике заданий (см. приложение 2 к УМК или [6]), выбираем расчетную схему балки (рис. 1.1, *а*), ее размеры, м, и нагрузку на нее, кН·м, кН/м, кН,:

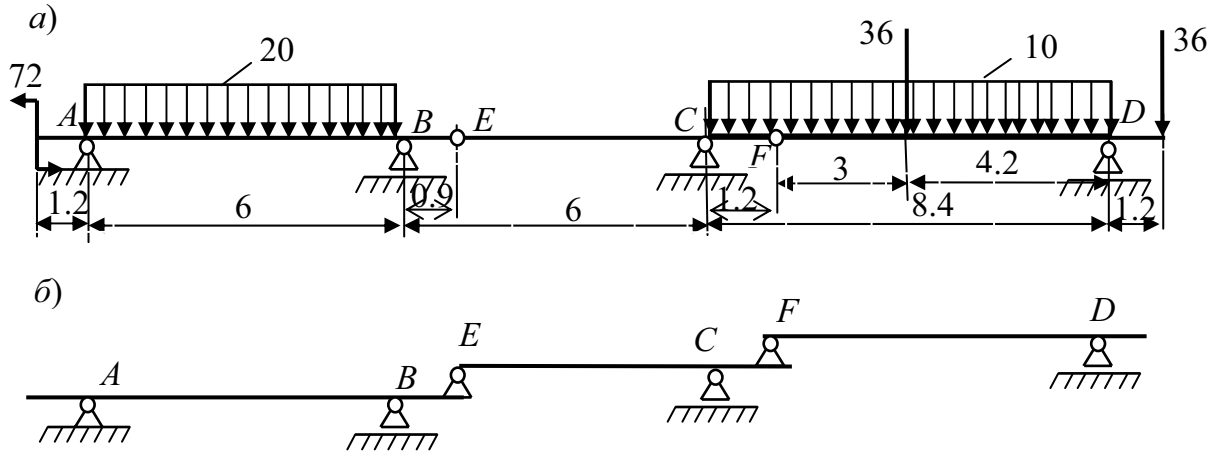


Рис. 1.1

В соответствии с заданием по работе 1 (см. сборник заданий в приложении 2 УМК и в [6] требуется:

- построить эпюры усилий M и Q в балке расчетом на ПК с использованием программы SCAD и определить по эпюрам усилий опорные реакции балки (см. раздел 8 и приложение 1 к УМК);
- выполнить контроль результатов расчета (см. разделы 4, 5 УМК).

РАСЧЕТ БАЛКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

Сначала выполним следующие предварительные действия, необходимые для начала работы на ПК с использованием программы SCAD (см. приложение 1 к УМК).

1. Проверяем статическую определимость балки

1.1. Подсчитываем степень статической неопределимости балки. Для этого используем общую для всех стержневых систем формулу (2.21):

$$n = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) - (3 + n_{1\text{ш}}).$$

В рассматриваемой балке: $n_{\text{оп}} = 5$; $n_{\text{к}} = 0$; $n_{1\text{ш}} = 2$. Тогда получим: $n = 0$. Выполняется необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости балки.

1.2. Исследуем геометрическую неизменяемость балки. В данном случае для этого достаточно выполнить ее структурный анализ, построив так называемую «этажную схему».

Действительно (рис. 1.1, *б*), заданную балку можно рассматривать как

систему, состоящую из трех жестких дисков (*ABE*, *ECF* и *FD*), опирающихся друг на друга. Диск *ABE* неподвижно прикреплен к основанию тремя опорными связями и, таким образом, геометрически неизменяем. Диск *ECF* прикреплен двумя связями к неподвижному диску *ABE* и одной связью к неподвижному основанию, поэтому он также геометрически неизменяем. Аналогично доказывается, что диск *FD* геометрически неизменяем, а значит, геометрически неизменяема и вся заданная шарнирная балка.

Таким образом, на основании исследований, выполненных в пунктах 1, *а* и 1. *б*, делаем вывод: ***заданная балка является статически определимой системой.***

2. Изображаем вручную расчетную схему балки для МКЭ

С целью подготовки ввода исходных данных при использовании программы SCAD:

2.1. Разделяем балку на стержневые конечные элементы типа 2, намечая узлы разбиения в местах расположения опор, шарниров, сосредоточенных сил и моментов, а также в начале и конце участков с распределенной нагрузкой.

Отметим номера узлов и КЭ. Укажем длины КЭ, м (рис. 2).

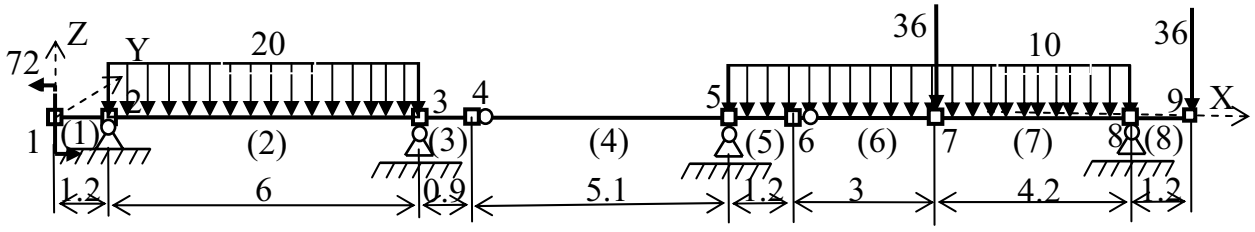


Рис. 1.2

2.2. Соотнесем балку с осями общей системы координат для всей балки.

2.3. Намечаем направление опорных связей в узлах, совпадающих с опорами балки. В программе SCAD горизонтальная и вертикальная связи имеют соответственно направления X и Z.

2.4. Изображаем на оси балки шарниры, позволяющие звеньям шарнирной балки поворачиваться вокруг оси Y относительно друг друга (что равносильно удалению связи в сечении, где расположен такой шарнир, мешающей сечениям соединяемых в шарнире звеньев балки поворачиваться). Шарнир находится в узле. Но в программе SCAD, он относится к одному из соединяемых в узле элементов. Из двух соединяемых КЭ изобразим шарнир на КЭ, который имеет большую длину.

2.5. Загружаем расчетную схему заданной нагрузкой (см. рис. 1.1, *а*)

В результате получаем подготовленную вручную расчетную схему балки для использования МКЭ в программе SCAD (рис. 1.2).

3. Выполняем расчет на ПК с помощью программы SCAD

Расчет выполняем в соответствии с инструкцией, приведенной в приложении 1 к УМК и в учебном пособии [2]. Результаты расчетов представляем в виде эпюр усилий M и Q (рис. 1.3).

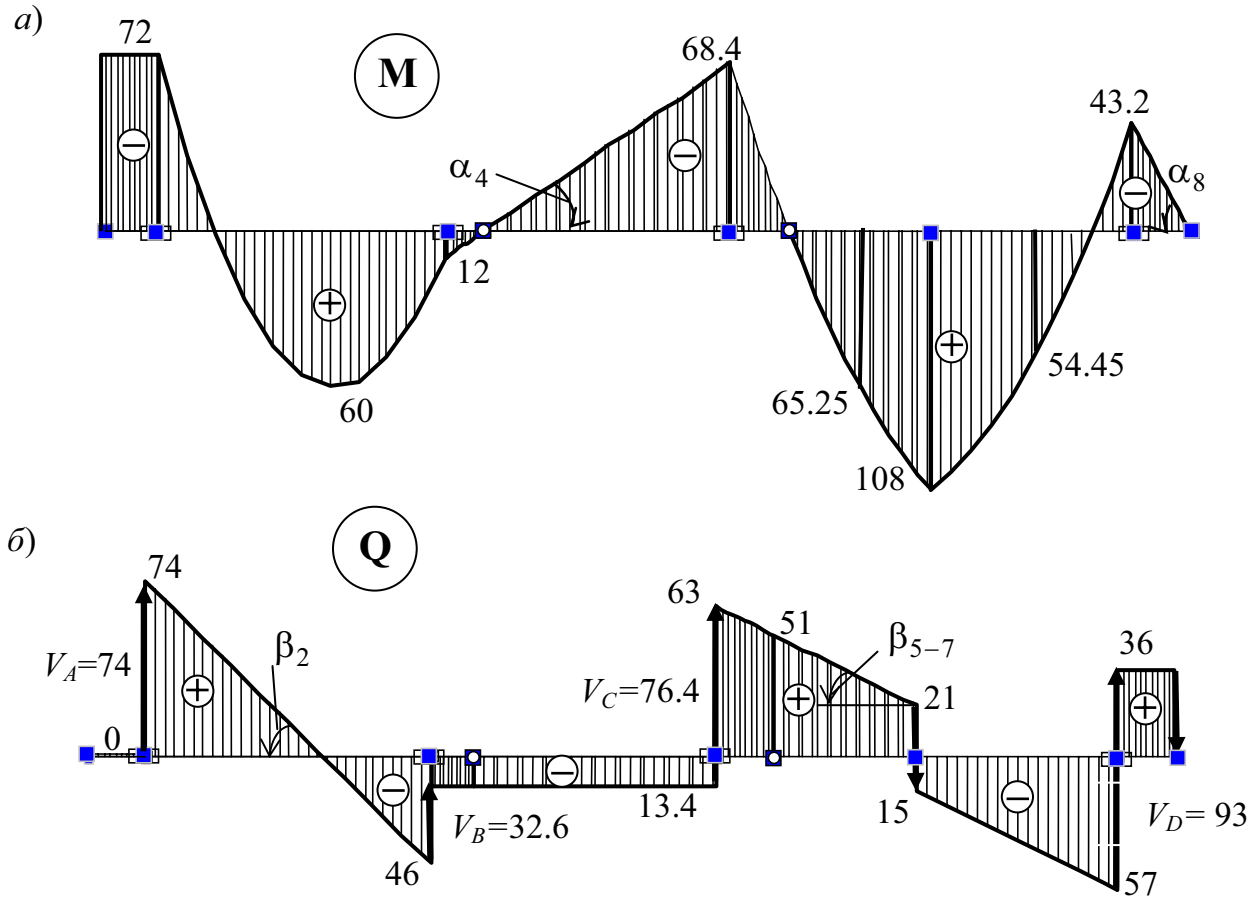


Рис. 1.3

С помощью эпюры Q определяем опорные реакции балки. Они равны в выбранном масштабе ординат эпюры Q «скачкам» ординат эпюры на опорах балки. Направление вектора опорной реакции определим по направлению излома эпюры M в месте действия реакции (см. признаки правильной эпюры M в подразделе 4.1 УМК). Это направление соответствует и направлению скачка ординат эпюры Q от реакции при движении по эпюре слева направо.

КОНТРОЛЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА БАЛКИ

1. Контроль по признакам правильных эпюр усилий

Выполняя этот контроль (см. раздел 4 УМК и раздел 3 в [1]) устанавливаем, что эпюры M и Q отвечают признакам правильных эпюр.

Методическое указание для учащихся. Конкретную иллюстрацию этой проверки автор работы сообщает преподавателю устно при защите работы.

2. Контроль соответствия эпюр M и Q

Из уравнений равновесия ($dQ/dx = q_z$ и $dM/dx = Q$) бесконечно малого элемента dx балки следует, что эпюра Q балки должна соответствовать нагрузке q_z на балку, а эпюра Q – эпюре M. Проверка построенных эпюр показывает, что такое соответствие имеется:

Контроль соблюдения уравнения равновесия $dQ/dx = q_z$.

1) На незагруженных по длине элементах 1, 3, 4 и 8 $q_z = 0$. Поэтому $dQ/dx = 0$. Это означает, что эпюра поперечной силы на указанных элементах должна иметь постоянное значение. Это требование соблюдается.

2) На загруженных элементах 2 и элементах 5, 6, 7 должны соблюдаться уравнения соответственно равновесия $dQ/dx = \mathrm{tg}\beta_2 = 20$ кН и $dQ/dx = \mathrm{tg}\beta_{5-7} = 10$. Эти равенства соблюдается.

Контроль соблюдения уравнения равновесия $dM/dx = Q$.

1) На незагруженных элементах 1, 4, 8 должны соответственно соблюдаться уравнения $dM/dx = 0$, $dM/dx = \mathrm{tg}\,\alpha_4 = 13.4$ кН, $dM/dx = \mathrm{tg}\,\alpha_8 = 36$ кН. Эти уравнения соблюдаются.

2) На загруженных элементе 2 и элементах 5, 6, 7 должны наблюдаться соответствие эпюр M и Q по знакам: при $dx > 0$ и $dM > 0$ ($dM < 0$) должна соответствовать эпюра $Q > 0$ ($Q < 0$); при $dM/dx = 0$ на эпюре Q должна быть нулевая ордината. Эти условия соблюдаются.

3. Применение уравнений равновесия для всей балки и для любой ее части

Должна находиться в равновесии, как вся балка, так и любая выделенная из нее сечениями часть.

Проверка равновесия балки. Так как после определения опорных реакций балки стали известны все внешние силы, действующие на нее в плоскости XZ, то, прежде всего, должны удовлетворяться три уравнения равновесия балки: $\sum X = 0$; $\sum Z = 0$; $\sum M_k = 0$ (k – любая точка на плоскости XZ).

Методическое указание для учащихся. При выполнении учебной работы, для уменьшения ручного счета допускается выполнить проверку только первых двух уравнений.

Первое уравнение удовлетворяется, так как на балку не действуют горизонтально направленные силы. Равновесие второго уравнения соблюдается, так как эпюра Q отражает равенство нулю суммы всех вертикальных сил (это видно при движении слева направо по оси отсчета ординат эпюры Q). Проверка третьего уравнения здесь не приводится.

Проверка равновесия любой выделенной части балки. Ограничимся рассмотрением равновесия части балки, выделенной из нее двумя сечениями, расположенными бесконечно близко (слева и справа) к опоре D (рис. 4). Применяя три уравнения равновесия, видим, что они тождественно удовлетворяются.

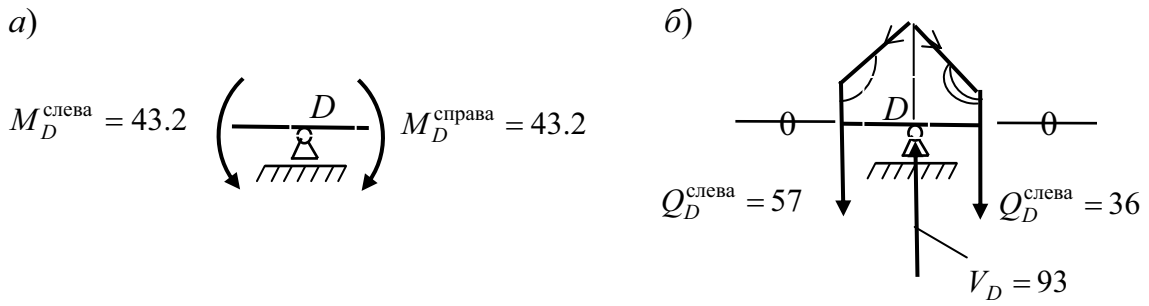


Рис. 1.4

4. Использование конструктивных особенностей балки для определения любых опорных реакций и усилий в сечениях балки

В подразделе 5.2 УМК приведена методика расчета шарнирной балки вручную с использованием ее конструктивной особенности опирания частей балки между шарнирами друг на друга и на основание в виде этажной схемы (см. рис. 5.1 в разделе 5 УМК).

Продемонстрируем определение опорной реакции V_D, давления V_F в шарнире балки и построение эпюр M и Q для верхнего звена FD этажной схемы балки (см. рис. 1.1, *б*). Выделим это звено и рассмотрим его как балку на двух опорах (рис. 1.5).

Определяем опорные реакции звена FD

1. $\sum X = 0 : H_F = 0$
2. $\sum M_F = V_D\ 7.2 - (10 \cdot 7.2)\ 3.6 \cdot - 36(3+8.4) = 0;\ V_D = 93$ кН.
3. $\sum Z = -(10 \cdot 7.2) - 36 \cdot 2 + 93 + V_F = 0;\ V_F = 51$ кН.

Строим эпюру изгибающих моментов M ***звена*** FD

В соответствии с ожидаемым видом эпюры M (см. признаки правильной эпюры M и рекомендациями по ее построению в подразделе 4.1 УМК) для ее построения вручную наметим минимальное число сечений ***достаточное для построения эпюры. В данном случае достаточно вычислить ординаты эпюры в четырех сечениях: опорном сечении*** D ***и сечениях 1, 2 и 3 в пролете балки.*** Намечаем эти сечения на расчетной схеме звена FD (рис. 1.5).

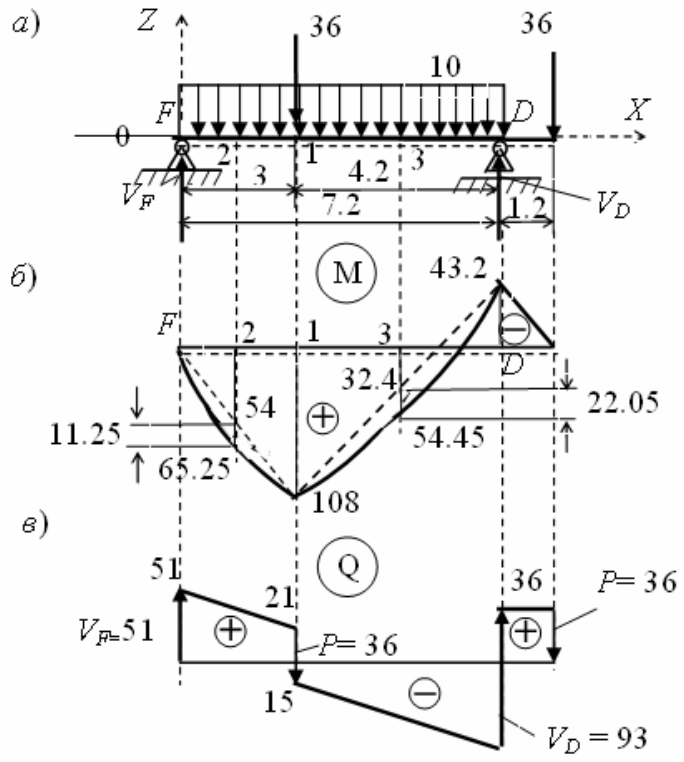


Рис. 5

Для отражения знака изгибающего момента в рассматриваемом сечении ***нижняя сторона балки отмечена пунктиром*** (см. правило знаков для изгибающего момента и правило пунктира в подразделе 4.1).

Из указанных четырех сечений вычислим вначале изгибающие моменты в опорном сечении D и в сечении 1 в пролете балки под сосредоточенной силой:

Сечение D: M_D = – (36·1.2) = – 43.2 кН·м. Знак «минус» показывает, что в сечении балки над опорой растянута верхняя сторона балки. Отложив найденную ординату M_D от оси отсчета, построим на консоли окончательную эпюру изгибающих моментов (см. рис. 5).

Сечение 1: M_1 = + 51·3 – (10·3) 1.5 = + 108 кН·м.· Знак «плюс» показывает, что в сечении 1 пролета балки, где приложена сосредоточенная сила со значением 36 кН, растянута нижняя сторона балки. Отложим полученную ординату снизу от оси отсчета и соединим ее с ординатами эпюры M в опорных сечениях F и D (штриховые линии на рис. 5).

Для построения эпюры M в пределах пролета балки необходимо еще подсчитать ординаты в сечениях 2 и 3. Сделаем это с помощью приема, продемонстрированного на рис. 4.5 подраздела 4.1 УМК:

Сечение 2: $M_2 = +\dfrac{108}{2} + \dfrac{10 \cdot 3^2}{8}$ = + 54 + 11.25 = + 65.25 кН·м.

Сечение 3: $M_3 = +\dfrac{108 - 43.2}{2} + \dfrac{10 \cdot (4.2)^2}{8}$ = + 32.4 + 22.05 = + 54.45 кН·м.

Отложив эти ординаты от оси отсчета, достроим эпюру M на всем звене.

Строим эпюру поперечных сил Q звена FD

Способ 1 (см. подраздел 4.2 УМК). Начнем построение с крайнего левого сечения балки: поперечная сила в этом сечении равна опорной реакции $V_F = 51$ кН (см. рис. 1.5). В соответствии с направлением реакции поперечная сила имеет знак «плюс».

В сечении 2 слева от силы получим: $Q_2^{\text{слева}}$ = +51 – (10·3) = +21кН. В сечении 2 справа от силы получим: $Q_2^{\text{справа}} = Q_2^{\text{слева}}$ – 36 = – 15кН.

В сечении слева от опоры D: $Q_D^{\text{слева}} = Q_2^{\text{справа}}$ – (10·4.2) = – 15 – 42 = – 57кН. В сечении справа от опоры D и сечениях на консоли (слева от силы на конце консоли): $Q_D^{\text{справа}} = Q_{\text{конс}}$ = +36 кН.

Суммарный разрыв в ординатах эпюры Q на опоре D равен реакции этой опоры $V_D = 93$ кН.

Ординаты эпюры Q откладываются от оси отсчета в соответствии с правилом знаков, описанном в подразделе 4.2 УМК.

Способ 2. Значения и знаки Q могут быть определены и вторым способом (по эпюре М с помощью зависимости $Q = dM / dx$). При этом

значения и знаки Q в начале участка (н) и в конце участка (к) (границами участков являются опоры и сосредоточенная сила) вычисляются по формуле:

$$Q_{н,к} = \pm ql_{уч} / 2 + (M_к - M_н) / l_{уч}.$$

Для первого (слева) участка балки: $ql_{уч}$=± 10·3 = ±30 кН; $M_н$ = 0 $M_к$ = +108 кН·м; Тогда $Q_н$= +15 +36 = +51 кН; $Q_к$·= – 15 +36 = +21 кН.

Для второго (слева) участка: $ql_{уч}$ = ± 10·4.2 = ± 42 кН; $M_к$ = – 43.2 кН·м; $M_н$ = 108 кН·м. Тогда $Q_н$= +21 +(-43.2 – 108)/4.2 = +21 – 36 = – 15 кН; $Q_к$·= – 21 – 36 = – 57 кН.

Сопоставляем результаты расчетов вручную с результатами расчетов на ПК

Подсчитанные вручную с помощью уравнений равновесия опорная реакция V_D, вертикальное давление V_F в шарнире F балки и построенные эпюры усилий M и Q на звене FD заданной шарнирной балки полностью совпадают с соответствующими результатами расчетов на ПК.

Примечания для учащихся

1. Аналогичный расчет может быть выполнен и для других звеньев балки. ***Для заданной балки их результаты были продемонстрированы в подразделе 5.2 и на рис. 5.1 УМК.*** Здесь эти расчеты не приводятся.

2. Поскольку суммарные эпюры M и Q для всей балки построены с помощью программы SCAD, то при ручном расчете их приводить не нужно.

Заключение по расчетной работе

Выполненный вручную контроль результатов расчета на ПК с использованием программы SCAD позволяет сделать вывод о достоверности результатов.

Методическое указание учащимся

Представленный здесь отчет по работе из-за подробных пояснений располагается на восьми страницах. Учащимся рекомендуется уменьшить объем отчета, опуская подробности.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики и теории упругости

ОТЧЕТ
о выполнении расчетной работы 2

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M, Q, N В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЕ

(шифр задания ……..)

Выполнил :
студент гр. …….
……
Принял :
преподаватель
……..

С.-Петербург
2007

По шифру ABCD из сборника заданий (см. приложение 2 к УМК и [6]) выбираем расчетную схему рамы (рис. 2.1), ее размеры (в метрах) и действующую на нее нагрузку (кН, кН/м).

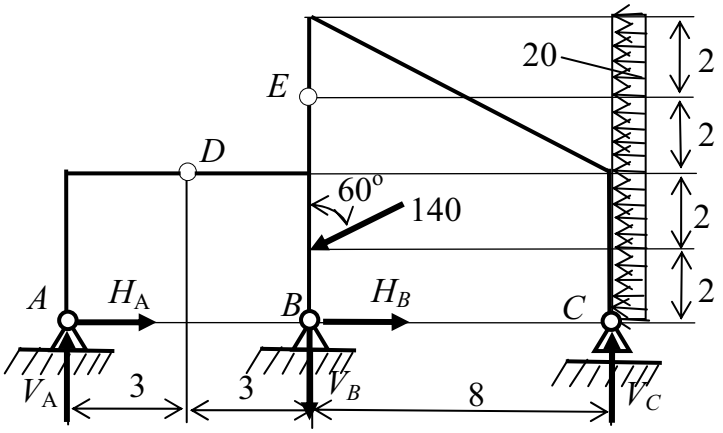


Рис. 2.1

В соответствии с заданием (см. приложение 2 к УМК и [6]) требуется:

1. Построить эпюры усилий M, Q, N в раме расчетом на ПК с использованием программы SCAD и по эпюрам усилий определить опорные реакции рамы (см. разделы 3, 4, 8 и приложение 1 к УМК);

2. Выполнить контроль результатов расчета по признакам правильных эпюр и с использованием уравнений равновесия (см. разделы 4 и 5 УМК).

РАСЧЕТ РАМЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

Сначала выполним следующие предварительные действия, необходимые для начала работы на ПК с использованием программы SCAD.

1. Проверяем статическую определимость рамы

1.1. Подсчитываем степень статической неопределимости n рамы. Для этого используем формулу:

$$n = (n_{оп} + 3n_к) - (3 + n_{1ш}).$$

В рассматриваемой раме: $n_{оп} = 5$; $n_к = 0$; $n_{1ш} = 2$. Тогда получим: $n = 0$. Выполняется необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости рамы.

1.2. Исследуем геометрическую неизменяемость рамы. Необходимое условие ($n = 0$) геометрической неизменяемости (ГН) выполняется, ***что показывает и достаточность числа связей для образования ГН системы***. Однако необходимо еще проверить правильность постановки имеющихся связей. В данном случае структурный анализ показывает, что диски AD и DBE вместе с неподвижным жестким диском основания образуют неподвижный

жесткий диск («треугольник»). Тогда диск *EC* также будет неподвижным жестким диском, поскольку он присоединен к неподвижному диску («треугольнику») тремя связями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными. Стержневая система правильно образована и представляет собой неподвижный диск.

Таким образом, можно сделать вывод, что заданная рама (рис. 2.1) ***является статически определимой системой.***

2. Изображаем вручную расчетную схему рамы для МКЭ

Узлы КЭ типа 2 (Стержень плоской рамы») наметим в опорах, местах расположения шарниров, разрезающих стержни рамы, в местах приложения сосредоточенных сил и по концам участков с распределенной нагрузкой.

В результате подготовим вручную расчетную схему рамы для МКЭ с целью дальнейшего использования ее при построении аналогичной схемы в программе SCAD (рис. 2.2, *а*).

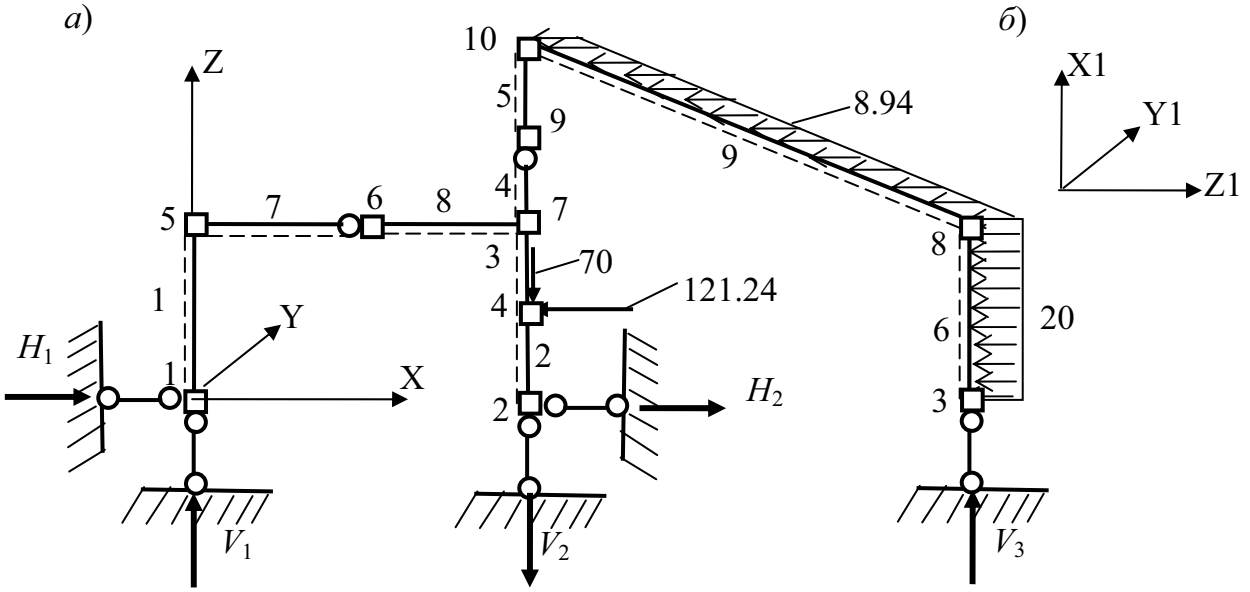


Рис. 2.2

Оси МСК на горизонтальных конечных элементах примем совпадающими с осями ОСК. На вертикальных КЭ ось X1 будем считать направленной снизу вверх. Тогда оси Y1 и Z1 на вертикальных стержнях будут расположены так, как показано на рис. 2.2, *б*. Изображение МСК на каждом элементе схемы рамы (см. рис 2.2, *а*) заменено изображением «нижней» стороны КЭ с помощью пунктира (см. подраздел 4.1 в УМК).

3. Выполняем расчет на ПК с помощью программы SCAD

Расчет выполняем в соответствии с инструкцией, приведенной в

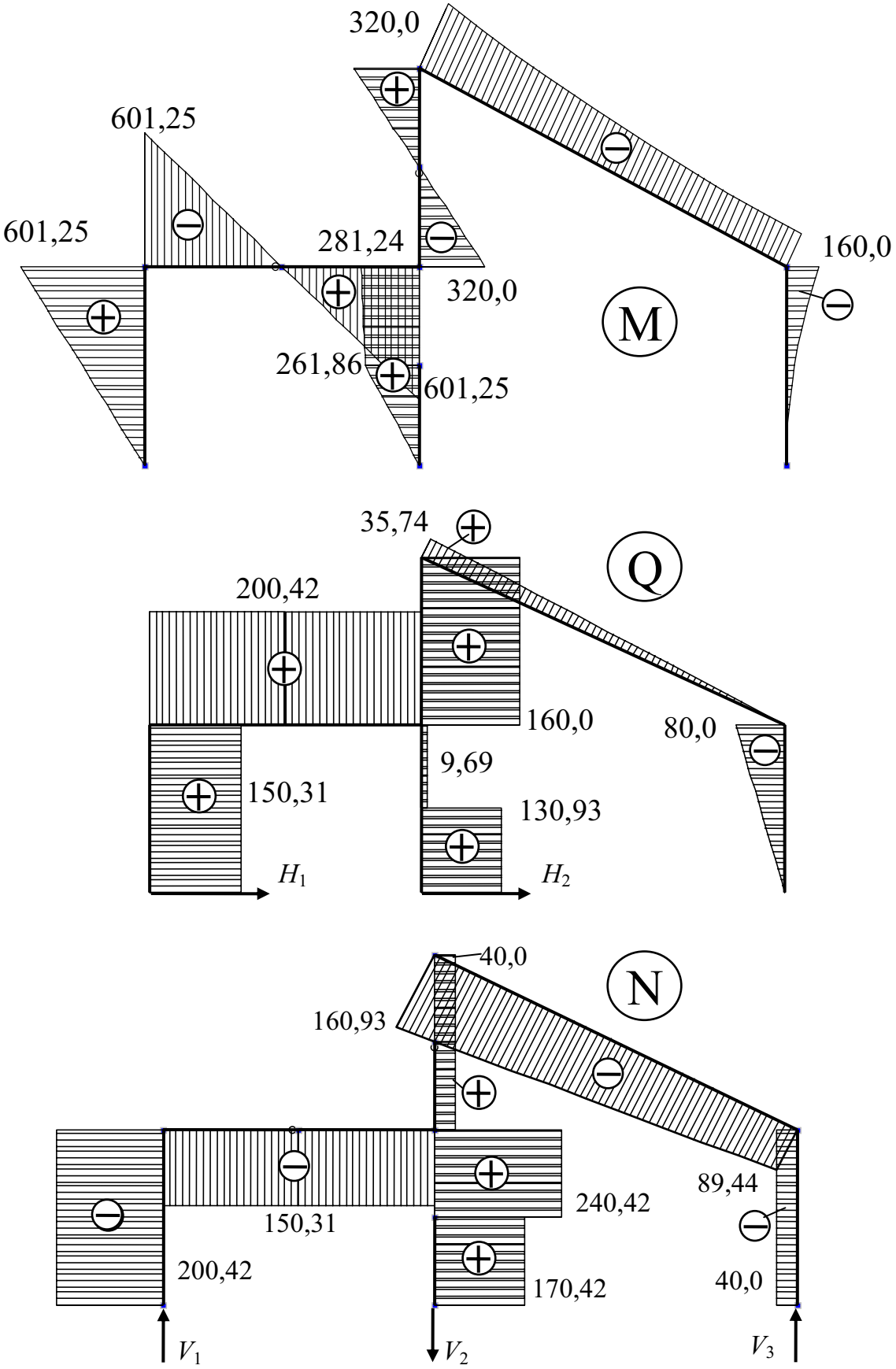

320,0
601,25
601,25
281,24
320,0
160,0
M
261,86
601,25
35,74
Q
200,42
160,0
80,0
9,69
150,31
130,93
H_1
H_2
40,0
N
160,93
89,44
240,42
150,31
200,42
170,42
40,0
V_1
V_2
V_3

Рис. 2.3

приложении 1 к УМК и в учебном пособии [2]. Результаты расчетов представляем в виде эпюр усилий M, Q, N (рис. 2.3).

