

Федеральное агентство по образованию

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

И.А. КОНСТАНТИНОВ В.В. ЛАЛИН И.И. ЛАЛИНА

**СТРОИТЕЛЬНАЯ
МЕХАНИКА**

Часть 1

**Расчет статически определимых стержневых систем
с использованием программы SCAD**

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2008**

Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

И.А. Константинов В.В. Лалин И.И. Лалина

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Часть 1

Расчет статически определимых стержневых систем
с использованием программы SCAD

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2008

УДК 624.04 (075.8)

К о н с т а н т и н о в И. А., Л а л и н В. В. Л а л и н а И. И.
Строительная механика. Часть 1. Расчет статически определимых стержневых систем с использованием программы SCAD.: Учеб. пособие. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 260 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Строительная механика» инженерной подготовки по направлению «Строительство».

В нем учащемуся даются первые представления о наиболее часто встречающихся типах стержневых систем, о разделении их на статически определимые и статически неопределимые системы и о соответствующих методах расчета. Выполняется исследование геометрической неизменяемости стержневых систем.

Излагаются правила и рекомендации по построению эпюр внутренних усилий в сечениях стержней стержневых систем и способы контроля этих эпюр.

Дается представление о рациональных способах применения уравнений равновесия для определения усилий в статически определимых стержневых системах с учетом их конструктивных особенностей.

Рассматривается методика определения перемещений линейно деформируемых статически определимых стержневых систем с помощью формулы Максвелла–Мора. Затем, на этой основе, дается представление о расчете статически неопределимых стержневых систем методом сил.

Предназначено для студентов дневного, вечернего и заочного обучения направления «Строительство», изучающих дисциплину «Строительная механика».

Табл. 24. Ил. 126. Библиогр.: 21 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время при проектировании строительных конструкций в проектных организациях значительная часть расчетов выполняется на персональных компьютерах (ПК) с помощью специальных проектно-вычислительных комплексов (ПВК), в которых отражаются и используются самые современные достижения по расчету и проектированию сооружений.

Применяемые ПВК отличаются друг от друга методическими и сервисными разработками, но все они включают в себя статические и динамические расчеты конструкций и отдельных их частей, выполняемые методами строительной механики.

Алгоритмы соответствующих численных расчетов в основном строятся на методе конечных элементов (МКЭ), реализуемом в форме метода перемещений.

Кафедра строительной механики и теории упругости (СМ и ТУ) успешно использует в учебном процессе по дисциплинам «Строительная механика стержневых систем (статики)»; «Теория упругости»; «Динамика сооружений» программу SCAD [1].

В результате длительной работы авторов данного учебного пособия по использованию программы SCAD в учебном процессе по указанным дисциплинам механического цикла созданы учебно-методические комплексы (УМК).

УМК по строительной механике [21] объединяет пособия [1 – 6] авторов.

Электронные аналоги этого УМК и пособий [1 – 6] имеются на сайте <http://smitu.cef.spbstu.ru> кафедры СМ и ТУ а также в сети классов ПК кафедр «Строительная механика и теория упругости» и отделения «Энергетические и промышленно-гражданские сооружения» кафедры «Гражданское строительство и прикладная экология».

Ученое пособие представляет собой в основном методическую переработку и объединение пособий [1, 2, 4, 6]. Оно предназначено для использования в учебном процессе при изучении методики определения усилий и перемещений в статически определимых стержневых системах.

Традиционно кафедрой СМ и ТУ эта часть дисциплины «Строительная механика стержневых систем (статики)» обозначается как «Часть 1», что и отражено в названии данного учебного пособия.

Для связи с библиографическим списком ко всему УМК по строительной механике в библиографический список части 1 включены учебные пособия по расчету как статически определимых так и статически неопределимых стержневых систем: [7 – 18], подготовленные сотрудниками кафедры СМ и ТУ и пособия [19, 20] авторов вычислительного комплекса SCAD.

Следует обратить внимание читателей УМК и данного пособия на два важных, с точки зрения авторов, момента при оценке представленного здесь материала.

Во-первых, авторы стремились к тому, чтобы студенты специальности ПГС,

закончив изучение строительной механики в рамках учебного плана, получили возможность уверенно решать задачи строительной механики для линейно-деформируемых стержневых систем с использованием персональных компьютеров и современных вычислительных комплексов (на примере ПВК SCAD).

Во-вторых, авторы на простых примерах старались научить студентов понимать работу стержневых систем (как говорят иногда: понимать «игру сил» в различных стержневых строительных конструкциях). Для этой цели авторы использовали примеры расчетов различных стержневых систем, как с применением ПК, так и вручную (без применения ПК). При этом для наглядности использовались и элементы графостатики, например, построение многоугольника сил при рассмотрении равновесия какой-либо части стержневой системы.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

1.1. Основная задача строительной механики

Строительная механика – наука о принципах и методах расчета сооружений и конструкций на *прочность, жесткость и устойчивость* – на всех этапах своего развития связана с уровнем развития математики, механики и науки о сопротивлении материалов.

Основной задачей строительной механики является определение напряженно-деформируемого состояния (НДС) конструкций и сооружений от внешних воздействий (силовых, кинематических, температурных).

Под определением НДС понимают определение внутренних усилий, напряжений, соответствующих им деформаций и перемещений, возникающих в элементах сооружений.

В соответствии с результатами расчета НДС устанавливаются размеры отдельных элементов сооружений, необходимые для обеспечения их надежной работы на *прочность, жесткость и устойчивость* при минимальных затратах на строительные материалы и возведение (строительство).

Таким образом, без строительной механики невозможно проектирование рациональных конструкций и сооружений.

Строительная механика позволяет формировать знания, умения и навыки, необходимые будущим инженерам-строителям для работы в области проектирования и возведения строительных конструкций.

Целью обучения строительной механике студентов всех специальностей направления «Строительство» являются:

1. Знание принципов и методов расчета сооружений по определению НДС от заданных внешних воздействий (силовых, кинематических и температурных).

2. Умение составлять и анализировать расчетные схемы различных сооружений для их расчета на заданные воздействия.

3. Умение решать простейшие задачи строительной механики при помощи малых вычислительных средств (калькуляторов).

4. Умение рассчитывать сложные расчетные схемы на современных компьютерах (в настоящее время чаще всего используются персональные компьютеры (ПК)) с использованием соответствующих программ расчета,

построенных на основе методов строительной механики.

5. Умение оценивать правильность результатов расчета.

1.2. Расчетные схемы сооружений

Решение задачи определения НДС сооружения представляет собой сложную проблему. На практике она решается различными путями: *натурными исследованиями* в возводимых или уже построенных сооружениях; *экспериментальными исследованиями на специально изготовленных моделях сооружения*; *расчетом сооружений по специально разработанным расчетным схемам*.

В данном учебном пособии рассматривается третий путь решения задачи об определении НДС – расчетный.

Расчетная схема сооружения только приближенно отражает НДС реального сооружения. Степень точности отражения расчетной схемой реальной работы сооружения связана с возможностями расчетчиков:

1) по учету в расчетной схеме геометрии элементов сооружения и их соединения друг с другом;

2) по учету в расчетной схеме разнообразных физико-механических свойств материалов, используемых в сооружении.

3) по использованию вычислительной техники с достаточными техническими характеристиками, позволяющими выполнить расчет НДС с необходимой точностью.

Рассмотрим, как решаются эти вопросы при составлении расчетной схемы сооружений.

1) Для геометрического представления элементов сооружения в расчетной схеме обычно их делят на следующие три типа:

- **Стержневые элементы**, которые отличаются от других значительным преобладанием длины элемента l над размерами b, h его поперечного сечения (рис. 1.1, *a*).

Если при исследовании изгибных деформаций стержня применима гипотеза плоских сечений, известная учащемуся из дисциплины «Соппротивление материалов», то стержень классифицируют как **тонкий стержень**. Обычно эта гипотеза соблюдается при достаточно малом отношении h/l (см. рис. 1.1, *a*). Приближенно будем считать стержень тонким, если $h/l < 1/5$. Такой стержень в расчетной схеме изображается линией, представляющей ось стержня. Если гипотеза плоских сечений не применима, то стержень не считают тонким.

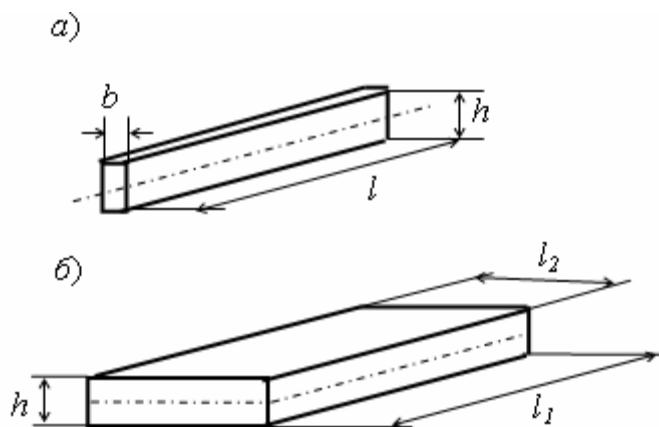


Рис. 1.1

- **Элементы, один из размеров которых (толщина h) много меньше двух других размеров.** К таким элементам в строительной практике относят **стенки, тонкие плиты** (рис. 1.1, б), **тонкие оболочки**.

В расчетной схеме сооружения такие элементы представляются срединной плоскостью для стен и тонких плит (см. рис. 1.1, б) и срединной криволинейной поверхностью для тонкой оболочки.

- **Массивные элементы**, которые имеют все три размера одного порядка. В расчетной схеме они и изображаются в виде пространственных тел заданных размеров.

Имеются сооружения, представляющие собой конструкцию только из тонких стержневых элементов. Такую систему обычно называют **Стержневая система**.

2) Из разнообразных физико-механических свойств материалов сооружений чаще всего в расчетной схеме рассматривается физическая модель в виде *сплошного, однородного, изотропного тела, имеющего малые перемещения и деформации и подчиняющегося закону Гука*, т.е. модель **линейно-деформируемое тела**.

В этом случае искомые перемещения, напряжения и деформации (НДС сооружения) определяются из системы линейных уравнений и при их определении оказывается применимым **принцип независимости действия сил** (возможность сложения результатов расчета сооружения от любых внешних воздействий).

В данном пособии рассматриваются именно такие линейные задачи. Нелинейные задачи здесь не рассматриваются.

3) В настоящее время для определения НДС сооружений используются персональные компьютеры с техническими характеристиками, позволяющими

реализовать разработанные в строительной механике методы расчета как линейных, так и нелинейных задач и получать достаточно точные для инженерной практики результаты. Однако проблема разработки и применения при расчетах НДС наиболее рациональных расчетных схем всегда будет оставаться актуальной. Но обсуждение этих вопросов выходит за рамки данного учебного пособия.

1.3. Воздействия на сооружения

Воздействия можно классифицировать по различным признакам. Например, их можно разделить на **силовые воздействия (нагрузки)**, **температурные воздействия** и **кинематические воздействия (заданные перемещения)**.

Воздействия можно разделить на два класса: **статические** и **динамические**.

К статическим относятся воздействия, которые не сообщают массам сооружения ускорений, или сообщают такие малые ускорения, что, возникающими при этом силами инерции, при определении НДС можно пренебречь. Значения, направление и конфигурация статического воздействия не изменяются во времени. Возможно изменение координат воздействия (подвижная нагрузка), но оно происходит так медленно, что сохраняется статический характер воздействия.

При статическом воздействии сооружение деформируется, возникают перемещения его точек и соответствующие усилия и напряжения, которые при работе сооружения в упругой стадии не изменяются во времени.

К динамическим относятся воздействия, которые сообщают массам сооружения существенные ускорения и, следовательно, вызывают такие силы инерции, что их влияние на НДС сооружения должно быть учтено.

Значение, направление, конфигурация и координаты динамического воздействия (все параметры или некоторые из них) изменяются во времени.

Примерами динамических воздействий являются **ударные** и **вибрационные** нагрузки, вызванные действием машин и механизмов; **воздействия взрывных волн** через грунтовую и воздушную среду; **сейсмическое воздействие** и т. д.

Динамические воздействия вызывают колебания сооружения, при которых изменяются во времени как перемещения точек сооружения, так и связанные с перемещениями деформации, усилия и напряжения.

В данном пособии рассматриваются только статические воздействия на стержневые системы.

1.4. Структура курса «Строительная механика» в учебном плане

Дисциплина «Строительная механика» является логическим продолжением дисциплин «Теоретическая механика» и «Сопротивление материалов». В ней также используются знания, полученные студентами при изучении дисциплин «Высшая математика» и «Вычислительная математика».

В связи с только что приведенным представлением о работе сооружений при статическом и динамическом воздействиях строительную механику делят на две части (схема 1):

1. Статика сооружений.
2. Динамика сооружений.

При этом статика сооружений делится на два раздела: «Строительная механика стержневых систем» и «Теория упругости» (см. схему 1)



Схема 1

В статике сооружений раздел 1.1, в котором при статических воздействиях рассматриваются методы расчета стержневых систем, состоящих из тонких стержней, обычно называют просто «Строительная механика».

В разделе 1.2 статике сооружений («Теория упругости») рассматриваются постановки и методы расчета при статических воздействиях толстых балок (балок-стенок), пластин (плит), оболочек и пространственных массивных тел.

Динамика сооружений посвящена постановкам и методам решения динамических задач, как стержневых систем, так и сооружений, имеющих

плоские и массивные элементы.

Данное учебное пособие посвящено разделу 1.1. строительной механики (см. схему 1).

Методы строительной механики и построенные на их основе программы расчета различных стержневых конструкций на персональных компьютерах (ПК) используются затем в специальных курсах «Металлические конструкции», «Железобетонные конструкции», «Основания и фундаменты» и специальных курсах по расчету и проектированию сооружений, читаемых выпускающими кафедрами.

1.5. Типы плоских стержневых систем и детали их расчетных схем

Все сооружения являются *пространственными* физическими телами. Но есть стержневые конструкции, расчетные схемы которых (в виде совокупности осей стержней) и действующая нагрузка оказываются расположенными в одной плоскости. Такие стержневые системы называются *плоскими стержневыми системами*.

Принципиального различия в методах расчета пространственных и плоских стержневых систем нет. Однако, поскольку расчет плоских стержневых систем проще, то обычно в учебном процессе по строительной механике методы расчета стержневых систем демонстрируются на плоских системах.

Дальнейшее обобщение методов на пространственные задачи затруднений не вызывает. Поэтому и в предлагаемом учебном пособии рассмотрены только плоские стержневые системы. При этом рассмотрены только наиболее часто встречающиеся в инженерной практике типы (примеры их схем приведены на рис. 1.2):

1. **Балки** (рис. 1.2, а);
2. **Рамы** (рис. 1.2, б);
3. **Арки** (рис. 1.2, в);
4. **Фермы** (рис. 1.2, г).