По ординатам эпюр усилий в месте установки опорных связей находим значения опорных реакций, действующие на раму как внешние силы, и направления реакций в соответствии со знаками ординат эпюр усилий.

Определенные по эпюрам усилий опорные реакции обозначены векторами (см. рис. 2.3).

Примечание для учащихся

Опорные реакции в программе SCAD могут быть определены также с помощью специальной процедуры, описанной в приложении 1 к УМК и в учебном пособии [2].

Найденные реакции изображены на заданной схеме рамы (см. рис. 2.1) и на ее расчетной схеме, составленной для МКЭ (рис. 2.2, *а*).

КОНТРОЛЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА РАМЫ НА ПК

1. Прежде всего, убеждаемся, что построенные эпюры усилий M, Q, N удовлетворяют признакам правильных эпюр (см. подраздел 4.1 в приложении 1 к УМК и подраздел 3.1 в учебном пособии [1]).

2. Использование уравнений равновесия для контроля результатов расчета

В соответствии с рекомендациями, приведенными в подразделе 4.4 УМК и в подразделе 3.4 в [1], выполним следующие проверки полученных результатов расчета.

2.1. Проверка определенных опорных реакций

Для определения пяти составляющих опорных реакций (см. рис. 2.1) H_A, V_A, H_B, V_B, V_C (они же на рис. 2.2, *а* обозначены H_1, V_1, H_2, V_2, V_3), действующих на раму в опорных узлах, имеем пять уравнений равновесия:

- три для всей плоской рамы (см. рис. 2.2, *а*), например,

1) $\sum X = -121.24 - (20 \cdot 8) + 150.31 + 130.93 = -281.24 + 281.24 = 0$;

2) $\sum Z = -70 - 170.42 + 200.42 + 40 = -240.42 + 240.42 = 0$;

3) $\sum M_1 = -70 \cdot 6 + 121.24 \cdot 2 - 170.42 \cdot 6 + 40 \cdot 14 + (20 \cdot 8)4 = 8 \cong 0$;

- два уравнения равновесия вида $\sum M_{\text{ш}} = 0$

4) $\sum M_E^{\text{справа}} = -(20 \cdot 8)2 + 40 \cdot 14 = 0$ (или $\sum M_E^{\text{слева}} = 0$);

5) $\sum M_D^{\text{слева}} = 150.31 \cdot 4 - 200.42 \cdot 3 \cong 0$ (или $\sum M_D^{\text{справа}} = 0$).

Все уравнения тождественно удовлетворяются. Рама при найденных опорных реакциях находится в равновесии. Это показывает, что ***опорные***

реакции определены правильно.

2.2. Проверка равновесия узлов рамы по моментам

Сумма моментов, действующих на любой узел рамы, должна быть равна нулю. На рис. 2.4 показано равновесие узлов 5, 7, 8, 10. Для всех этих узлов удовлетворяется уравнение равновесия $\sum M_к = 0$, где индекс «к» – номер узла.

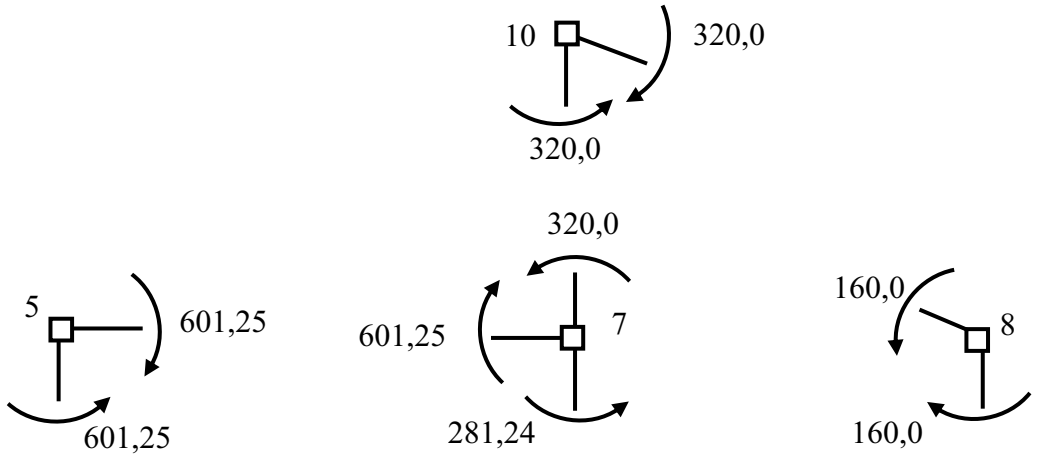


Рис. 2.4

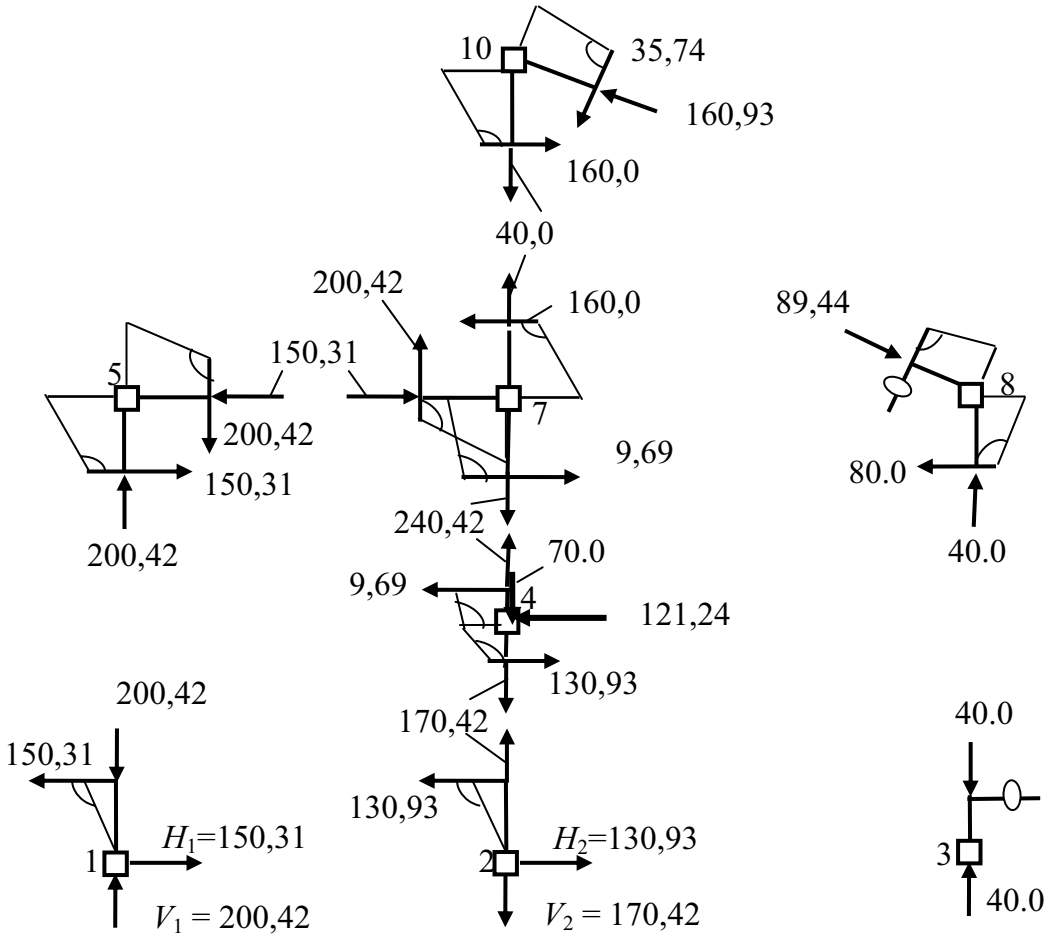


Рис. 2.5

3. Проверка равновесия узлов рамы при действии на них поперечных и продольных сил

Каждый узел расчетной схемы рамы (см. рис. 2.2, *а*), должен удовлетворять еще двум уравнениям равновесия, например, на оси ОСК. На рис. 2.5 показаны поперечные и продольные силы, взятые с эпюр усилий, построенных на рис. 2.3. Направления действия векторов поперечных сил на узлы определены с помощью правила «тупого угла» (см. раздел 4 в УМК и раздел 3 в [1]).

Видно, что уравнения равновесия узлов вида $\sum X_{\text{узла}} = 0$ и $\sum Z_{\text{узла}} = 0$ тождественно удовлетворяются.

2.4. Проверка равновесия любой части рамы

Предыдущие проверки равновесия относились ко всей раме и к узлам намеченной системы конечных элементов на расчетной схеме МКЭ.

Однако иногда, для контроля построенных эпюр усилий, удобно рассмотреть равновесие какой – либо части рамы. Для заданной рамы такой частью является, например, горизонтальный ригель (рис. 2.6).

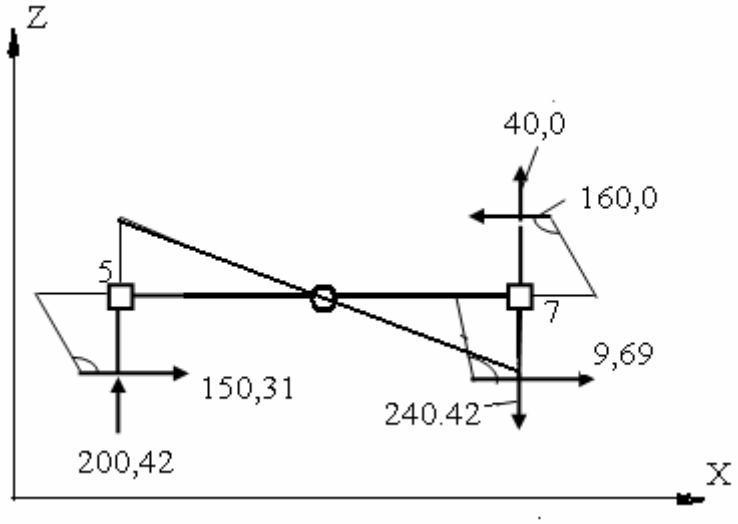


Рис.2.6

Для быстрой проверки вырезанной части рамы используем не три уравнения равновесия, а только два: $\sum X_{\text{части}} = 0$ и $\sum Z_{\text{части}} = 0$. Видно, что равновесие соблюдается.

Такая проверка (по углам наклона эпюр M на разрезанных стойках) позволяет судить и о правильности вида эпюры M на стойках рамы.

2.5. Проверка удовлетворения уравнений равновесия для любого бесконечно малого элемента dx рамы

Как показано в подразделе 1.7 УМК, любой бесконечно малый элемент длиной *dx*, загруженный продольной и поперечной распределенными

нагрузками интенсивностью соответственно q_{x1} и q_{z1}, находится в равновесии, если соблюдаются уравнения равновесия этого элемента:

$$1)\ \frac{dN}{dx} = q_{x1}; 2)\ \frac{dQ}{dx} = q_{z1};\ 3)\ \frac{dM}{dx} = Q.$$

Проверка соблюдения этих уравнений является проверкой правильности построенных эпюр.

В рассматриваемой раме:

1) на всех КЭ $q_{x1} = 0$. Поэтому $dN/dx = 0$. Отсюда следует, что все эпюры N должны быть параллельны осям стержней. Это соблюдается.

2) На элементах 1 – 5 $q_{z1} = 0$. Поэтому $dQ/dx = 0$.

Значит, все эпюры Q на указанных элементах должны быть параллельны осям стержней. Это соблюдается.

3) Как видно из третьего уравнения, при постоянном значении Q на элементах 1 – 5 соответствующие эпюры M должны быть прямолинейными и наклонными к оси стержней под углом $\alpha_i = \text{arc tg}\, Q_i$ ($\text{tg}\alpha_i = dM_i/dx = Q_i$), где i – номер элемента. Это требование выполнено.

На элементах 6 и 9 с равномерно распределенной нагрузкой эпюра M представляет собой параболу второй степени. Следовательно, эпюры Q_6 и Q_9 будут описываться линейной функцией. Там, где $Q_6 = 0$ и $Q_9 = 0$, на эпюрах M_6 и M_9 соответственно будут экстремальные значения ординат изгибающих моментов. Это соответствие в эпюрах M и Q на указанных стержнях имеется.

Заключение

Выполненные проверки позволяют сделать вывод, что ***расчет рамы по определению усилий в сечениях ее стержней и в опорных связях выполнен правильно.***

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики и теории упругости

ОТЧЕТ
о выполнении расчетной работы 3-*а*

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M, Q, N В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ АРКЕ БЕЗ ЗАТЯЖКИ

(шифр задания …….)

Выполнил :
студент гр. …….
……

Принял :
преподаватель
……. ……..

С.-Петербург
2007

По шифру ABCD из сборника заданий (приложение 2 к УМК) выбираем расчетную схему арки (рис. 3.1, *а*), ее размеры, м, и нагрузку (кН, кН/м). Ниже схемы арки изображаем схему соответствующей балки (рис.3.1, б).

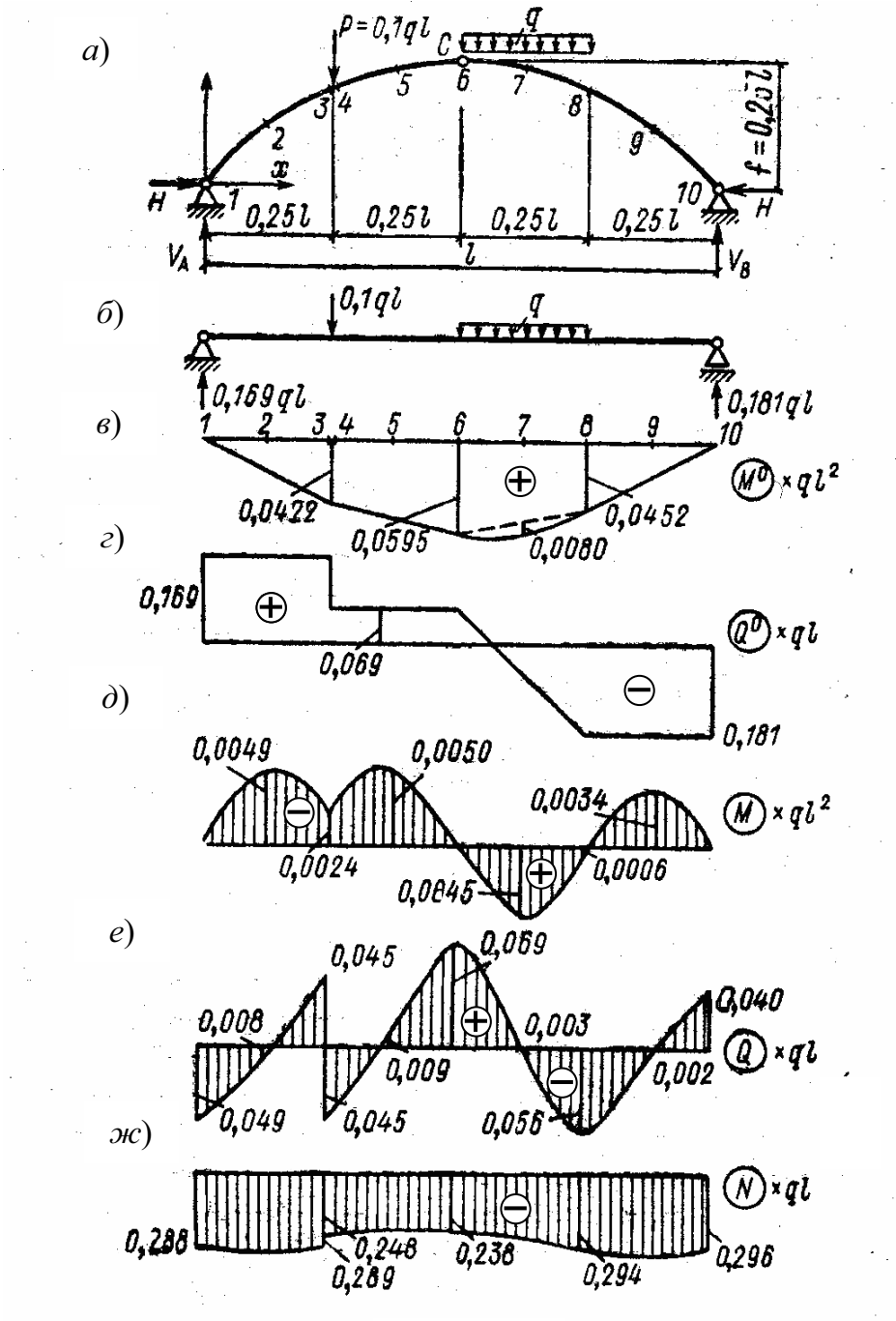


Рис. 3.1

При расчетах приняты следующие параметры размеров арки и нагрузок на нее: $l = 20$ м; $f = 5$ м; $P = 20$ кН; $q = 10$ кН/м.

В соответствии с заданием требуется ***с помощью уравнений равновесия,*** по методике, приведенной в подразделе 5.5 УМК:

- Определить опорные реакции и построить эпюры усилий M, Q, N в арке;
- выполнить контроль построенных эпюр.

РАСЧЕТ АРКИ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

1. Предварительный анализ арки для выяснения ее статической определимости

1.1. Подсчитываем степень статической неопределимости n арки. Для этого используем формулу (2.21):

$$n = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) - (3 + n_{1\text{ш}}).$$

В рассматриваемой арке без затяжки: $n_{\text{оп}} = 4$; $n_{\text{к}} = 0$; $n_{1\text{ш}} = 1$. Тогда $n = 0$. Выполняется необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости.

1.2. Исследуем геометрическую неизменяемость арки. Необходимое условие ($n = 0$) геометрической неизменяемости (ГН) выполняется, что показывает достаточность числа связей для того, чтобы образовать ГН систему. Однако необходимо еще проверить правильность размещения на схеме арки имеющихся связей. В данном случае структурный анализ показывает, что стержневая система правильно образована и представляет собой единый неподвижный диск (см. раздел 2 УМК).

Таким образом, можно сделать вывод, что ***трехшарнирная арка без затяжки*** (рис. 3.1, *а*) ***является статически определимой системой.***

2. Использование программы ARKA для автоматизации расчетов с помощью уравнений равновесия

В подразделе 5.5 показано, что в трехшарнирной арке без затяжки: вертикальные реакции определяются по формулам (5.3) и (5.4), распор арки – по формуле (5.6), усилия M, Q, N в сечениях арки – по формулам (5.7)-(5.9).

Для автоматизации вычислений по этим формулам воспользуемся программой ARKA, специально разработанной для выполнения расчета арок (автор программы доц. Смирнов М.С.). Программу можно скопировать в учебном классе ПК кафедры СМ и ТУ и на сайте smitu@cef.spbstu.ru кафедры, а также в учебном классе ПК кафедры Э и ПГС.

Расчет по этой программе выполнен дважды: для арки без затяжки и для соответствующей однопролетной балки (см. рис. 3.1).

Программа работает в диалоговом режиме, и дополнительные пояснения требуются только на этапе представления результатов расчета.

Представление результатов расчета по программе ARKA

Так как в процессе решения задач по указанной программе предусмотрена возможность составления протокола расчета, в качестве примера он приведен ниже как для арки, так и для соответствующей ей балки.

Примечания для учащихся

1. Протокол позволяет проверить введенные исходные данные и приводит результаты расчета опорных реакций и таблицу усилий в намеченных в программе сечениях арки и балки.

2. Если протокол не составлялся, то можно распечатать только результаты расчета в виде приведенной ниже таблицы. Для этого можно использовать разные варианты сохранения таблицы с результатами, появившейся на экране компьютера в процессе работы программы.

Один из них применен здесь: нажимаем кнопку «Print Screen» на клавиатуре ПК и, запустив программу графического редактора «Paint», вставляем изображение экрана. Затем обращаем цвета вставленного рисунка и, вырезав таблицу с результатами расчета и скопировав ее, вставляем в отчет:

КООРДИНАТЫ X	КООРДИНАТЫ Y	ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ	ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩЕЕ УСИЛИЕ	ПРОДОЛЬНОЕ УСИЛИЕ
0.00	0.00	+0.000e+00	-9.723e+00	-5.745e+01
1.67	1.53	-1.632e+01	-4.481e+00	-5.810e+01
3.33	2.78	-1.944e+01	+1.733e+00	-5.824e+01
4.98	3.74	-9.574e+00	+8.852e+00	-5.759e+01
5.02	3.76	-9.574e+00	-8.866e+00	-4.865e+01
6.67	4.44	-1.944e+01	-1.976e+00	-4.941e+01
8.33	4.86	-1.632e+01	+5.754e+00	-4.911e+01
10.00	5.00	+3.053e-15	+1.375e+01	-4.750e+01
11.67	4.86	+1.563e+01	+4.932e+00	-4.733e+01
13.33	4.44	+1.667e+01	-3.558e+00	-5.126e+01
15.00	3.75	+3.125e+00	-1.118e+01	-5.870e+01
16.67	2.78	-1.111e+01	-3.814e+00	-5.963e+01
18.33	1.53	-1.215e+01	+2.561e+00	-5.970e+01
20.00	0.00	+0.000e+00	+7.955e+00	-5.922e+01

Вертикальные реакции: в левой опоре Va=3.375e+01, в правой опоре Vb=3.625e+01;
Горизонтальный распор H=4.750e+01

3. Далее по полученным ординатам усилий можно вручную построить эпюры усилий от горизонтальных осей, как это представлено на рис. 3.1, д, е, ж, или – от оси арки, как это показано ниже на рис. 3.2.

При расчете на ПК с операционной системой WINDOWS 95, 98, 2000 аналогичная процедура копирования изображения на экране выполняется и для копирования эпюр M, Q, N, которые в программе демонстрируются на экране.

Ниже приведен рис. 3.2, полученный на основе копирования трех рисунков соответственно с эпюрами M, Q, N.

КОНТРОЛЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

1. Используем уравнения равновесия для определения опорных реакций трехшарнирной арки вручную

По формулам (5.3) и (5.4) подраздела 5.5 УМК находим:

1. Из уравнения $\sum M_B = 0$: $V_A = V_A^o = \sum M_B^P / l = 0.169\ ql = 33.8$ кН.

2. Из уравнения $\sum Z = 0$: $V_B = V_B^o = \sum Z^P - V_A = 0.181\, ql = 36.2$ кН.

Распор арки без затяжки определяется по формуле (5.6) подраздела 5.5:

3. Из уравнения $\sum X = 0$ устанавливаем, что $H_A = H_B = H$.

4. Из уравнения $M_C = \sum M_C^{\text{слева}} = \sum M_C^{\text{справа}} = 0$ получаем:

*** ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В АРКЕ***

ПРОТОКОЛ РАСЧЕТА НА ЭВМ

==========

Программа "Расчет арок" разработана для Вас кафедрой
Строительной механики и теории упругости СПбГТУ

==========

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:
Конструкция: трехшарнирная арка параболического очертания без затяжки
Пролет: 20.000
Стрела арки: 5.000

Положение границ участков по нагрузке:
Участок 1: 0.000 < X < 5.000
Участок 2: 5.000 < X < 10.000
Участок 3: 10.000 < X < 15.000
Участок 4: 15.000 < X < 20.000

Сосредоточенные силы:
На границе участков 1 и 2 приложена сила 20.000
На границе участков 2 и 3 приложена сила 0.000
На границе участков 3 и 4 приложена сила 0.000

Распределенная нагрузка:
В пределах участка 1 приложена нагрузка 0.000
В пределах участка 2 приложена нагрузка 0.000
В пределах участка 3 приложена нагрузка 10.000
В пределах участка 4 приложена нагрузка 0.000

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

координаты X	координаты Y	изгибающий момент	перерезывающее усилие	продольное усилие
0.00	0.00	+0.000e+00	-9.723e+00	-5.745e+01
1.67	1.53	-1.632e+01	-4.481e+00	-5.810e+01
3.33	2.78	-1.944e+01	+1.733e+00	-5.824e+01
4.98	3.74	-9.574e+00	+8.852e+00	-5.759e+01
5.02	3.76	-9.574e+00	-8.866e+00	-4.865e+01
6.67	4.44	-1.944e+01	-1.976e+00	-4.941e+01
8.33	4.86	-1.632e+01	+5.754e+00	-4.911e+01
10.00	5.00	+3.053e-15	+1.375e+01	-4.750e+01
11.67	4.86	+1.563e+01	+4.932e+00	-4.733e+01
13.33	4.44	+1.667e+01	-3.558e+00	-5.126e+01
15.00	3.75	+3.125e+00	-1.118e+01	-5.870e+01
16.67	2.78	-1.111e+01	-3.814e+00	-5.963e+01
18.33	1.53	-1.215e+01	+2.561e+00	-5.970e+01
20.00	0.00	+0.000e+00	+7.955e+00	-5.922e+01

Вертикальные реакции:
в левой опоре: 3.375e+01
в правой опоре: 3.625e+01
Горизонтальный распор: 4.750e+01

*** ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В АРКЕ***

ПРОТОКОЛ РАСЧЕТА НА ЭВМ

==========

Программа "Расчет арок" разработана для Вас кафедрой
Строительной механики и теории упругости СПбГТУ

==========

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:

Конструкция: балка на двух опорах
Пролет: 20.000
Положение границ участков по нагрузке:
Участок 1: 0.000 < X < 5.000
Участок 2: 5.000 < X < 10.000
Участок 3: 10.000 < X < 15.000
Участок 4: 15.000 < X < 20.000
Сосредоточенные силы:
На границе участков 1 и 2 приложена сила 20.000
На границе участков 2 и 3 приложена сила 0.000
На границе участков 3 и 4 приложена сила 0.000
Распределенная нагрузка:
В пределах участка 1 приложена нагрузка 0.000
В пределах участка 2 приложена нагрузка 0.000
В пределах участка 3 приложена нагрузка 10.000
В пределах участка 4 приложена нагрузка 0.000

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

координаты X	координаты Y	изгибающий момент	перерезывающее усилие	продольное усилие
0.00	0.00	+0.000e+00	+3.375e+01	+0.000e+00
1.67	0.00	+5.625e+01	+3.375e+01	+0.000e+00
3.33	0.00	+1.125e+02	+3.375e+01	+0.000e+00
4.98	0.00	+1.681e+02	+3.375e+01	+0.000e+00
5.02	0.00	+1.690e+02	+1.375e+01	+0.000e+00
6.67	0.00	+1.917e+02	+1.375e+01	+0.000e+00
8.33	0.00	+2.146e+02	+1.375e+01	+0.000e+00
10.00	0.00	+2.375e+02	+1.375e+01	+0.000e+00
11.67	0.00	+2.465e+02	-2.917e+00	+0.000e+00
13.33	0.00	+2.278e+02	-1.958e+01	+0.000e+00
15.00	0.00	+1.812e+02	-3.625e+01	+0.000e+00
16.67	0.00	+1.208e+02	-3.625e+01	+0.000e+00
18.33	0.00	+6.042e+01	-3.625e+01	+0.000e+00
20.00	0.00	+0.000e+00	-3.625e+01	+0.000e+00

Вертикальные реакции:
в левой опоре: 3.375e+01
в правой опоре: 3.625e+01

==========

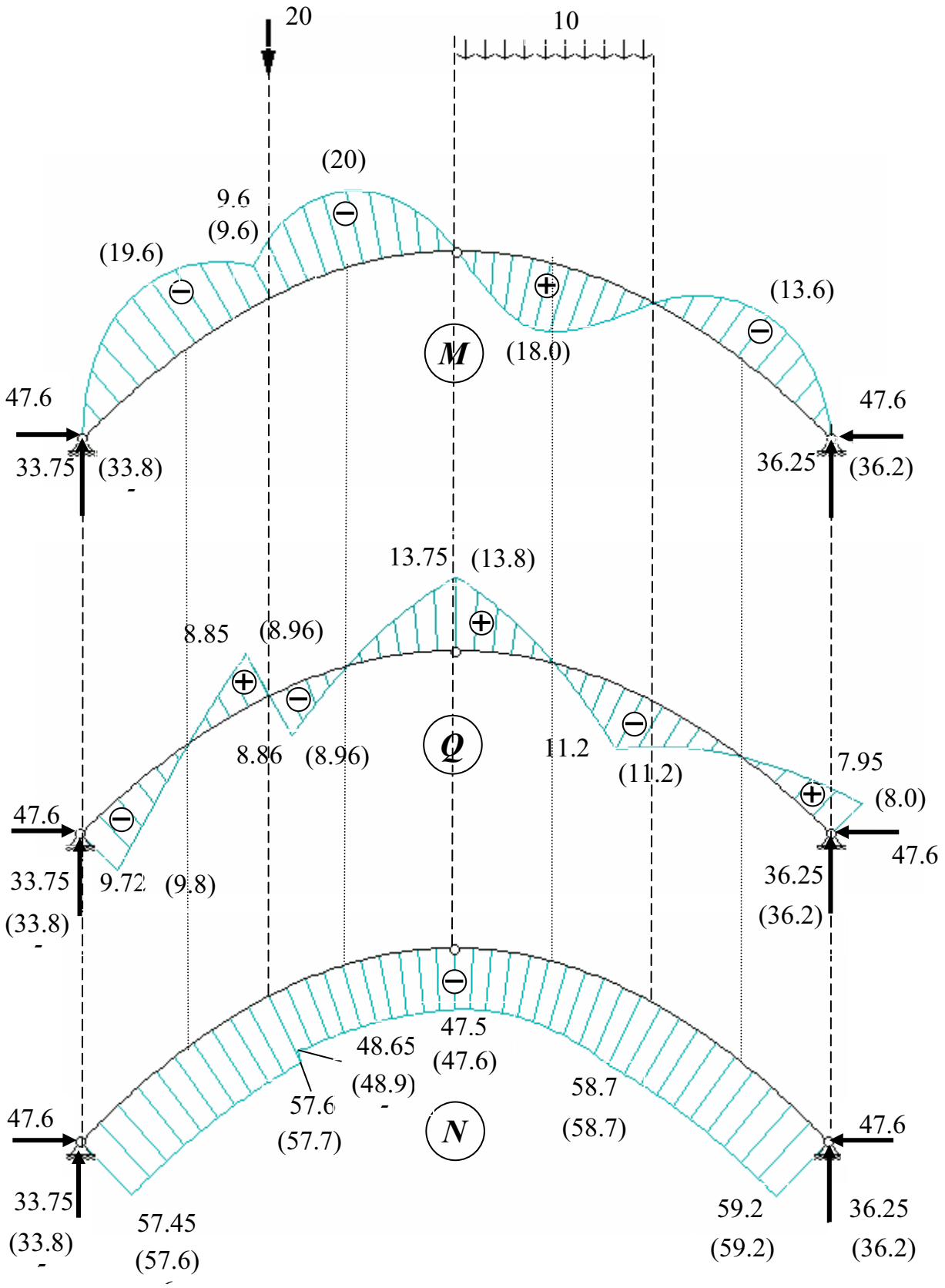

20
10
(20)
9.6
(9.6)
(19.6)
(13.6)
M
(18.0)
47.6
47.6
33.75
(33.8)
36.25
(36.2)
13.75
(13.8)
8.85
(8.96)
8.86
(8.96)
Q
11.2
(11.2)
7.95
(8.0)
47.6
47.6
33.75
9.72
(9.8)
(33.8)
36.25
(36.2)
47.5
(47.6)
48.65
(48.9)
57.6
(57.7)
N
58.7
(58.7)
47.6
47.6
33.75
(33.8)
57.45
(57.6)
59.2
(59.2)
36.25
(36.2)

Рис. 3.2

$$H = \frac{M_C^o}{f} = \frac{0.0595ql^2}{0.25l} = 0.238\,ql = 47.6 \text{ кН.}$$

Сопоставление опорных реакций, полученных для арки и для балки вручную и на ПК по программе ARKA, показывает достаточно близкое совпадение соответствующих величин.

2. Используем уравнения равновесия для определения усилий M, Q, N вручную

Для выполнения контроля усилий M, Q, N, полученных в результате расчета по программе ARKA, выполним расчет по формулам (5.7)-(5.9) подраздела 5.5 УМК вручную для двух сечений арки: по одному для каждой половины арки.

Примечания для учащихся

1. Рекомендуется взять два любых сечения (одно на левой половине арки, другое – на правой), результаты расчета по которым приведены в таблице, приведенной в протоколе расчета по программе ARKA или в таблице, напечатанной выше отдельно.

2. В рассматриваемом здесь примере выполнения задания 3-*а* вычисления вручную продемонстрированы для сечений 2 и 7 из 10 сечений (см. рис. 3.1, *а*) [7].

Вычисления величин, входящих в указанные выше формулы, для выбранных сечений проведены в табличной форме (табл. 3.1).

Таблица 3.1

№ сечк	x	y (z)	$tg\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$M_к^о$	$Q_к^о$
2	$0.25l$	$0.1675l$	0.5	0.4472	0.8944	$0.0422ql^2$	$0.169ql$
7	$0.625l$	$0.234l$	– 0.25	– 0.2425	0.9701	$0.0603ql^2$	$-0.056ql$

Тогда по формулам (5.7) – (5.9) подраздела 5.5 УМК получим (при l = 20 м; f = 5 м; P =20 кН; q =10):

$$M_2 = M_2^o - H \cdot z_2 = (0.0422 - 0.238 \cdot 0.1875)\,ql^2 = 0.0024\,ql^2 = 9.6 \text{ кН·м;}$$

$$Q_2 = Q_2^o \cos\alpha_2 - H \sin\alpha_2 = (0.169 \cdot 0.8944 - 0.238 \cdot 0.4472)\,ql = 0.0448\,ql = 8.96 \text{ кН;}$$

$$N_2 = -(Q_2^o \sin\alpha_2 + H \cos\alpha_2) = -(0.169 \cdot 0.4472 + 0.238 \cdot 0.8944)\,ql = -0.2885\,ql = 57.7 \text{ кН.}$$

$$M_7 = M7_7^o - H \cdot z_7 = (0.0603 - 0.238 \cdot 0.234)\,ql^2 = 0.0045\,ql^2 = 18.0 \text{ кН·м;}$$

$$Q_7 = Q_7^o \cos\alpha_7 - H \sin\alpha_7 = (-0.056 \cdot 0.9701 - 0.238 \cdot (-0.2425)\,ql = 0.0034\,ql = 0.68 \text{ кН;}$$

$$N_7 = -(Q_7^o \sin\alpha_7 + H \cos\alpha_7) = -(-0.056 \cdot (-0.2425) + 0.238 \cdot 0.9701)\,ql = -0.245\,ql =$$
$$= -49.0 \text{ кН.}$$

Аналогично вычисляются ординаты усилий в остальных намеченных на рис. 3.1, *а* сечениях. Вычисленные ординаты в выбранном масштабе с учетом их знаков откладываются перпендикулярно горизонтальной оси отсчета, либо оси арки. В учебном пособии [7] был выбран первый способ (см. рис. 3.1, д, е, ж). Второй способ продемонстрирован при расчете с помощью программы ARKA (см. рис. 3.2).

Для контроля результатов расчетов усилий по программе ARKA и вручную на эпюрах усилий (см. рис.3.2) приведены значения усилий, полученные расчетом по программе и расчетом вручную (в скобках). Видим, что результаты близко совпадают.

Примечание для учащихся

Как уже отмечалось выше учащемуся необходимо выполнить ручной расчет только для двух указанных сечений. Поэтому на эпюрах усилий (см. рис.3.2) необходимо привести результаты ручного счета (в скобках) ***только в этих двух сечениях***. В данном пособии использованы результаты расчетов для большего числа сечений (см. рис. 3.1, д, е, ж), полученные в учебном пособии [7].

Контроль эпюр M и Q в связи с имеющейся зависимостью в виде уравнении равновесия $dM / ds = Q$ показывает их полное соответствие.

Сопоставление эпюр M в арке и балке

Это сопоставление показывает:

- изгибающие моменты в арке ($|M_{\max}| \approx$ 20 кН·м) значительно (для рассматриваемой арки примерно на порядок) меньше, чем в балке ($|M_{\max}| \approx$ 240 кН·м).
- при заданной нагрузке арка сжата (довольно равномерно: $\approx$от 48 кН до 59 кН), а в балке продольные силы отсутствуют.

Значительное уменьшение изгибающих моментов в арке по сравнению с соответствующей балкой (см. рис. 3.1) и наличие сжимающих усилий в сечениях арки приводит к более благоприятному распределению нормальных напряжений в сечениях арки по сравнению с балкой (см. рис. 5.8, *в, г*) в подразделе 5.5 УМК.

Заключение по работе

Выполненные проверки позволяют сделать вывод, что **расчет арки по определению усилий в ее сечениях и в опорных связях выполнен правильно.**

Примечание. Номера учебных пособий, на которые сделаны ссылки, соответствуют библиографическому списку в УМК.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики и теории упругости

ОТЧЕТ
о выполнении расчетной работы 3-*б*

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M, Q, N В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ АРКЕ С ЗАТЯЖКОЙ

(шифр задания ……)

Выполнил :
студент гр.
……

Принял :
преподаватель
…….

С.-Петербург
2007

По шифру ABCD из сборника заданий (см. приложение 2 к УМК) выбираем расчетную схему арки (рис. 3.1, *а*), ее размеры, м, и нагрузку (кН, кН/м). Ниже схемы арки изображаем схему соответствующей балки (рис.3.1, *б*).

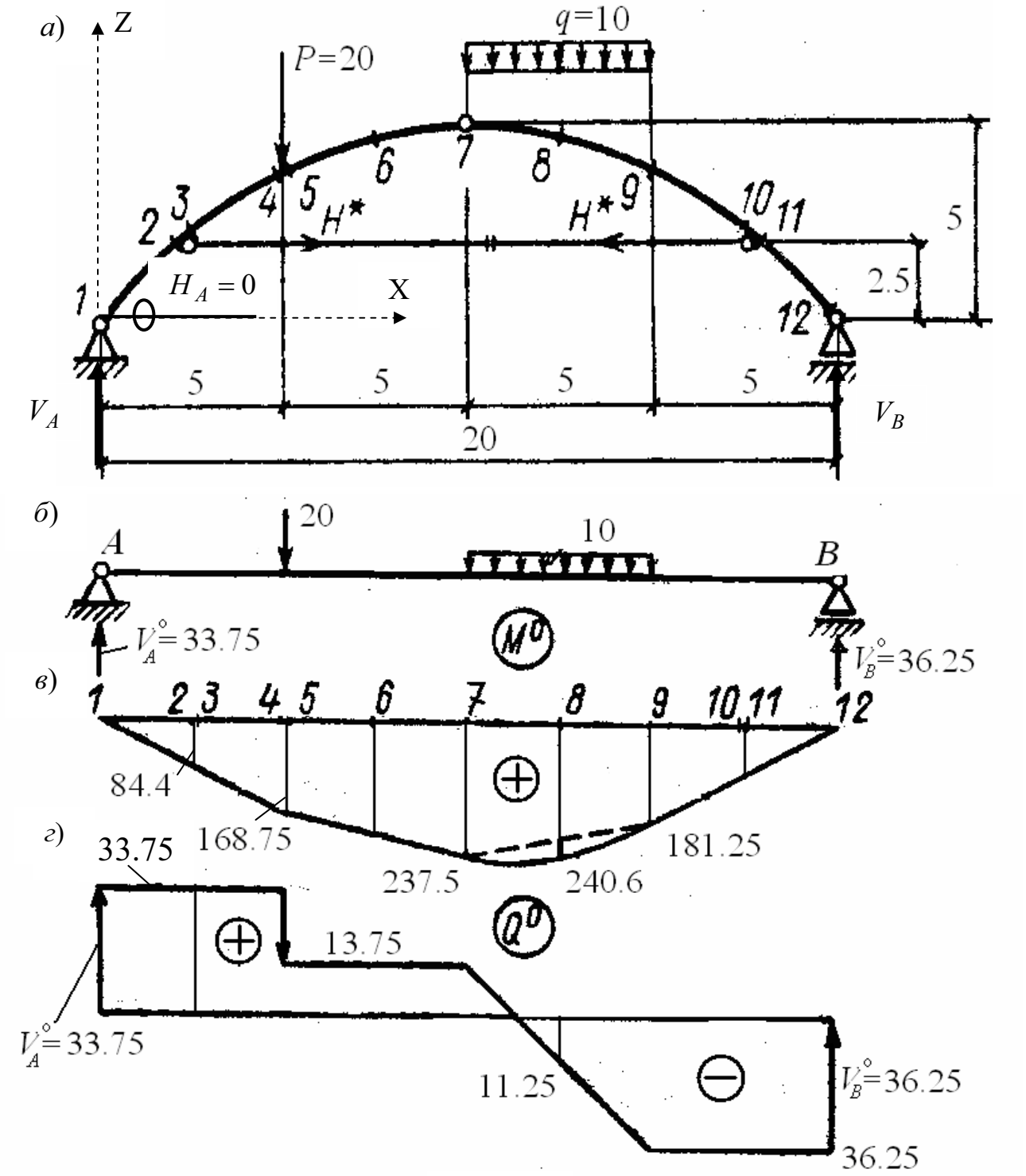


Рис. 3.1

При расчетах приняты следующие параметры размеров арки и нагрузок на нее: $l = 20$ м; $f = 0.25l =$ 5 м; $a = 0.125l = 2.5$ м; $f^* = f - a$ =2.5 м; $q = 10$ кН/м ; $P = 0.1ql = 20$ кН. Очертание арки задано круговым. Радиус круга,

по которому очерчена арка, определяется по формуле (см. подраздел 5.5 УМК):

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = \frac{20^2}{8 \cdot 5} + \frac{5}{2} = 12.5 \text{ м}.$$

В соответствии с заданием требуется ***с помощью уравнений равновесия,*** по методике, приведенной в подразделе 5.5 УМК:

- Определить опорные реакции и построить эпюры усилий M, Q, N в арке;
- выполнить контроль построенных эпюр.

РАСЧЕТ АРКИ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

1. Предварительный анализ арки для выяснения ее статической определимости.

1.1. Подсчитываем степень статической неопределимости n арки. Для этого используем формулу (2.21):

$$n = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) - (3 + n_{1\text{ш}}).$$

В рассматриваемой арке без затяжки: $n_{\text{оп}} = 4$; $n_{\text{к}} = 1$; $n_{1\text{ш}} = 3$. Тогда $n = 0$. Выполняется необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости.

1.2. Исследуем геометрическую неизменяемость арки. Необходимое условие ($n = 0$) геометрической неизменяемости (ГН) выполняется, ***что показывает и достаточность числа связей для образования ГН системы***. Однако необходимо еще проверить правильность размещения на схеме арки имеющихся связей. В данном случае структурный анализ показывает, что стержневая система правильно образована и представляет собой единый неподвижный диск (см. пример 10 в подразделе 2.5 УМК и [1]).

Таким образом, можно сделать вывод, что ***трехшарнирная арка с затяжкой (рис. 3.1, а) является статически определимой системой.***

2. Использование программы ARKA для автоматизации расчетов с помощью уравнений равновесия

В подразделе 5.5 УМК показано, что в трехшарнирной арке с затяжкой: вертикальные реакции как и для арки без затяжки определяются по формулам (5.3) и (5.4). Распор арки в арке с затяжкой отсутствует. Вместо него по формуле (5.14) определяется усилие в затяжке. Усилия M, Q, N в сечениях арки ниже затяжки вычисляются по формулам (5.12), а выше нее – по формулам (5.15) – (5.17).

Для автоматизации вычислений по этим формулам воспользуемся программой ARKA, специально разработанной для выполнения расчета

арок (автор программы доц. Смирнов М.С.). Программу можно скопировать в учебном классе ПК кафедры СМ и ТУ и на сайте smitu@cef.spbstu.ru кафедры, а также в учебном классе ПК кафедры Э и ПГС.

Расчет по этой программе выполнен дважды: для арки с затяжкой и для соответствующей однопролетной балки (см. рис. 3.1).

Программа работает в диалоговом режиме, и дополнительные пояснения требуются только на этапе представления результатов расчета.

Представление результатов расчета по программе ARKA

Если в процессе решения задач для арки и для соответствующей ей балки по указанной программе были составлены протоколы расчета, они приводятся отчете по работе.

Примечания для учащихся

1. Протокол позволяет проверить введенные исходные данные и приводит результаты расчета опорных реакций и таблицу усилий в сечениях арки или балки на каждом из намеченных участков. В качестве примера протоколы расчета по программе ARKA приведены в отчете по расчету арки без затяжки (см. предыдущий отчет).

2. ***Вместо протокола расчета можно распечатать только таблицу с результатами расчета***. Для этого можно использовать разные варианты сохранения таблицы с результатами. Один из них применен здесь при расчете рассматриваемой арки с затяжкой:

- нажимаем кнопку «Print Screen» на клавиатуре ПК и, запустив программу графического редактора «Paint», вставляем изображение экрана;
- обращаем цвета вставленного рисунка и, вырезав таблицу с результатами расчета и скопировав вырезанную часть, вставляем ее в отчет. Таким образом, в данном примере получена и вставлена в отчет табл.3.1.

Таблица 3.1

КООРДИНАТЫ X	КООРДИНАТЫ Y	ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ	ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩЕЕ УСИЛИЕ	ПРОДОЛЬНОЕ УСИЛИЕ
0.00	-0.00	+8.882e-16	+2.025e+01	-2.700e+01
1.25	1.43	+4.219e+01	+2.410e+01	-2.362e+01
2.48	2.48	+8.370e+01	+2.696e+01	-2.030e+01
2.52	2.51	+8.363e+01	-2.981e+01	-9.631e+01
3.75	3.33	+4.816e+01	-1.827e+01	-9.915e+01
4.98	3.95	+3.054e+01	-7.243e+00	-1.006e+02
5.02	3.97	+2.984e+01	-2.524e+01	-9.261e+01
6.67	4.55	-2.833e+00	-1.208e+01	-9.523e+01
8.33	4.89	-1.231e+01	+9.606e-01	-9.599e+01
10.00	5.00	+3.053e-15	+1.375e+01	-9.500e+01
11.67	4.89	+1.963e+01	+9.776e+00	-9.454e+01
13.33	4.55	+3.328e+01	+6.459e+00	-9.678e+01
15.00	3.96	+4.289e+01	+4.776e+00	-1.016e+02
16.25	3.33	+5.753e+01	+1.611e+01	-1.004e+02
17.48	2.51	+8.993e+01	+2.780e+01	-9.781e+01
17.52	2.48	+8.990e+01	-2.896e+01	-2.181e+01
18.75	1.43	+4.531e+01	-2.589e+01	-2.537e+01
20.00	-0.00	+8.882e-16	-2.175e+01	-2.900e+01

Вертикальные реакции: в левой опоре Va=3.375e+01, в правой опоре Vb=3.625e+01;
Горизонтальный распор,воспринимаемый затяжкой, H=9.500e+01

Далее по полученным ординатам усилий можно вручную построить эпюры усилий от горизонтальных осей отсчета ординат, как это представлено ниже на рис. 3.2, или – от оси арки, как это было показано на рис. 2 в отчете о выполнении расчета арки без затяжки (см. предыдущий отчет).

Примечание для учащихся

Эпюры усилий M, Q, N, приведенные ниже на рис. 3.2 для заданной арки с затяжкой, взяты из учебного пособия [7], где усилия вычислялись для указанных на рис. 3.2 сечений.

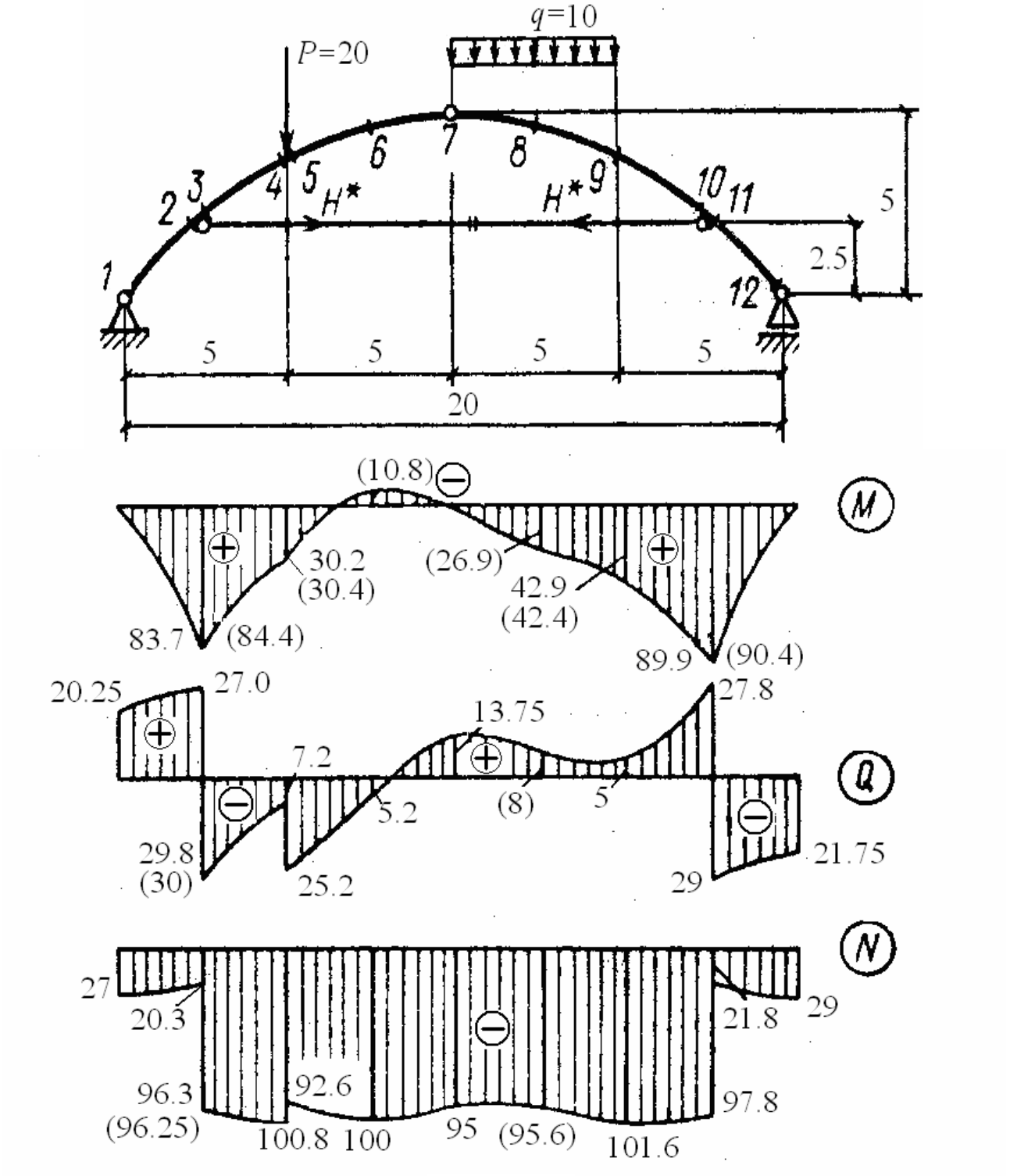


Рис. 3.2

КОНТРОЛЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

1. Используем уравнения равновесия для определения вручную реакций в опорных связях и усилия в затяжке арки

Вертикальные реакции опор в трехшарнирной арке с затяжкой

Вертикальные реакции трехшарнирной арки равны вертикальным реакциям балки (см. подраздел 5.5 УМК):

1. Из уравнения $\sum M_B = 0$ находим:

$$V_A = V_A^o = \sum M_B^P / l = 33.75 \text{ кН.}$$

2. Из уравнения $\sum Z = 0$ получаем

$$V_B = V_B^o = \sum Z^P - V_A = 36.25 \text{ кН.}$$

Горизонтальная опорная реакция трехшарнирной арки с затяжкой будет только в неподвижной шарнирной опоре А (см. рис. 3.1, *а*)**.**

3. Она определяется из уравнения $\sum X = 0$. При заданной вертикальной нагрузке на арку эта реакция будет иметь нулевое значение ($H_A = 0$).

4. Проведя сечение арки через шарнир C и затяжку, из уравнения $M_C = \sum M_C^{\text{слева}} = \sum M_C^{\text{справа}} = 0$ найдем усилие H^*, которое воспринимается затяжкой:

$$H^* = \frac{M_C^o}{f^*} = \frac{237.5}{2.5} = 95.0 \text{ кН.}$$

Обратим внимание, что если бы затяжка была расположена на уровне опор (величина a было бы равна нулю, см. рис. 3.1, *а*), то получили бы $f = f^* =$ $= 5$ м и $H^* = H = 47.5$ кН. Усилие, воспринимаемое затяжкой, стало бы равно распору арки без затяжки (см. предыдущий отчет о выполнении задания 3-а для арки без затяжки).

Сопоставление опорных реакций, полученных для арки вручную и на ПК по программе ARKA, показывает совпадение соответствующих величин.

2. Используем уравнения равновесия для определения вручную усилий M, Q, N

Для выполнения контроля усилий M, Q, N, полученных в результате расчета по программе ARKA, выполним расчет по формулам (5.15)-(5.17) подраздела 5.5 вручную для двух сечений арки: по одному для каждой половины арки.

Примечания для учащихся

1. Рекомендуется взять два любых сечения (одно на левой половине арки, другое – на

правой), результаты расчета, для которых приведены в табл. 3.2.

2. В рассматриваемом здесь примере вычисления вручную продемонстрированы для сечений 3 и 8 из 12 сечений, намеченных в учебном пособии [7] (см. рис. 3.1, *а* и рис. 3.2). Вычисления величин, входящих в указанные выше формулы, для выбранных сечений проведены в табличной форме (табл. 3.2).

Таблица 3.2

к	x, м	z, м	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$M_к^о$ кН·м	$Q_к^о$ кН	$M_к$ кН·м	$Q_к$ кН	$N_к$ кН
3	2.5	2.5	0.6	0.8	84.4	33.75	84.4	– 30	–96.25
8	12.5	4.75	– 0.2	0.9798	240.6	– 11.25	26.9	8	– 95.6

Сечение 3. Значение ординаты y_3 для сечения 3 известно:

$$z_3 = a = 2.5 \text{ м.}$$

Из выражения

$$z_3 = f - r(1 - \cos\alpha_3);$$

(см. формулы (4.11) в [1]) находим:

$$\cos\alpha_3 = 0.8 \text{ и } \sin\alpha_3 = \sqrt{(1 - \cos^2\alpha_3} = 0.6.$$

Затем из выражения $\sin\alpha_3 = (0.5l - x)/r = (0.5 \cdot 20 - x)/12.5$ =0.6 находим

$$x_3 = 0.5l - r\sin\alpha_3 = 0.5 \cdot 20 - 0.6 \cdot 12.5 = 2.5 \text{ м}$$

Для использования формулы (4.15) в [1] находим $z^* = z_3 - a = 2.5 - 2.5 = 0$.

Тогда по формулам (4.15) – (4.17) в [1] получим:

$$M_3 = M_3^o - H \cdot z_3^* = 33.75 \cdot 2.5 = 84.4 \text{ кН·м};$$

$$Q_3 = Q_3^o \cos\alpha_3 - H^* \sin\alpha_3 = 33.75 \cdot 0.8 - 95 \cdot 0.6 = -30 \text{ кН};$$

$$N_2 = -(Q_2^o \sin\alpha_2 + H\cos\alpha_2) = -(33.75 \cdot 0.6 + 95 \cdot 0.8) = 96.25 \text{ кН}.$$

Сечение 8. В этом сечении известна абсцисса x_8 = 12.5 м. Тогда из (4.11) в [1] находим:

$\sin\alpha_8 = (0.5l - x_8)/r = (0.5 \cdot 20 - 12.5)/12.5 = -0.2;$
$\cos\alpha_8 = \sqrt{(1 - \sin^2\alpha_8} = 0.9798;$
$z_8 = f - r(1 - \cos\alpha_8) = 5 - 12.5(1 - 0.9798) = 4.75$ м.

По формулам (4.15) – (4.17) определяем усилия в сечении 8 арки ($z^* = z_8 - a = 4.75 - 2.5 = 2{,}25$ м):

$$M_8 = M_8^o - H^* \cdot z_8^* = 240.6 - 95 \cdot 2.25 = 26.9 \text{ кН·м};$$

$$Q_8 = Q_8^o \cos\alpha_8 - H * \sin\alpha_8 = (-11.25 \cdot 0.9798 - 95 \cdot (-0.2) = 8 \text{ кН};$$

$$N_8 = -(Q_8^o \sin\alpha_8 + H * \cos\alpha_8) = -(-0.056 \cdot (-0.2) + 0.476 \cdot 0.9798)\, ql = -0.478\, ql =$$
$$= -95.6 \text{ кН}.$$

Аналогично вычисляются ординаты усилий в остальных намеченных на рис. 3.1, *а* сечениях. Вычисленные ординаты в выбранном масштабе с учетом их знаков откладываются перпендикулярно горизонтальной оси отсчета, либо оси арки. В учебном пособии [7] был выбран первый способ (см. рис. 3.2). Второй способ был продемонстрирован при расчете с помощью программы ARKA арки без затяжки (см. рис. 3.2 в отчете о выполнении работы 3-*а* для варианта арки без затяжки).

Для контроля результатов расчетов усилий по программе ARKA на эпюрах усилий (см. рис. 3.2) в сечениях *3* и *8* приведены значения усилий, полученные расчетом по программе и расчетом вручную (в скобках). Видим, что результаты близко совпадают.

Контроль эпюр M и Q в связи с имеющейся зависимостью в виде уравнении равновесия $dM / ds = Q$ показывает их полное соответствие.

Сопоставление эпюр M в арке и балке

Это сопоставление показывает:

- изгибающие моменты в арке ($|M_{\max}| \approx$ 90 кН·м) значительно (для рассматриваемой арки примерно в три раза) меньше, чем в балке $|M_{\max}| \approx$ 240 кН·м).
- при заданной нагрузке арка сжата (довольно равномерно: $\approx$от 93 кН до 102 кН), а в балке продольные силы отсутствуют.

Значительное уменьшение изгибающих моментов в арке по сравнению с соответствующей балкой (см. рис. 3.1) и наличие сжимающих усилий в сечениях арки приводит к более благоприятному распределению нормальных напряжений в сечениях арки по сравнению с балкой (см. рис. 4.8, в, г) в [1].

Заключение

Выполненные проверки позволяют сделать вывод, что **расчет арки по определению усилий в ее сечениях и в опорных связях выполнен правильно.**

Примечание. Номера учебных пособий, на которые сделаны ссылки, соответствуют библиографическому списку в УМК.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики и теории упругости

ОТЧЕТ

о выполнении расчетной работы 4

Определение усилий в стержнях статически определимой фермы

(шифр задания ……..)

Выполнил :
студент гр.
……

Принял :
преподаватель
……..

С.-Петербург
2007

По шифру АВСВ из сборника заданий (см. приложение 2 УМК и учебные пособия [1, 6]), выбираем тип расчетной схемы фермы (рис. 4.1, *а*).

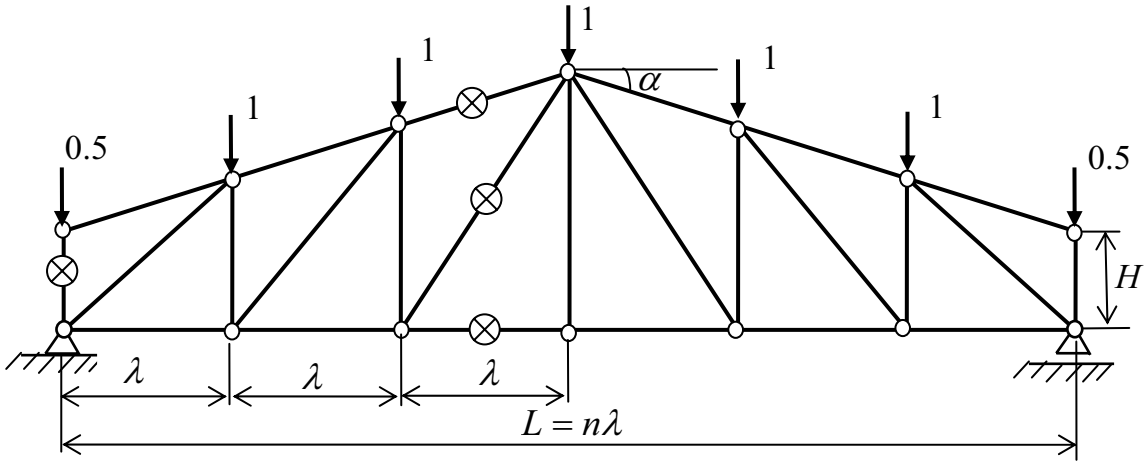


Рис. 4.1

В соответствии с заданием приняты следующие значения указанных на рис. 4.1 величин: длина панели $\lambda = 2$ м; число панелей $n = 6$: длина пролета $L = 12$ м; высота $H = 1.5$ м; угол наклона верхнего пояса $\alpha = 15^{\circ}$.

Требуется

1. Определить усилия во всех стержнях фермы (в том числе в опорных) расчетом МКЭ на ПК с помощью программы SCAD.

2. С помощью уравнений равновесия:

- определить опорные реакции фермы;
- явно нулевые стержни фермы;
- усилия в ее отмеченных стержнях,

проверив тем самым усилия в отмеченных стержнях фермы, определенные расчетом с помощью программы SCAD.

РАСЧЕТ ФЕРМЫ НА ПК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

Расчет с помощью программы SCAD будем выполнять с учетом рекомендаций приложения 1 к УМК и учебного пособия [2].

Сначала выполним построение расчетной схемы МКЭ для заданной фермы. В результате получим расчетную схему МКЭ в виде, приведенном на рис. 4.2, на котором указаны номера КЭ типа 1 «стержни плоской фермы», номера узлов системы КЭ и заданные узловые нагрузки.

Поскольку в программе SCAD, реализующей алгоритм МКЭ, требуется задать продольные жесткости $EF_{к}$, где индекс «к» показывает номер

стержневого КЭ типа 1, то необходимо проверить относится ферма к СО или к СН СС (см. подраздел 3.6 УМК о назначении жесткостей КЭ).

1. Проверяем статическую определимость фермы

1.1. Подсчитываем степень статической неопределимости n фермы. Для этого используем формулу (2.23): $n = (n_{оп} + n_с) - 2n_у$.

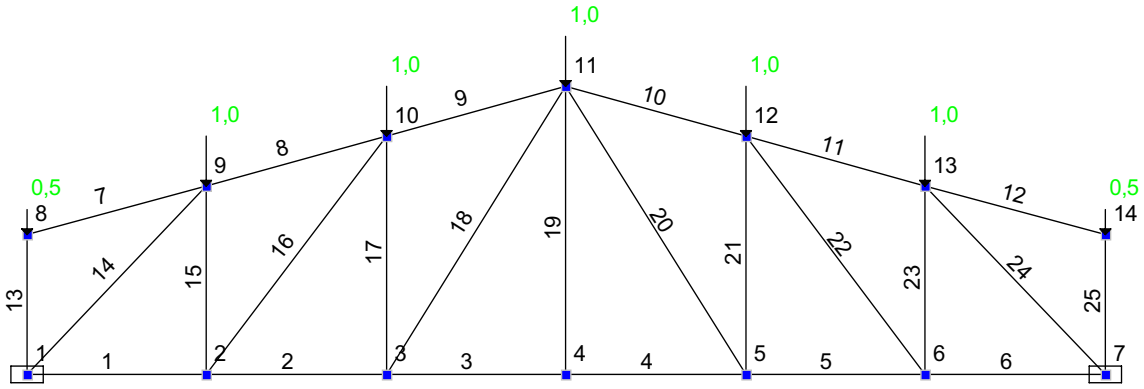


Рис. 4.2

Как видно из расчетной схемы на рис. 4.2, в рассматриваемой ферме: $n_{оп}$= 3; $n_с$= 25; $n_у$= 14. Тогда получим: n = 0. Выполняется необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости фермы.

1.2. Исследуем геометрическую неизменяемость фермы. Необходимое условие (n= 0) геометрической неизменяемости (ГН) выполняется, ***что показывает и достаточность числа связей для образования ГН системы***. Однако необходимо еще проверить правильность установки имеющихся связей.

В данном случае структурный анализ показывает, что ферма вместе с неподвижным жестким диском основания образуют неподвижный жесткий диск и, следовательно, является ГН системой (см. подраздел 2.5 УМК и учебного пособия [1]).

Таким образом, можно сделать вывод, что заданная ферма (рис. 4.1, рис. 4.2) ***является статически определимой системой.***

2. Результаты расчета

Результаты расчета фермы на ПК с помощью программы SCAD представлены в виде эпюры продольных сил N, кН, в стержнях фермы (рис. 4.3).

Кроме того, программа SCAD позволяет определить с помощью специальной процедуры, описанной в подразделе 4.5 учебного пособия [2] и опорные реакции фермы. В программе определяются силы давления опор

фермы на конструкцию, на которую опирается ферма. Реакции опор, которые действуют на ферму, имеют обратное направление. Они показаны на рис. 4.4.

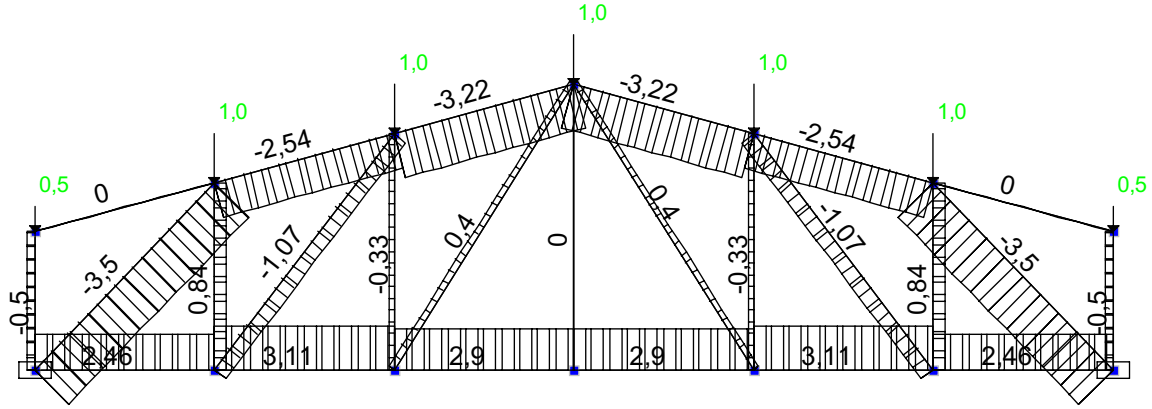


Рис. 4.3

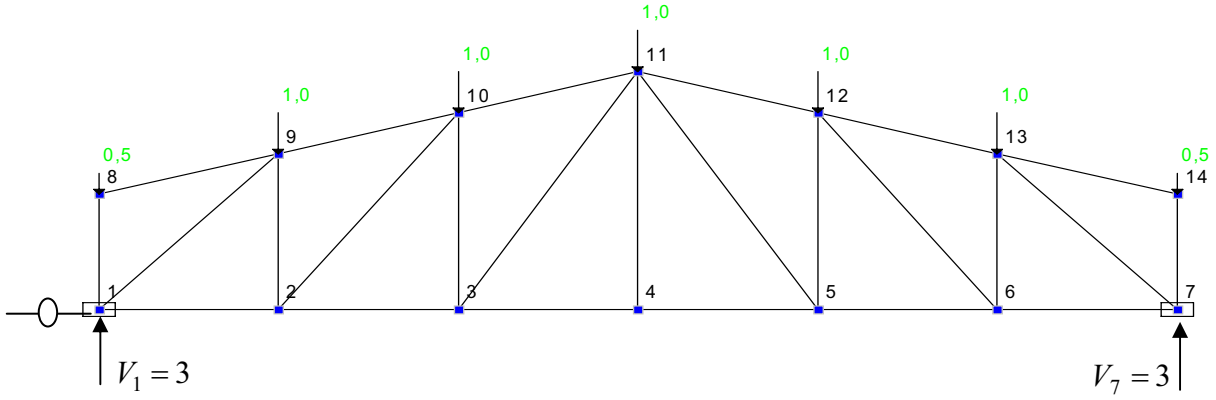


Рис. 4.4

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ РАСЧЕТА ФЕРМЫ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ SCAD

Заданная ферма является статически определимой системой, поэтому усилия в ее стержнях (в том числе и опорных) могут быть найдены с помощью только уравнений равновесия.