Обычно вся расчетная схема при расчете относится к какой-то *общей системе координат* (ОСК). Для пространственной стержневой системы ОСК является пространственной (штриховые линии на рис. 1.2, жс).

При рассмотрении плоских стержневых систем ее расчетная схема изображается на какой-то одной координатной плоскости, например, на плоскости XOZ [1– 6, 19, 20] (обозначения осей координат на рис. 1.2 приняты такими же, как в программе SCAD).

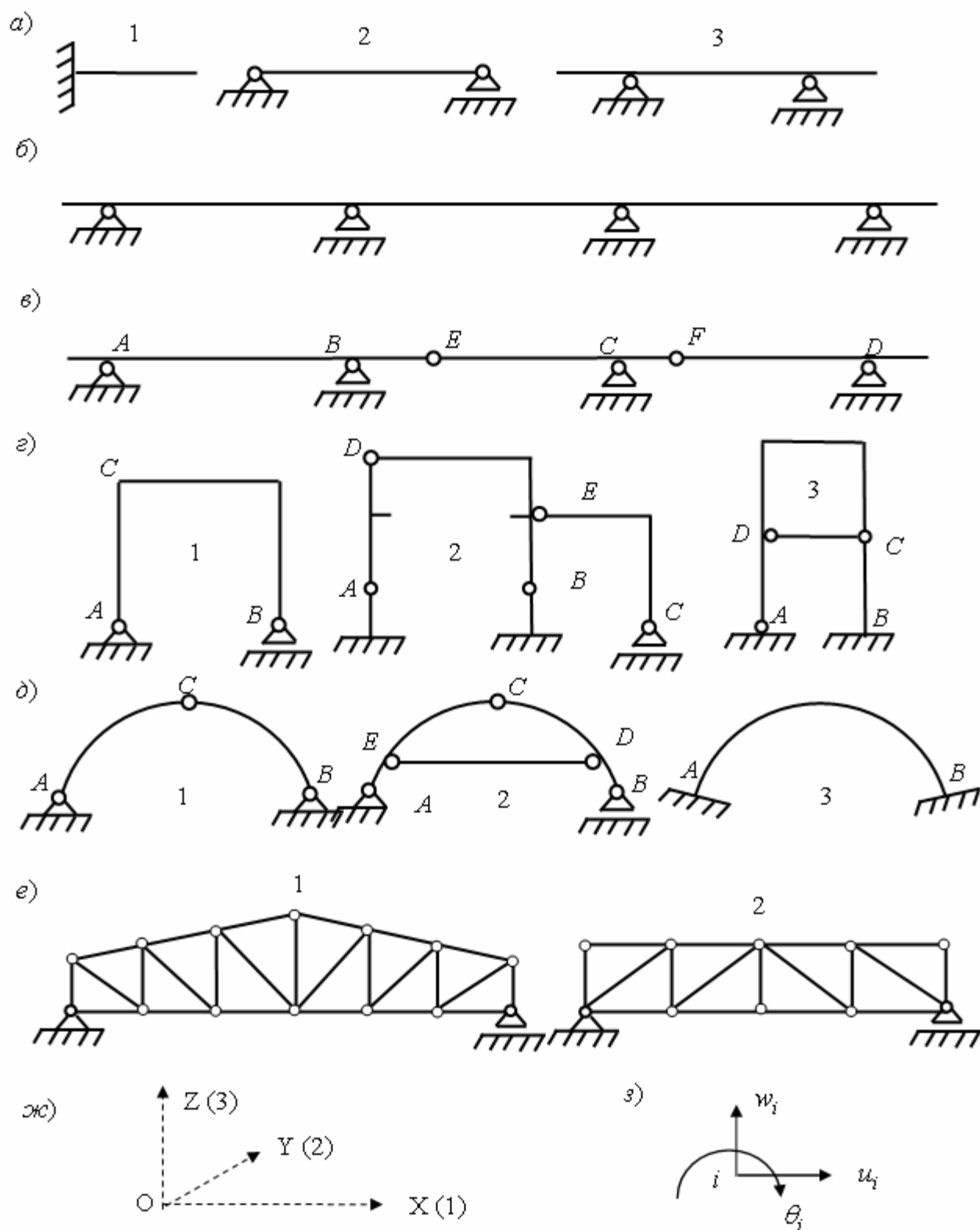


Рис. 1.2

Детальями расчетных схем стержневых систем (см. рис. 1.2) являются:

- **стержни** (прямолинейные и криволинейные);
- **узлы** (жесткие, шарнирные и комбинированные), в которых стержни

соединяются друг с другом;

- **опоры** (опорные узлы).

Стержни в расчетной схеме изображаются линиями, совпадающими с его центральной осью. Поперечное сечение стержней, характеризуется площадью A (в программе SCAD эта величина обозначена F , иногда ее обозначают S [1, 7, 8]) и моментом инерции I (для плоского стержня, изгибающегося в плоскости XOZ , $I = I_y$).

При определении НДС плоской стержневой системы неизвестными величинами в любом сечении стержня, находящегося в условиях продольной и изгибной деформации, являются:

перемещения (линейные перемещения сечения u и w соответственно в направлении осей X и Z и угол поворота сечения $\theta = \theta_y$);

усилия (изгибающий момент M , поперечная сила Q и продольная сила N , действующие в той же плоскости);

деформации (изгиба κ («каппа»), сдвига γ и продольной ε - растяжения или сжатия).

Жесткие узлы соединяют подходящие к нему концевые поперечные сечения стержней так, что обеспечивают одинаковость линейных и угловых перемещений этих сечений в плоскости, в которой находится стержневая система.

При деформации плоской стержневой системы в плоскости XOZ любой ее жесткий узел с номером i имеет три степени свободы упругих перемещений, которые можно выразить вектором.

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где u_i, w_i – проекции полного линейного перемещения узла в плоскости XOZ соответственно на оси X и Z ; θ_i – угол поворота жесткого узла вокруг оси Y .

Положительные направления перемещений узла такие же, как в сечении стержня. Они показаны на рис 1.2, 3.

Шарнирные узлы обеспечивают равенство только линейных перемещений соединяемых концов стержней, но разрешают независимый свободный поворот каждого стержня на свой угол поворота.

При деформации упругой линейно-деформируемой плоской стержневой системы в плоскости XOZ любой шарнирный узел с номером i имеет две

степени свободы упругих перемещений, проекции которых X и Z на соответствующие оси ОСК XOZ можно выразить вектором

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Опоры, изображенные на расчетных схемах плоских стержневых систем (см. рис. 1.2), относятся к следующим типам жестких (недеформируемых) связей.

Шарнирная подвижная опора, эквивалентная одной жесткой связи сооружения с неподвижным жестким основанием (рис. 1.3, а). Связь (стержень с шарнирами по концам) и усилие в ней перпендикулярны плоскости качения опоры и проходят через центр шарнира. Такой опорный узел имеет две степени свободы: конец стержня, подходящего к опорному шарниру, может перемещаться в направлении параллельном плоскости качения и поворачиваться на какой-то угол.

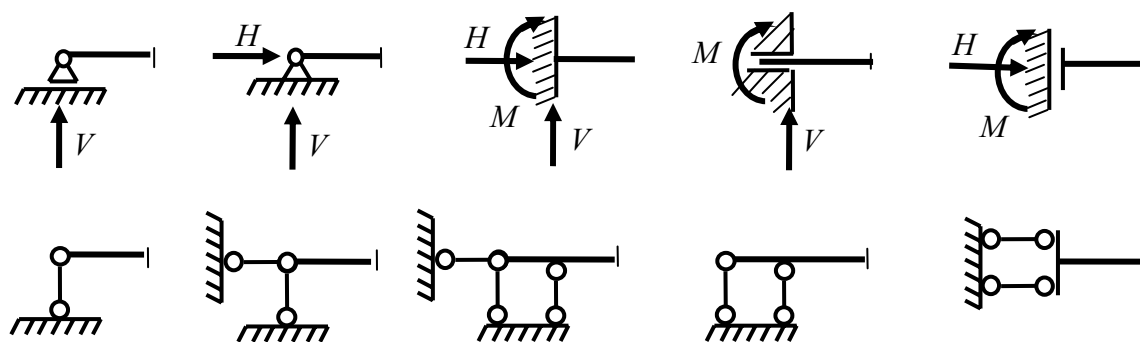


Рис. 1.3

Усилие в опорной связи действует на основание (передает на него силу давления со стороны сооружения) и на само сооружение (передает на сооружение силу давления основания на сооружение, называемую реакцией основания). Сила давления на основание и сила его реакции равны по значению, но направлены в разные стороны.

При расчете сооружения расчетчика интересует сила реакции основания, а при расчете фундамента под опору – давление на основание.

Шарнирная неподвижная опора, эквивалентная двум связям, пересекающимся в центре шарнира (рис. 1.3, б). Такая опора имеет только одну степень свободы – поворачиваться вокруг шарнира. Полная опорная реакция, действующая на сооружение в центре шарнира, при расчетах обычно представляется ее двумя составляющими

Защемляющая опора (заделка), эквивалентная трем связям, не пересекающимся в одной точке (рис. 1.3, в). Такая опора не имеет ни одной

степени свободы, т.е. закрепляет конец стержня от линейных и угловых перемещений. В этом случае на сооружение действуют три составляющих полной опорной реакции (см. рис. 1.3, в).

Встречаются так называемые «Скользящие заделки», допускающие смещения конца стержня вдоль его оси (рис. 1.3, з) или – поперек (рис. 1.3, д).

1.6. Понятие о геометрически изменяемых и неизменяемых системах

В строительных стержневых конструкциях обычно используют **геометрически неизменяемые (ГН)** системы. К ним относятся конструкции, в которых при пренебрежении упругими деформациями стержней, расстояние между любыми точками конструкции будет неизменным.

Примером такой геометрически неизменяемой системы является рама, изображенная на рис. 1.4, а. Соединения стержней в ней между собой и с неподвижным жестким основанием – жесткие. Если считать стержни рамы недеформируемыми (жесткими), то при воздействии на нее нагрузки все ее точки будут неподвижными.

К **геометрически изменяемым (ГИ)** системам относятся такие конструкции, которые допускают перемещение точек конструкции даже в том случае, когда ее стержни будут жесткими.

Примером такой системы является конструкция, которая получится из рассмотренной на рис. 1.4, а рамы, если все жесткие соединения стержней станут шарнирными (рис. 1.4, б). Такая система геометрически изменяема, т.к. под действием любой малой горизонтальной нагрузки изменит свое положение на плоскости даже при отсутствии деформации стержней.

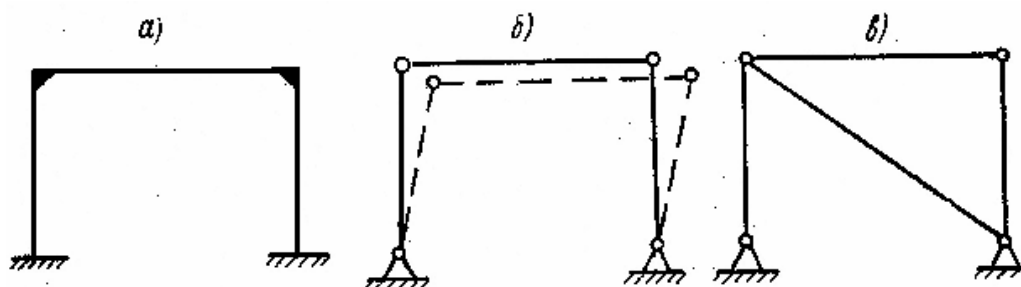


Рис. 1.4

Если в геометрически изменяемую шарнирно-стержневую систему, изображенную на рис. 1.4, б, поставить раскос, например, так, как это показано на рис. 1.4, в, то, несмотря на отсутствие жестких узлов, она станет геометрически неизменяемой.

Примечание. Именно поэтому, например, при конструировании строительных лесов у зданий, когда трудно обеспечить жесткость узлов, кроме вертикальных и горизонтальных

стержней вводятся раскосы.

Таким образом, *если стержневая система имеет только жесткие соединения в узлах, то она геометрически неизменяема.*

Наличие шарнирных узлов уменьшает число связей в стержневой системе и при излишнем числе шарнирных соединений может привести к геометрически изменяемой системе. Такие системы в строительстве применять не следует.

Методика исследования геометрической неизменяемости стержневых систем в пособии будет рассмотрена в разделе 2.

1.7. Понятие о статически определимых и неопределимых системах

Для определения НДС стержневой системы необходимо найти в каждом сечении стержня:

- три внутренних усилия (M, Q, N);
- три соответствующих усилиям деформации ($\kappa, \gamma, \varepsilon$);
- три перемещения (u, w, θ).

Перечисленные величины связаны между собой и с внешней нагрузкой соотношениями (уравнениями), известными из дисциплины «Сопротивление материалов».

Для записи этих соотношений рассмотрим состояния бесконечно малого элемента dx , вырезанного из стержневой системы и отнесенного к системе координат XOZ (рис. 1.5).

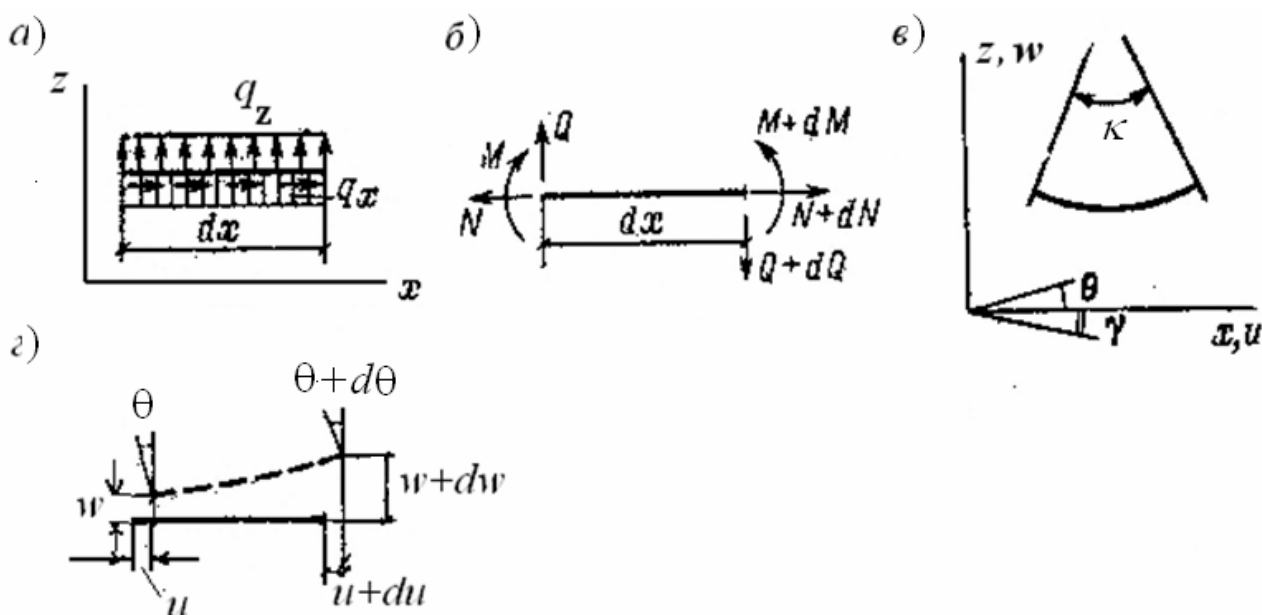


Рис. 1.5

На элемент действуют распределенные нагрузки вдоль (q_x) и поперек

(q_z) оси стержня (рис. 1.5, а). **На рис. 1.5 показаны положительные направления внешних нагрузок, усилий, деформаций и перемещений.**

Указанные девять неизвестных характеристик НДС плоской линейно деформированной стержневой системы связаны между собой девятью уравнениями, образующими следующие три группы.