Используя уравнения равновесия плоского тела, как ко всей ферме, так и к любым отдельным ее отсеченным частям, выполним контроль усилий в стержнях фермы и ее опорных реакций, определенных на ПК по программе SCAD. При этом будем использовать рациональные способы применения этих уравнений равновесия с учетом конструктивных особенностей заданной фермы.

Использование уравнений равновесия для всей фермы

Условием равновесия всей фермы под действием всех заданных внешних сил и всех опорных реакций является удовлетворение трех уравнений равновесия (запишем их в соответствии с общей системой координат, принятой в программе SCAD):

$\sum X = 0; \sum Z = 0; \sum M_y = 0$

Поскольку в заданной статически определимой ферме (см. рис. 4.1) имеются только три опорных связи (не пересекающихся в одной точке и не параллельных друг другу), то реакции в них могут быть определены из указанных уравнений. В результате для принятого загружения фермы получим: H_1=0; V_1=3 кН; V_7=3 кН.

Такие же значения реакций получились при расчете МКЭ с помощью программы SCAD. Поэтому уравнения равновесия (2.1) могут быть использованы для контроля опорных реакций найденных с помощью программы SCAD: при их подстановке в эти уравнения равновесия должны получиться тождества.

Определение с помощью уравнений равновесия для узлов явно нулевых стержней фермы

Как известно [1, 2], есть правила определения явно нулевых стержней в ферме, полученные на основе использования уравнений равновесия одного из узлов, к которому присоединяется рассматриваемый стержень. Если в заданной ферме имеются стержни, усилия в которых являются явно нулевыми, то и при расчете методом конечных элементов по программе SCAD они должны получиться нулевыми.

Приведенные выше эпюры N показывают три нулевых стержня в заданном загружении фермы. По известным правилам определения явно нулевых стержней констатируем, что они и должны быть нулевыми.

Определение усилия N_{13} из уравнения равновесия вырезанного из фермы узла 8 (рис. 5)

Кроме явно нулевого стержня с номером 7, нулевое усилие в котором определяется из уравнения равновесия $\sum X_8 = 0$ для узла 8, также просто способом «вырезания узлов» [1, 2] определяется усилие в вертикальном стержне 13. Из уравнения $\sum Z_8 = 0$ находим, что N_{13} = 0.5 кН.

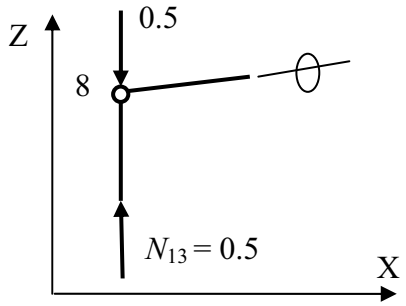


Рис. 4.5

Так как стержень сжат, то по правилу знаков для продольных сил [1, 2] его значение обычно пишут со знаком минус, что и сделано на эпюре N (см. рис. 4.3).

Таким образом, усилие N_{13}, найденное при расчете по программе SCAD, удовлетворяет условиям равновесия узла 8.

Проверка равновесия вырезанного из фермы узла 1 (рис. 4.6,*а*)

Определенное усилие N_{13} действует и на узел 1. Кроме него на этот узел действуют усилия $N_1 = 2.46$ кН и $N_{14} = -3.5$ кН и усилия в двух опорных стержнях (опорные реакции). Равновесие узла можно проверить *аналитическим способом*, составив два уравнения равновесия, или – *графическим способом*, построив многоугольник действующих на узел сил (рис. 6,*б*).

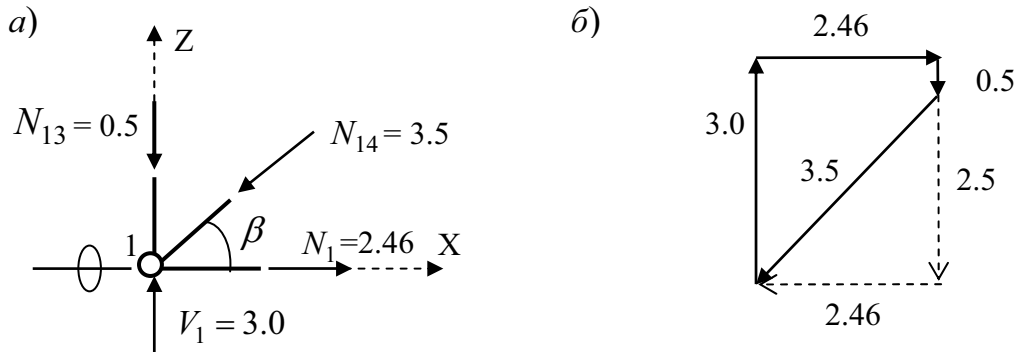


Рис. 4.6

При использовании аналитического способа уравнения при подстановке в них соответствующих проекций сил должны тождественно удовлетворяться, а при использовании графического способа построенный многоугольник действующих на узел сил должен быть замкнутым, так как при равновесии сил их равнодействующая должна быть равна нулю. Выполним оба способа проверки.

Аналитический способ

Должны тождественно удовлетворяться два уравнения (силы, кН):

$$\sum X_1 = -3.5 \cdot \cos\beta + 2.46 = 0;$$

$$\sum Z_1 = -0.5 - 3{,}5 \cdot \sin\beta + 3.0 = 0.$$

Значения $\cos\beta$ и $\sin\beta$ определим по

$$\mathrm{tg}\beta = (y_9 - y_2)/(x_2 - x_1) = (2.04 - 0)/(2.0 - 0) = 1.02.$$

Отсюда $\cos\beta = 0.7009$; $\sin\beta = 0.7133$ и оба уравнения равновесия с достаточной степенью точности превращаются в тождества.

Графический способ

Обходя узел (см. рис. 4.6,*а*) против часовой стрелки (начиная с вертикальной составляющей опорной реакции), последовательно будем откладывать встречающиеся векторы сил в удобном для расчета масштабе в том направлении, в котором они действуют на узел. Иными словами: будем геометрически суммировать векторы сил (рис. 4.6,*б*). Многоугольник сил получился замкнутым, т.е. равнодействующая всех сил, действующих на узел, равна нулю и узел находится в равновесии.

Определение усилий N_3 N_9 и N_{18} с помощью уравнений равновесия для части фермы, полученной в результате рассечения ее поперечным сечением (способ сечений)

Усилие N_3. Для определения этого усилия более рациональным является использование не способа вырезания узлов, а способа рассечения фермы на две части. Последовательность этого расчета следующая:

1. Рассекаем ферму сечением 1-1 на две части и рассмотрим равновесие любой из них, например, левой (рис. 4.7). Неизвестные усилия в рассеченных стержнях обозначим как растягивающие.

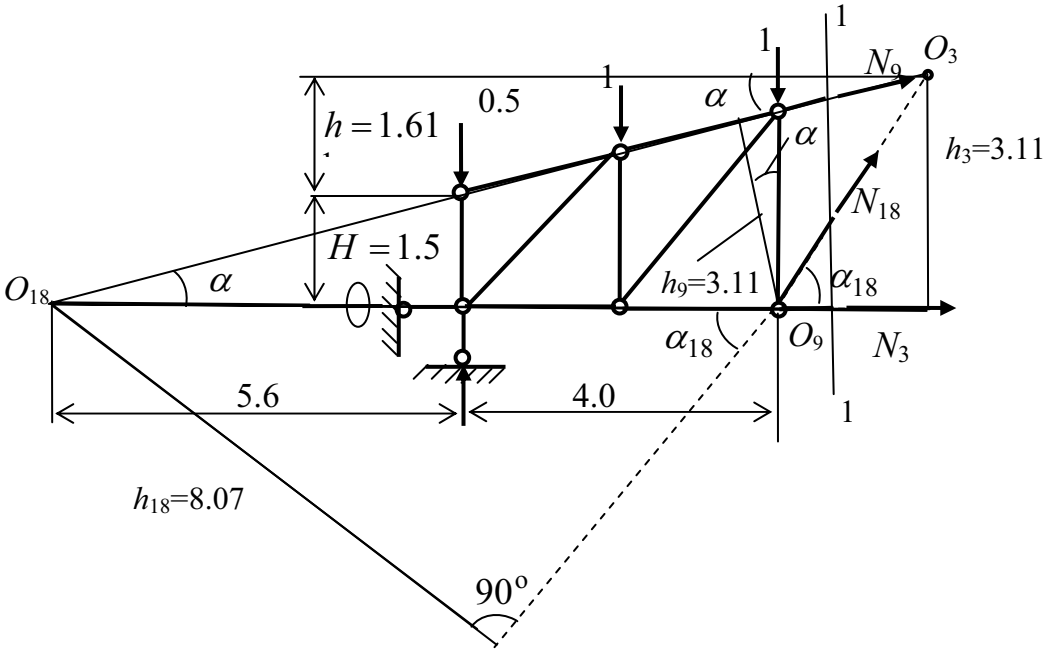


Рис. 4.7

2. Линии действия усилий N_9 и N_{18} пересечем в точке O_3.

3. Применим для этой части фермы уравнение равновесия вида: $\sum M_{O_3}^{\text{лев}} = -3 \cdot 6 + 0.5 \cdot 6 + 1(4+2) + N_3 \cdot 3.11 = 0$ Это уравнение имеет только одно неизвестное N_3. В соответствии с заданным углом наклона верхнего пояса

фермы ($\alpha = 15^{o}$) получим $\text{tg}15^{o} = 0.2679$ $h = 0.5L \cdot \text{tg}15^{o} = 6 \cdot 0.2679 = 1.61$ м и $h_3 = H + h = 1.5 + 1.61 = 3.11$ м. Тогда получаем: $N_3 = 2.9$ кН.

Знак плюс показывает, что стержень 3 растянут. Такой же результат получился при расчете фермы МКЭ по программе SCAD.

Это рассечение фермы применим и для определения усилия N_9 в стержне верхнего пояса и усилия N_{18} в раскосе. В первом случае уравнение равновесия составляется относительно моментной точки O_9 и имеет вид:

$$\sum M_{O_9}^{\text{лев}} = -3 \cdot 4 + 0.5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 - N_9 \cdot h_9 = 0$$

Плечо $h_9 = y_{10} \cos 15^{o} = 2.57 \cdot 0.9659 = 2.48$ м. Тогда $N_9 = -3.23$ кН.

Во втором случае уравнение равновесия составляем относительно моментной точки O_{18}:

$$\sum M_{O_{18}}^{\text{лев}} = (3 - 0.5) \cdot 5.6 - 1(7.6 + 9.6) + N_{18} \cdot h_{18} = 0$$

Так как $(y_{11} - y_4)/(x_4 - x_3) = 3.11/2 = 1.555 = \text{tg}\alpha_{18}$, то $\alpha_{18} = 57^{o}15'$, $\sin\alpha_{18} = \sin 57^{o}15' = 0.8410$, $h_{18} = (5.6 + 4) \cdot \sin\alpha_{18} = 9.6 \cdot 0.8410 = 8.07$ м. Тогда $N_{18} = 3.2/8.07 = 0.4$ кН.

Как видим, усилия $N_9 = -3.23$ кН и $N_{18} = 0.4$ кН практически точно совпадают с этими усилиями, определенными расчетом на ПК с использованием программы SCAD.

Аналогично, составляя необходимые уравнения равновесия, можно проверить и другие усилия в стержнях фермы.

Заключение

Выполненные проверки позволяют сделать вывод, что ***расчет фермы по определению усилий в ее стержнях и в опорных связях выполнен правильно.***

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики и теории упругости

ОТЧЕТ
о выполнении расчетной работы 5

Построение огибающих эпюр изгибающих моментов
$M_{\max}$ и $M_{\min}$ в неразрезной балке

(шифр задания)

Выполнил:
студент гр…….
…….
Принял:
преподаватель
…….

С.-Петербург
2007

В соответствии с первыми двумя цифрами заданного четырехзначного цифрового шифра ABCD из табл. 10 сборника заданий (см. приложение 3 к УМК или [6]) находим заданную расчетную схему неразрезной балки.

Значения длин пролетов и консоли выбираем по третьей цифре шифра из табл. 12. Получаем схему, изображенную на рис. 5.1.

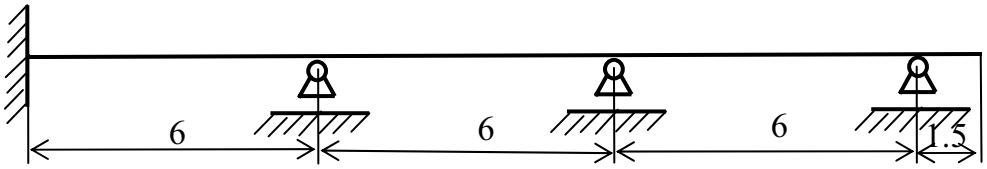


Рис. 5.1

На балку действует постоянная и временная статические нагрузки, схема действия которых на пролеты балки (рис. 5.2, *а*) выбрана из табл. 11 по последней цифрой шифр. На консоли эти нагрузки, в соответствии с приведенными в задании методическими рекомендациями, заданы по схеме, изображенной на рис. 5.2, *б*).

Значения распределенной постоянной нагрузки, кН/м, и сосредоточенных временных нагрузок, кН, взяты из табл. 12 также по последней цифре шифра.

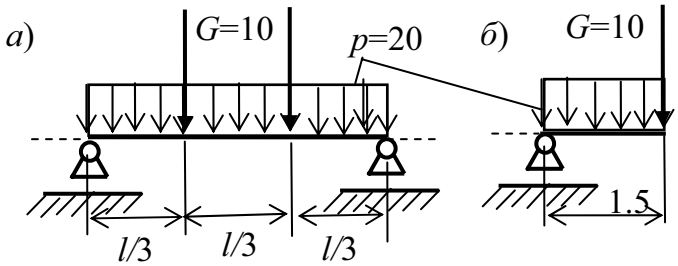


Рис. 5.2

В связи с тем, что временная нагрузка на пролетах и на консоли балки может действовать в различных вариантах сочетания (см. раздел 9 УМК), усилия в сечениях балки будут изменяться в зависимости от выбранных сочетаний положения временных нагрузок.

В задании требуется: ***для любого сечения найти максимальные и минимальные ($M_{\max}$ и $M_{\min}$) значения изгибающих моментов и построить соответствующие огибающие эпюры.***

Решение выполним на ПК с использованием МКЭ (см. раздел 8 УМК), алгоритм которого реализован с помощью программы SCAD.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МКЭ НА ПК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

Сначала выполним следующие предварительные действия, необходимые для начала работы на ПК с использованием программы SCAD.

1. Анализ расчетной схемы балки с точки зрения ее статической определимости

или неопределимости и геометрической неизменяемости

***1.1. Подсчитываем степень статической неопределимости балки*:**

$$n = n_{\text{оп}} - (3 + n_{1\text{ш}}) = 6 - (3+0) = 3.$$

Заданная неразрезная балка имеет три лишних неизвестных по сравнению с имеющимся числом уравнений равновесия.

1.2. Исследуем геометрическую неизменяемость конструкции

С точки зрения числа связей, необходимых для образования геометрически неизменяемой конструкции, имеются три лишних связи.

Действительно, балка была бы геометрически неизменяемой системой, даже если она была бы прикреплена к неподвижному жесткому основанию только защемляющей опорой (три связи). Тем более она остается геометрически неизменяемой при прикреплении балки еще тремя вертикальными опорными связями.

Таким образом, заданная балка является трижды статически неопределимой геометрически неизменяемой системой.

2. Составим вручную расчетную схему балки дл использования МКЭ

Перед использованием программы SCAD, которая реализует алгоритм МЕЭ в форме метода перемещений, разобьем балку на стержневые конечные элементы типа 2 (SCAD). При этом, как это делалось ранее и при расчете статически определимых шарнирных балок, в местах приложения сосредоточенных сил временной нагрузки наметим узлы КЭ (рис. 5.3).

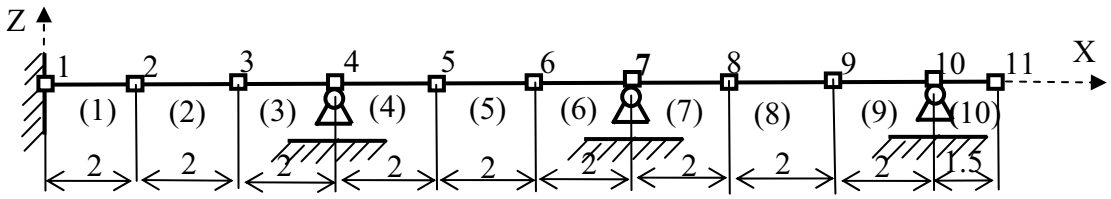


Рис.5.3

3. Запускаем программу SCAD и выполняем расчет балки

3.1. При построении расчетной схемы МКЭ по программе SCAD, как и в случае шарнирной балки, используем типовую расчетную схему плоской рамы (см. методические указания, приведенные в приложении 1 к УМК).

3.2. При задании жесткостей конечных элементов использованы рекомендации подраздела 3.6 и приложения 1 УМК.

3.3. Рассмотрены загружения $i = 1,2,..5$ балки:

$\boldsymbol{i = 1}$. Постоянная нагрузка $p = 10$ кН расположена на всех пролетах и на консоли (на всех десяти КЭ).

$\boldsymbol{i = 2,3,4}$. Временной нагрузкой $G = 40$ кН загружен только пролет балки с номером $\boldsymbol{i - 1}$ (отсчет слева направо).

$\boldsymbol{i = 5}$. Временной нагрузкой $G = 40$ кН загружена только консоль балки (десятый КЭ балки).

3.4. Полученные в результате расчета эпюры изгибающих моментов M_i были сохранены в папке SWORK, а затем вставлены как рисунки в данный отчет (рис. 5.4).

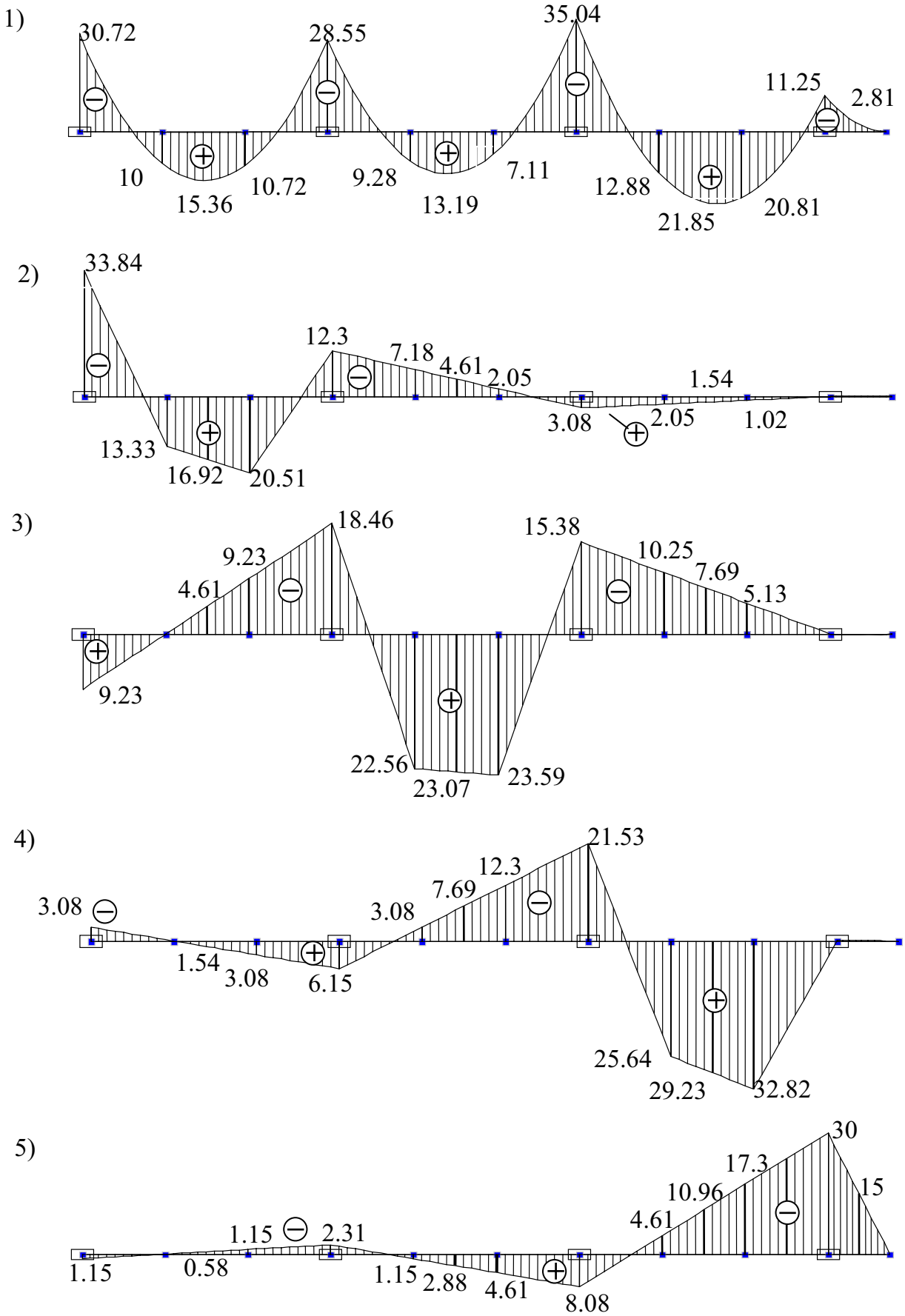

1)
30.72
28.55
35.04
11.25
2.81
10
15.36
10.72
9.28
13.19
7.11
12.88
21.85
20.81
2)
33.84
12.3
7.18
4.61
2.05
1.54
3.08
2.05
1.02
13.33
16.92
20.51
3)
18.46
15.38
9.23
10.25
7.69
4.61
5.13
9.23
22.56
23.07
23.59
4)
21.53
12.3
7.69
3.08
3.08
1.54
3.08
6.15
25.64
29.23
32.82
5)
30
17.3
10.96
15
4.61
1.15
2.31
1.15
0.58
1.15
2.88
4.61
8.08

Рис. 5.4

3.5. Значения ординат этих эпюр взяты из таблицы усилий, полученной в результате расчета по программе SCAD. Эта таблица в скопированном и отредактированном виде представлена в виде табл. 5.1.

Таблица 5.1

002_	1-1	1-2	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	4-1	4-2	5-1
1 -	(1.пост p=10)									
M	-30.72	10.	10.	15.36	10.72	10.72	-28.55	-28.55	9.278	9.278
2 -	(2 пролет1 G=20)									
M	-33.84	13.33	13.33	16.92	20.51	20.51	-12.3	-12.3	-7.179	-7.179
3 -	(3 пролет2 G=20)									
M	9.23			-4.615	-9.23	-9.23	-18.46	-18.46	22.56	22.56
4 -	(4 пролет3 G=20)									
M	-3.076			1.538	3.076	3.076	6.153	6.153	-3.076	-3.076
5 -	(5 консоль G=20)									
M	1.153			-.5769	-1.153	-1.153	-2.307	-2.307	1.153	1.153
M_{max}	-20.34	23.33	23.33	33.82	34.31	34.31	-22.4	-22.4	32.99	32.99
M_{min}	-67.64	10	10	10.17	0.34	0.34	-61.62	-61.62	-0.98	-0.98

002_	5-2	5-3	6-1	6-2	7-1	7-2	8-1	8-2	8-3	9-1
1 -	(1.пост p=10)									
M	13.19	7.115	7.115	-35.04	-35.04	12.88	12.88	21.85	20.81	20.81
2 -	(2 пролет1 G=20)									
M	-4.615	-2.051	-2.051	3.076	3.076	2.051	2.051	1.538	1.025	1.025
3 -	(3 пролет2 G=20)									
M	23.07	23.59	23.59	-15.38	-15.38	-10.25	-10.25	-7.692	-5.128	-5.128
4 -	(4 пролет3 G=20)									
M	-7.692	-12.3	-12.3	-21.53	-21.53	25.64	25.64	29.23	32.82	32.82
5 -	(5 консоль G=20)									
M	2.884	4.615	4.615	8.076	8.076	-4.615	-4.615	-10.96	-17.3	-17.3
M_{max}	39.14	35.31	35.31	-23.89	-23.89	40.57	40.57	52.62	54.65	54.65
M_{min}	0.88	-7.24	-7.24	-71.95	-71.95	-1.98	-1.98	3.20	-1.62	-1.62

2_	9-2	10-1	10-2	10-3
1 -	(1.пост p=10)			
M	-11.25	-11.25	-2.812	
2 -	(2 пролет1 G=20)			
3 -	(3 пролет2 G=20)			
4 -	(4 пролет3 G=20)			
5 -	(5 консоль G=20)			
M	-30.	-30.	-15.	
M_{max}	-11.25	-11.25	-2.81	0
M_{min}	-41.25	-41.25	-17.81	0

3.6. По полученным ординатам $M_{\max}$ и $M_{\min}$ построены огибающие эпюры изгибающих моментов (рис. 5.5). Здесь же показана и эпюра M_p от постоянной нагрузки.

***Методические указания для учащегося*:**

Эпюры на рис. 5 построены с помощью стандартной программы Microsoft Excel. Для построения графиков в виде точечных кривых использован Мастер диаграмм. Учащийся может использовать для этого и другие возможности.

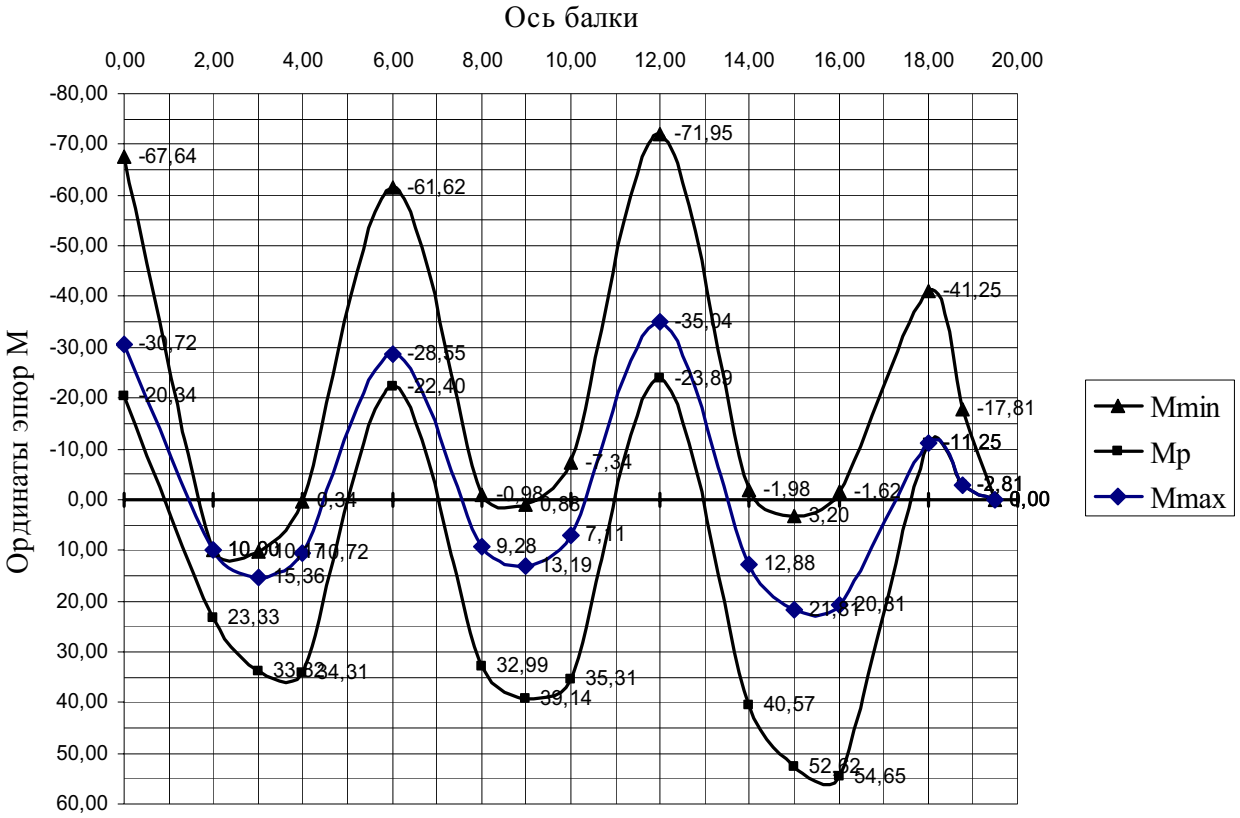


Рис. 5.5

На рис. 5.5 эпюры M_p , $M_{\max}$ и $M_{\min}$ отмечены соответственно значками ромба, квадрата и треугольника. Поставленное задание выполнено.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики и теории упругости

ОТЧЕТ
о выполнении расчетной работы 6

Построение эпюры *M* в неразрезной балке
при загружении одного из ее пролетов

(шифр задания)

Выполнил:
студент гр…….
……

Принял:
преподаватель
……

С.-Петербург
2007

В соответствии с заданием для работы 6 (см. приложение 2 к УМК и учебные пособия [1, 6] рассмотрим неразрезную балку из задания 5 (см. рис. 5.1 в отчете предыдущей работы), когда загружен только один из ее пролетов или консоль. В данной работе выберем вариант загружения 3 неразрезной балки временной нагрузкой (см. рис. 5.2 в предыдущем отчете со схемой загружения пролетов балки временной нагрузкой в виде двух сосредоточенных сил $G = 20$ кН).

Таким образом, будем рассматривать вариант загружения неразрезной балки, приведенный на рис. 6.1, *а* данного отчета.

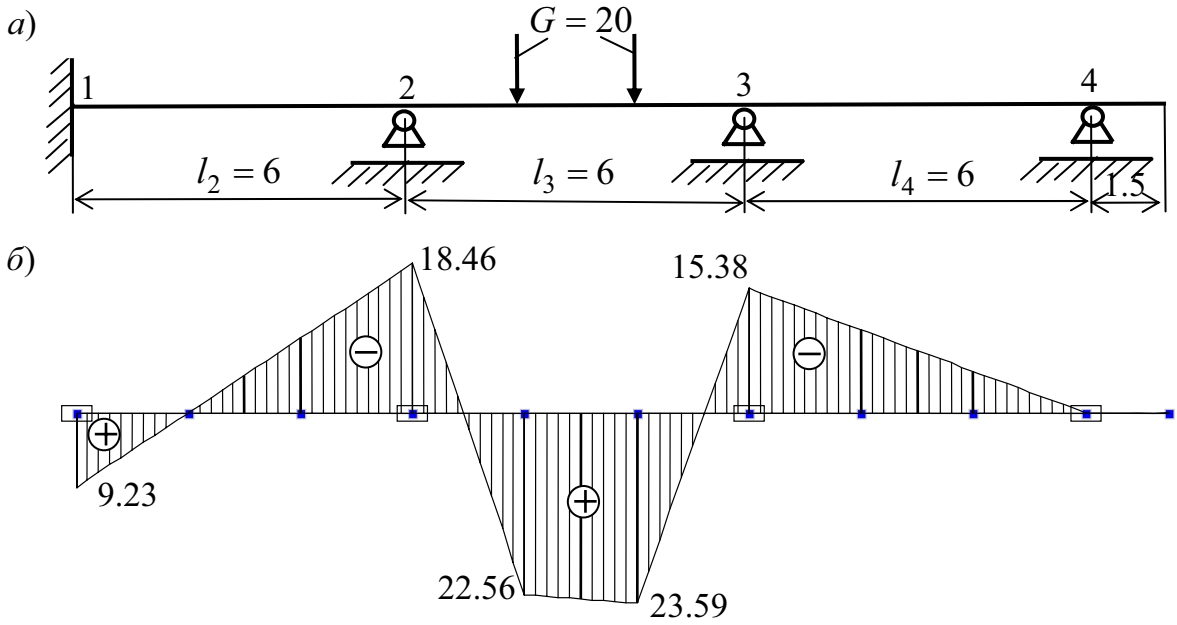


Рис. 6.1

Эпюра изгибающих моментов для этого загружения была построена в предыдущем задании в результате расчета балки МКЭ в форме метода перемещений, реализованного на ПК с использованием программы SCAD (рис. 6.1,*б*).

В данном задании требуется построить эту эпюру:

1) методом сил с использованием обычного составления и решения системы уравнений трех моментов;

2) методом сил с использованием алгоритма решения системы уравнений трех моментов, реализующего фокусные отношения опорных моментов на незагруженных пролетах балки;

3) Выполнить сопоставление эпюр M, полученных разными способами.

Примечание. Учащимся рекомендуется ознакомиться в разделе 9 УМК с решением этой задачи графическим способом С.С.Голушкевичаб

1.ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ *M* МЕТОДОМ СИЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЫЧНОГО СОСТАВЛЕНИЯ И РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТРЕХ МОМЕНТОВ

Выполним этот расчет в соответствии с методикой, приведенной в подразделе 7.2 в УМК и в подразделе 6.2 в [1].

1.1. Подсчитываем степень статической неопределимости балки:

$$n = n_{\text{оп}} - (3 + n_{1\text{ш}}) = 6 - (3 + 0) = 3$$

Балка три раза статически неопределима, так как общее число усилий в опорных связях балки (шесть) на три превышает общее число уравнений равновесия (три), которые можно записать для определения опорных реакций балки в условиях плоской задачи.

В методе сил для определения «лишних» неизвестных составляются n дополнительных уравнений. Это делается с помощью эквивалентного состояния основной системы метода сил (см. раздел 7). Для неразрезной балки наиболее рациональной основной системой является основная система в виде цепочки простых балок (см. рис. 7.4,*б* в подразделе 7.2 УМК).

1.2. Составляем эквивалентное состояние рациональной основной системы метода сил для неразрезной балки (рис. 6.2,*а*).

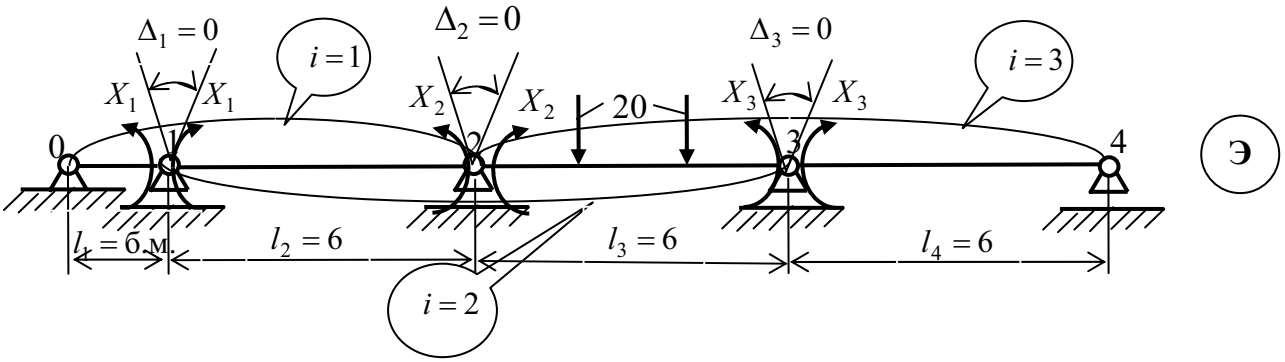


Рис. 6.2

1.3. Составляем систему уравнений метода сил для определения лишних неизвестных X_i (i=1, 2, 3)

Эти уравнения получаются из эквивалентного состояния основной системы из условий $\Delta_i = 0$, где $i = 1, 2, 3$, равенства нулю «углов раскрытия» шарниров над опорами. Использовав принцип независимости действия сил для линейно-деформируемой системы и закон Гука, получим систему уравнений метода сил для определения лишних неизвестных.

В подразделе 7.2 УМК показано, что каждое уравнение для неразрезной балки на жестких опорах будет содержать только три опорных момента и для балки с постоянной жесткостью на всех пролетах и симметричной

(относительно середины пролета) нагрузкой на пролетах в общем случае имеет вид «уравнения трех моментов» (7.17)

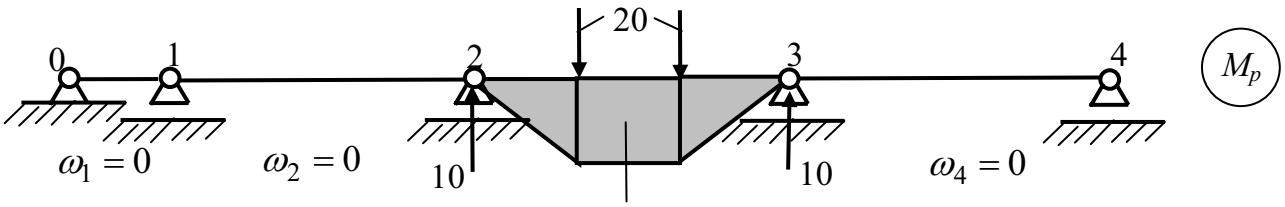
На эквивалентном состоянии основной системы (см. рис. 7.2) показано как это общее уравнение позволяет записать любое уравнение системы уравнений метода сил: ***необходимо в общем уравнении номер уравнения*** i ***принять равным номеру средней опоры двух смежных пролетов, три опорных момента которых входят в составляемое уравнение.***

В данном примере балки получаем следующую систему трех уравнений с тремя неизвестными опорными моментами:

$$\begin{aligned} &i=1.\quad \Delta_1=0:\quad l_1X_0+2(l_1+l_2)X_1+l_2X_2=-3(\omega_1+\omega_2);\\ &i=2.\quad \Delta_2=0:\quad l_2X_1+2(l_2+l_3)X_2+l_3X_3=-3(\omega_2+\omega_3);\\ &i=3.\quad \Delta_3=0:\quad l_3X_2+2(l_3+l_4)X_3+l_4X_4=-3(\omega_3+\omega_4). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь, кроме величин, обозначения которых известны (см. рис. 6.2), входят величины ω_i площадей эпюр изгибающих моментов на пролетах с номером i от заданных на пролеты внешних нагрузок (см. схемы нагрузок в табл. 12 сборника заданий в приложении 2 УМК).

Для вычисления этих площадей составим грузовое состояние выбранной основной системы заданной балки и построим эпюру M_p**.** (рис. 6.3). Значения площадей эпюры M_p для нагрузок на пролеты балки, используемых в задании 5 (см. табл. 12 в приложении 2 УМК) приведены на рис 7.6 в разделе 7 УМК.



$$\omega_3=\frac{2}{9}Gl^2=\frac{2\cdot 20\cdot 6^2}{9}=160\,\text{кНм}^2$$

Рис. 6.3

Подставляя численные значения известных величин, входящих в систему уравнений (6.1) и учитывая, что l_1 является бесконечно малой величиной, которой пренебрегаем, получим систему уравнений в виде:

$$\begin{aligned} &i=1.\quad \Delta_1=0:\quad 12X_1+6X_2=0;\\ &i=2.\quad \Delta_2=0:\quad 6X_1+24X_2+6X_3=-480;\\ &i=3.\quad \Delta_3=0:\quad 6X_2+24X_3+6X_4=-480. \end{aligned} \tag{6.2}$$

В матричной форме записи эта система уравнений имеет вид:

$$\mathbf{Dx} = \mathbf{d}_p, \tag{6.3}$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & 24 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

представляет собой матрицу податливости выбранной основной системы неразрезной балки (матрицу влияния лишних неизвестных на соответствующие им перемещения). Каждый элемент δ_{ki} столбца i этой матрицы физически является взаимным углом поворота сечений балки, подходящих к опоре k во вспомогательном состоянии i основной системе балки, вызванным действием двух единичных моментов, приложенных на опоре i основной системы вместо соответствующего неизвестного опорного момента X_i. Матрица D симметрична, так как $\delta_{ki} = \delta_{ik}$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

является вектором искомых лишних неизвестных, соответствующих выбранной основной системе неразрезной балки, представляющих собой опорные моменты неразрезной балки;

$$\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -480 \\ -480 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

является вектором свободных членов системы уравнений трех моментов, каждый элемент Δ_{kp} которого представляет собой известный взаимный угол поворота сечений балки, подходящих к опоре k в грузовом вспомогательном состоянии основной системы балки, вызванный заданными внешними нагрузками на пролетах (не лишними неизвестными).

1.4.Решаем систему алгебраических уравнений и определяем вектор искомых лишних неизвестных:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \\ \mathbf{X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.23 \\ -18.46 \\ -15.38 \end{bmatrix} \text{ кНм.} \tag{6.7}$$

Как видим, опорные моменты в неразрезной балке при рассматриваемом загружении (см. рис. 6.1, *а*), а значит и окончательная эпюра изгибающих моментов, полученные расчетом балки методом сил, полностью совпадают с аналогичными результатами, полученными в предыдущем задании расчетом балки МКЭ в форме метода перемещений, реализованным на ПК с использованием программы SCAD (см. рис. 6.1, *б*).

2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ *M* МЕТОДОМ СИЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТРЕХ МОМЕНТОВ ФОКУСНЫХ ОТНОШЕНИЙ ОПОРНЫХ МОМЕНТОВ НА НЕЗАГРУЖЕННЫХ ПРОЛЕТАХ БАЛКИ

В подразделах 7.3 и 7.4 УМК показано, что систему уравнений трех моментов при загружении только одного пролета неразрезной балки с номером r можно решить, используя левые фокусные отношения опорных моментов на незагруженных пролетах слева от загруженного и правые фокусные отношения на незагруженных пролетах справа от загруженного.

При этом оказывается возможным построить следующий алгоритм получения решения системы уравнений трех моментов (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Вычисляемые величины	Номера r пролетов балки в основной системе (см. рис. 2)			
	1	2	3	4
$i_r = EI_r / l_r$	$i_1 = \infty$	$i_2 = 1$	$i_3 = 1$	$i_4 = 1$
$K_r = 2 + \frac{i_r}{i_{r-1}}(2 - \frac{1}{K_{r-1}})$	$K_1 = \infty$	$K_2 = 2$	$K_3 = 3{,}5$	$K_4 = 3.965$
$K'_r = 2 + \frac{i_{r+1}}{i_r}(2 - \frac{1}{K'_{r+1}})$		$K'_2 = 3{,}75$	$K'_3 = 4$	$K'_4 = \infty$
Вычисляемые опорные моменты, кНм	Номера k опор балки в основной системе (см. рис. 2)			
	1	2	3	4
X_k	$X_1 = 9.23$	$X_2 = -18.46$	$X_3 = -15.38$	$X_4 = 0$

Примечания к табл. 6.1:

1. Величины в затененных прямоугольниках являются исходными величинами для расчетов левых и правых фокусных отношений.

2. При вычислении опорных моментов сначала вычисляются левый и правый опорные моменты на загруженном пролете. В табл. 6.1. они отмечены незатененными прямоугольниками.

2.1. ***Определяются погонные жесткости*** i_r ***для всех пролетов основной системы метода сил балки***. В нашем примере неразрезной балки (см. рис. 6.1) $r = 1, 2, 3, 4$ (рис. 6.2).

Так как длина первого пролета основной системы балки бесконечно

малая величина, то погонная жесткость первого пролета имеет бесконечно большое значение ($i_1 = \infty$).

Жесткости на изгиб всех пролетов заданной балки равны друг другу и равны EI. Эта величина при решении системы уравнений метода сил для определения лишних неизвестных сокращается, поэтому может быть принята равной любому значению. При одинаковой длине пролетов заданной неразрезной балки (см. рис. 6.1) равной 6 м при вычислении погонных жесткостей примем $EI_r = EI = 6$. Тогда погонные жесткости пролетов будут равны единице (табл. 6.1).

2.2. ***По формуле***

$$K_r = 2 + \frac{i_r}{i_{r-1}}(2 - \frac{1}{K_{r-1}}) \qquad (6.8)$$

по известному левому фокусному отношению K_{r-1} ***для пролета*** $r-1$ ***определяем левое фокусное отношение*** K_r ***для пролета*** r.

Процедура начинается с самого левого пролета основной системы (см. рис. 6.2), т.е. в нашем примере – с пролета $r-1=1$, для которого левое фокусное отношения моментов известно: $K_1 = X_1/X_0 = X_1/0 = \infty$. В результате последовательно (слева направо) получаем значения левых фокусных отношений

$$K_1 = \infty \to K_2 = 2 \to K_3 = 3.5 \to K_4 = 3.965 \qquad (6.9)$$

для всех пролетов балки (табл. 6.1).

2.3. ***По формуле***

$$K'_r = 2 + \frac{i_{r+1}}{i_r}(2 - \frac{1}{K'_{r+1}}) \qquad (6.10)$$

по известному правому фокусному отношению K'_{r+1} ***для пролета*** $r+1$ ***определяем правое фокусное отношение*** K'_r ***для пролета*** r**.**

Процедура начинается с самого правого пролета основной системы $r+1=n+1$, где n степень статической неопределимости неразрезной балки, т.е. в нашем примере – с пролета $r+1=n+1=4$ (см. рис. 6.2), для которого правое фокусное отношение $K_4 = X_3/X_4 = X_3/0 = \infty$. В результате последовательно (справа налево) получаем значения правых фокусных отношений

$$K'_2 = 3.75 \leftarrow K'_3 = 4 \leftarrow K'_4 = \infty \qquad (6.11)$$

на пролетах балки с номерами 4, 3, 2 (табл. 6.1). Пролет с номером 1 является фиктивным пролетом, заменяющим заделку, и при определении правых фокусных отношений не рассматривается.

2.4. ***По формулам (7.41) в разделе 7 УМК***

$$X_{k-1} = \frac{3\omega_k (K'_k - 1)}{l_k (1 - K_k K'_k)}; \quad X_k = \frac{3\omega_k (K_k - 1)}{l_k (1 - K_k K'_k)}. \tag{6.12}$$

на загруженном пролете $k = 3$ ***определяем опорный момент*** $X_{k-1} = X_2$ ***на левой и опорный момент*** $X_k = X_3$ ***на правой опорах пролета*:**

$$X_2 = \frac{3 \cdot 160 \cdot (4-1)}{6 \cdot (1 - 4 \cdot 3.5)} = -\frac{240}{13} = -18.46 \text{ кНм};$$
$$X_3 = \frac{3 \cdot 160 \cdot (3.5-1)}{6 \cdot (1 - 4 \cdot 3.5)} = -\frac{200}{13} = -15.38 \text{ кНм}. \tag{6.13}$$

2.5. ***По формуле***

$$X_{r-1} = -X_r / K_r \tag{6.14}$$

по правому опорному моменту X_r ***для незагруженного пролета*** r***, расположенного левее загруженного пролета, и по левому фокусному отношению*** K_r ***определяется левый опорный момент*** X_{r-1} ***для незагруженного пролета*** r**.**

Правый опорный момент X_r на первом пролете с номером r слева от загруженного пролета известен, так как он равен левому опорному моменту X_{k-1} на загруженном пролете с номером k, определенному по первой формуле (6.12).

Для данного примера загруженным пролетом является пролет $k = 3$, а первым слева незагруженным пролетом – пролет $r = 2$. Известным опорным моментом $X_r = X_{k-1}$ является момент $X_r = X_{k-1} = X_2 = -18.46$ кНм. Тогда по формуле (6.14) находим:

$$X_1 = -X_2 / K_2 = 18.46/2 = 9.23 \text{ кНм}. \tag{6.15}$$

2.6. ***По формуле***

$$X_r = -X_{r-1} / K'_r \tag{6.16}$$

по левому опорному моменту X_{r-1} ***для незагруженного пролета*** r***, расположенного правее загруженного пролета, и по правому фокусному отношению*** K'_r ***определяется правый опорный момент*** X_r ***для незагруженного пролета*** r**.**

Левый опорный момент X_{r-1} на первом пролете справа от загруженного пролета известен, так как он равен правому опорному моменту X_k на загруженном пролете k, определенному по второй формуле (6.12).

Для данного примера загруженным пролетом является пролет $k = 3$, а первым справа незагруженным пролетом – пролет $r = 4$. Известным опорным моментом $X_{r-1} = X_k$ является момент $X_{r-1} = X_k = X_3 = -15.38$ кНм. Тогда по формуле (6.14) находим:

$$X_4 = -X_3 / K'_4 = 15.38/\infty = 0. \qquad (6.17)$$

Как видим, опорные моменты в неразрезной балке при рассматриваемом загружении (см. рис. 6.1, *а*), а значит и окончательная эпюра изгибающих моментов, полученные расчетом методом сил с использованием фокусных отношений, полностью совпадают с аналогичными результатами, полученными предыдущим расчетом методом сил и расчетом балки МКЭ в форме метода перемещений, реализованным на ПК с использованием программы SCAD (см. рис. 6.1, *б*).

3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ *M* ГРАФИЧЕСКИМ СПОСОБОМ «ФОКУСНЫХ ТОЧЕК» С.С. ГОЛУШКЕВИЧА

Идея способа и процедура расчета неразрезной балки этим способом описаны в подразделе 7.5 УМК.

Определяем левые и правые фокусные точки на пролетах заданной неразрезной балки (рис. 6.4, *а*).

С этой целью:

1. ***Заданная неразрезная балка изображается в выбранном масштаб***е (рис. 6.4, *а*).

2. Пролеты балки делятся на три равные части и в третях пролетов, ближайших к внутренним опорам балки, в выбираемом масштабе откладываются (так как это показано на рис. 6.4, *а*) отрезки, равные погонным жесткостям соответствующих пролетов. В нашем примере погонные жесткости для пролетов приведены в табл. 6.1.

3. На крайнем левом пролете балки отмечаем известную левую фокусную точку. В нашем примере такой точкой является точка F_2, расположенная (см. раздел 7 УМК) на расстоянии равном одной трети длины пролета l_2 от заделки (см. рис. 6.4, *а*).

4. Загрузим балку справа фиктивным моментом $M_{\text{ф}}^{\text{пр}}$ (см. рис. 6.4, *а*) и применим «теорему об узле» к опоре 2 балки. Подберем фиктивный момент так, чтобы в крайнем левом пролете прямолинейная эпюра M, (она на рис. 6.4, *а* изображена сплошной линией) проходящая по основному свойству фокусных точек через левую фокусную точку F_2, в соответствии с «теоремой об узле» прошла бы и через конец отрезка, отложенного в трети пролета ближайшей к опоре 2 и численно равного погонной жесткости этого пролета.

Тогда (в соответствии с «теоремой об узле») на соседнем пролете прямолинейная эпюра M (она на рис. 6.4, *а* также изображена сплошной линией) пройдет и через конец

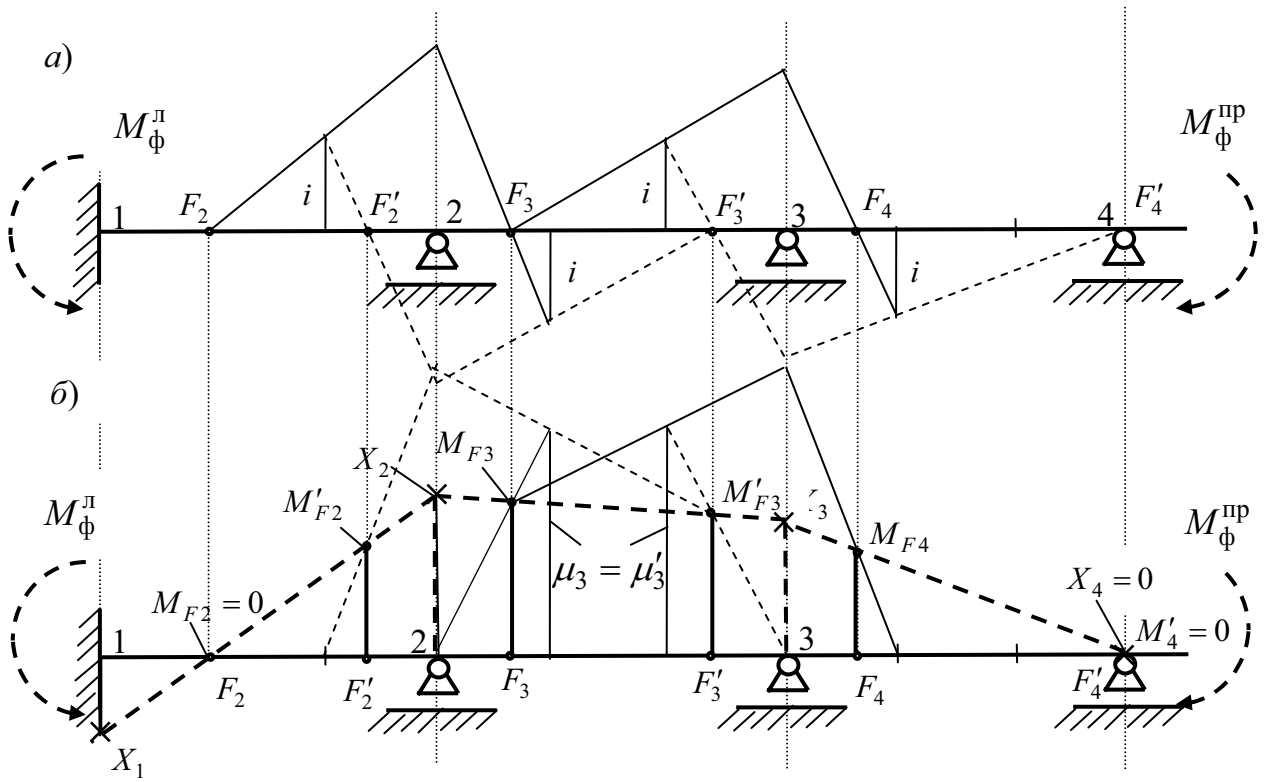


Рис. 6.4

отрезка, отложенного в трети пролета ближайшей к опоре 2 и численно равного погонной жесткости этого пролета.

Очевидно (по основному свойству фокусных точек [1]), что точка F_3 пересечения этой фиктивной эпюры моментов с осью балки на пролете с номером 3 будет левой фокусной точкой этого пролета.

Повторив этот алгоритм для опоры 3 (фиктивный момент $M_ф^{пр}$ будет другим), по найденной левой фокусной точке F_3 найдем положение левой фокусной точки F_4 (см. рис. 6.4, *а*).

5. Применив аналогичный алгоритм для правых фокусных точек, по известной правой фокусной точке F_4' для крайнего справа пролета 4 последовательно определим правые фокусные точки для пролетов 3 и 2: $F_4' \to F_3' \to F_2'$ (построения на рис. 6.4, *а* штриховыми линиями с использованием фиктивных моментов $M_ф^л$).

Определяем ординаты M_{Fr} и $M_{F'r}$ л.о.м. балки в сечениях, совпадающих с левыми и правыми фокусными точками пролетов

1. ***Заданная неразрезная балка изображается в выбранном масштабе*** (рис. 6.4, *б*).

2. Пролеты балки делятся на три равные части и в третях пролетов с номером r в выбираемом масштабе откладываются (так как это показано на рис. 6.4, *б*) отрезки, равные ординатам μ_r и μ_r' л.о.м. в однопролетной балке с защемленными концами при заданной конкретной нагрузке и при длине пролета равной пролету r заданной неразрезной балки,

В нашем примере на незагруженных пролетах неразрезной балки отрезки μ_r и μ_r' равны нулю, а на загруженном пролете ($r = 3$) эти ординаты можно взять, например, из табл.

7.1 в разделе 7 УМК. Из этой таблицы следует, что $\mu_3 = \mu_3' = = -2Gl/9 = -2\cdot 20\cdot 6/9 =$ $= -26.67$ кНм.

3. Обратим внимание на то, что ***на крайнем левом пролете неразрезной балки с номером*** r ***ордината л.о.м.*** M_{Fr} ***в сечении, совпадающем с левой фокусной точкой*** F_r ***всегда известна***. В нашем примере этот пролет незагружен, поэтому ордината $M_{F2} = 0$ (прямая линия эпюры M на незагруженном пролете, расположенном слева от загруженного пролета, всегда пройдет через левую фокусную точку).

По этой ординате, применив к пролетам 2 и 3 с помощью фиктивного момента $M_{\text{ф}}^{\text{пр}}$ «теорему о стержне» и использовав основное свойство фокусных точек, можно графическим приемом найти ординату M_{F3} л.о.м. на пролете 3 в сечении, соответствующем левой фокусной точке F_3.

Подберем фиктивный момент $M_{\text{ф}}^{\text{пр}}$ так, чтобы сечение балки над опорой 2 неразрезной балки, повернувшееся от заданной на пролете 3 нагрузки на какой-то угол $\varphi_2(G)$, повернулся на такой же угол, но в обратную сторону, т.е. повернулся на угол $\varphi_2(M_{\text{ф}}^{\text{пр}}) = -\varphi_2(G)$.

При таком воздействии сечение балки над опорой 2 не будет поворачиваться, что равносильно образованию в этом сечении защемления («заделки»). В этом случае на незагруженном пролете 2 с защемляющими опорами в узлах 1 и 2 ***л.о.м. фиктивой эпюры*** $M_{\text{ф}}$***, соответствующей действию на балку заданной реальной нагрузке и будет фиктивного момента*** $M_{\text{ф}}^{\text{пр}}$ ***будет нулевой, а на пролете 3 л.о.м. фиктивной эпюры*** $M_{\text{ф}}$ ***пройдет*** (***в соответствии с «теоремой о стержне» [1]) от нулевой ординаты в опоре 2 через конец ординаты*** $\mu_3 = 26.67$ ***кНм*** (сплошная линия на рис. 6.4, *б*, идущая от опоры 2).

Приложение фиктивного момента $M_{\text{ф}}^{\text{пр}}$ в соответствии с основным свойством фокусных точек не влияет на изгибающие моменты в сечениях балки, совпадающими с левыми фокусными точками. Это означает, что ордината M_{F3} (см. рис. 6.4, *б*) построенной фиктивной эпюры $M_{\text{ф}}$ будет являться искомой ординатой л.о.м. реальной эпюры M, соответствующей только заданной реальной нагрузке на балку.

4. Аналогичный алгоритм применим для определения ординаты M_{F4} л.о.м. реальной эпюры M в сечении балки, соответствующей левой фокусной точке F_4 по только что найденной ординате M_{F3} в сечении с левой фокусной точкой F_3. Как и в при определении ординаты M_{F3} фиктивная эпюра $M_{\text{ф}}$ на рис. 6.4,*б* показана тонкой сплошной линией.

5. Алгоритм определения ординат л.о.м. реальной эпюры M в сечениях балки правыми фокусными точками в нашем примере начинаем с помощью известной ординаты $M_{F4}' = 0$, соответствующей центру шарнира шарнирной опоры 4, где расположена правая фокусная точка F_4'.

Фиктивные эпюры $M_{\text{ф}}$, построенные с помощью фиктивного момента $M_{\text{ф}}^{\text{л}}$ на

рис. 6.4, *б* изображены тонкими штриховыми линиями. По известной ординате $M'_{F4} = 0$ с помощью фиктивной эпюры, построенной на пролетах 4 и 3, определена ордината л.о.м. M'_{F3} действительной эпюры M, а по ординате M'_{F3} с помощью фиктивной эпюры $M_{ф}$, построенной на пролетах 3 и 2 определена ордината M'_{F2}.

Строим л.о.м. и определяем опорные моменты искомой эпюры M

Через концы найденных ординат M_{Fr} и M'_{Fr} проводятся л.о.м. на каждом пролете балки (жирные штриховые прямые линии на рис. 6.4, *б*).

Контролем правильности графических построений (графического расчета балки) является пересечение л.о.м. на двух смежных пролетах точно на вертикалях, совпадающих с соответствующими опорными сечениями балки, так как ординаты X_r л.о.м. ($r = 1, 2, 3, 4$) должны получиться для обоих смежных пролетов одинаковыми.

В нашем примере это соблюдается. При этом (в выбранном для ординат $\mu_3 = \mu'_3 =$ 26.67 кНм масштабе) получаем следующие приближенные значения опорных моментов (округляем до целых значений):

$$X_1 \approx 9;\ X_2 \approx 18;\ X_3 \approx 16;\ X_4 = 0. \qquad (6.18)$$

Строим окончательную эпюру M

Ординаты окончательной эпюры M ***получаются как сумма соответствующих ординат двух эпюр, построенных в одном масштабе***:

$$\text{эпюра } M = \text{эпюра } M(\text{л.о.м.}) + \text{эпюра } M(p), \qquad (6.19)$$

где

эпюра $M(\text{л.о.м.})$ только что построенная эпюра (см. рис. 6.4, *б*);

эпюра $M(p)$ – эпюра в грузовом состоянии основной системы метода сил для неразрезной балки в виде цепочки простых балок, построенная на рис. 6.3;

эпюра M, построенная графическим способом, будет иметь вид, который изображен на рис. 6.1, *б*.

Боль′шая приближенность графического способа позволила все же получить значения ординат эпюры M достаточно близкие к результатам, полученным при расчете балки методом сил и методом перемещений в форме МКЭ.

Заключение

Поставленная задача построения эпюры M в заданной балке различными способами и сопоставление полученных этими способами результатов расчета выполнена.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики и теории упругости

ОТЧЕТ
о выполнении расчетной работы 7

Построение эпюр *M* и *Q* в балке,
лежащей на непрерывном грунтовом основании
модели Винклера

(шифр задания)

Выполнил:
студент гр……
……

Принял :
преподаватель
……

С.-Петербург
2007

В соответствии с заданием 7 (см. приложение 2 к УМК) по цифровому шифру ABCD изображаем (размеры в метрах) схему балки (рис. 7.1, *а*).

Железобетонная балка из тяжелого бетона класса B25 расположена на грунтовом основании модели Винклера с коэффициентом постели грунта c = 5 МПа/м = 5000 кН/м^3 (см. табл. 15 в сборнике заданий).

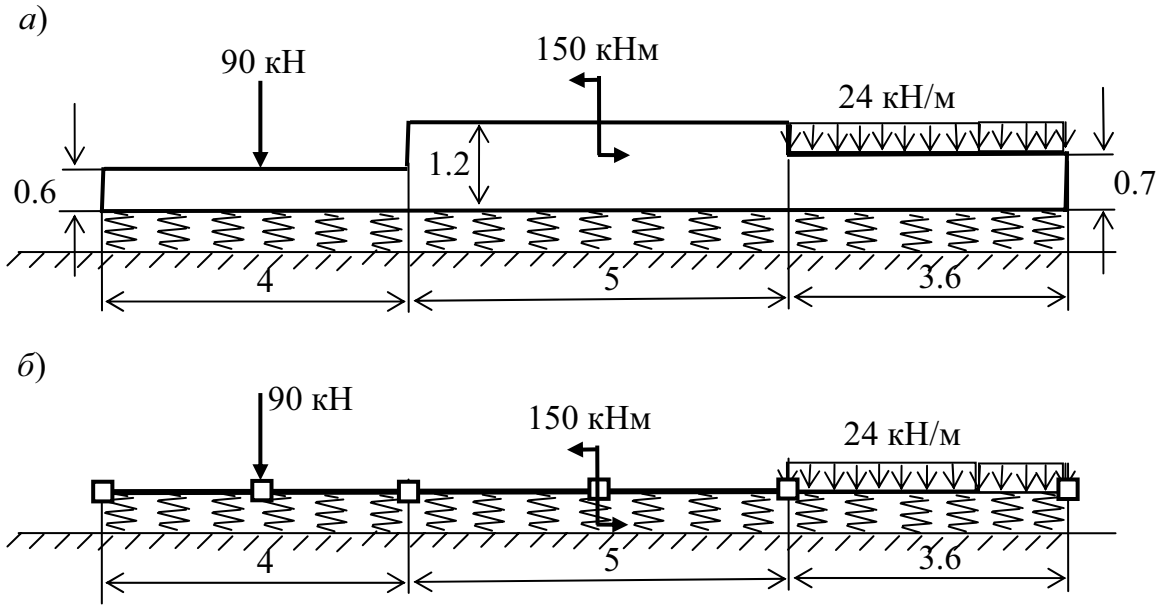


Рис. 7.1

***Требуется выполнить расчет балки от заданной нагрузки на ПК с использованием программы SCAD, реализующей МКЭ в форме метода перемещений, и представить следующие результаты*:**

1. Эпюру осадок $w(x)$ балки с указанием характерных ординат эпюры осадок в узлах сетки КЭ.

2. Эпюры реактивного давления $r(x)$ грунтового основания на балку и давления $f(x)$ балки на грунтовое основание с указанием характерных ординат эпюр давления в тех же узлах (см. линейную зависимость (3.6) в [3]).

3. Эпюры M и Q в балке от заданной на нее нагрузки и реактивного давления основания с указанием характерных ординат эпюр.

Требуется также выполнить контроль приведенных эпюр, проанализировав их вид и соответствие заданным нагрузкам и друг другу.

Примечание для учащихся:

Вопрос о расчете балки от собственного веса в задании не рассматривается, поскольку он связан с технологией возведения балки на поверхности грунтового основания. Для пояснения этого рассмотрим следующие два варианта «появления» балки на поверхности грунтового основания:

1. Балка была где-то изготовлена. Затем, после достижения необходимой прочности железобетона, балка была доставлена на место и положена сразу в целом виде на

предварительно подготовленную поверхность грунтового основания. В этом случае собственный вес балки в ее расчетной схеме может быть приложен как нагрузка на линейно-деформируемую систему «балка-основание» (рис. 7.1, *б*).

2. Балка изготовлена как монолитная железобетонная конструкция прямо на месте ее установки: установили арматурный каркас балки, изготовили опалубку и, заливая бетон в опалубку балки, изготовили монолитную железобетонную балку.

При таком способе возведения балки ее собственный вес прикладывать к расчетной схеме балки, изображенной на рис. 7.1.*б,* нельзя. В этом варианте возведения балки можно приближенно считать, что собственный вес заливаемого в опалубку бетона передастся на основание как вес равномерно распределенной массы тяжелой жидкости с объемным весом жидкого ж/бетона. Сама же балка после затвердения бетона испытывать деформации и усилия от собственного веса не будет.

Рассмотренный вопрос относится к проблеме составления расчетных схем строительных конструкций и сооружений с учетом последовательности их возведения и в данном задании не рассматривается.

Последовательность расчета

1. Перед началом работы на компьютере вручную на листе бумаги составляем расчетную схему балки, разбив ее на конечные элементы (КЭ) типа 2. При этом рекомендуется в местах приложения сосредоточенных сил и моментов намечать узлы КЭ (рис. 7.1, *б*).

2. Дальнейший расчет с использованием программы SCAD известен из расчетов балок, рассмотренных ранее (см. приложение 1 к УМК).