Уравнения равновесия элемента dx (уравнения статики)

$$\frac{dN}{dx} = -q_x; \quad \frac{dQ}{dx} = q_z; \quad \frac{dM}{dx} = Q; \quad (1.3)$$

Уравнения связи деформаций и перемещений

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}; \quad \gamma = \theta - \frac{dw}{dx}; \quad \kappa = \frac{d\theta}{dx}; \quad (1.4)$$

Уравнения, соответствующие закону Гука

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}; \quad \gamma = \mu \frac{Q}{GA}; \quad \kappa = \frac{M}{EI}; \quad (1.5)$$

Здесь E и $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – соответственно модуль упругости при

растяжении (сжатии) и модуль упругости при сдвиговых деформациях (модуль сдвига). В выражение последнего входит коэффициент Пуассона ν материала.

μ, A, I – соответственно коэффициент формы, площадь и момент инерции поперечного сечения стержня.

Шесть из девяти уравнений являются дифференциальными. Это означает, что для решения системы уравнений для стержня необходимо иметь шесть граничных условий – по три на каждом конце каждого стержня. Этими условиями могут быть перемещения и усилия на концах стержня: u или N ; w или Q ; θ или M .

При решении системы уравнений (1.3) – (1.5) для некоторых стержневых систем неизвестные внутренние усилия N, Q, M в сечениях любых стержней, в том числе и опорных, могут быть определены только из уравнений равновесия (1.3). Такие стержневые системы называются **статически определенными**.

Затем из уравнений, соответствующих закону Гука (1.5), определяются деформации и затем из уравнений (1.4) – перемещения.

Для многих стержневых систем определить усилия из решения только уравнений статики (1.3) без привлечения других уравнений системы (1.3) – (1.5) не удастся. Такие стержневые системы называются **статически неопределимыми**.

Пример. Рассмотрим два стержня (две балки), отличающиеся закреплением концов (рис. 1.6). Здесь по сравнению с рис. 1.5 принято $q_x = q_1$ и $q_z = -q_2$.

Интегрируя уравнения равновесия (1.3), получим выражения для усилий в обеих балках:

$$N = -q_1x + C_1; \quad Q = -q_2x + C_2; \quad M = \int Q dx + C_3. \quad (1.6)$$

Покажем, что балка, изображенная на рис. 1.6, а статически определима. Для доказательства запишем три граничных условия для усилий на левом конце балки: $N = 0_1; \quad Q = 0; \quad M = 0$. Подставив в (1.6) эти нулевые значения и $x = 0$, найдем постоянные величины: $C_1 = 0_1; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = 0$. Затем из (1.6) определятся и усилия:

$$N = -q_1x; \quad Q = -q_2x; \quad M = \int Q dx = -\int q_2x dx = -0.5q_2x^2 \quad (1.7)$$

Усилия M, Q, N определились только из уравнений статики (1.3). Эти выражения справедливы для любых сечений, в том числе и опорного сечения при $x = l$. Следовательно, балка статически определима.

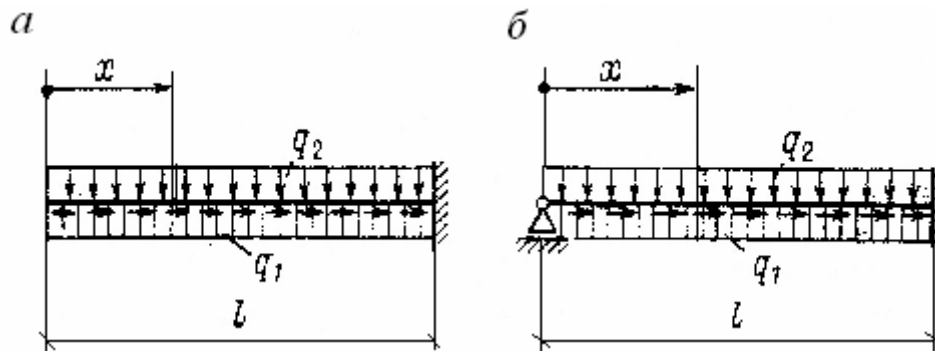


Рис. 1.6

Для второй балки (рис. 1.6, б) эти усилия не удастся найти только из уравнений равновесия, так как неизвестны (и не могут быть найдены из уравнений равновесия) вертикальные усилия по концам балки. Балка статически неопределима. Для решения задачи необходимо рассмотреть и другие уравнения системы уравнений (1.3) – (1.5). Решение подобных задач в строительной механике стержневых систем будет рассмотрено в главе 6.

Два важных практических вывода можно сделать из рассмотренного примера по определению усилий в статически определимой системе:

1. **При определении усилий в статически определимой системе из уравнений равновесия жесткость ее стержней никак не используется.**

2. **Вместо процедуры интегрирования дифференциальных уравнений равновесия (1.3), записанных для бесконечно малого элемента dx с использованием граничных условий для стержней, искомые усилия M, Q, N в любом сечении стержней статически определимой системы можно определить из уравнений равновесия для части конструкции, расположенной слева или справа от рассматриваемого сечения.**

Первый вывод очевиден, потому что в уравнения равновесия не входят

величины A, I, μ, E, G , входящие в физические уравнения закона Гука (1.5) и (через деформации) в геометрические уравнения (1.4).

Это означает, что *при определении усилий в статически определимых системах можно принимать любые численные значения этих параметров, в том числе и считать стержни абсолютно жесткими.*

Для пояснения второго вывода вернемся к рассмотрению статически определимой балки, изображенной на рис. 1.6, а. Рассечем балку в сечении с координатой x и используем очевидный факт, который был использован и при составлении уравнений равновесия для бесконечно малого элемента dx : *если находится в равновесии вся балка, то находится в равновесии и любая выделенная из нее часть.* Тогда, например, для части балки, расположенной левее сечения (рис. 1.7), уравнения равновесия запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\sum X^{\text{слева}} &= (q_1 x) + N = 0; \\ \sum Z^{\text{слева}} &= -Q - (q_2 x) = 0; \\ \sum M_c^{\text{слева}} &= M + (q_2 x) \cdot (0.5x) = 0.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Отсюда найдем те же усилия (1.7), которые в примере были найдены интегрированием уравнений (1.3):

$$N = -q_1 x; \quad Q = -q_2 x; \quad M = -0.5q_2 x^2\tag{1.9}$$

Полученные отрицательные знаки усилий показывают, что действительные усилия в сечении имеют противоположные направления, по сравнению с положительными, принятыми на рис. 1.7.

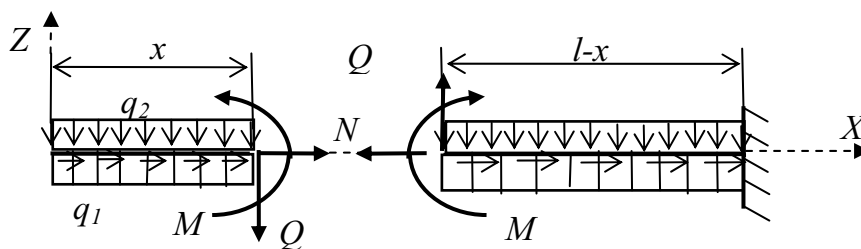


Рис. 1.7

Искомые усилия можно определить и из уравнений равновесия для правой части балки. Но в этом случае необходимо вначале найти опорные реакции в заделке, применив уравнения равновесия для всей балки.

Использование уравнений равновесия, как ко всей стержневой системе, так и к любой ее выделенной части, является одним из важнейших способов контроля усилий, полученных расчетом стержневых систем на ПК.

1.8. Методы расчета стержневых систем по определению их НДС

Решение задачи по расчету стержневой системы с целью определения ее

НДС начинается с выполнения следующих двух пунктов.

1. Прежде всего, выясняется принадлежность стержневой системы к статически определимым или к статически неопределимым системам. Для этого выполняются две процедуры:

1.1. Подсчитывается так называемая **«степень статической неопределимости»** стержневой системы.

1.2. Проводится исследование **геометрической неизменяемости** стержневой конструкции.

Решению этих вопросов в учебном пособии посвящен следующий раздел. В нем сначала рассматривается структурное образование геометрически неизменяемых статически определимых и статически неопределимых стержневых систем, а затем приводятся примеры выполнения указанной выше проверки.

2. Выбирается метод решения задачи по определению НДС стержневой системы.

Основными методами расчета НДС стержневых систем являются:

2.1. **Метод сил.**

2.2. **Метод перемещений.**

Предварительные сведения о методе сил

В методе сил (МС) сначала определяются усилия в опорных связях и внутренние усилия в любых сечениях стержней. Затем определяются деформации стержней и перемещения их сечений, интересующие расчетчика.

Если стержневая система статически определима, то любые опорные реакции и внутренние усилия могут быть определены только из уравнений равновесия, применяемых как для всей стержневой системы, так и для любой выделенной из нее части. При этом, как видно из системы уравнений (1.3) – (1.5), такие характеристики стержней как их жесткости при продольных EA , сдвиговых GA и изгибных EI деформациях при определении усилий не используются.

Методика рационального использования уравнений равновесия для определения усилий в статически определимых стержневых системах в зависимости их конструктивных особенностей рассмотрена в разделе 4.

Примечание. Следует отметить, что методику определения усилий в статически определимых стержневых системах с помощью уравнений равновесия обычно не называют «методом сил». Понятие «метод сил» относят только к статически неопределимым системам.

После определения усилий в статически определимой системе могут быть определены деформации сечений стержневой системы и их перемещения.

Деформации определяются из уравнений закона Гука (1.5). Вопрос определения перемещений в статически определимых стержневых системах рассмотрен в разделе 5. *Решение этой части задачи определения НДС стержневой системы возможно только при назначении указанных выше жесткостей продольных EA , сдвиговых GA и изгибных EI деформаций.*

Если стержневая система статически неопределима, то уравнений равновесия для определения опорных реакций и внутренних усилий в ней недостаточно. Для определения «лишних» неизвестных составляются дополнительные уравнения, связанные с рассмотрением деформаций и перемещений стержневой системы как линейно деформируемой системы.

Идея метода сил расчета статически неопределимых систем и его алгоритм рассмотрены во второй части учебного пособия [1], а также в пособиях [8, 11].

После определения «лишних» неизвестных с помощью уравнений равновесия можно найти любые опорные реакции и усилия стержневой системы. Затем можно определить интересующие расчетчика деформации и перемещения.

Предварительные сведения о методе перемещений

При расчете стержневой системы этим методом сначала определяются некоторые перемещения (о них будет сказано ниже).

В строительной механике стержневых систем метод перемещений (МП) встречается в двух методических разработках.

Первая методическая разработка метода перемещений появилась в период развития строительной механики, когда все расчеты, выполнялись, условно говоря, вручную (без использования электронных вычислительных машин (ЭВМ)).

Такой метод перемещений обычно называют «классическим». Он очень прост и нагляден, особенно для понимания алгоритма этого метода. С ним можно ознакомиться в учебниках по строительной механике, выпущенных до 2005 г. (см., например, [7]).

Но классический МП имеет тот недостаток, что автоматизировать его с целью универсального применения для расчетов любых сложных стержневых систем на современных ПК оказалось невозможным.

Вторая, «современная», разработка метода перемещений для стержневых систем появилась в связи с развитием ЭВМ и развитием численного метода решения различных физико-математических задач, в том

числе задач механики твердого деформируемого тела, который был назван методом конечных элементов (МКЭ).

Применительно к рассматриваемой задаче расчета плоских стержневых систем *стержневая система рассматривается как совокупность стержневых элементов конечной длины, соединенных между собою и с основанием в узлах.*

При этом *МКЭ является численным методом решения системы уравнений (1.3) – (1.5) с заданными граничными условиями.*

Поскольку решение указанной системы уравнений можно представить в форме метода сил, в форме метода перемещений и в форме смешанного метода, когда за неизвестные принимаются и усилия и перемещения, то и численный метод решения этой системы уравнений МКЭ может быть представлен в этих же формах решения.

Во всех имеющихся в настоящее время программах автоматизированного расчета сооружений на ПК методом конечных элементов используется форма метода перемещений. При этом полученный «современный» метод расчета стержневой системы может быть представлен как *«Метод конечных элементов в форме метода перемещений»* или как *«Метод перемещений в форме метода конечных элементов»*.

Идея этого метода и его алгоритм на примере плоских стержневых систем демонстрируются в разделе 8 данного УМК. а также, например, в учебном пособии авторов [4] и в учебных пособиях, написанных на кафедре [10 – 13] другими авторами.

В МКЭ в форме МП за первоначальные неизвестные принимают перемещения узлов совокупности КЭ, на которые разбита стержневая система. Число неизвестных перемещений каждого узла равно числу его степеней свободы.

Неизвестные перемещения узлов в расчетной схеме стержневой системы для МКЭ определяются решением основной разрешающей системы алгебраических уравнений метода перемещений.

Затем по найденным перемещениям узлов определяются связанные с перемещениями усилия в сечениях по концам стержневых элементов и в других сечениях стержней.

Как указывалось в начале предыдущего подраздела, прежде чем приступить к выбору метода расчета стержневой системы необходимо выяснить ее принадлежность к статически определимым или статически неопределимым системам. При этом исследуется и геометрическая неизменяемость системы. Этому вопросу и посвящен следующий раздел.

2. УСЛОВИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕИЗМЕНЯЕМОСТИ И СТАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

2.1. Понятие о жестких дисках. Способы их образования

Жестким диском (далее просто **диском**) в строительной механике называется плоская стержневая система, в которой предположение о недеформируемости материала приводит к полному отсутствию *относительных перемещений* всех точек принадлежащих системе.