Отличие при расчете балки на упругом основании модели Винклера состоит в назначении жесткостей конечных элементов типа 2. В этом случае кроме задания жесткостей самих стержневых элементов необходимо задать коэффициент постели «*c*» грунта, с которым КЭ типа 2 имеет контакт по его длинной стороне.

Примечание для учащихся:

В данном задании в расчетной схеме МКЭ (см. рис. 7.1, *б*) предполагается, что по контакту КЭ типа 2 с грунтом (по длине КЭ) имеет место двухсторонняя связь: подошва балки не отрывается от плоскости грунта под балкой как при сжимающих, так и при растягивающих напряжениях между ними.

В реальных условиях, когда нет сцепления подошвы балки с грунтом, растягивающие напряжения по контакту балки, лежащей на грунтовом основании, возникнуть не могут. Произойдет отрыв подошвы балки от поверхности грунта. В этом случае, результат расчета балки по расчетной схеме, изображенной на рис. 7.1. *б*, при котором появились растягивающие напряжения, не будет соответствовать действительности и должен быть уточнен.

Задача с отрывом балки даже от линейно-деформируемого грунтового основания является нелинейной. Для ее решения в программе SCAD могут быть использованы односторонние связи, соединяющие узлы КЭ балки с основанием. Но возможно применение

и следующего приближенного способа последовательного решения линейных задач с уточнением расчетной схемы балки.

По длине балка, в месте перехода эпюры сжимающих напряжений по подошве к растягивающим напряжениям, делится узлом КЭ на две части. Каждая из частей делится на конечные элементы типа 2. При этом для КЭ с сжимающими напряжениями по подошве балки задаются коэффициенты постели, принятые в задании для грунта. На той же части балки, где в предыдущем расчете по контакту с основанием получились растягивающие напряжения, коэффициент постели грунта принимается равным нулю (просто не задается).

Выполняется линейный расчет по этой второй расчетной схеме. Результаты расчета снова анализируются и расчетная схема снова уточняется. Таким образом, достигается последовательное приближение к действительному состоянию балки.

В рассматриваемом задании учащиеся выполняют только один (первый) расчет балки на упругом основании как линейно-деформируемой системы.

Результаты расчета

В соответствии с поставленными выше тремя пунктами задания результаты расчета приведены в графическом и табличном виде.

На рис. 7.2 приведена эпюра вертикальных осадок балки, мм. Значения вертикальных перемещений узлов КЭ в направлении общей оси координат Z взяты из табл. 7.1. По принятому в программе SCAD правилу знаков для перемещений направление перемещений противоположное положительному направлению оси Z принимается со знаком минус.

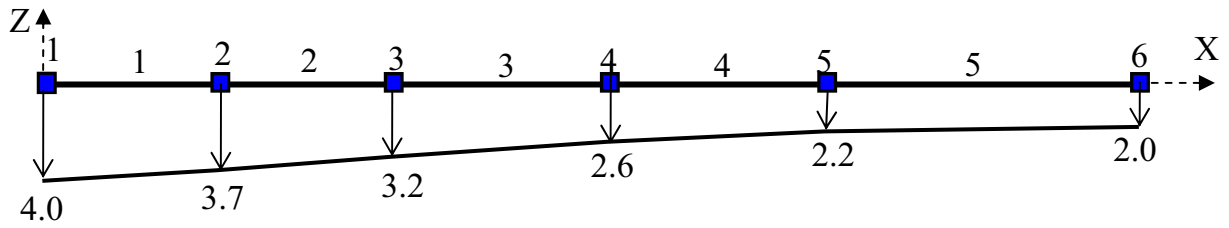


Рис. 7.2

Табл. 7.1.

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ УЗЛОВ (мм)						
	1	2	3	4	5	6
Z	-4.0	-3.7	-3.2	-2.6	-2.2	-2.0

В модели Винклера для грунтового основания предполагается линейная взаимосвязь давлений на грунт $f(x)$, действующих в узлах КЭ расчетной схемы (см. рис. 7.1, *б*), с перемещениями $w(x)$ этих узлов (см. рис. 10.2) в разделе 10 УМК):

$$f(x) = cb \cdot w(x), \qquad (7.1)$$

где b – ширина балки.

При подстановке в формулу (7.1) величин коэффициента постели c, кН/м^3, ширины балки b, м, и, последовательно, указанных прогибов $w(x)$, м, в узлах КЭ соответственно получим следующие значения интенсивности $f(x)$, кН/м, распределенных давлений на грунт, соответствующих узлам КЭ (табл. 7.2).

Таблица 7.2

№ узлов	1	2	3	4	5	6
$f(x)$, кН/м	20	18.5	16	13	11	10

На балку со стороны грунтового основания передаются обратные по направлению реактивные давления $r(x)$ численно равные давлениям $f(x)$ на грунт. Эпюры этих давлений на балку и на грунт приведены соответственно на рис. 7.3, *а, б*.

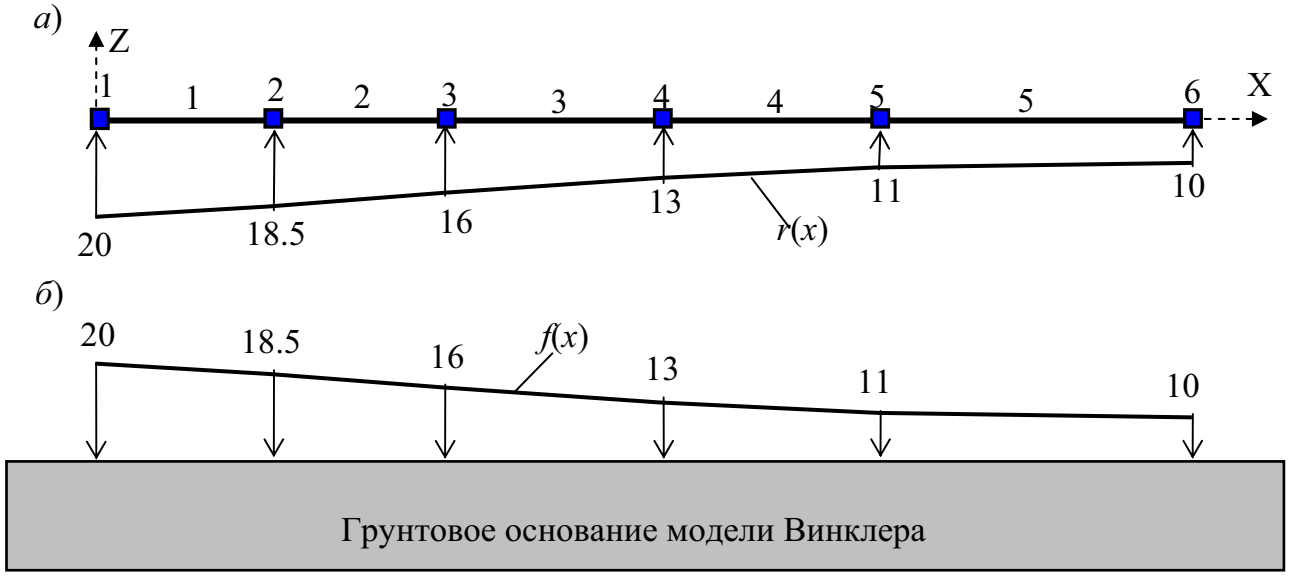


Рис. 7.3

Эпюры усилий M и Q в балке от совместного действия заданной нагрузки и полученных реактивных давлений приведены соответственно на рис. 7.4, *а, б*. Ординаты этих эпюр усилий для трех сечений (в начале, в середине и в конце) на каждом КЭ приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Единицы измерения усилий: кН; Единицы измерения моментов: кН*м.

	У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ									
002_	1-1	1-2	1-3	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	3-3	4-1
M		9.997	39.36	39.36	-2.933	-28.14	-28.14	-37.51	-24.35	-174.3
Q		19.84	38.72	-51.27	-33.54	-17.09	-17.09	1.805	18.97	18.97

Продолжение таблицы 7.3

	У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ					
	2_	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3
M	-140.7	-88.51	-88.51	-22.21		
Q	34.55	48.82	48.73	24.62		

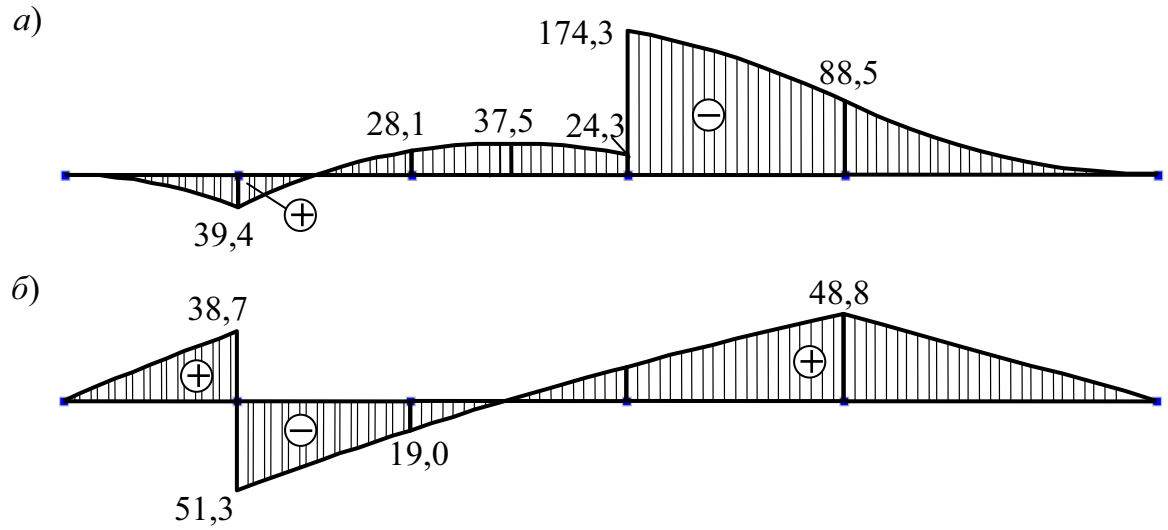


Рис. 7.4

Контроль полученных результатов расчета

1. Проверяем удовлетворение условиям равновесия балки под действием заданной нагрузки и вычисленных реактивных давлений на балку со стороны грунтового основания. Для этого изобразим заданную нагрузку и реактивное давление на балку на одном рисунке (рис. 7.5).

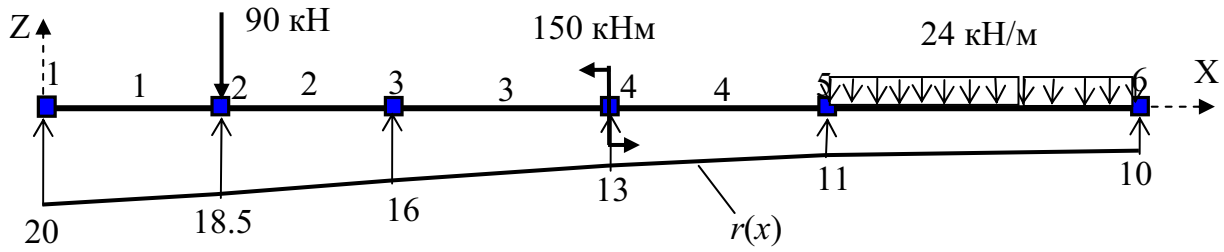


Рис. 7.5

Так как горизонтальных сил нет, уравнение равновесия $\sum X = 0$ удовлетворяется.

Проверим соблюдение уравнения равновесия проекции всех сил, действующих на балку, на ось Z:

$$\sum Z = 0: -90 - (24 \cdot 3.6) + 0.5(20+18.5)2 + 0.5(18.5+16)2 + 0.5(16+13)2.5 +$$
$$+0.5(13+11)2.5 + 0.5(11+10)3.6 = -90 - 86.4 + 38.5 + 34.5 + 36.25 + 30 + 37.8 =$$
$$= -176.4 + 177.05 = 0.65.\cdot$$

Погрешность вычислений равновесия составляет 0.65·100/176.4 $\approx$0.4%. Считаем, что уравнение равновесия удовлетворяется с достаточной точностью.

Примечание для учащихся:

В задании для сокращения вычислительной работы вручную проверку уравнения равновесия вида $\sum M_k = 0$, где k любая точка на плоскости с действующей нагрузкой, можно не проводить.

Удовлетворительный результат проверки равновесия балки показывает, что реактивные усилия $r(x)$, действующие на балку от грунтового основания, определены достаточно точно.

2. Теперь, зная всю нагрузку на балку, проверим соответствие вида эпюр M и Q суммарной нагрузке. Сопоставление суммарной нагрузки на балку, приведенной на рис. 7.5, и эпюр M и Q, приведенных на рис. 7.4, показывает их соответствие. Все признаки вида правильных эпюр, приведенные в разделе 4 УМК, соблюдаются.

3.Проверяем соответствие эпюр M и Q друг другу с учетом имеющейся зависимости $Q = dM / dx$. Сопоставление эпюр показывает соблюдение этой зависимости усилий.

Заключение

На основании проведенного контроля результатов расчета делаем вывод, что расчет балки ***в заданной постановке задачи*** выполнен правильно.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

(Расчет стержневых систем)

Санкт-Петербург

2007

1. Краткие сведения о курсе «Строительная механика»

Строительная механика – наука о принципах и методах расчета сооружений и конструкций на прочность, жесткость, устойчивость – на всех этапах своего развития связана с уровнем развития математики, механики и науки о сопротивлении материалов.

Основной задачей строительной механики является определение внутренних усилий и напряжений, возникающих в элементах сооружений и конструкций от внешних воздействий (силовых, кинематических, температурных), а также в нахождении перемещений отдельных его точек.

В соответствии с этими результатами расчета устанавливаются размеры сечений отдельных элементов конструкций и сооружений, необходимые для их надежной работы и обеспечивающие минимальные затраты материалов.

Без строительной механики невозможно проектирование рациональных конструкций и сооружений.

Строительная механика позволяет формировать знания, умения и навыки, необходимые будущим инженерам-строителям для работы в области проектирования и возведения строительных конструкций.

Целью обучения студентов строительной механике являются:

1. Умение составлять и анализировать расчетные схемы различных сооружений для их расчета на статические и динамические воздействия.

2. Знание принципов и методов расчета статически определимых и неопределимых стержневых систем на статические и динамические внешние воздействия (силовые, кинематические и температурные).

3. Умение решать простейшие задачи строительной механики при помощи малых вычислительных средств.

4. Умение рассчитывать сложные расчетные схемы на современных ПЭВМ (ПК) с использованием соответствующих программ расчета, построенных на основе методов строительной механики.

5. Умение оценивать правильность результатов расчета.

2. Структура курса «Строительная механика» в учебном плане

«Строительная механика» является логическим продолжением дисциплин «Теоретическая механика» и «Сопротивление материалов». В ней также используются знания, полученные студентами при изучении дисциплин «Высшая математика» и «Вычислительная математика».

«Строительная механика» обычно делится на две части (схема 1):

1.Статика сооружений; 2. Динамика сооружений .

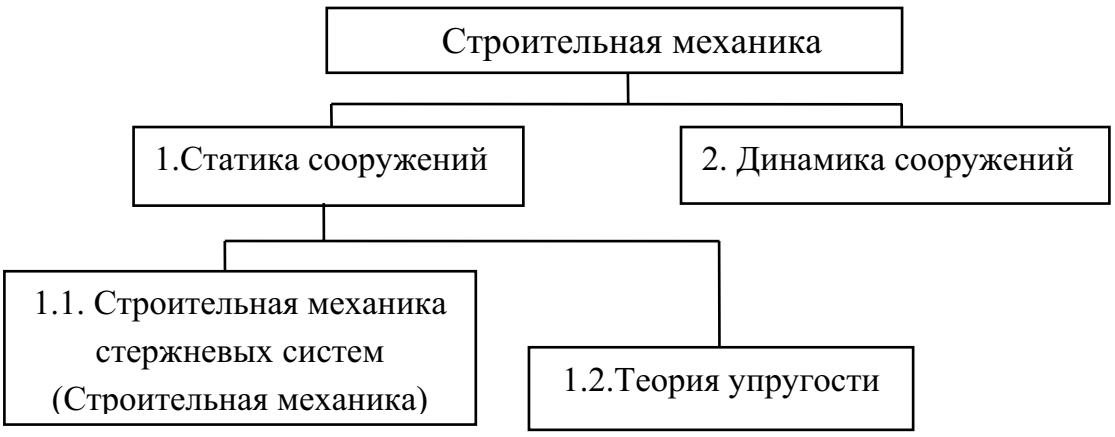


Схема 1

Статику сооружений в учебном процессе также обычно разделяют на две части. Часть 1.1 называют просто «Строительная механика». В ней рассматриваются методы расчета стержневых систем, состоящих из тонких стержней, на статические воздействия. Эту часть также иногда называют «Статика стержневых систем».

В части 1.2 статики сооружений «Теория упругости» рассматриваются постановки и методы решения толстых балок (балок-стенок), пластин (плит), оболочек и пространственных массивных тел и оснований на статические воздействия.

Часть «Динамика сооружений» посвящена постановкам и методам решения динамических задач.

Данная рабочая программа посвящена части 1.1 строительной механики (см. схему) предназначена для студентов специальности ПГС.

Методы строительной механики и построенные на их основе программы расчета различных стержневых конструкций на персональных компьютерах (ПК) используются затем в общеинженерных курсах «Металлические конструкции», «Железобетонные конструкции», «Основания и фундаменты» и специальных курсах по расчету и проектированию зданий и сооружений, читаемых на отделении «Энергетические и промышленно гражданские сооружения» (ЭиПГС) кафедры «Гражданское строительство и прикладная экология» (ГСиПЭ).

3. Содержание разделов дисциплины «Строительная механика»

3.1. Основные понятия и представления о стержневых системах

Понятие о расчетной схеме сооружения. Гипотезы и допущения, принимаемые при построении расчетных схем стержневых систем. Пространственные и плоские расчетные схемы строительных стержневых

систем. Типы плоских стержневых систем и их детали. Характер работы стержней в различных типах плоских стержневых систем. Неизвестные усилия, перемещения и деформации в стержнях плоских стержневых систем. Необходимость их определения для расчета строительных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. Формулы для определения нормальных и касательных напряжений в поперечных сечениях тонких стержней, работающих в условиях растяжения и изгиба.

Геометрически изменяемые и неизменяемые системы. Статически определимые и статически неопределимые стержневые системы. Структурный анализ плоских стержневых систем.

3.2. Определение опорных реакций и внутренних усилий в статически определимых стержневых системах с учетом их конструктивных особенностей

Определение опорных реакций и давлений в шарнирах с помощью уравнений равновесия при расчете многопролетных шарнирных балок, рам, арок и ферм.

Определение внутренних усилий M, Q, N в поперечных сечениях стержней. Признаки правильных ожидаемых эпюр внутренних усилий M, Q, N и определение числа сечений стержней конструкции, в которых необходимо вычислить усилия для построения эпюр M, Q, N.

Краткие сведения о методе конечных элементов (МКЭ) и алгоритме расчета этим методом стержневых систем. Понятие о двух типах плоских конечных элементов (КЭ), используемых в программе SCAD для расчета плоских стержневых систем. Общая и местная системы координат в МКЭ.

Реализация алгоритма расчета МКЭ в программе SCAD.

Контроль эпюр усилий M, Q, N, построенных с помощью программы SCAD, по признакам правильных эпюр усилий и уравнений равновесия для различных элементов рассматриваемой стержневой системы.

Понятие о линиях влияния для опорных реакций и усилий и расчете по ним.

3.3. Теоремы об упругих системах. Перемещения в статически определимых системах

Начало возможных перемещений для деформируемых систем. Работа внешних и внутренних сил на возможных перемещениях Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений. Формулы Максвелла-Мора для определения перемещений от силовых воздействий, изменения температуры и смещения

опорных связей. Способы вычисления интегралов Максвелла-Мора. Матричная форма вычисления интегралов формулы Максвелла-Мора.

3.4. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил

Степень статической неопределимости. Идея и ход расчета статически неопределимой стержневой системы методом сил на примере рамы. Лишние неизвестные. Основная система метода сил. Эквивалентное состояние основной системы. Грузовое и единичные вспомогательные состояния. Каноническая и матричная форма системы уравнений метода сил. Матрица податливости основной системы.

Применение метода сил к расчету неразрезных балок. Понятие о фокусных точках и фокусных отношениях опорных моментов на незагруженных пролетах неразрезных балок. Метод фокусных отношений опорных моментов в аналитической и графической реализации.

3.5. Метод перемещений и его современная реализация в форме МКЭ

Представление стержневой системы как системы соединенных в узлах стержневых элементов. Вспомогательная и основная задачи метода конечных элементов. Последовательность решения основной задачи МКЭ в форме метода перемещений. Плоские стержневые элементы в местной системе координат. Преобразование векторов перемещений и усилий в узлах и матриц жесткости конечного элемента из общей системы осей координат в местную и наоборот. Формирование матрицы жесткости для расчетной схемы рамы.

Примеры расчета неразрезных балок и рам, в том числе на упругом основании модели Винклера.

Примечания.

Остальные элементы рабочей программы в в данном УМК не приводятся, так как список учебных расчетных работ указан в сборнике заданий (приложение 2 к УМК) и в сборнике примеров отчетов по расчетным работам (приложение 3 к УМК); список использованной и рекомендуемой учебной литературы приведен в конце УМК. Кроме того, учитывая некоторое различие в числе часов учебных занятий для очной, заочной и вечерней форм обучения, авторы данного пособия посчитали возможным не приводить и соответствующие таблицы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

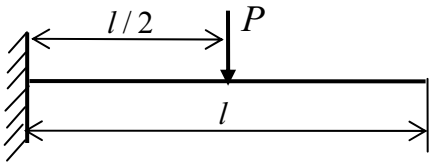
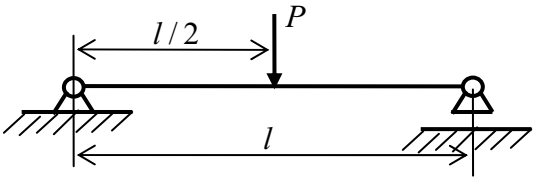
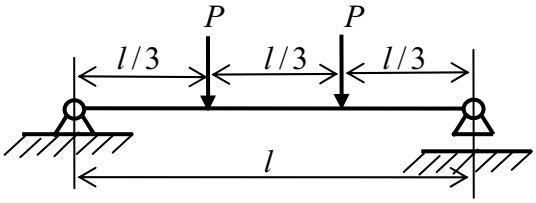
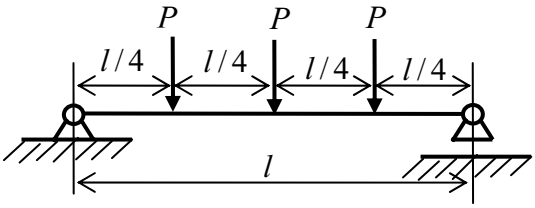
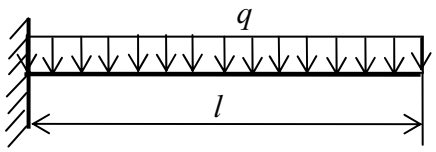
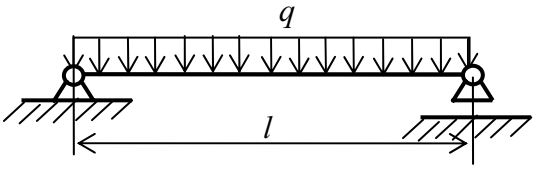
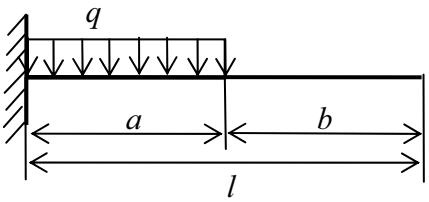
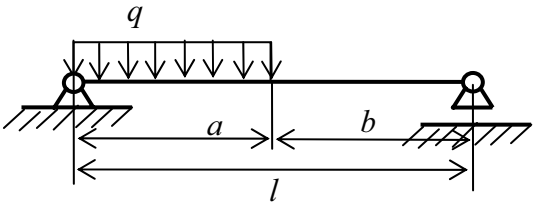
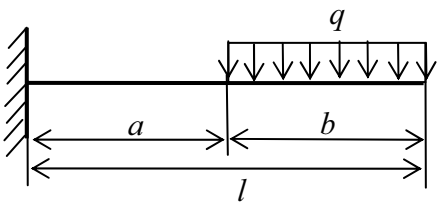
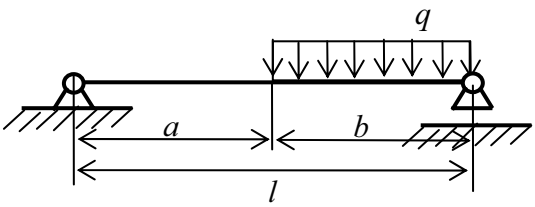
Контрольные задачи

1. Построение эпюр усилий в плоских СО балках и рамах

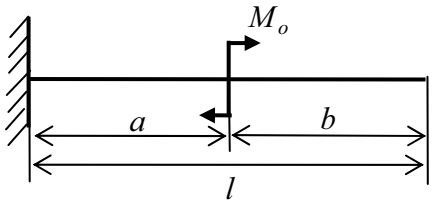
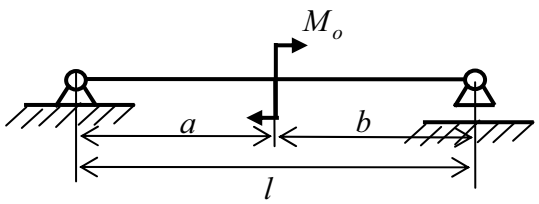
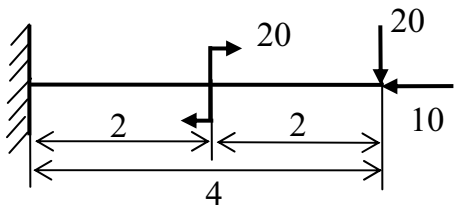
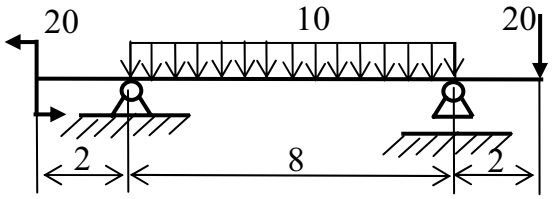
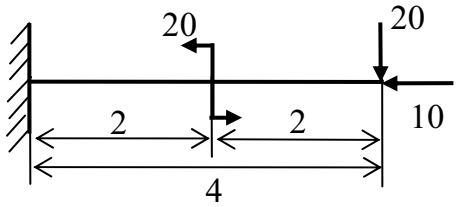
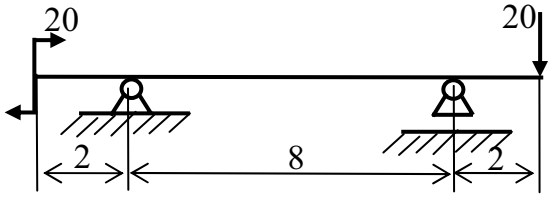
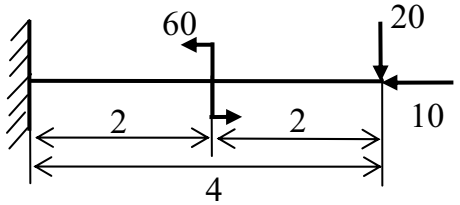
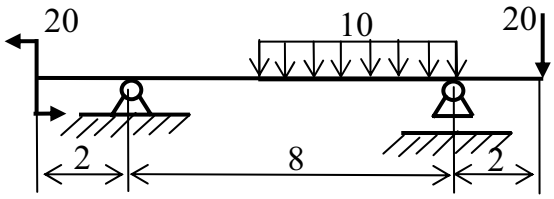
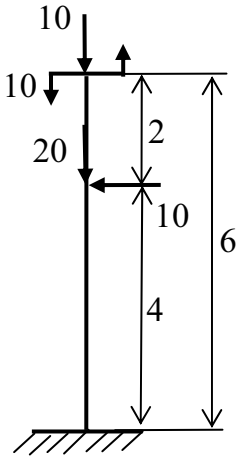
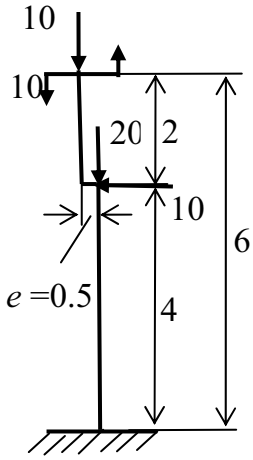
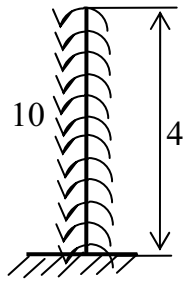
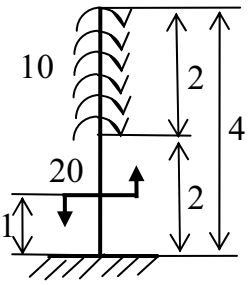
Построить вручную (без использования ПК) эпюры усилий M, Q, N в простейших плоских СО СС, приведенных в табл. 1, используя правила построения эпюр усилий, изложенные в разделе 4 УМК и в учебном пособии [1].

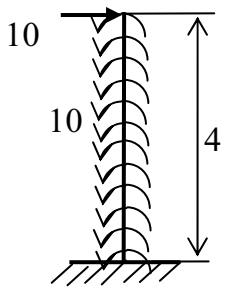
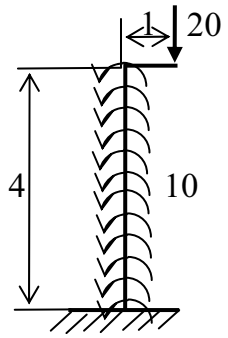
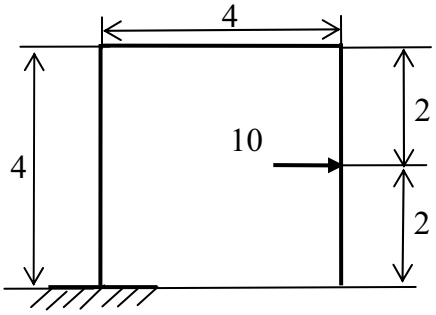
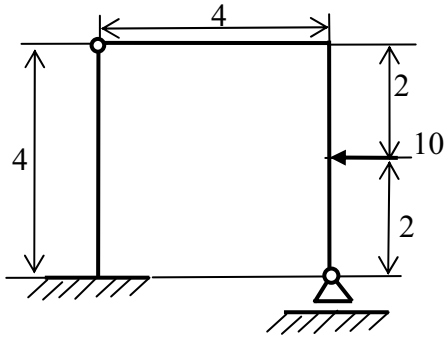
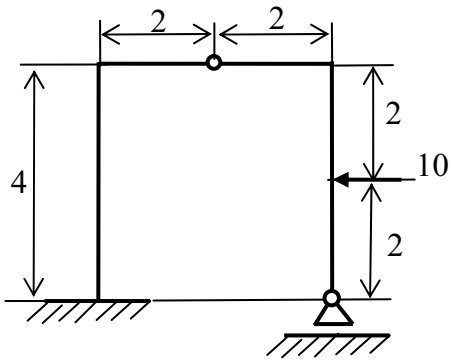
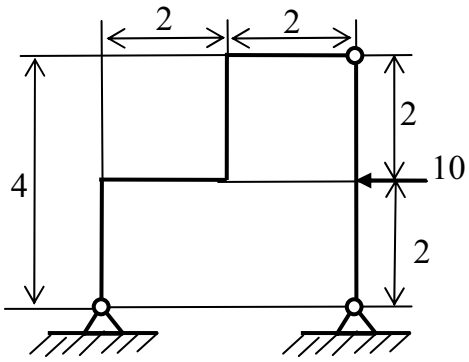
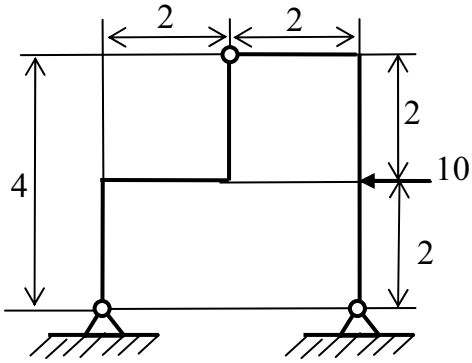
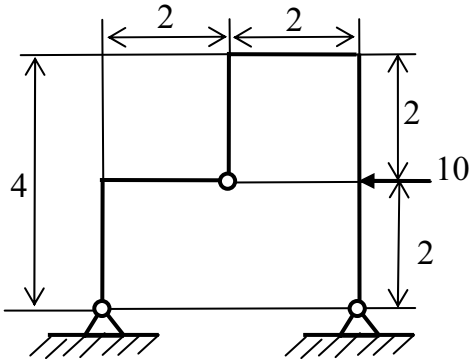
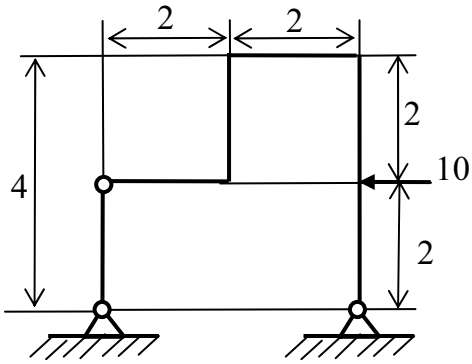
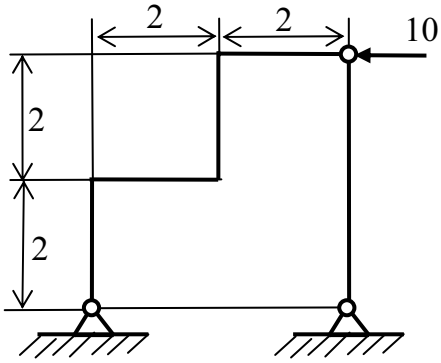
Примечание. При численном задании параметров СС в задачах 13-46 (табл. 1) приняты следующие размерности: длины в м, сосредоточенные силы и моменты соответственно в кН и кН·м, распределенные нагрузки и моменты соответственно в кН/м и в кН·м/м.