Будем рассматривать диски, находящиеся в плоскости XOZ (см. рис. 1.2, ж). Диск, не закрепленный на плоскости, называется **свободным**. Он не имеет *относительных степеней свободы* элементов его составляющих, но имеет *три степени свободы*, связанных с его перемещением на плоскости как **жесткого тела**. Такими степенями свободы являются линейные перемещения u и w диска в направлении осей X и Z и угол поворота θ относительно оси Y (см. рис. 1.2, ж).

Закрепленный диск не имеет степеней свободы. Такой диск можно считать **неподвижным основанием** (далее просто **основанием**) для частичного или полного закрепления на нем с помощью опорных связей (см. рис. 1.6) любого свободного диска. Рассмотрим способы образования дисков (рис. 2.1).

Пример 1. Один и соединение любого числа стержней жесткими узлами создает **новый диск**.

Один стержень (схема 1 на рис. 2.1, а) является диском. Два или более стержней, соединенных жесткими узлами (схемы 2 – 5 на рис. 2.1, а), также образуют диск.

Замкнутая стержневая система, полученная последовательным соединением стержней (дисков) называется **замкнутым контуром**. Если в замкнутом контуре стержни (диски) соединены жесткими узлами (схемы 4 и 5 на рис. 2.1, а), то замкнутый контур будет диском.

Пример 2. Замкнутый контур с одним, двумя и тремя шарнирами является **диском**.

Если два стержня (диска) соединить не жестким, а шарнирным узлом (схема 1 на рис. 2.1, б), то получится изменяемая система. Такая система представляет собой **механизмом с одной относительной степенью свободы** (взаимный угол поворота дисков θ_1 вокруг оси Y).

Соединение концов стержней этого механизма еще с одним стержнем с жесткими узлами (схема 2 на рис. 2.1, б); одним жестким, другим шарнирным узлами (схема 3 на рис. 2.1, б); *или только шарнирными узлами*, (схема 4 на рис. 2.1, б) исключает

возможность относительного угла поворота θ_1 и делает систему жестким диском.

Диск из трех стержней, соединенных шарнирами (схема 4 на рис. 2.1, б), является основой образования решетки простейших геометрически неизменяемых ферм (см., например, схемы 1 и 2 на рис. 1.2.).

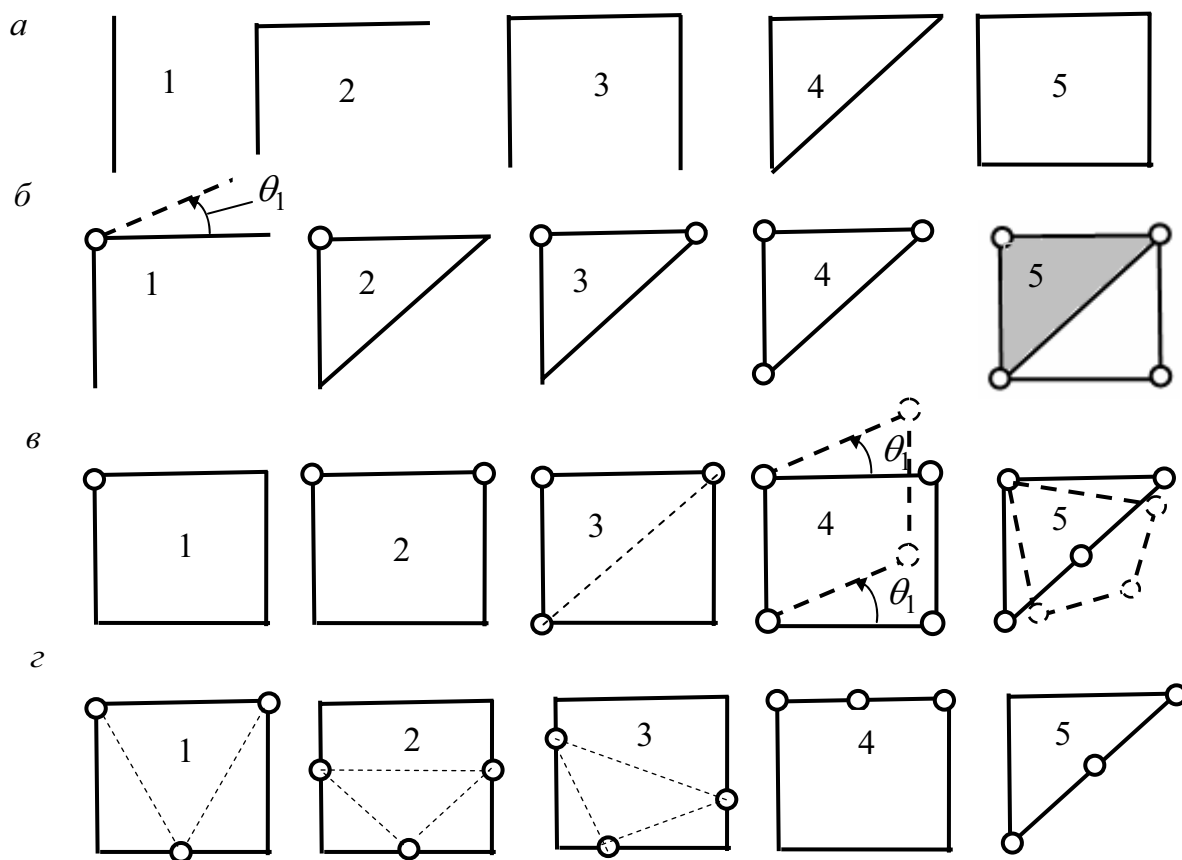


Рис. 2.1

Начальная стадия образования решетки фермы как диска продемонстрирована на схеме 5 рис. 2.1, б, где жесткий диск в виде треугольника (он затенен) является стороной нового треугольника. Стержневая система в виде двух треугольников представляет собой новый диск. Его «наращивание» подобным образом может быть продолжено.

Обратим внимание на стержневую систему, изображенную на схеме 3 рис. 2.1, в. По своему образованию она аналогична треугольнику на схеме 4 рис. 2.1, б и также представляет собой «треугольник», так как состоит из трех дисков, соединенных между собой шарнирными узлами: два диска представляют собой прямые стержни, а один – диск в виде двух стержней, соединенных жестким узлом. Штриховая прямая на этой схеме показывает, что условно можно представить угловой диск как прямой стержень, соединяющий те же два шарнира. Никаких относительных перемещений трех дисков, образующих эту систему, нет.

Прямоугольные диски с одним и двумя шарнирами (схемы 1 и 2 на рис. 2.1, в) соответственно аналогичны дискам треугольной формы (см. схемы 2 и 3 на рис. 2.1, б).

Приведем примеры образования стержневой системы в виде замкнутого контура не представляющего собой диск, а являющейся механизмом.

Пример 3. Замкнутый контур в виде шарнирного соединения из четырех стержней (дисков) не является диском.

На схеме 4 рис. 2.1, *в* показана стержневая система из четырех стержней, соединенных шарнирными узлами. Видно, что попарно четыре стержня (диска) системы имеют возможность совершать относительное перемещение в виде взаимного угла поворота по отношению друг к другу. Поэтому такая система диском не является.

Обратим внимание еще на одну систему, также не являющуюся диском (схема 5 на рис. 2.1, *в*). Внешне она имеет вид треугольника. Но с точки зрения образования дисков она таковым не является, так как состоит из четырех дисков, соединенных шарнирными узлами. Она представляет собой механизм. На схеме 5 рис. 2.1, *в* штриховой линией показано возможное относительное перемещение ее стержней (дисков).

Пример 4. Три шарнира в замкнутом контуре не должны располагаться на одной прямой (схемы 4 и 5 на рис. 2.1, *з*), так как в таком случае образуется мгновенно изменяемая система.

Как уже было показано в предыдущем примере, стержневая система в виде замкнутого контура из трех дисков, соединенных тремя шарнирами, является диском. При этом шарниры могут устанавливаться в контуре как угодно (см.: схему 4 на рис. 2.1, *б*; схему 3 на рис. 2.1, *в*; схемы 1, 2, 3 на рис. 2.1, *з*), лишь бы они не располагались на одной прямой (см. схемы 4 и 5 на рис. 2.1, *з*).

Для пояснения этого рассмотрим стержневую систему в виде диска – «треугольника», состоящего из трех дисков, соединенных шарнирами (см., например диск на схеме 4 рис. 2.1, *б*). Предположим, что один из дисков представляет собой неподвижное жесткое основание с закрепленными на нем шарнирами A и B (рис. 2.2, *а*). Третий шарнирный узел C также неподвижен и к нему приложена сосредоточенная сила P .

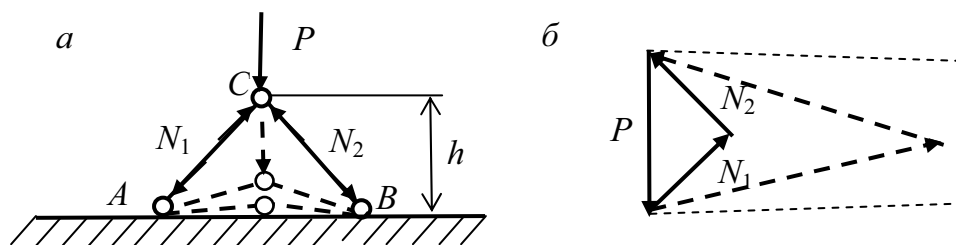


Рис. 2.2

Система в целом геометрически неизменяема (отсутствуют как относительные перемещения точек диска, так и перемещения его как жесткого целого). По сути узел C можно рассматривать как шарнирно-неподвижную опору, рассмотренную на рис. 1.3, *б* в первом разделе.

Система является статически определимой, так как продольные усилия N_1, N_2 в стержнях при заданной нагрузке определяются из уравнений равновесия. На рис. 2.2, *б* равновесие узла C системы отражено графически (равнодействующая всех сил, действующих на узел равна нулю, поэтому треугольник сил должен быть замкнут).

Если параметр h уменьшать, то узел C будет приближаться к прямой AB . Тогда стороны треугольника сил, отражающего равновесие узла, представляющие значения

продольных сил N_1, N_2 будут увеличиваться и в пределе (при попадании узла на прямую AB) станут бесконечно большими. Такая система называется **мгновенно изменяемой**. При отклонении узла C на малую величину h система снова становится неизменяемой, но значения усилий N_1, N_2 будут хотя и не бесконечными, но очень большими.

Мгновенно изменяемые и близкие к ним стержневые системы в строительных конструкциях применять не следует.

2.2. Условия закрепления диска на основании и условия статической определимости опорных реакций

Свободный диск обладает на плоскости тремя степенями свободы.

Прикрепление диска к основанию одной опорной связью (см. рис.1.3, *a*) уменьшает число степеней свободы на одну (лишает диск возможности перемещаться в направлении поставленной связи). Поэтому вариант

$$n_{\text{оп}} < 3, \quad (2.1)$$

где $n_{\text{оп}}$ – число опорных связей, показывает, что опорных связей не достаточно для прикрепления диска к неподвижному основанию. Вариант

$$n_{\text{оп}} > 3 \quad (2.2)$$

показывает, что опорных связей больше требуемых трех. С точки зрения минимально необходимого числа опорных связей при условии (2.2) имеются «лишние» связи.

Обратим внимание на опорные связи, прикрепляющие диск, с точки зрения статической определимости усилий в них (опорных реакций).

Усилия в опорных связях, прикрепляющих диск к основанию, будут статически определимыми, если их не более трех, т.е. не более числа уравнений равновесия, которые отражают равновесие диска.

Хотя условие (2.1) удовлетворяет этому требованию, рассматривать такую систему не будем, так как она имеет недостаточное число связей для ее закрепления на основании, т.е. является геометрически изменяемой системой.

Условие (2.2) показывает, что число опорных реакций больше имеющихся трех уравнений равновесия. Усилия в условно «лишних» связях также условно называют «лишними» неизвестными. Такая система является ***внешне статически неопределимой***. Методика расчета статически неопределимых систем будет рассмотрена после ознакомления учащихся с расчетом статически определимых систем.

Таким образом, ***необходимым условием*** геометрической неизменяемости системы из одного диска и его статической определимости относительно опорных реакций и является условие

$$n_{\text{оп}} = 3 \quad (2.3)$$

Однако это условие **необходимо, но недостаточно** как для закрепления диска, так и для определения опорных реакций из трех уравнений равновесия.

И в том и в другом варианте трактовки условия (2.3) необходимо выполнение еще следующего дополнительного требования.

Оси опорных связей и, следовательно, линии действия усилий в них не должны пересекаться в одной точке и не должны быть параллельными. (2.3)*

Это дополнительное требование к условию (2.3) отмечено тем же номером (2.3) со звездочкой сверху.

Три связи, которые закрепляют диск на основании и имеют статически определимые усилия (реакции), могут быть реализованы в виде одной заземляющей опоры (см. схему 1 на рис. 1.2, а) или в виде шарнирно неподвижной и шарнирно подвижной опор, поставленных так, как показано на схемах 2 и 3 на рис. 1.2, а).

Рассмотрим варианты неправильной расстановки необходимых для закрепления диска трех опорных связей, когда дополнительное условие (2.3)* не выполнено. Тогда, несмотря на выполнение необходимого условия (2.3), диск не будет неподвижно закреплен на основании, а получится мгновенно изменяемая система. При этом три опорные реакции не могут быть определены из трех уравнений равновесия.

Пример 1. Рассмотрим раму, изображенную на рис. 2.3, а.

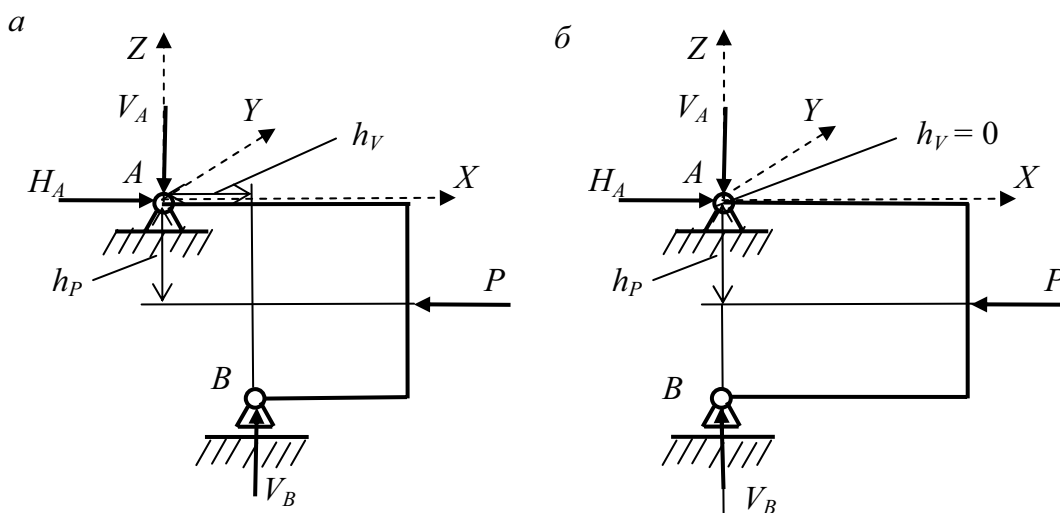


Рис. 2.3

Она представляет собой единый диск, неподвижно прикрепленный к основанию тремя опорными связями. Действительно, две опорные связи пересекаются в опорном шарнире A и лишают диск двух степеней свободы (перемещений диска по направлению координатных осей X и Z). Третья (вертикальная) связь в шарнире B лишает диск и третьей

степени свободы в виде поворота диска вокруг оси Y , проходящей через шарнир A . Полученная конструкция не имеет ни относительных перемещений точек диска, ни перемещений диска как жесткого целого.

Система является статически определимой, так как любые усилия в ней могут быть определены только с помощью уравнений равновесия.

Для пояснения важности правильной постановки опорных связей рассмотрим уравнение равновесия для определения вертикальной опорной реакции V_B и его решение:

$$\sum M_A = -P \cdot h_P + V_B \cdot h_V = 0. \quad (2.8)$$

$$V_B = P \frac{h_P}{h_V}. \quad (2.9)$$

Если плечо h_V опорной реакции V_B относительно опоры A будет уменьшаться (опора B будет приближаться к оси Z), то реакция V_B будет увеличиваться. В пределе, когда плечо h_V будет равно нулю, искомая опорная реакция станет бесконечно большой (см. (2.9)).

Такой вариант изображен на рис. 2.3, б. Он соответствует случаю, когда все три опорные связи пересекаются в одной точке (в данном примере – в опоре A). Эта точка, как известно из курса теоретической механики, называется **мгновенным центром вращения** рассматриваемой системы. Сама система является мгновенно изменяемой системой.

Как и в предыдущем примере, в строительных конструкциях не допускается применение не только таких систем, но и близких к ним.

Не следует допускать и варианта, когда точка пересечения связей находится в бесконечности, т.е. когда опорные связи параллельны. Такой вариант прикрепления диска показан на рис. 2.4, а, б (на рис. 2.4, б вертикальные связи представлены шарнирно подвижными (катковыми) опорами)).

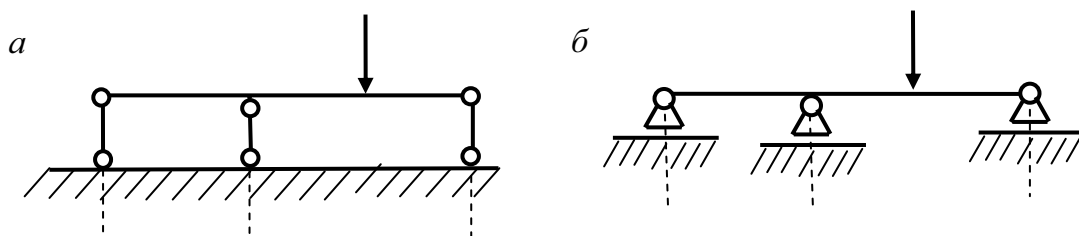


Рис. 2.4

Хотя опорных реакций в опорных связях и уравнений равновесия по-прежнему по три, найти опорные реакции из уравнений равновесия не удастся. Такая система мгновенно изменяема до того момента, пока какая-либо связь не будет отклонена от вертикали. Если такое отклонение будет малым, система хотя и не будет изменяемой, но будет иметь большие реакции даже при сравнительно малом значении нагрузки.

2.3. Условия геометрической неизменяемости и статической определимости диска в виде одного замкнутого контура

Рассмотрим диск в виде замкнутого контура без шарниров (см. схему 5 на рис. 2.1, а). Будем считать, что условия его закрепления на основании и условия **внешней статической определимости** такого диска выполнены (рис. 2.5, а) и три опорные реакции (H_A, V_B, V_A) определены соответственно из трех

уравнений равновесия $\sum X = 0$; $\sum M_A = 0$; $\sum Z = 0$.

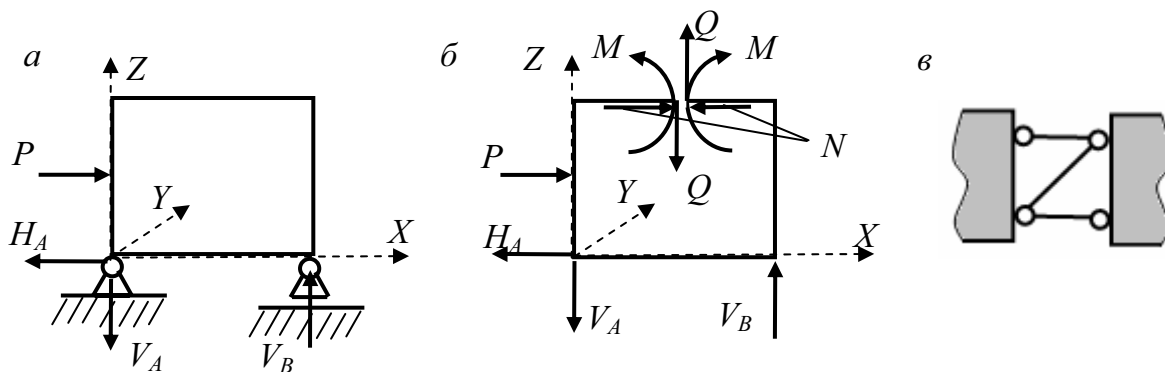


Рис. 2.5

Однако определить усилия M, Q, N в любом сечении такого замкнутого контура с помощью уравнений равновесия невозможно. Действительно (см. рис. 1.7), для определения усилий M, Q, N в сечении, разрезающем систему на две части (слева и справа от сечения), используются уравнения равновесия вида (1.8). В любом сечении замкнутого контура понятие «слева» (или «справа») от сечения стержня не имеют смысла, так как равные неизвестные усилия войдут в каждое такое уравнение дважды: со знаком «плюс» и со знаком «минус» (рис. 2.5, б). Иными словами, уравнения равновесия тождественно удовлетворяются при любых значениях усилий в рассматриваемом сечении.

Таким образом, **замкнутый контур без разрезающих его шарниров трижды статически неопределим.**

Можно рассматривать внутренние усилия M, Q, N как усилия в трех внутренних связях, лишаящие левую и правую стороны сечения взаимных перемещений по направлению осей X и Z и взаимного угла поворота относительно оси Y . Один из вариантов схематичного изображения этих связей приведен на рис. 2.5, в. При таком представлении усилий статическую неопределимость замкнутого контура называют **внутренней статической неопределимостью**.

Обратим внимание на то, что разрез стержня контура сечением удаляет эти три связи и делает контур незамкнутым. Однако он по-прежнему остается диском (см. рис. 2.9, б). С точки зрения образования диска удаленные связи являются «лишними». «Лишними» с точки зрения их статической определимости оказываются и усилия в этих трех связях.

При постановке в каком-либо сечении стержневого диска в виде замкнутого контура **одного** шарнира (см. схему 1 на рис. 2.1, в) происходит

удаление *одной* внутренней связи, мешающей двум сторонам сечения взаимно поворачиваться вокруг оси Y, контур при этом остается диском. При этом статическая неопределимость контура уменьшится *на одну* единицу, поскольку появляется *одно дополнительное уравнение равновесия* вида

$$M_C = \sum M_C^{\text{справа}} = 0 \text{ (или } \sum M_C^{\text{слева}} = 0 \text{)}, \quad (2.10)$$

записываемого относительно поставленного шарнира C. Такой шарнир в дальнейшем будем называть *одиночным шарниром*.

Таким образом, при установке в стержневом замкнутом контуре одиночного шарнира контур останется диском, но уже только с двумя «лишними» связями и двумя внутренне статически неопределимыми усилиями в них.

Аналогично, при введении в контур второго и третьего шарниров, система по-прежнему останется диском (для трех шарниров должно выполняться условие о нерасположении их на одной прямой). Диск соответственно становится один раз внутренне статически неопределимым при двух шарнирах и статически определимым – при трех.

Если в замкнутом контуре поставлено больше трех шарниров, система становится геометрически изменяемой (см., например, схемы 4 и 5 на рис. 2.1, в).

Число «лишних» связей в диске – контуре, равное числу «лишних» (статически неопределимых) неизвестных можно подсчитать по формуле

$$n_{\text{л}}^{\text{к}} = 3 - n_{\text{ш}}^{\text{к}}. \quad (2.11)$$

При использовании этой формулы для подсчета числа лишних связей и лишних усилий, входящие в нее величины имеют следующий смысл: 3 – три лишних связи (три лишних усилия) в замкнутом диске без шарниров; $n_{\text{ш}}^{\text{к}}$ – число одиночных шарниров в замкнутом диске, каждый из которых уменьшает число «лишних» связей (усилий) на единицу.

При вычислении по формуле (2.11) могут получиться три варианта: 1) $n_{\text{л}}^{\text{к}} < 0$; 2) $n_{\text{л}}^{\text{к}} = 0$; 3) $3 > n_{\text{л}}^{\text{к}} > 0$.

Первый вариант показывает, что число шарниров в контуре больше трех ($n_{\text{ш}}^{\text{к}} > 3$), т.е. *удалены не только три «лишних» связи, но и необходимые связи*, удаление которых приводит к геометрической изменяемости диска в виде замкнутого контура. *Система в виде замкнутого контура при наличии более трех шарниров явно геометрически изменяема.*

Третий вариант показывает, что *система в виде замкнутого контура*

при наличии одного или двух шарниров ($n_{1ш} < 3$) явно статически неопределима.

Второй вариант показывает, что число шарниров в диске в виде замкнутого контура равно трем ($n_{1ш} = 3$). «Лишних» связей и, следовательно, «лишних» усилий в диске нет.

Таким образом, вариант расчета 2 является *необходимым условием геометрической неизменяемости и статической определимости диска в виде свободного замкнутого контура.*

Для диска в виде одного прикрепленного к основанию замкнутого контура *необходимым условием геометрической неизменяемости и статической определимости, кроме соблюдения условия (2.3) и дополнительного требования (2.3)* правильной установки опорных связей, является также соблюдение условия*

$$n_{л}^к = 0 \text{ или } n_{1ш}^к = 3 \quad (2.12)$$

и дополнительного требования:

три шарнира в замкнутом контуре не должны располагаться на одной прямой. (2.12)*

2.4. Условия геометрической неизменяемости и статической определимости стержневой системы как системы дисков, соединенных шарнирами

Условия геометрической неизменяемости

Будем рассматривать стержневые системы (см., например рис. 1.2), как системы дисков, соединенных между собой *одиночными шарнирами* (каждый из них эквивалентен двум связям), а с основанием – опорными связями.

Число дисков, одиночных шарниров, соединяющих диски между собой и опорных связей составляет соответственно n_d , $n_{1ш}^д$, $n_{оп}$.

Сопоставление суммарного числа $(n_{оп} + 2n_{1ш}^д)$ опорных связей и связей, соединяющих диски между собой, с числом $3n_d$ степеней свободы всех дисков, когда они являются свободными, т.е. отделенными друг от друга и от основания, приведет к трем вариантам оценки геометрической неизменяемости системы. Первый вариант в виде

$$(n_{оп} + 2n_{1ш}^д) < 3n_d \quad (2.13)$$

показывает, что связей в системе недостаточно для уничтожения всех степеней свободы свободных дисков и *система явно геометрически изменяема.*

Необходимому условию геометрической неизменяемости системы отвечает условие

$$(n_{\text{оп}} + 2n_{\text{лш}}^{\text{д}}) \geq 3n_{\text{д}}. \quad (2.14)$$

Однако **это условие необходимо, но недостаточно для окончательного суждения о геометрической неизменяемости системы.** Должно также соблюдаться требование о правильной постановке шарниров и опорных связей, в том числе и выполнение условий (2.3) и (2.3)*.

Условия статической определимости при нахождении усилий в опорных связях и в связях, соединяющих диски между собой

Рассмотрим два варианта постановки задачи по определению усилий в стержневых системах.

Задача 1. Ставится задача определения усилий **во всех** $(n_{\text{оп}} + 2n_{\text{лш}}^{\text{д}})$ связях. Это означает, что диски отрезаны от основания и друг от друга (связи удалены) и действие связей на основание и на диски заменено действием пока неизвестных усилий в связях общим числом $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 2n_{\text{лш}}^{\text{д}})$.

Эти усилия и требуется определить для дальнейшего расчета от их действия каждого свободного диска отдельно и фундаментов опор.

Так как диски отделены друг от друга, то равновесие каждого диска под действием приложенных к нему нагрузок и усилий в удаленных связях описывается тремя уравнениями равновесия. Для всех дисков числом $n_{\text{д}}$ получится система $n_{\text{ур}} = 3n_{\text{д}}$ уравнений равновесия.

Сопоставление суммарного числа $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 2n_{\text{лш}}^{\text{д}})$ неизвестных усилий в опорных связях и в связях, соединяющих диски между собой, с числом $n_{\text{ур}} = 3n_{\text{д}}$ уравнений равновесия всех дисков, когда они являются свободными, т.е. отделенными друг от друга и от основания, приведет к трем вариантам оценки статической определимости системы. Первый вариант в виде

$$(n_{\text{оп}} + 2n_{\text{лш}}^{\text{д}}) > 3n_{\text{д}} \quad (2.15)$$

показывает, что число неизвестных усилий в связях больше числа уравнений равновесия для системы свободных от связей дисков и **система явно статически неопределима.**

Необходимому условию статической определимости системы отвечает условие

$$(n_{\text{оп}} + 2n_{\text{лш}}^{\text{д}}) \leq 3n_{\text{д}}. \quad (2.16)$$

Сопоставляя выражения (2.13) – (2.16), видим, что **необходимым условием и геометрической неизменяемости и статической определимости системы будет равенство**

$$(n_{\text{оп}} + 2n_{1\text{ш}}^{\text{д}}) = 3n_{\text{д}}. \quad (2.17)$$

Однако **это условие необходимо, но недостаточно для окончательного суждения о геометрической неизменяемости и статической определимости системы.** Должно также соблюдаться требование о правильной постановке шарниров и опорных связей, в том числе и выполнение условий (2.3) и (2.3)*.