Таблица 1

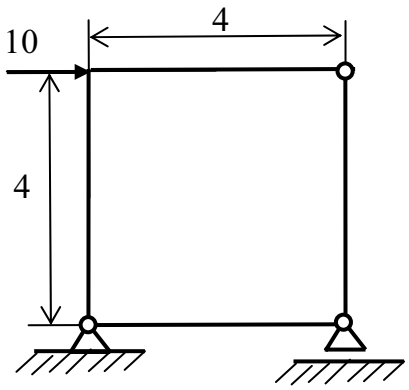
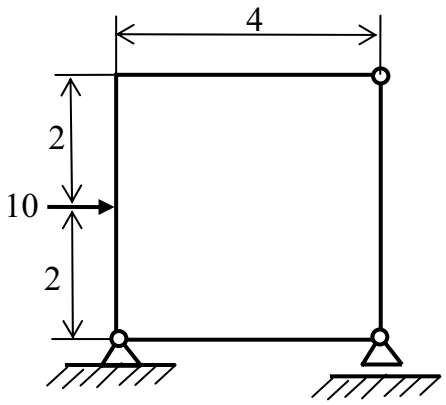
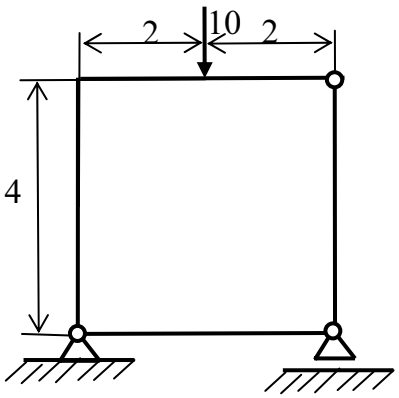
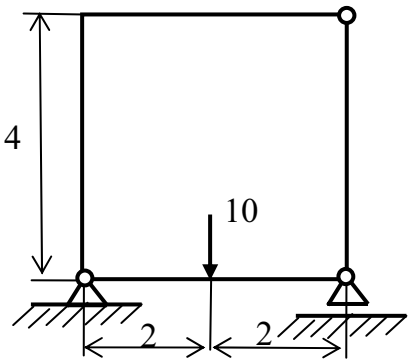
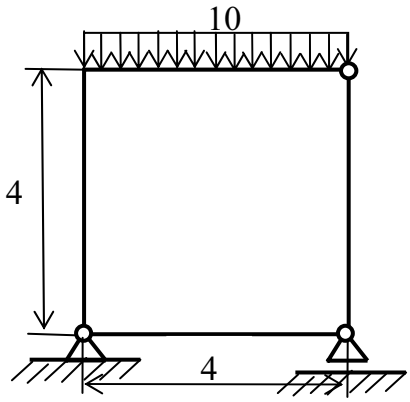
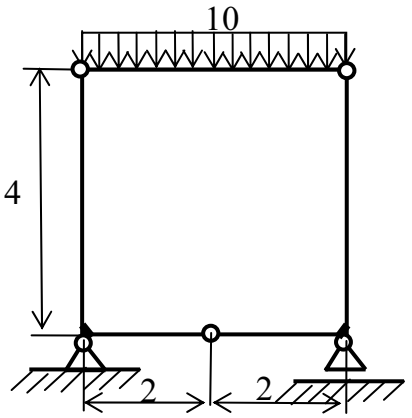
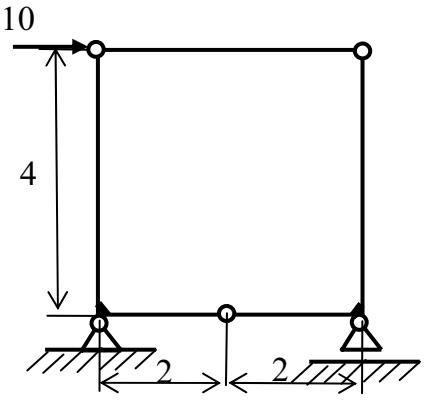
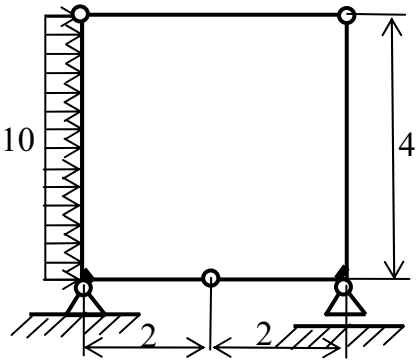
01		02	
03		04	
05		06	
07		08	
09		10	

(продолжение табл. 1)

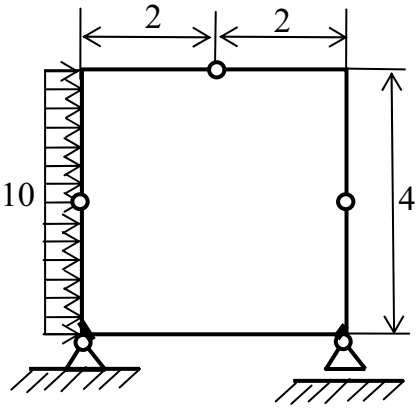
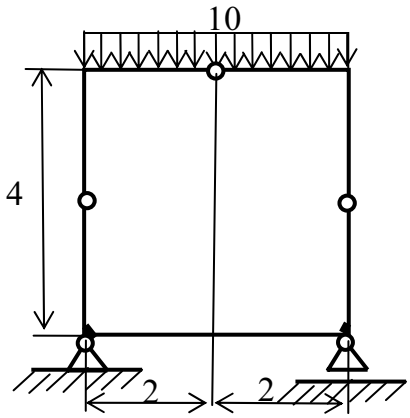
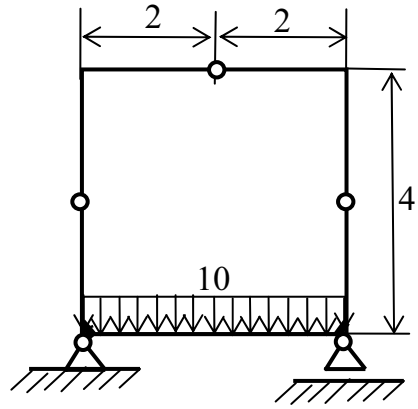
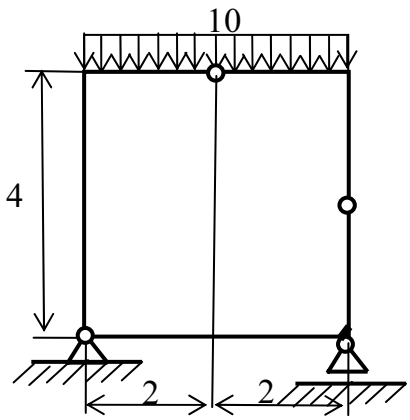
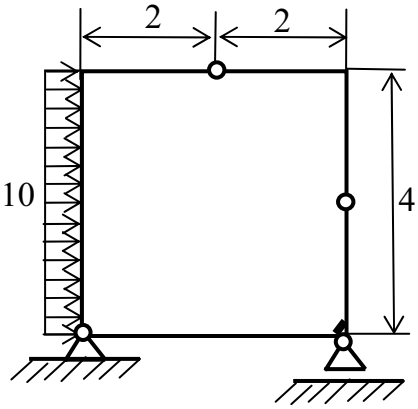
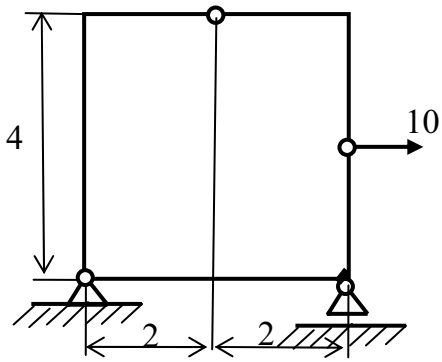
11		12	
13		14	
15		16	
17		18	
19		20	
21		22	

23		24	
25		26	
27		28	
29		30	
31		32	

(продолжение табл. 1)

33		34	
35		36	
37		38	
39		40	

(продолжение табл. 1)

41		42	
43		44	
45		46	

2. Определение опорных реакций, усилий в затяжке и усилий в сечениях СО арок

Используя известные графические условия равновесия плоского диска под действием двух (рис. 1.П1, *а*) и трех (рис. 1.П1, *б*) сил определить опорные реакции, усилия в затяжке (при ее наличии в конструкции арки) и усилия в сечениях арок, расчетные схемы которых приведены в табл. 2.П1.

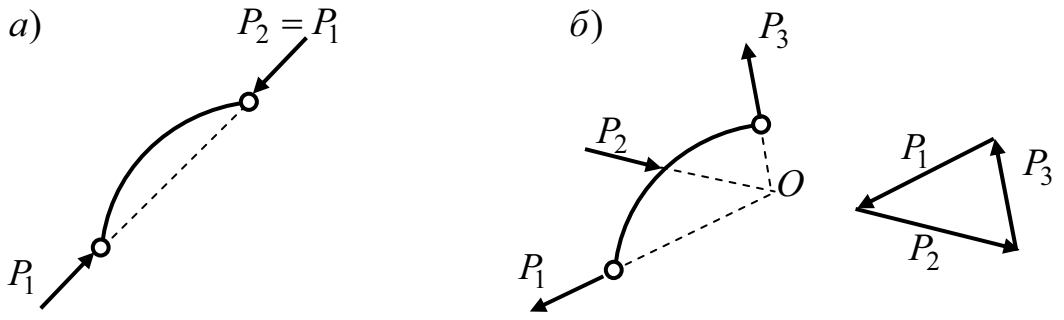
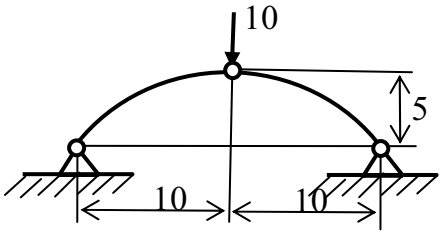
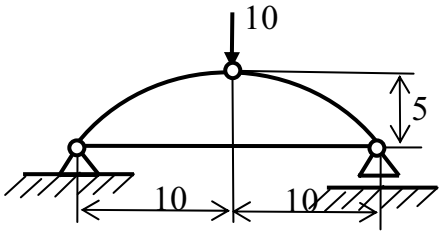
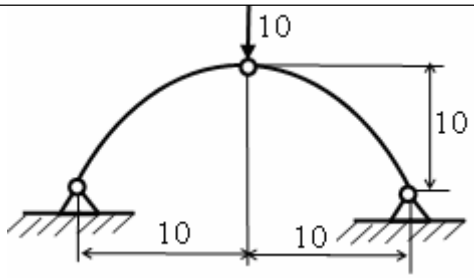
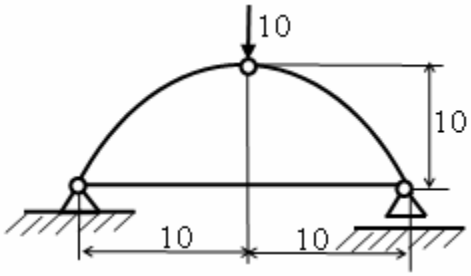
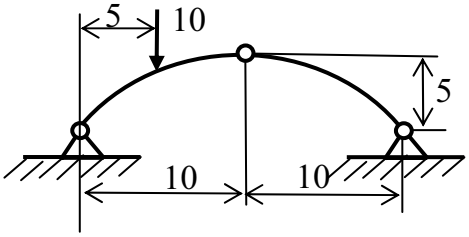
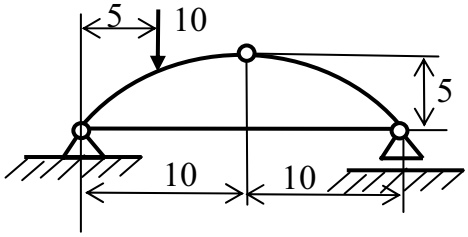
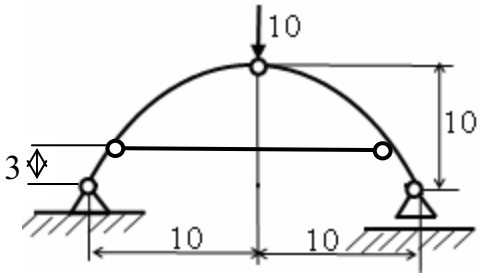
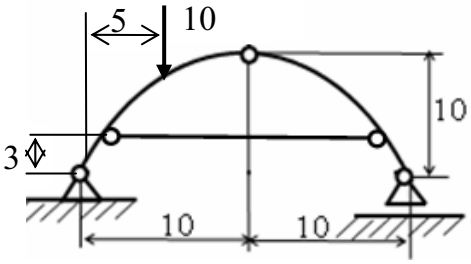
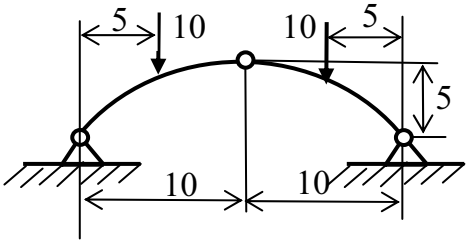
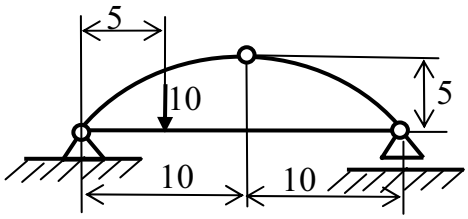
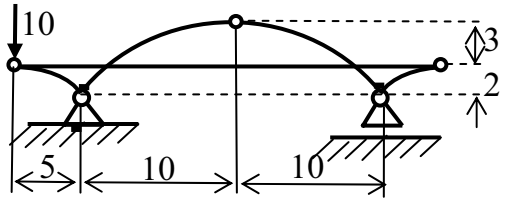
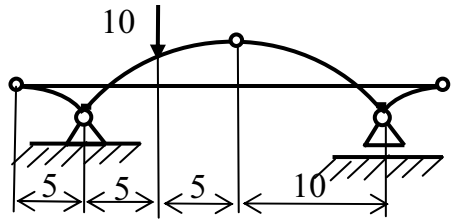
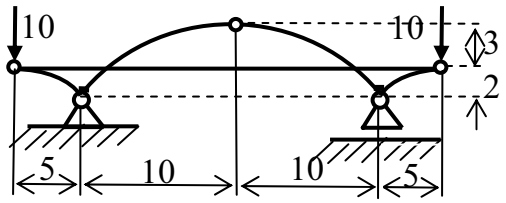
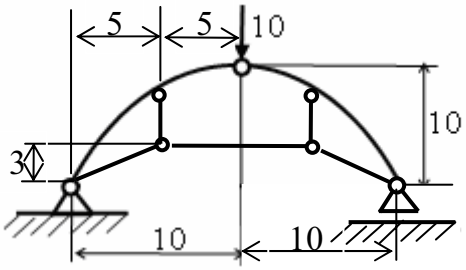


Рис. 1

Таблица 2

01		02	
03		04	
05		06	
07		08	
09		10	

11		12	
13		14	

3. Определение усилий в стержнях СО ферм

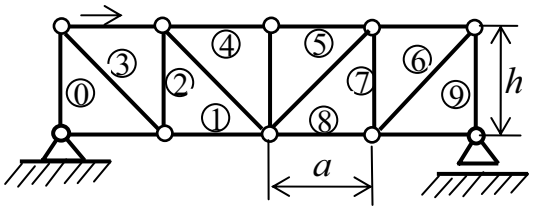
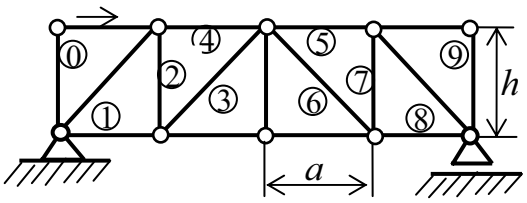
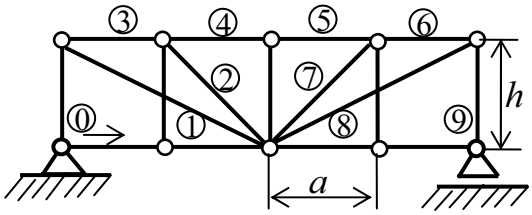
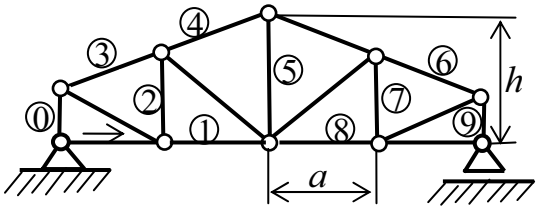
Используя уравнения равновесия, определить вручную усилия в опорных связях фермы, схема которой выбирается (табл. 3) по первым двум цифрам шифра. Нагрузкой на ферму являются направленные вниз вертикальные силы P, приложенные во всех узлах левой половины грузового пояса фермы (указан стрелкой), включая средний узел на оси симметрии (если таковой есть).

Затем, в соответствии с заданной нагрузкой и определенными опорными реакциями, выявить все явно нулевые стержни фермы и, применяя рациональные статические способы, определить продольные усилия в стержнях фермы, которые по номеру на схеме фермы (табл. 3) совпадают с четвертой цифрой шифра.

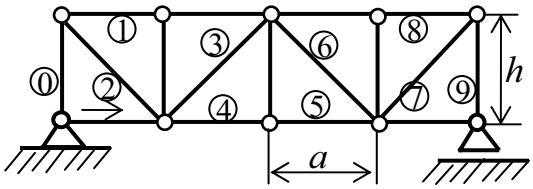
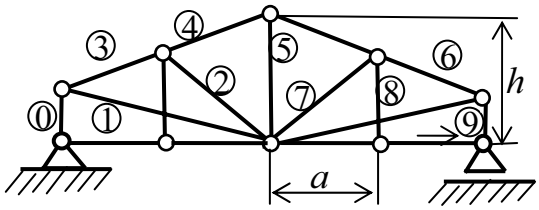
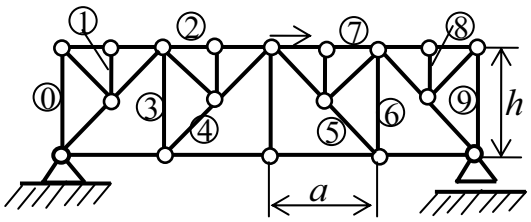
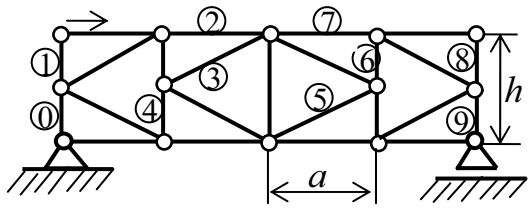
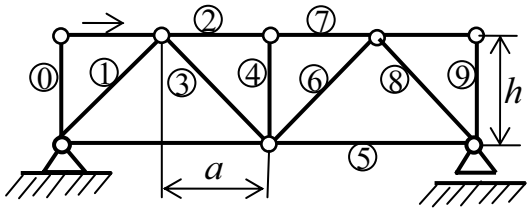
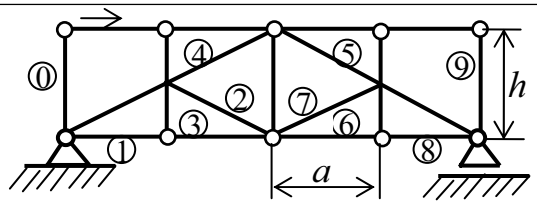
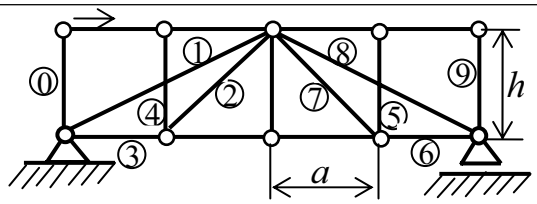
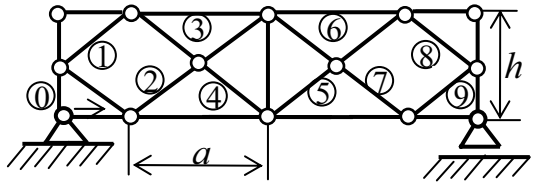
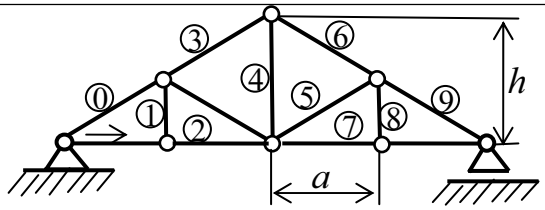
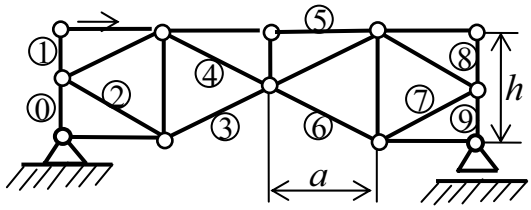
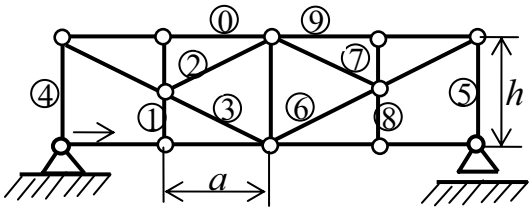
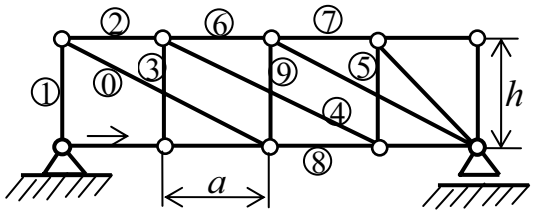
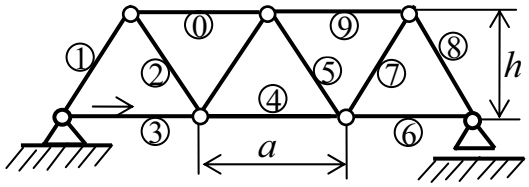
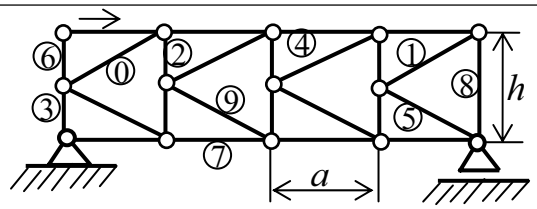
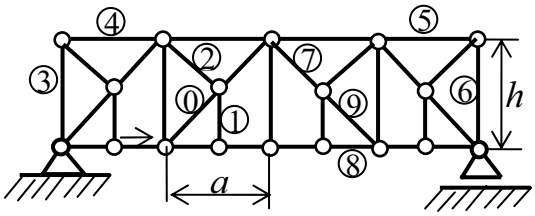
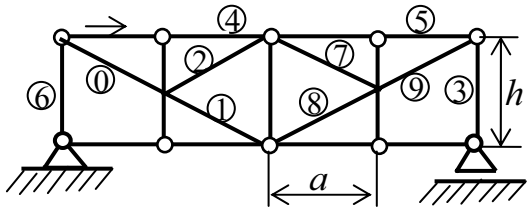
Численное значение длины a панели, высоты h фермы, и сосредоточенных сил P, назначается в соответствии с третьей цифрой шифра (табл. 4).

Примечание. Если учащийся захочет сверить результат расчета, полученный вручную, с расчетом по программе SCAD, то необходимо помнить, что при использовании для решения задачи программы SCAD нумерация стержней (КЭ) фермы будет иная.

Таблица 3

01		02	
03		04	

(продолжение табл. 3)

05		06	
07		08	
09		10	
11		12	
13		14	
15		16	
17		18	
19		20	

(продолжение табл. 3)

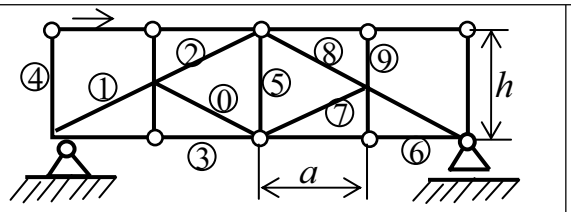
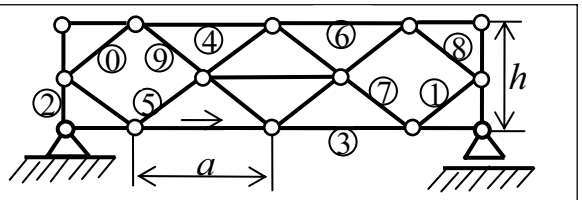
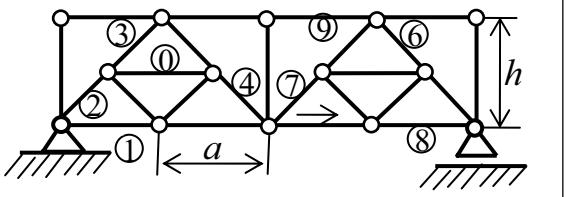
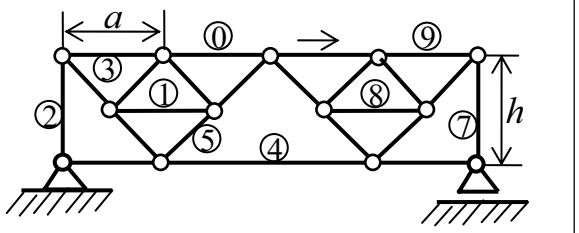
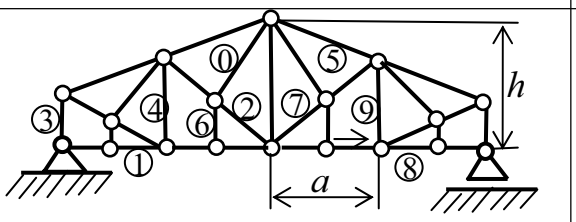
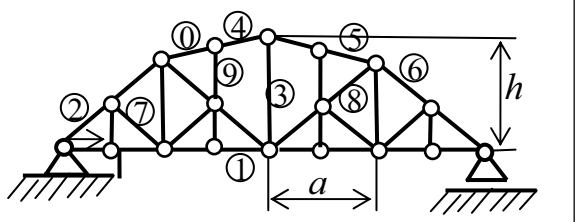
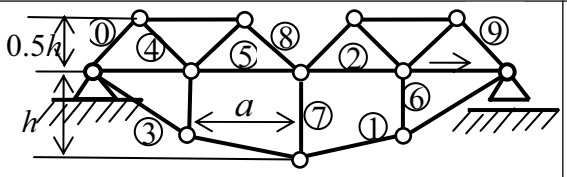
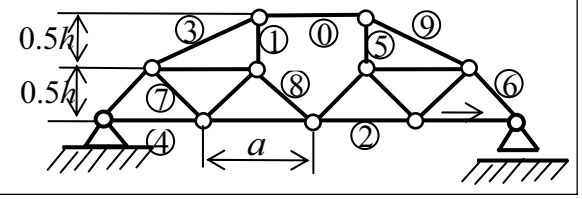
21		22	
23		24	
25		26	
27		28	

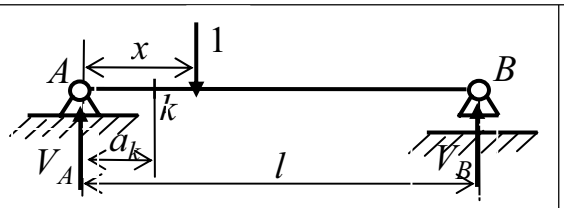
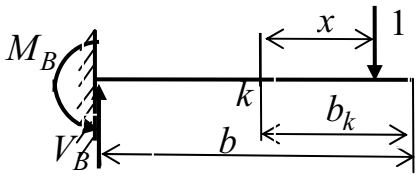
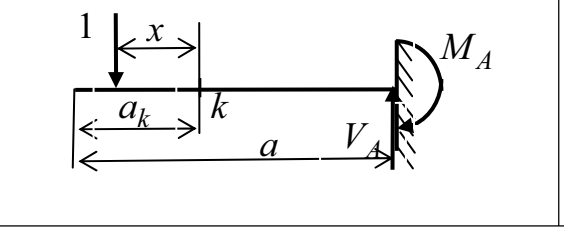
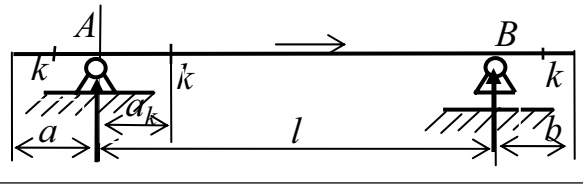
Таблица 4

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	2	3	4	1	3	2	3	4	1	3
h	2	3	4	2	4	3	4	4	2	2
P	10	20	30	16	18	20	22	24	26	20

4. Определение усилий по линиям влияния

1. Построить линии влияния (л.в) для опорных реакций и усилий M и Q в отмеченных сечениях СО балок (табл. 5).

Таблица 5

01		02	
03		04	

2. Вычислить с помощью л.в. максимальные по значению усилия в предположении действия на балку постоянной равномерно распределенной по всей длине балки нагрузки интенсивностью p, кН/м, равномерно распределенной временной нагрузки интенсивностью g, кН/м (с произвольным числом участков произвольной длины), и временной нагрузки в виде связанной системы сосредоточенных сил G, тс, заданной схемы (рис. 3).

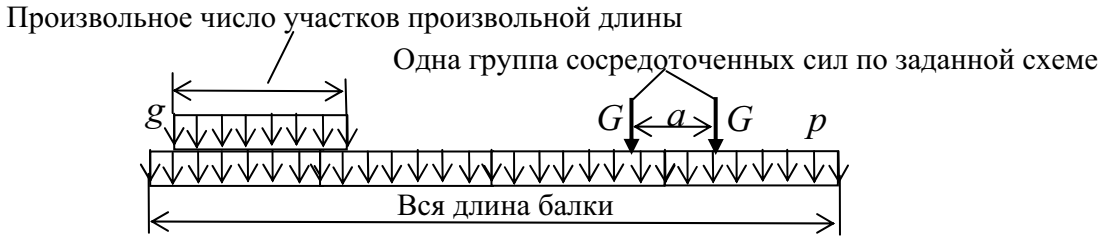


Рис. 3

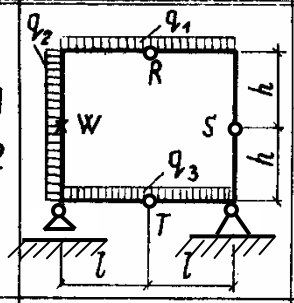
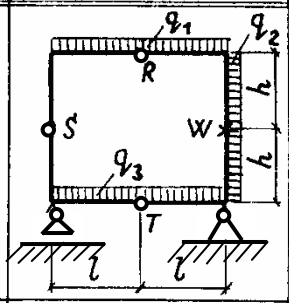
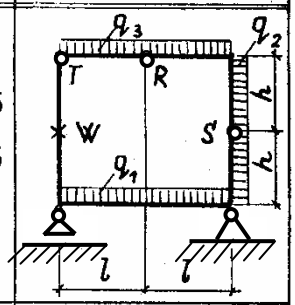
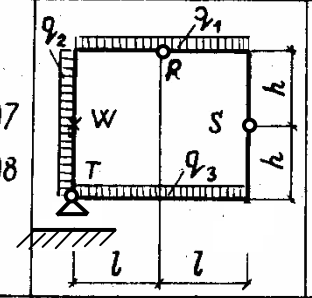
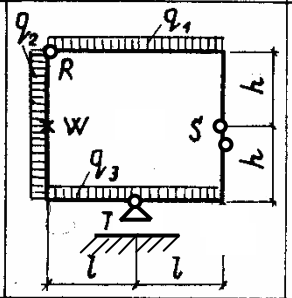
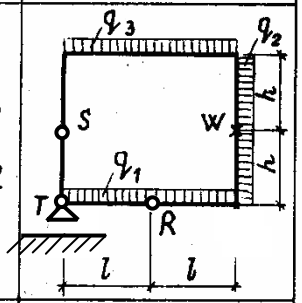
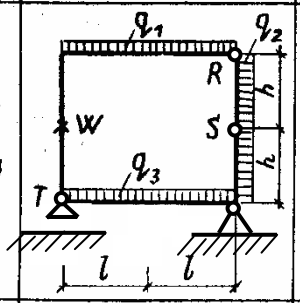
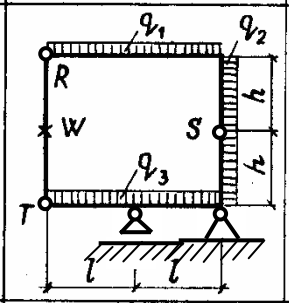
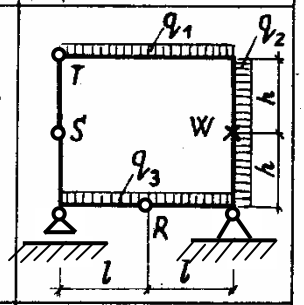
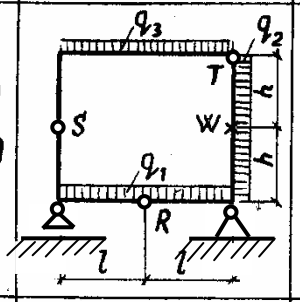
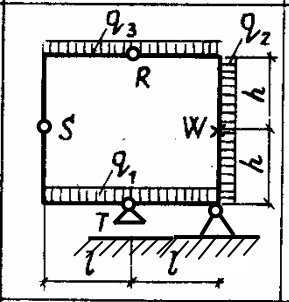
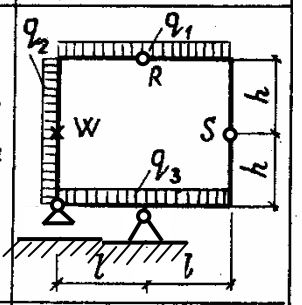
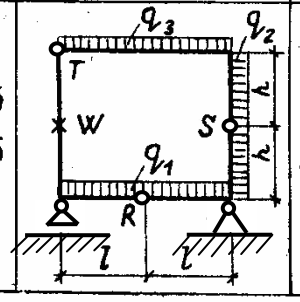
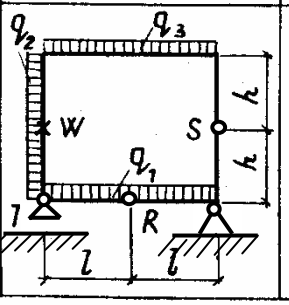
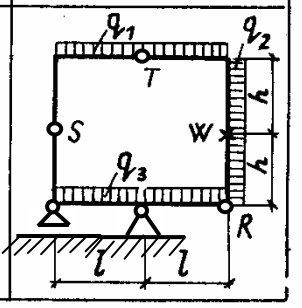
3. Построить л.в. для усилий в отмеченных цифрами стержнях фермы (табл. 3.П1) при совпадении номера стержня с четвертой цифрой заданного шифра и вычислить соответствующее усилие при расположении сосредоточенных сил P в узлах левой половины грузового пояса фермы.