Задача 2. Иногда при решении задачи определения усилий в стержневых системах ставится цель определения усилий не сразу во всех связях, соединяющих диски между собой и с основанием, а **только в опорных связях.** Это означает, что в отличие от задачи 1 определения усилий система дисков не разделяется по шарнирам на отдельные диски.

Система дисков в задаче 2 отделяется только от основания: опорные стержни числом $n_{\text{оп}}$ удаляются и заменяются усилиями в них, т.е. опорными реакциями. Число неизвестных усилий при расчете приравнивается числу опорных реакций: $n_{\text{н}} = n_{\text{оп}}$.

Число уравнений равновесия $n_{\text{ур}}$, которые можно записать для описания равновесия системы дисков, соединенных шарнирами и отделенных от основания, определится из выражения в виде:

$$n_{\text{ур}} = (3 + n_{1\text{ш}}^{\text{д}}), \quad (2.18)$$

где 3 – три уравнения равновесия, которые можно записать для всей системы дисков, отделенной от основания, если бы она была единым диском (диски были бы соединены между собой жесткими узлами); $n_{1\text{ш}}^{\text{д}}$ – число дополнительных уравнений равновесия вида (2.10), равное числу **одиночных шарниров, поставленных в узлах соединения дисков между собой.**

Необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости в задаче 2 вместо условия (2.17) выразится уравнением

$$n_{\text{оп}} = (3 + n_{1\text{ш}}^{\text{д}}). \quad (2.19)$$

Также как и в задаче 1 **это условие необходимо, но недостаточно для окончательного суждения о геометрической неизменяемости и статической определимости системы.** Должно также соблюдаться требование о правильной постановке шарниров и опорных связей, в том числе и

выполнение условий (2.3) и (2.3)*.

Примечание. Число уравнений равновесия в задаче 2, представленное формулой (2.18), и условие (2.19) можно получить и непосредственно из уравнения (2.17), если перенести величину $2n_{1ш}^д$ из левой части уравнения в правую и учесть, что число дисков в системе больше числа соединяющих их шарниров на одну единицу: $n_д = n_{1ш}^д + 1$.

Условия геометрической неизменяемости и статической определимости при учете в системе замкнутых контуров

Предположим, что в системе соединенных друг с другом дисков имеются замкнутые контуры числом $n_к$. Тогда они должны быть учтены при оценке геометрической неизменяемости и статической определимости (или неопределимости) системы.

Этот учет производится в соответствии с выражением (2.11) добавлением соответственно в левую и правую часть равенства (2.19) числа $3n_к$ «лишних» неизвестных в $n_к$ замкнутых контурах и числа $n_{1ш}^к$ дополнительных уравнений равновесия вида (2.10) относительно одиночных шарниров **во всех $n_к$ замкнутых контурах**.

В результате получим **необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости системы** в виде

$$(n_{оп} + 3n_к) = (3 + n_{1ш}^д + n_{1ш}^к).$$

Выполним преобразование этой формулы с учетом следующих двух замечаний.

1. В расчетных схемах стержневых систем (см., например, рис. 1.2 и рис. 2.1) изображение одиночных шарниров, относящиеся к замкнутым контурам, ничем не отличаются от одиночных шарниров, соединяющих диски между собой и поэтому трудно разделить их при подсчете на шарниры соединяющие диски и шарниры, поставленные внутри дисков.

2. В расчетных схемах стержневых систем кроме **одиночных шарниров**, соединяющих в узле только два диска (рис. 2.6, а), могут быть шарниры **двойные** (два одиночных), **тройные** (три одиночных) и т.д., соединяющие в узле соответственно три диска (рис. 2.6, б), четыре диска (рис. 2.6, в) и т.д.

Так как подсчитывается число одиночных шарниров, то нужно быть внимательным: двойные, тройные и другие шарниры следует заменять соответствующим числом одиночных шарниров.

В связи с этими замечаниями запишем предыдущее **необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости**

стержневой системы в виде

$$(n_{оп} + 3n_k) = (3 + n_{1ш}), \quad (2.20)$$

где $n_{1ш} = n_{1ш}^д + n_{1ш}^к$ – суммарное число одиночных шарниров, к которым приводятся *все* двойные, тройные и т.д. шарниры стержневой системы.

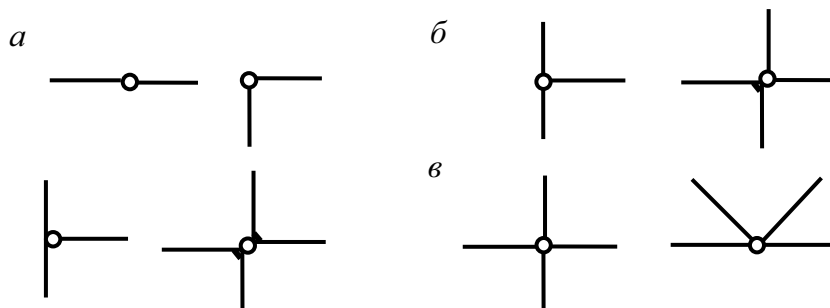


Рис. 2.6

Условие (2.20) необходимо, но недостаточно для окончательного суждения о геометрической неизменяемости и статической определимости системы. Дополнительным условием является требование правильной расстановки шарниров и получения действительно **геометрически неизменяемой системы**. Геометрическая неизменяемость системы, удовлетворяющей условию (2.20), устанавливается **структурным анализом** стержневой системы или специальным исследованием.

Структурный анализ стержневой системы связан с выявлением имеющихся дисков в стержневой системе и проверкой правильности соединения их опорными связями с основанием и шарнирными узлами между собой. При этом учитываются рассмотренные в этом подразделе рекомендации (2.3) и (2.3)*, (2.12) и (2.12)* по установке опорных связей и шарниров, которые не приводят к образованию геометрически неизменяемых частей стержневой системы и всей системы в целом.

Специальные методы исследования ГН будут рассмотрены в дальнейшем.

2.5. Выяснение принадлежности стержневой системы к статически определимым или статически неопределимым системам

Прежде чем приступить к расчету стержневой системы по определению ее НДС выясняют, является она статически определимой или статически неопределимой.

Для этого выполняются следующие два действия (обозначения и смысл действий должен быть понятен из предыдущих объяснений):

- 1. Подсчитывается степень статической неопределимости стержневой системы

$$n = n_{\text{н}} - n_{\text{ур}} = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) - (3 + n_{\text{лш}}) \quad (2.21)$$

и делается вывод, соответствующий полученному результату расчета.

- 2. Выполняется исследование геометрической неизменяемости стержневой системы.

В первом пункте проверки получается один из следующих трех вариантов результатов.

Вариант 1: $n < 0$. Как показано выше, для такой системы выполняется необходимое условие статической определимости т.к. число неизвестных усилий $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}})$ меньше числа $n_{\text{ур}} = (3 + n_{\text{лш}})$ уравнений равновесия, имеющих для определения указанных усилий, **но не выполняется необходимое условие геометрической неизменяемости**, т.к. число связей в системе будет меньше числа степеней свободы ее дисков.

Иными словами, при получении результата расчета по формуле (2.21) в виде варианта $n < 0$ необходимо сделать вывод, что **такая система явно геометрически изменяема**.

Вариант 2: $n = 0$. **Выполняется необходимое условие статической определимости стержневой системы**, т.к. число неизвестных усилий $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}})$ равно числу $n_{\text{ур}} = (3 + n_{\text{лш}})$ уравнений равновесия, имеющих для определения указанных усилий.

Вариант 3: $n > 0$. **Система явно статически неопределима**, т.к. число неизвестных усилий $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}})$ больше числа $n_{\text{ур}} = (3 + n_{\text{лш}})$ уравнений равновесия, имеющих для определения указанных усилий.

Во втором пункте проверки выполняется структурный анализ стержневой системы. Если система имеет достаточное число связей, соединяющих диски между собой и с основанием (второй и третий варианты первого пункта), и связи в ней правильно поставлены (с точки зрения данных выше рекомендаций), то вся конструкция образует единый неподвижный диск и является геометрически неизменяемой системой.

Различие геометрически неизменяемых систем, которым в пункте 1 соответствует второй и третий варианты, состоит в том, что при выполнении условия второго варианта стержневая система будет статически определима, а при выполнении третьего варианта – статически неопределима.

В получении таких выводов и состоит смысл выполняемой проверки стержневой системы перед расчетом ее НДС.

Рассмотрим примеры проверки статической определимости или

неопределимости расчетных схем различных стержневых систем, изображенных на рис. 1.2. Процедуру проверки будем выполнять в виде указанных выше двух пунктов.

Пример 1. Простейшие балки (рис.1.2, а)

1. Для всех изображенных балок при выполнении пункта 1 с использованием формулы (2.21) имеем: $n_{оп} = 3$, $n_k = 0$, $n_n = (n_{оп} + 3n_k) = 3$; $n_{1ш} = 0$, $n_{ур} = (3 + n_{1ш}) = 3$ и $n = n_n - n_{1ш} = 0$. **Выполняется необходимое условие статической определимости этих балок**, записанное в виде $n_{оп} = 3$ (2.3) или в виде $n = 0$.

2. Структурный анализ изображенных расчетных схем показывает, что все приведенные варианты присоединения балки к основанию тремя связями удовлетворяют и требованию (2.3)*: связи не параллельны друг к другу и не пересекаются в одной точке. Поэтому **все простейшие балки, изображенные на рис. 1.2, а, геометрически неизменяемы**.

Общий вывод на основании пунктов 1 и 2: **все простейшие балки, изображенные на рис. 1.2, а, статически определимы**.

Пример 2. Неразрезная балка (рис.1.2, б)

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{оп} = 5$, $n_k = 0$, $n_n = (n_{оп} + 3n_k) = 5$; $n_{1ш} = 0$, $n_{ур} = (3 + n_{1ш}) = 3$ и $n = n_n - n_{1ш} = 2 > 0$. **Трех уравнений равновесия, которые можно записать для балки, недостаточно для определения пяти неизвестных опорных реакций**.

2. Структурный анализ конструкции показывает, что пять связей, прикрепляющие балку к основанию, не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу. **Балка является геометрически неизменяемой системой**.

Общий вывод на основе пунктов 1 и 2: **балка геометрически неизменяема и два раза статически неопределима**.

Пример 3. Шарнирная балка (рис.1.2, в)

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{оп} = 5$, $n_k = 0$, $n_n = (n_{оп} + 3n_k) = 5$; $n_{1ш} = 2$, $n_{ур} = (3 + n_{1ш}) = 5$ и $n = n_n - n_{1ш} = 0$. **Выполняется необходимое условие статической определимости балки**.



Рис. 2.7

2. Структурный анализ заданной расчетной схемы балки выполняется в виде построения так называемой **этажной** схемы (рис. 2.7) или **схемы образования геометрически неизменяемой конструкции**.

Построение схемы начинается со звена *AB* балки, которое, как показано в первом

примере, является геометрически неизменяемым и статически определимым и диском, прикрепленным к основанию. Поэтому он может считаться основанием для следующего диска. *ЕС* В связи с этим, шарнир *Е* балки может считаться шарнирно неподвижной опорой *Е* (см. рис. 2.7).

Диск *ЕС*, соединенный двумя связями в шарнире *Е* с неподвижным диском *АВ*, оказывается тоже закрепленным, так как он имеет третью связь в виде опоры балки *С*. Поэтому этот диск может рассматриваться как неподвижное основание для диска *FD*. По отношению к нему проводятся рассуждения аналогичные приведенным выше. И делается вывод, что и этот диск закреплен. **Балка геометрически неизменяема.**

Таким образом, можно сделать общий вывод, что **балка статически определима.**

Пример 4. Рама, изображенная на схеме 1 рис. 1.2, г.

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{\text{оп}} = 3$, $n_{\text{к}} = 0$, $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) = 3$; $n_{\text{1ш}} = 0$, $n_{\text{ур}} = (3 + n_{\text{1ш}}) = 3$ и $n = n_{\text{н}} - n_{\text{1ш}} = 0$. **Выполняется необходимое условие статической определимости рамы.**

2. **Рама является геометрически неизменяемой системой**, так как она представляет собой один диск, присоединенный к основанию тремя связями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными друг другу.

Общий вывод: **рама статически определима.**

Пример 5. Рама, изображенная на схеме 2 рис. 1.2, г.

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{\text{оп}} = 3 + 3 + 1 = 7$, $n_{\text{к}} = 0$, $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) = 7$; $n_{\text{1ш}} = 1 \cdot 4 = 4$, $n_{\text{ур}} = (3 + n_{\text{1ш}}) = 3 + 4 = 7$ и $n = n_{\text{н}} - n_{\text{1ш}} = 0$. **Выполняется необходимое условие статической определимости рамы.**

2. Структурный анализ расчетной схемы рамы позволяет отметить следующее.

В схеме 2 рамы на рис.1.2, в, шарниры *А* и *В* неподвижны, так как они принадлежат неподвижным дискам-стержням, расположенным ниже шарниров и жестко связанным с основанием.

Диски *АС* и *ВС* вместе с неподвижным диском основания образуют неподвижный диск, который условно можно представить как «треугольник» *ABC* (см. схемы 1 – 3 на рис. 2.1, г).

Жесткий диск *DE* присоединен шарниром *D* (две связи) к неподвижной части рамы и имеет третью вертикальную связь в опоре *Е*. Такой диск тоже неподвижен.

Таким образом, **вся рама представляет собой единый неподвижный диск, т.е. является системой геометрически неизменяемой.**

Общий вывод: **рама статически определима.**

Пример 6. Рама, изображенная на схеме 3 рис. 1.2, г.

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{\text{оп}} = 2 + 3 = 5$, $n_{\text{к}} = 1$, $n_{\text{н}} = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) = (5 + 3) = 8$; $n_{\text{1ш}} = 1 + 2 = 3$, $n_{\text{ур}} = (3 + n_{\text{1ш}}) = 3 + 3 = 6$ и $n = n_{\text{н}} - n_{\text{1ш}} = 8 - 6 = 2 > 0$. **Недостает двух уравнений равновесия для определения всех указанных неизвестных усилий. Рама дважды статически неопределима.** Выполнением структурного анализа выясним ее геометрическую неизменяемость.

2. В схеме 3 рамы на рис.1.2, шарнир C относится к неподвижному диску. Диск ADC тоже неподвижен, так как он прикреплен к основанию двумя связями в опоре A и двумя связями в шарнире C . Кроме того, этот диск связан с неподвижным шарниром C диском-стержнем DC . Делаем вывод, что рама геометрически неизменяема.

Общий вывод: **рама геометрически неизменяема и дважды статически неопределима.**

Пример 7. Рама, изображенная на рис. 2.8, а

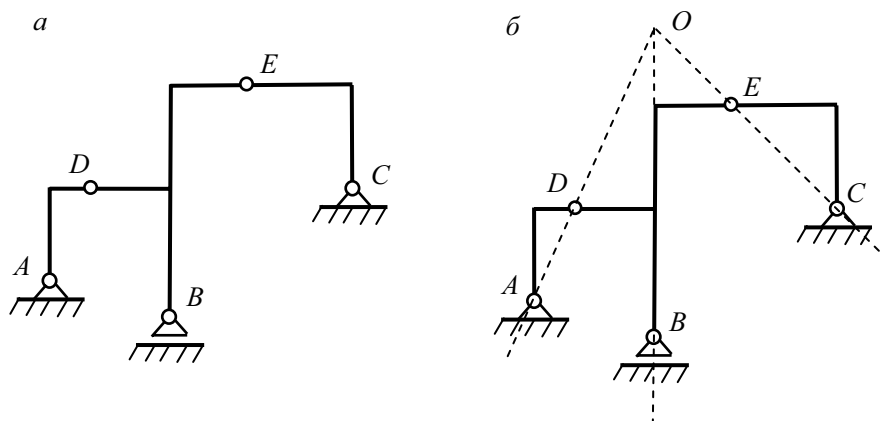


Рис. 2.8

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{оп} = 2 + 1 + 2 = 5$, $n_k = 0$, $n_n = (n_{оп} + 3n_k) = (5 + 0) = 5$; $n_{лш} = 1 + 1 = 2$, $n_{ур} = (3 + n_{лш}) = 3 + 2 = 5$ и $n = n_n - n_{лш} = 0$.

Выполняется необходимое условие статической определимости рамы.

2. Структурный анализ расчетной схемы рамы показывает, что она является **мгновенно изменяемой системой**. Действительно, при рассмотрении диска DBE можно считать его присоединенным к основанию тремя связями, пересекающимися в точке O , являющейся мгновенным центром вращения диска (рис. 2.8, б).

Общий вывод: **Несмотря на соблюдение необходимого условия статической определимости, система таковой не является.** Аналогичный случай уже был рассмотрен в подразделе 2.4 (см. рис. 2.3).

Пример 8. Рама, изображенная на рис. 2.9

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{оп} = 2 + 1 = 3$, $n_k = 2$, $n_n = (n_{оп} + 3n_k) = (3 + 6) = 9$; $n_{лш} = 5 + 2 = 7$, $n_{ур} = (3 + n_{лш}) = 3 + 7 = 10$ и $n = n_n - n_{лш} = -1 < 0$.

Получили первый вариант результата при подсчете степени статической неопределимости рамы. Ему соответствует вывод: **рама явно геометрически изменяема**. Проверку этого выполним с помощью структурного анализа расчетной схемы.

2. Сначала рассмотрим диск $ABCE$, который прикреплен к основанию тремя опорными связями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными друг другу. Такой диск будет неизменяемой системой. Его можно рассматривать как неподвижное основание для части системы выше шарниров C и E .

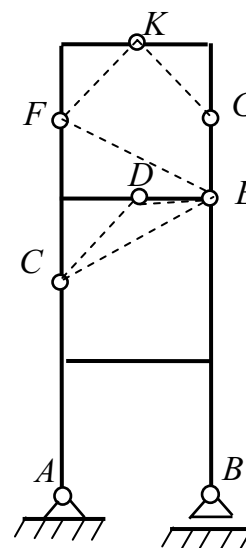


Рис. 2.9

Диски CDF и DE вместе с неподвижным диском $ABCE$ образуют «треугольник». На схеме он условно показан штриховыми линиями. В результате такого структурного анализа устанавливаем, что вся часть конструкции, лежащая ниже шарниров F и E может рассматриваться как неподвижный диск – основание для выше лежащей части.

Оставшаяся конструкция может рассматриваться как система четырех дисков, три из которых, в том числе неподвижный диск – основание, условно показаны штриховыми линиями. Так как диски соединены друг с другом только шарнирными узлами, то очевидно, что такая система геометрически изменяема (см. схемы 4 и 5 на рис. 2.1, z).

Пример 9. Трехшарнирная арка без затяжки (см. схему 1 на рис. 1.2, d)

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{оп} = 4$, $n_k = 0$, $n_n = (n_{оп} + 3n_k) = 4$; $n_{1ш} = 1$, $n_{ур} = (3 + n_{1ш}) = 3 + 1 = 4$ и $n = n_n - n_{1ш} = 0$. **Выполняется необходимое условие статической определимости рамы.**

2. Трехшарнирная арка, изображенная на схеме 1 рис. 1.2, z , **геометрически неизменяема**, так как три жестких диска (две полуарки и жесткий неподвижный диск основания) соединены шарнирами в «треугольник», который в данном примере неподвижен.

Пример 10. Трехшарнирная арка с затяжкой (см. схему 2 на рис. 1.2, d)

1. В соответствии с формулой (2.21): $n_{оп} = 3$, $n_k = 1$, $n_n = (n_{оп} + 3n_k) = 6$; $n_{1ш} = 3$, $n_{ур} = (3 + n_{1ш}) = 3 + 3 = 6$ и $n = n_n - n_{1ш} = 0$. **Выполняется необходимое условие статической определимости рамы.**

2. Трехшарнирная арка, изображенная на схеме 2 рис. 1.2, z , **геометрически неизменяема**. Действительно, три жестких диска (две полуарки и жесткий диск в виде затяжки) соединены шарнирами в «треугольник» и образуют единый диск. Этот диск прикреплен к основанию тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными друг другу.

Общий вывод: трехшарнирная арка с затяжкой статически определима.

2.6. Подсчет степени статической неопределимости ферм

Формула (2.21) для подсчета степени статической неопределимости применима ко всем стержневым системам, приведенным на рис. 1.2.

Однако при использовании этой формулы для ферм возрастает трудоемкость подсчета числа одиночных шарниров, поскольку в расчетной схеме фермы (см., например, схемы на рис. 1.2, e) встречаются шарниры разной кратности одиночному шарниру.

Оказывается возможным получения для ферм более простой формулы. Это делается на основе использования следующего основного свойства ферм.

Если нагрузка на ферму, имеющую прямолинейные стержни, приложена к узлам фермы, то все узлы расчетных схем ферм считаются шарнирными и в ее стержнях возникают только продольные силы.

Действительно, любой стержень с номером i , выделенный из фермы с узловой нагрузкой, имеет шарниры по концам (рис. 2.10), а значит – находится в равновесии только при действии продольных сил N_i , действующих в этих шарнирах на стержень. Стержни с нулевыми усилиями называются «нулевыми».

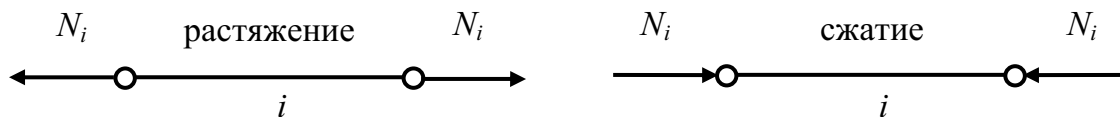


Рис. 2.10

Таким образом, в ферме имеется n_c неизвестных усилий в стержнях фермы и $n_{оп}$ неизвестных усилий в опорных стержнях фермы. Всего при решении задачи об НДС фермы будем иметь $n_n = n_c + n_{оп}$ неизвестных усилий. Все эти усилия действуют на узлы фермы числом n_y .

Для каждого узла i фермы можно составить два уравнения равновесия. В системе ОСК, которая изображена на рис. 1.2, *жс*, они могут быть представлены в виде (2.22).

В центре узла пересекаются линии действия всех сил, действующих на узел. Поэтому третье уравнение равновесия узла, имеющее вид равенства нулю моментов относительно центра узла, удовлетворяется тождественно и не может быть использовано для определения усилий в фермах.

$$\sum_{i=1}^{n_y} X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n_y} Z_i = 0. \quad (2.22)$$

Всего для n_y узлов фермы будем иметь $n_{ур} = 2n_y$ уравнений равновесия. Таким образом, кроме формулы (2.21) степень статической неопределимости ферм можно найти также по формуле

$$n = n_n - n_{ур} = (n_c + n_{оп}) - 2n_y. \quad (2.23)$$

При использовании этой формулы получаются те же варианты результатов расчета, которые описаны для формулы (2.21).

Необходимому условию статической определимости фермы будет соответствовать условие $n = 0$, которому соответствует равенство числа $n_n = n_c + n_{оп}$ неизвестных усилий в стержнях фермы числу $n_{ур} = 2n_y$ уравнений равновесия узлов вида (2.22).

Для того чтобы при выполнении необходимого условия $n = 0$ ферма была действительно статически определимой необходимо соблюдение дополнительного условия о геометрической неизменяемости фермы. Для

простейших по образованию ферм это ГН доказывается структурным анализом фермы с помощью процедуры последовательного наращивания диска, представляющего ферму, образованием новых «треугольных» дисков (см. рис. 2.1, б, 5).

Пример 11. Ферма, изображенная на рис. 1.2, е, 2

1. В соответствии с формулой (2.23) имеем:

$$n_{\text{н}} = (n_{\text{с}} + n_{\text{оп}}) = (4 \cdot 2 + 4 + 5) + 3 = 20 \quad n_{\text{ур}} = 2n_{\text{у}} = 2 \cdot 10 = 20 \quad \text{и} \quad .$$

$$n = n_{\text{н}} - n_{\text{ур}} = (n_{\text{с}} + n_{\text{оп}}) - 2n_{\text{у}} = 0.$$

Выполняется необходимое условие статической определимости фермы.

2. Структурный анализ фермы, выполненный по процедуре наращивания диска (см. рис. 2.1, б, 5) показывает, что ферма представляет собой единый диск. Он неподвижно прикреплен к основанию тремя связями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными друг другу. Общий вывод: **ферма статически определима.**

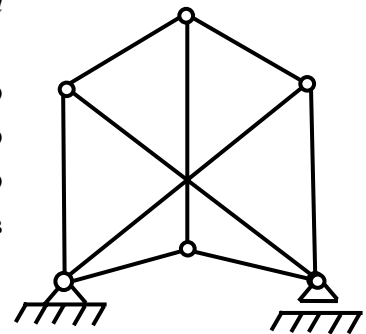


Рис. 2.11

Рассмотренные простые приемы структурного анализа иногда не позволяют провести анализ геометрической неизменяемости стержневой системы, если она образована более сложным способом.

Примером такой системы является на первый взгляд простая ферма, изображенная на рис. 2.11.

Однако, начать структурный анализ этой фермы путем образования диска в виде треугольника не удастся. Здесь необходимо прибегнуть к специальным методам исследования геометрической неизменяемости стержневых систем, один из которых будет рассмотрен в подразделе 4.8 части 2 учебного пособия, после изучения способов определения усилий в стержнях ферм.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О РАСЧЕТЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

3.1. Представление расчетной схемы стержневой системы как системы конечных стержневых элементов

При решении основной задачи строительной механики (определение перемещений, усилий и деформаций от заданных внешних воздействий) для стержневых систем методом конечных элементов (МКЭ) их представляют как системы типовых стержневых конечных элементов (КЭ), соединенных между собой и с основанием в жестких и шарнирных узлах. Это продемонстрировано в большом числе работ, например [7, 10 – 13], где показано, что КЭ могут представлять собой как систему нескольких соединенных друг с другом стержней, так и иметь вид одного прямолинейного стержня.

В данном учебном пособии при расчете стержневых систем МКЭ рассматривается его реализация в форме метода перемещений на ПК с помощью программы SCAD [19], в которой используются только прямолинейные стержневые элементы.

В плоских стержневых системах в программе SCAD используются прямолинейные стержневые КЭ двух типов:

1. Стержень, работающий только в условиях продольных деформаций. В его сечениях возникают только продольные усилия N .

В таких условиях находятся стержни в расчетной схеме фермы, которая имеет шарнирные узлы. Поэтому КЭ типа 1 называют элементом типа *«стержень плоской фермы»*.

Однако такой элемент (внешним признаком его в расчетной схеме стержневой системы является наличие шарниров по его концам и отсутствие поперечной нагрузки на него) может встретиться в расчетной схеме МКЭ и шарнирной балки и рамы.

2. Стержень, в сечениях которого в общем случае могут возникнуть изгибные, поперечные и продольные деформации и соответствующие им усилия M, Q, N .

В таких условиях в общем случае работают стержни плоской рамы. Поэтому КЭ типа 2 называют элементом типа *«стержень плоской рамы»*.

На расчетной схеме МКЭ для рам и балок такой элемент встречается в различном виде, который характеризуется числом внутренних связей,

прикрепляющих его к намеченным в расчетной схеме узлам. Далее это продемонстрировано на примере плоской рамы (рис. 3.1, а), взятой из книги [19] авторов вычислительного комплекса SCAD. Рама геометрически неизменяема и один раз статически неопределима ($n = (n_{\text{оп}} + 3n_k) - (3 + n_{\text{лш}}) = (4 + 3 \cdot 1) - (3 + 3) = 1$) [1].

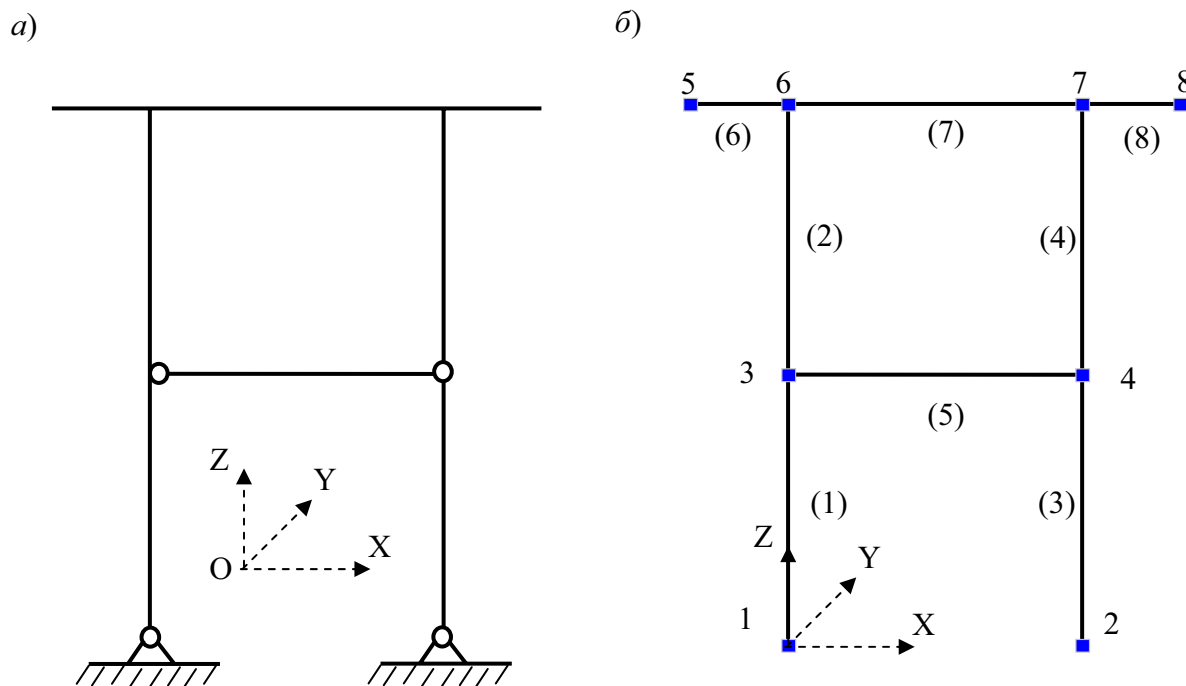


Рис. 3.1

При построении алгоритма МКЭ в программе SCAD стержневая система соотносится с правой декартовой системой координат XYZ (см. рис. 3.1, а). Такую систему координат называют общей системой координат (ОСК) для всей стержневой системы.