Контрольные работы

1. Построение эпюр усилий M, Q, N в СО раме в виде замкнутого контура

Рама для контрольной работы выбирается из табл. 6 по двум первым цифрам шифра **ABCD**. При четном номере **AB** шарнирно неподвижная и шарнирно подвижная опоры рамы, изображенной в табл. 6, меняются местами.

Таблица 6

AB	Схема рамы	AB	Схема рамы	AB	Схема рамы
01 02		03 04		05 06	
07 08		09 10		11 12	
13 14		15 16		17 18	
19 20		21 22		23 24	
25 26		27 28		29 30	

Размеры рамы и значения нагрузок берутся из табл. 7.

Таблица 7

А	Размеры рамы, м		**В**	Нагрузка, кН/м		
	l	h		q_1	q_2	q_3
0	3	4	0	20	40	0
1	4	3.5	1	0	40	25
2	4.5	5	2	30	40	0
3	5	4.5	3	0	40	25
4	2	3	4	20	50	0
5	3.5	2.5	5	0	50	25
6	2.5	3	6	30	25	0
7	2	2.5	7	0	20	30
8	2.5	4	8	40	30	0
9	3	3.5	9	0	30	45

Методические указания по изображению расчетной схемы рамы

1. Рисовать схему рамы в масштабе в соответствии с заданными размерами и обозначать на рисунке сразу числовые значения размеров.

2. Прежде чем рисовать нагрузку на схеме рамы ознакомьтесь с ее значениями в табл. 7. На расчетной схеме рамы не следует изображать нулевые нагрузки с нулевыми значениями..

3. В табл. 6 на схемах рамы крестиком отмечены точки W. ***При изображении заданной рамы для контрольной работы 1 этого обозначения делать не нужно*** (табл. 6 будет использована в дальнейшем для контрольной работы 2, где это обозначение понадобится).

Требуется:

1. Вручную построить эпюры усилий M, Q, N.

2. Выполнить контроль построенных эпюр.

Методические указания по выполнению контрольной работы

1. При выполнении работы четко указывать последовательность выполняемых действий.

2. Даже при ручном счете (без использования программы SCAD) заданную схему рамы разбить на конечные элементы (КЭ) типа 2 (по классификации в программе SCAD).

3. Показать оси общей системы координат (ОСК), к которой отнесена рама. При этом использовать ОСК, которая используется в программе SCAD.

4. На каждом конечном элементе с помощью пунктира показать оси местной системы координат (МСК). Пунктир, отмечающий МСК, ставится в соответствии с правилом, данным в подразделе 4.1 УМК.

5. На схеме рамы, разбитой на КЭ, обозначить номера КЭ и номера узлов КЭ в ОСК. При этом использовать нумерацию, принятую в программе SCAD (.см. методические указания в разделе 3 и в приложении 1 УМК).

6. Сначала построить эпюру M, определяя значения и знаки ординат M в намеченных узлах КЭ, а для стержней, загруженных равномерно распределенной нагрузкой, и в средних сечениях КЭ.

7. Выполнить проверку эпюры M по признакам правильной эпюры M и по равновесию узлов рамы. Узлы рамы на рисунке должны располагаться в той же последовательности, как и в схеме рамы (см. приложение 3 в УМК и учебное пособие [4].

8. По эпюре M на раме вручную построить соответствующую ей эпюру Q.

9. По эпюрам M и Q способом вырезания узлов построить эпюру N (см. подраздел 5.3 и приложение 3 в УМК и учебные пособия [1, 2, 4].

Картина расположения узлов рамы, из которых будут определяться продольные силы в стержнях рамы, должна повторять картину расположения узлов в схеме рамы.

2. Определение перемещений в СО раме в виде замкнутого контура.

В раме с построенной в предыдущей контрольной работе эпюрой M требуется определить: 1) изменение расстояния между точкой W рамы и шарниром S; 2) Угол φ_R «раскрытия» шарнира R (возможно задание других вариантов углов поворота сечений рамы).

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

В О П Р О С Ы

для подготовки к экзамену по дисциплине «Строительная механика»

в осеннем семестре учебного года

1. Общие вопросы

1. Основная задача строительной механики. Понятие о расчетной схеме сооружения. Основные допущения, принимаемые при ее построении. Стержневые системы и их детали. Уточнение основной задачи при расчете стержневых систем. Понятие о геометрически неизменяемых стержневых системах (СС). Понятие о статически определимых и статически неопределимых стержневых системах. Методы расчета стержневых систем по расчету их напряженно-деформированного состояния (НДС).

2. Понятие о жестких дисках. Способы их образования. Формулы для подсчета степени статической неопределимости шарнирных балок, рам, арок и ферм. Необходимое условие статической определимости стержневых систем. Дополнительное условие о геометрической неизменяемости СС. Структурный анализ СС.

3. Правила построения эпюр усилий в плоских стержневых системах. Эпюра изгибающего момента. Процедура построения эпюры М вручную. Признаки правильных эпюр М. Правило знаков для эпюры М на горизонтальном и вертикальном элементах типа 2 при использовании программы SCAD.

Способ построения эпюры М вручную на участке прямого стержня с равномерно распределенной нагрузкой. Эпюра поперечных сил. Процедура построения эпюры Q вручную.

Правило «тупого угла» для определения направления вектора поперечной силы в любом сечении балки по эпюре М.

Два способа определения значения усилия Q и ее знака. Использование правила знаков для горизонтального и вертикального конечных элементов типа 2 в программе SCAD.

Признаки правильного вида эпюры Q. Способ построения эпюры Q вручную на участке прямого стержня с равномерно распределенной нагрузкой.

Два способа определения значения и знака N в сечениях рам. Использование многоугольника сил для графического определения продольных сил в узлах рамы по поперечным силам.

2. Применение программы SCAD для статического расчета стержневых систем

(Умение демонстрировать на ПК с использованием программы SCAD)

2.1. Основные этапы выполнения расчетных заданий с помощью программы SCAD.

2.2. Типы конечных элементов, принимаемые в программе SCAD для расчета плоских стержневых систем. Правила знаков для усилий в узлах горизонтального и вертикального элементов на примере плоских стержневых элементов типов 1 и 2.

2.3. Построение геометрической расчетной схемы плоской стержневой системы. Продемонстрировать на примерах многопролетных балок, рам и ферм с жесткими опорами. Использование различных способов печати расчетных схем, построенных в рабочем окне дисплея компьютера при решении с помощью программы SCAD.

2.4. Последовательность операций по заданию типа и жесткости элементов в статически

определимых системах. Задание нагрузок на конечные элементы. Создание загружений стержневой системы.

2.5. Представление результатов расчета в программе SCAD и работа с графическими и табличными результатами. Продемонстрировать умение использовать возможности программы SCAD. Продемонстрировать способы сохранения и печати графических и расчетных результатов расчета на примере.

3. Расчет статически определимых балок

3.1. Проверка статической определимости многопролетной балки с шарнирами в пролетах.

3.2. Последовательность ручного расчета балки с шарнирами в пролетах с использованием этажной схемы взаимного опирания звеньев балки между шарнирами друг на друга и на основание.

3.3. Последовательность решения задачи по построению эпюры M на звене этажной схемы шарнирной балки. Правила построения эпюры M, правило знаков для ее ординат.

3.4. Графо-аналитический прием построения эпюры M на участке балки с равномерно распределенной нагрузкой по трем ординатам (в начале, конце и середине участка).

3.5. Последовательность построения эпюры Q на звене этажной схемы шарнирной балки. Два способа определения ординат эпюры Q и ее знаков.

3.6. Продемонстрировать последовательность решения задачи по расчету шарнирной балки на ПК с помощью программы SCAD.

3.7. Изобразить плоский стержневой конечный элемент, используемый для расчета балок методом конечных элементов (МКЭ) и показать правила знаков для усилий в его сечениях.

4. Расчет статически определимых рам

4.1. Продемонстрировать проверку статической определимости рам.

4.2. Продемонстрировать на примерах аналитический, графический и графо-аналитический способы определения опорных реакций рам вручную.

4.3. Продемонстрировать два способа составления и решения системы уравнений равновесия для определения опорных реакций рам: формального и рационального с точки зрения последовательности составления и решения уравнений равновесия системы.

4.4. Продемонстрировать рациональную последовательность построения эпюры M в раме вручную с использованием: минимального числа сечений, в которых необходимо вычислить ординаты эпюры M для ее построения; свойств эпюры M; равновесия узлов и отсеченных частей.

4.5. Два способа вычисления ординат эпюры Q на стержнях рамы.

4.6. Два способа вычисления ординат эпюры N на стержнях рамы.

4.7. Продемонстрировать приемы контроля эпюр усилий в рамах.

4.8. Последовательность расчета рам на ПК с использованием программы SCAD.

4.9. Где и в какой системе координат представляются результаты определения перемещений в раме при ее расчете на ПК с помощью метода перемещений в форме МКЭ, реализуемого в программе SCAD.

4.10. Где и в какой системе координат представляются результаты определения усилий в стержнях рамы при ее расчете на ПК с помощью метода перемещений в форме МКЭ, реализуемого в программе SCAD.

4.11. Покажите горизонтальный, наклонный и вертикальный конечные элементы, применяемые в программе SCAD для расчета плоских рам, отнесите их к осям местной системы координат (МСК) и покажите положительные направления усилий в сечениях этих элементов.

4.12. Как изменятся положительные направления усилий при смене направления оси X1 местной системы координат.

5.Расчет статически определимых арок

5.1 Трехшарнирная арка без затяжки как пример статически определимой арки. Сопоставление опорных реакций и усилий в сечениях трехшарнирной арки без затяжки с соответствующими величинами в статически определимой однопролетной балке, имеющей такой же пролет и несущей такую же вертикальную нагрузку как арка.

Влияние распора арки на усилия в ее сечениях и на конструкцию, на которую опирается арка.

5.2 Трехшарнирная арка с затяжкой. Причина введения в конструкцию трехшарнирной арки затяжки. Формулы для определения реакций и усилий в сечениях арки для арки с затяжкой соединяющей опоры и для арки с повышенным расположением затяжки по сравнению с отметкой опор.

5.3. Безмоментная трехшарнирная арка. Как при заданных параметрах пролета, стрелы арки и нагрузки не арку получить ось безмоментной трехшарнирной арки.

6.Расчет статически определимых ферм

6.1. Продемонстрировать рациональные способы применения уравнений равновесия для определения усилий в стержнях ферм.

6.2. Продемонстрировать правила определения нулевых стержней в фермах.

6.3. Последовательность решения задачи по определению усилий в стержнях ферм.

6.4. Продемонстрировать решение задачи по определению усилий в стержнях ферм на ПК с использованием программы SCAD.

Учебные пособия

Все необходимые учебно-методические материалы для подготовки по заданным вопросам приведены в данном Учебно-Методическом Комплексе (УМК) по строительной механике и в его электронной копии на сайте http://smitu.cef.spbstu.ru кафедры СМ и ТУ.

Чтобы выйти на сайте в раздел УМК по строительной механике, необходимо, начиная с главной страницы сайта последовательно открыть: **Студентам / Строительная механика / Учебно-методический комплекс по использованию программы SCAD в строительной механике.**

Все материалы УМК можно «скачать» также непосредственно в учебных компьютерных классах кафедры СМ и ТУ (ауд. 514-ПГК) и кафедры ГС и ПЭ (ауд. 404).

Можно также использовать учебные пособия, указанные в библиографическом списке в конце данного УМК.

В О П Р О С Ы

для подготовки к экзамену по дисциплине «Строительная механика»
в весеннем семестре учебного года.

1. Определение перемещений в статически определимых стержневых системах

1.1. Практическая необходимость в определении перемещений стержневых систем. Упругая задача. Принцип суперпозиции при определении перемещений.

1.2. Формула Максвелла-Мора для определения действительных перемещений линейно деформируемых стержневых систем.

1.2.1. Грузовое состояние заданной стержневой системы. Действительные перемещения и деформации стержневой системы в грузовом состоянии от заданной нагрузки.

1.2.2. Возможные перемещения и деформации стержневой системы. Принцип возможных перемещений для линейно деформируемой стержневой системы.

1.2.3. Два вида формулы М.-Мора при определении перемещений стержневых систем от действия на нее нагрузки.

1.2.4. Упрощение формулы М.-Мора для конкретного вида стержневых систем.

1.3. Теорема о взаимности работ и взаимности перемещений для стержневых систем.

1.4. Способы вычисления интегралов М.-Мора.

1.4.1. Графо-аналитический способ Верещагина для одного участка интегрирования.

1.4.2. Численный способ Симпсона для одного участка интегрирования.

1.4.3. Матричная форма представления численного вычисления интеграла М.- Мора способом Симпсона для всех участков интегрирования.

1.4.4. Матричная форма представления вычисления сразу нескольких перемещений в одной стержневой системе от действия одного вида нагрузки.

1.5. Понятие о матрице податливости стержневой системы на примере рамы. Матричная форма ее вычисления при использовании способа Симпсона. Пример определения вектора перемещений с помощью матрицы податливости.

1.6. Формула М.-Мора для определения перемещений в статически определимых стержневых системах от заданной осадки опор. Продемонстрировать применение этой формулы на примере статически определимой однопролетной балки.

1.7. Формула М.-Мора для определения перемещений в статически определимых стержневых системах от заданного изменения температуры их стержней. Продемонстрировать применение этой формулы на примере статически определимой однопролетной балки.

2. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил

2.1. Какие стержневые системы являются статически неопределимыми. Понятие о степени статической неопределимости стержневых систем. Формулы для ее подсчета в балках и рамах.

2.2. Идея метода сил на примере рамы. Последовательность ее расчета методом сил.

2.3. Расчет неразрезных балок методом сил.

2.3.1. Выбор рациональной основной системы.

2.3.2. Уравнение «трех моментов» для записи системы уравнений при расчете неразрезных балок методом сил. Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнения в общем и частных случаях.

2.4. Примеры статически неопределимых однопролетных балок. Ход их расчета методом сил от действия нагрузки, заданной осадки опор и при изменении температуры балки. Справочная таблица для типовых состояний однопролетных статически неопределимых балок.

2.5. Понятие о фокусных точках на пролетах неразрезных балок. Фокусные отношения опорных моментов на пролетах неразрезных балок, расположенных левее или правее загруженного пролета или консоли.

2.6. Построение эпюры изгибающих моментов на неразрезной балке при загружении только одного ее пролета. Использование способа фокусных отношений опорных моментов при решении системы уравнений метода сил как системы уравнений «трех моментов» Алгоритм «прогонки» при определении фокусных отношений и искомых опорных моментов неразрезной балки.

2.7. Методические указания по расчету методом сил однопролетных статически неопределимых балок, имеющих по концам «скользящие» в направлении перпендикулярном оси балки заделки.

2.8. Методические указания по расчету методом сил многопролетных статически неопределимых неразрезных балок, имеющих по концам «скользящие» в направлении перпендикулярном оси балки заделки.

2.9. Графический способ С.С.Голушкевича.

2.8.1. Основное свойство фокусных точек. Теорема «об узле». Их использование для определения положения фокусных точек на пролетах неразрезной балки.

2.8.2. Теорема «о стержне». Использование теоремы о стержне и основного свойства фокусных точек для определения ординат л.о.м. эпюры изгибающих моментов в сечениях неразрезной балки, где расположены фокусные точки.

2.7. Использование теоремы об узле для контроля эпюр изгибающих моментов в рамах с линейно не смещающимися узлами.

3. Метод перемещений расчета стержневых систем в форме МКЭ

4.1. Ход расчета

4.1.1. Разбиение стержневой системы на типовые конечные элементы.

Подсчет числа степеней свободы узлов системы конечных элементов (степень кинематической неопределимости расчетной схемы стержневой системы для расчета МКЭ).

Выбор перемещений узлов по направлению их степеней свободы за основные неизвестные величины.

4.1.2. Представление расчета стержневой системы МКЭ как суммы вспомогательной и основной задач МКЭ.

4.1.3. Ход решения вспомогательной задачи МКЭ. Использование табличных эпюр для однопролетных балок.

4.1.4. Алгоритм решения основной задачи МКЭ в форме метода перемещений.

4.2. Основные формулы для типового КЭ

(на примере плоского стержневого элемента типа 2 в программе SCAD)

4.2.1. Обозначение узловых перемещений и усилий элемента в местной системе координат, жестко привязанной к элементу. Связь узловых перемещений и усилий элемента в местной системе координат (для элемента свободного от внешних нагрузок по его длине) с помощью матрицы жесткости.

4.2.2. Элемент, отнесенный к общей для всей стержневой системы системе координат. Связь узловых перемещений и усилий в общей системе координат (для элемента свободного от внешних нагрузок по его длине) с помощью матрицы жесткости.

4.2.3. Матрица преобразования перемещений и усилий в узлах элемента из одной системы координат в другую. Вычисление матрицы жесткости элемента в общей системе координат с помощью матрицы жесткости в местной системе координат.

4.3. Построение матрицы жесткости для всей системы элементов

4.3.1. Построение матрицы жесткости расчетной схемы МКЭ стержневой системы для решения основной задачи МКЭ.

5. Применение программы SCAD для статического расчета стержневых систем

5.1. Построение расчетной схемы плоской стержневой системы. Продемонстрировать на примерах многопролетных балок, и рам с жесткими опорами.

5.2. Последовательность операций по заданию типа и жесткости элементов. Учет различия жесткости элементов. Использование эталонной жесткости. Влияние значения эталонной жесткости на реальные усилия в сечениях стержневой системы и на реальные перемещения узлов. Получение реальных перемещений.

5.3. Последовательность операций по заданию одного и нескольких загружений. Правила знаков при задании внешних нагрузок. Продемонстрировать пример задания нагрузок при построении огибающих эпюр М в неразрезной балке.

5.4. Графический и табличный анализ результатов статического расчета. Редактирование таблиц результатов расчета. Сохранение и печать эпюр усилий и таблиц.

5.5. Упруго-податливые опоры плоских стержневых систем (Опоры конечной жесткости). Продемонстрировать на примере статически неопределимой балки влияние изменения жесткости упруго-податливых опор на вид эпюр усилий в сечениях балки.

5.7. Балки на непрерывном упругом основании. Применение основания модели Винклера для расчета стержневых систем на упругом основании. Задание жесткости основания в программе SCAD.

Учебные пособия

Все необходимые учебно-методические материалы для подготовки по заданным вопросам приведены в данном Учебно-Методическом Комплексе (УМК) по строительной механике и в ее электронной копии на сайте http://smitu.cef.spbstu.ru кафедры СМ и ТУ.

Чтобы выйти на указанном сайте в раздел УМК по строительной механике, необходимо, начиная с главной страницы сайта последовательно открыть: **Студентам / Строительная механика / Учебно-методический комплекс по использованию программы SCAD в строительной механике.**

Все материалы УМК можно «скачать» также непосредственно в учебных компьютерных классах кафедры СМ и ТУ (ауд. 514-ПГК) и кафедры ГС и ПЭ (ауд. 404).

Можно также использовать учебные пособия, указанные в библиографическом списке в конце данного УМК.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в данном УМК все необходимые учебно-методические материалы для изучения дисциплины «Строительная механика» реализуют идею применения ПВК *SCAD* в учебном процессе по этой дисциплине уже с самого начала ее изучения.

Можно отметить несколько положительных результатов такого применения программы *SCAD* для ПК в учебном процессе

1. В связи с уменьшением объема расчетов вручную (без использования ПК), существенно повышается производительность труда студентов при выполнении всех расчетных работ по указанным дисциплинам.

2. Повышается самостоятельность студентов при анализе полученных результатов расчетов, что упрощает работу преподавателей и также повышает производительность их труда.

3. У учащегося появились значительно большие возможности для исследовательской работы. Это связано с тем, что при использовании программы *SCAD* для ПК у студентов появились возможности изменять параметры конструкции и параметры ее загружения и быстро исследовать влияние такого изменения на изменение напряженно-деформированного состояния рассчитываемой конструкции.

4. На примере использования программы *SCAD* для ПК у студентов накапливаются навыки работы с программами, используемыми в инженерной практике проектирования на стадии определения напряженно-деформированного состояния энергетических и промышленно-гражданских сооружений. Появляется возможность конкурентного сопоставления различных ПВК.

5. Внедрение программы *SCAD* с самого начала преподавания дисциплины, позволило при дефиците времени на учебный процесс сократить или построить, по мнению авторов, методически более рационально разделы этих дисциплин.

6. Возрастают возможности внедрения современных ПВК в курсовые работы и проекты по специальным дисциплинам, преподаваемым кафедрами «Строительные конструкции», «Механика грунтов, основания и фундаменты», а также в курсовые и дипломные проекты, выполняемые студентами на выпускающих кафедрах.

Рациональное использование программы *SCAD* в учебном процессе по дисциплинам механического цикла и, как следствие этого, рациональное внедрение ПВК SCAD в учебный процесс по специальным строительным дисциплинам специальности ПГС способствовали повышению уровня решения задач механики в дипломных проектах специальности ПГС отделения Э и ПГС кафедры ГС и ПЭ .

Повышение уровня теоретической и практической подготовки инженеров-строителей специальности ПГС на ИСФ СПбГПУ подтверждается многочисленными примерами их успешной работы в различных строительных организациях.

Библиографический список

1. Константинов И.А., Лалина И.И. Строительная механика. Расчет стержневых систем. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2005. 155с. (Сайт http://smitu.cef.spbstu.ru – 176 с).

2. Константинов И.А. Строительная механика. Использование программы SCAD для расчета стержневых систем. Ч.1: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2003 и 2004. 81с.

3. Константинов И.А., Лалина И.И. Строительная механика. Использование программы SCAD для расчета стержневых систем. Ч.2.: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2005. 82с. и 2007. 91с.

4. Константинов И.А., Лалина И.И. Строительная механика. Примеры расчетных работ с использованием программы SCAD: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. 72 с.

5. Каркасные здания и сооружения. Расчет усилий с помощью программы SCAD. Метод. указания. / Сост. *И.А. Константинов, В.А. Соколов*. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. 39 с.

6. Строительная механика. Учебные задания и задачи по расчету стержневых систем. / Сост. *И.А. Константинов, В.В. Лалин, И.И.Лалина*. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2007. 47 с.

7. Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А. Расчет статически определимых стержневых систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.

8. Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А. Расчет статически неопределимых стержневых систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.

9. Колосова Г.С. Механика деформируемого тела. Расчет статически определимых балок и рам: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1996.

10. Колосова Г.С., Смелов В.А., Смирнов М.С. Строительная механика. Ч.1. Электронный учебник., СПб., Изд-во СПбГТУ, 2001.

11. Колосова Г.С., Смирнов М.С. Строительная механика. Ч. 2. Электронный учебник, СПб., Изд-во СПбГТУ, 2002.

12. Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.

13.Смелов В.А. Метод перемещений в строительной механике: Учеб. пособие. Л.: Изд-во ЛПИ,1976.

14. Смелов В.А. Расчет балок и балочных плит на упругом основании. Учеб. пособие. Л.: Изд-во ЛПИ,1973.

15. Колосова Г.С. Решение одномерных задач строительной механики численными методами: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПб ГТУ, 1993.

16. Головин А.Я., Константинов И.А., Кунина Л.И., Николаева М.В. Строительная механика ч.1. Статически определимые системы. Л.: Изд-во ЛПИ, 1968. 178с.

17. Расчет статически неопределимых балок и рам графическим способом С.С. Голушкевича. Метод. указания, составленные Головиным А.Я., Константиновым И.А., Куниной Л.И., Николаевой М.В. Л.: Изд-во ЛПИ, 1972. 64с.

18. Учебные задания по строительной механике. Составители И.А. Константинов, В.А. Рукавишников, В.А. Смелов. Л.: Изд-во ЛПИ, 1981. 47с.

19. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. Вычислительный комплекс SCAD: – М.:Изд-во АСВ, 2004. – 592 с.

20. А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа – Киев: ВПП «Компас», 2001. – 448 с.: ил.

21. СНиП 2.01.07-85*. Нагрузки и воздействия. М., Стройиздат, 1996.

22. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции. М.: Госстрой СССР, 1989.

23. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов: Учеб. для гидротехн. спец. вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1991. 447 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие……..……. 3

1. Общие сведения о стержневых системах……. 5

1.1. Основная задача строительной механики и цели ее изучения…….. 5

1.2. Расчетные схемы сооружений…….. 6

1.3. Воздействия на сооружения…….. 8

1.4. Структура курса «Строительная механика» в учебном плане…….. 9

1.5. Типы плоских стержневых систем и детали их расчетных схем…….. 10

1.6. Понятие о геометрически изменяемых и неизменяемых системах…… 14

1.7. Понятие о статически определимых и неопределимых системах…… 15

1.8. Методы расчета стержневых систем по определению их НДС…… 18

2. Условия геометрической неизменяемости и статической определимости плоских стержневых систем……..... 22

2.1. Понятие о жестких дисках. Способы их образования…… 22

2.2. Условия закрепления диска на основании и условие статической определимости опорных реакций……..……..... 25

2.3. Условия геометрической неизменяемости и статической определимости диска в виде одного замкнутого контура…… 27

2.4. Условия геометрической неизменяемости и статической определимости стержневой системы как системы дисков, соединенных шарнирами…….…… 30

2.5. Выяснение принадлежности стержневой системы к статически определимым или статически неопределимым системам……..... 34

2.6. Подсчет степени статической неопределимости ферм..…… 39

3. Предварительные сведения о расчете стержневых систем методом конечных элементов с использованием программы SCAD……. 42

3.1. Представление расчетных схем стержневых систем как систем конечных стержневых элементов..... 42

3.2. Построение расчетной схемы МКЭ на этапах постановки опорных связей и одиночных шарниров на конечных элементах…….. 45

3.3. Представление на расчетной схеме МКЭ стержневой системы шарнирных узлов……... 48

3.4. Особенность учета на расчетной схеме МКЭ консольных стержней…….. 51

3.5. Внутренние усилия в концевых сечениях КЭ типа 2 и правило знаков для них…….. 52

3.6. Назначение жесткостей конечных элементов в расчетной схеме МКЭ стержневой системы……. 57

3.7. Загружение расчетной схемы МКЭ……. 57

4. Правила построения эпюр внутренних усилий *M,Q,N* на стержнях плоской стержневой системы……..... 60

4.1. Эпюра изгибающих моментов *M*……...……..... 60

4.2.Эпюра поперечных сил Q ……..... 68

4.3. Эпюра продольных сил N ……..……..... 75

4.4. Используемые способы контроля построенных эпюр M, Q, N …… 78

5. Использование конструктивных особенностей статически определимых стержневых систем для выбора рационального способа определения усилий с помощью уравнений равновесия…….. 80
5.1. Последовательность определения усилий вручную…….. 80
5.2. Использование этажной схемы шарнирной балки ……..…….. 81
5.3. Использование конструктивных особенностей статически определимых рам без замкнутых контуров…..…….. 83
5.4. Использование конструктивных особенностей статически определимых рам, имеющих замкнутые контуры..... 90
5.5. Использование конструктивных особенностей трехшарнирных арок ……... 92
5.6. Использование конструктивных особенностей ферм…..…… 98
5.7. Основные свойства статически определимых и статически неопределимых стержневых систем в сравнении…….…… 106
5.8. Исследование геометрической неизменяемости стержневых систем статическим способом «нулевых нагрузок» при соблюдении необходимого условия $n = 0$ …… 107
5.9. Понятие о линиях влияния и их использовании при расчете стержневых систем……. 112
5.10. Информация о сборнике заданий для самостоятельных расчетных работ студентов на тему «Определение усилий и построение эпюр M, Q, N в статически определимых стержневых системах»……. 114
6. Определение перемещений сечений стержней линейно деформируемых стержневых систем…… 116
6.1. Введение 116
6.2. Формула Максвелла-Мора для определения действительных перемещений линейно деформируемых стержневых систем…….…….. 117
6.3. Упрощение формулы Максвелла-Мора для конкретного вида стержневых систем……. 121
6.4. Способы вычисления интегралов в формуле Максвелла-Мора…… 121
6.5. Матричный вид вычислений интеграла Максвелла-Мора по формуле Симпсона…… 123
6.6. Понятие о матрице податливости стержневой системы. Матричная форма ее вычисления при использовании формулы Симпсона…… 125
6.7. Определение перемещений в статически определимых стержневых системах от заданной осадки опор…….. 127
6.8. Определение перемещений в статически определимых стержневых системах от изменения температуры их стержней…… 129
7. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил…… 131
7.1. Идея метода сил на примере рамы…… 131
7.2. Расчет неразрезных балок методом сил……... 136
7.3. Случай загружения неразрезной балки заданным моментом на крайней шарнирной опоре. Понятие о фокусных точках…….…… 145
7.4. Случай загружения одного пролета неразрезной балки…… 155
7.5. Графический способ С.С. Голушкевича……. 157
7.6. Методические указания по расчету методом сил неразрезных балок, имеющих опоры в виде «скользящих» заделок…… 164

7.7. Скользящая заделка имеется только на левом конце неразрезной балки 173
7.8. Скользящая заделка имеется только на правом конце неразрезной балки …. 180
7.9. Скользящая заделка имеется на левом и на правом концах неразрезной балки…….. 185
7.10. Применение графического способа С.С. Голушкевича для балок, имеющих скользящие заделки…….. 190
7.11. Особенность реализации метода сил при расчете неразрезных балок от заданной осадки их опор и от температурного воздействия…… 199
8. Расчет стержневых систем методом конечных элементов в форме метода перемещений…… 203
8.1. Представление задачи расчета стержневой системы МКЭ как суммы вспомогательной и основной задач …… 203
8.2. Последовательность решения основной задачи МКЭ методом перемещений
8.3. Плоские стержневые конечные элементы в местной системе осей координат…….. 213
8.4. Преобразование векторов перемещений и усилий в узлах и матриц жесткости конечного элемента из общей системы осей координат в местную и наоборот…….. 220
8.5. Формирование матрицы жесткости для расчетной схемы рамы…….. 222
8.6. Обозначения узловых перемещений и усилий в сечениях стержней в программе SCAD…...……..……. 224
9. Примеры использования программы SCAD для расчета и анализа работы статически неопределимых балок и рам...…….. 227
9.1. Расчет неразрезных балок МКЭ с пользованием программы SCAD…… 227
9.2. Определение усилий в однопролетных статически неопределимых балках на жестких опорах от поперечных к их осям нагрузок……. 228
9.3. Построение эпюр усилий в неразрезной балке от комбинации нескольких загружений……. 229
9.4. Построение огибающих эпюр $M_{\max}$ и $M_{\min}$ для неразрезной балки…… 233
9.5. Использование фокусных точек на пролетах неразрезных балок для контроля эпюр изгибающих моментов при загружении одного пролета или консоли балки……..……. 237
9.6. Использование программы SCAD для расчета балок с упругими опорными связями конечной жесткости……...…… 240
9.7. Использование теоремы об узле для контроля эпюр изгибающих моментов в рамах с линейно не смещающимися узлами……... 246
10. Расчет балок и рам на непрерывном упругом основании модели Винклера…… 259
10.1.Уравнение изгиба тонкой балки, опирающейся по своей длине на непрерывное упругое основание модели Винклера……..... 259
10.2. Применение программы SCAD для расчета балки на упругом основании модели Винклера…… 262
10.3. Учет переменности жесткости балки на изгиб и переменности коэффициента постели по длине балки при расчете МКЭ…… 267

10.4. Расчет рам, имеющих стержни с непрерывным контактом по своей длине с упругим основанием модели Винклера…….. 270
Приложение 1. Методические указания по использованию программы SCAD для выполнения учебных расчетных работ …… 273
Приложение 2. Сборник учебных заданий по расчету стержневых систем…….. 326
Приложение 3. Примеры выполнения учебных расчетных работ….…… 352
Приложение 4. Рабочая программа дисциплины «Строительная механика» (расчет стержневых систем)……...…. 421
Приложение 5. Контрольные задачи…… 426
Приложение 6. Вопросы для подготовки к зачетам и экзаменам…….. 438
Заключение……. 444
Библиографический список…… 445
Оглавление…….. 446

КОНСТАНТИНОВ Игорь Алексеевич
ЛАЛИН Владимир Владимирович
ЛАЛИНА Ирина Игоревна

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

**Расчет стержневых систем
с использованием программы SCAD**

Учебно-методический комплекс

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота − Общероссийский классификатор продукции
ОК 005 – 93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать . . 200 . Формат 60×84/16
Усл. печ. л. . Уч.- изд. л. . Тираж . Заказ .

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,
в типографии Издательства Политехнического университета,
195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.