Плоская стержневая система считается расположенной в плоскости XOZ (см. рис. 3.1,а).

В принципе каждый из стержней рамы, приведенной на рис. 3.1, а, может быть разделен на любое конечное число стержневых элементов отличающихся от аппроксимируемого стержня только длиной и характером прикрепления элементов к узлам.

Поэтому при построении расчетной схемы МКЭ необходимо, прежде всего, выбрать рациональное для решения задачи число конечных стержневых элементов, аппроксимирующих стержни заданной рамы и наметить на раме узлы, в которых КЭ соединяются друг с другом и с основанием.

При рассмотрении вопроса о построении расчетной схемы стержневой

системы для ее расчета МКЭ на персональном компьютере с помощью программы SCAD будем учитывать следующее (см. методические указания в книге [19] и в справке к программе).

1. Конечные элементы в расчетной схеме МКЭ для стержневой системы считаются соединенными друг с другом и с основанием в намеченных на расчетной схеме узлах.

2. За основные неизвестные величины, которые в МКЭ в форме метода перемещений определяются в первую очередь, принимают компоненты линейных и угловых перемещений всех намеченных узлов расчетной схемы по направлению их степеней свободы.

3. По найденным перемещениям узлов каждого конечного элемента стержневой системы, определяются усилия в связях, присоединяющих конечные элементы к узлам.

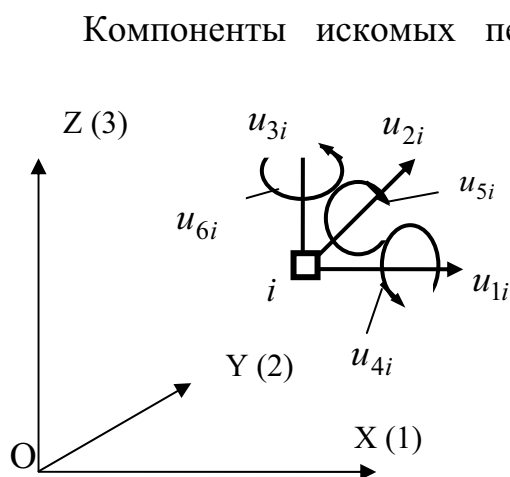


Рис. 3.2

Компоненты искомых перемещений узлов в МКЭ обозначаются в соответствии с осями общей системы координат, к которой относится расчетная схема.

В программе SCAD, где используется правая система осей координат XYZ (рис. 3.1), в таблицах с результатами расчетов компоненты перемещений **любого жесткого узла i пространственной стержневой системы** обозначаются соответственно $X_i, Y_i, Z_i, UX_i, UY_i, UZ_i$.

Этим направлениям компонентов перемещений соответствует нумерация: 1, 2, 3, 4, 5, 6, использованная при обозначении соответствующих компонентов перемещений на рис 3.2).

На рис. 3.2 показаны положительные направления компонентов перемещений, принятые при рассмотрении алгоритма МКЭ.

Для плоской стержневой системы, находящейся в плоскости XOZ, положение плоского жесткого узла i определяется компонентами линейных перемещений X_i, Z_i (или u_{1i}, u_{3i}) и углом поворота UY_i (или u_{5i}) вокруг оси параллельной оси Y (см. рис. 3.2).

Поскольку трудоемкость численной реализации алгоритма МКЭ зависит от числа неизвестных перемещений во всех намеченных узлах расчетной схемы стержневой системы, желательно намечать наименьшее число узлов, а значит разделять стержневую систему на наименьшее число стержневых конечных

элементов.

Наименьшее число стержневых конечных элементов получится тогда, когда узлы в расчетной схеме МКЭ назначены в заданной стержневой системе в узлах (в том числе шарнирных) соединения прямых стержней между собой и с основанием, а также на свободных (консольных) концах стержней..

Однако иногда, например, в местах приложения сосредоточенных сил и моментов, или в других сечениях стержней с целью получения дополнительной информации о перемещениях и усилиях в них, приходится назначать в расчетной схеме дополнительное число узлов.

С целью выбора наименьшего числа неизвестных перемещений в расчетной схеме МКЭ рамы, изображенной на рис. 3.1, *а*, примем вариант ее разбиения на минимальное число стержневых КЭ, когда каждый стержень рассматривается как один КЭ типа 2.

Продemonстрируем особенности процедуры построения расчетной схемы МКЭ рамы с использованием программы SCAD. При этом будем руководствоваться указаниями авторов вычислительного комплекса SCAD, приведенных в книге [19] и справке к программе, а также методическими указаниями, данными в настоящем пособии.

3.2. Построение расчетной схемы МКЭ на этапах постановки опорных связей и одиночных шарниров на конечных элементах

Первоначально для рассматриваемой рамы с помощью программы SCAD строится промежуточная расчетная схема МКЭ с назначением только жестких узлов (рис. 3.1, *б*). При этом на схеме в программе SCAD указывается и нумерация узлов и конечных элементов.

Всем конечным элементам в этой схеме назначается тип 2 «Стержень плоской рамы» (см. [19], справку к программе и приведенные методические указания в данном пособии).

Затем, продолжая построение расчетной схемы МКЭ, последовательно введем в узлах 1 и 2 промежуточной схемы жесткие связи в виде стержней с шарнирами по концам в направлении параллельном оси X и оси Z (рис. 3.3, *а*).

Постановка жестких опорных связей в узлы 1 и 2 привязывает расчетную схему к жесткому основанию. В такой системе перемещения намеченных восьми жестких узлов будут происходить от внешних воздействий (нагрузки, осадки опор и изменения температуры стержневых КЭ) только как упругие перемещения.

Общее число n_n компонентов упругих перемещений всех n_y узлов

промежуточной расчетной схемы *при отсутствии их закреплений внешними связями по направлению их степеней свободы* будет равно

$$n_H = 3n_y, \quad (3.1)$$

Для промежуточной схемы на рис. 3.1, б получим $n_H = 3 \cdot 8 = 24$.

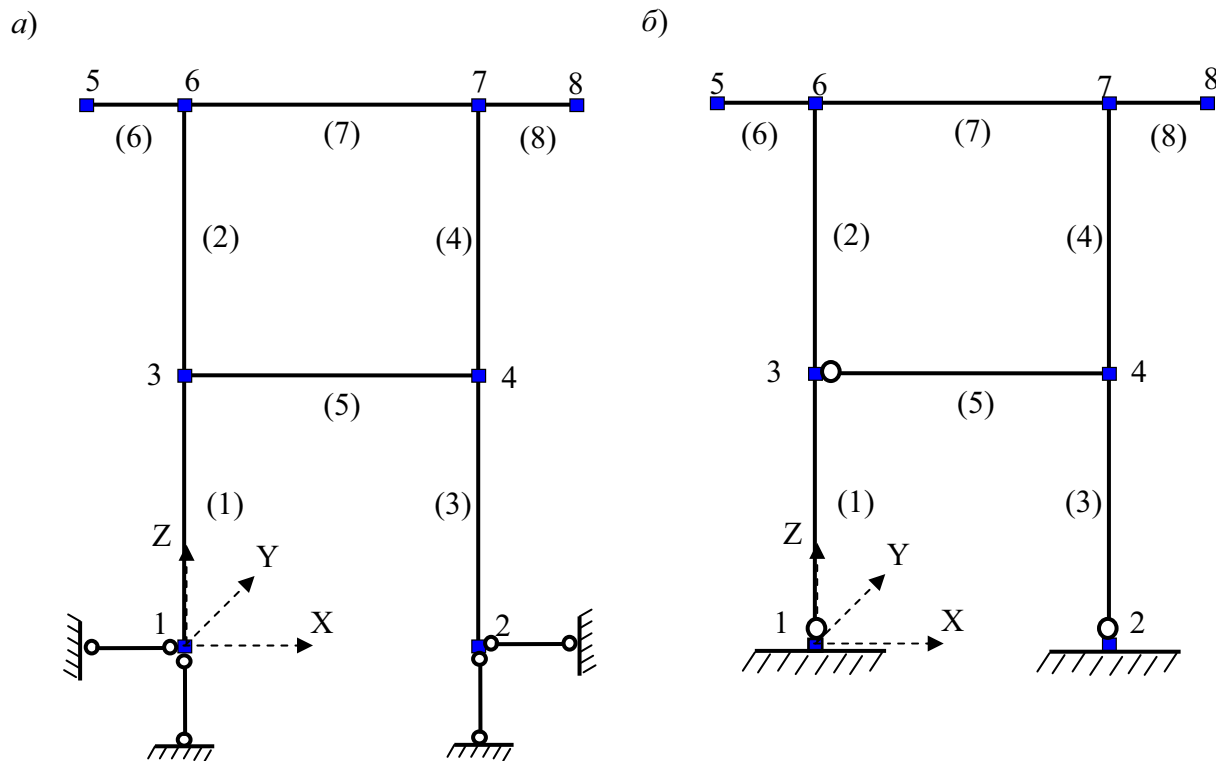


Рис. 3.3

Введение в узлы 1 и 2 промежуточной расчетной схемы (см. рис. 3.1, б) внешних связей в горизонтальном и вертикальном направлениях лишают эти узлы упругих линейных перемещений в направлениях введенных связей, но не лишают упругих углов поворота (см. рис. 3.3, а).

Это позволяют записать формулу для подсчета общего числа n_H компонентов упругих перемещений для всех n_y жестких узлов в расчетной схеме МКЭ при введении в эти узлы n_c жестких связей по направлению степеней свободы узлов:

$$n_H = 3n_y - n_c. \quad (3.2)$$

По этой формуле для полученной новой промежуточной схемы (см. рис. 3.3, а) будем иметь $n_H = 3 \cdot 8 - 4 = 20$ упругих перемещений этих узлов.

Если не ставить целью определение углов поворота нижних сечений стержней рамы, подходящих к шарнирным опорам, то в полученной

промежуточной расчетной схеме (см. рис. 3.3, а) нужно исключить из числа неизвестных углы поворота узлов 1 и 2.

С этой целью можно полностью закрепить узлы 1 и 2 в промежуточной расчетной схеме на рис. 3.1, б введением в опорах трех связей, лишаящих узлы смещений по всем трем направлениям (X, Z и UY). Затем, для обеспечения возможности нижних концов стоек свободно поворачиваться относительно осей параллельных оси Y, дополнительно поставить шарниры на нижних концах стоек. Тогда опорные узлы на строящейся расчетной схеме МКЭ можно изобразить так, как это показано на рис. 3.3, б.

При этом варианте представления шарнирно неподвижных опор в расчетной схеме МКЭ рассматриваемой рамы из общего числа неизвестных упругих перемещений узлов полностью исключатся все шесть компонентов перемещений жестких опорных узлов 1 и 2 и останется $n_n = 3 \cdot 8 - 6 = 18$ неизвестных компонентов перемещений намеченных в расчетной схеме жестких узлов.

Процедуры введения жестких опорных связей и постановки шарниров путем удаления на промежуточной схеме МКЭ нужных связей по концам стержневых КЭ типа 2 легко выполняются в программе SCAD (см. [19, 3] и методические указания в данном пособии).

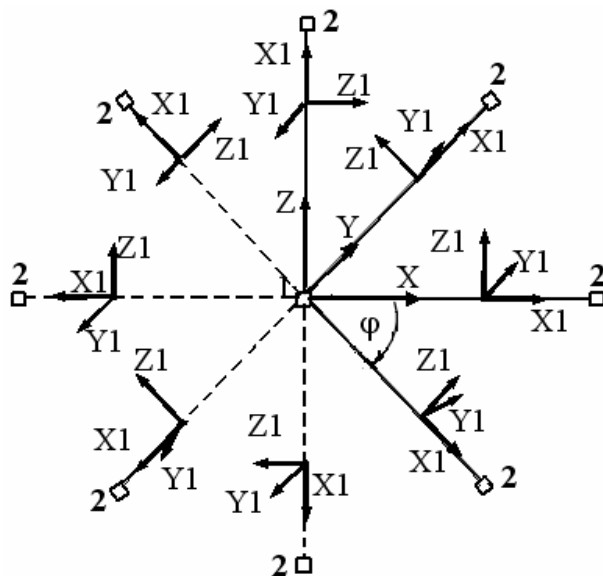
Примечание. В процедуре постановки шарниров на конечный элемент типа 2 он рассматривается в виде, когда на каждом его конце имеются все три связи для жесткого соединения с соответствующим жестким узлом.

При этом каждый КЭ соотносится с местной системой координат (МСК) $X_1Y_1Z_1$, которая, как и ОСК, считается правой. Начало осей совпадает с узлом КЭ, который обозначается номером 1 в МСК (второй узел КЭ обозначается цифрой 2).

Ось X_1 совпадает с осью стержневого КЭ и своим направлением определяет и направление осей Y_1 и Z_1 .

МСК считается «привязанной» к КЭ, поэтому при расположении оси КЭ в плоской стержневой системе с наклоном на угол φ по отношению к оси X общей системы координат для всей стержневой системы, положение осей МСК на плоскости XOZ также определяется этим углом (рис. 3.4).

Обратим внимание, что при повороте КЭ на угол $90^\circ \leq \varphi \leq 270^\circ$ МСК $X_1Y_1Z_1$



поворачивается еще относительно оси X1 на угол $\psi = 180^\circ$ [19, 3].

С учетом обозначений в приведенном примечании постановка одиночных шарниров на КЭ с номерами 1, 3, 5 сводится к удалению связей UY в узлах 1 этих КЭ (нумерация узлов в МСК). В результате на строящейся с помощью программы SCAD расчетной схеме МКЭ внизу конечных элементов 1 и 3 и на левом конце КЭ 5 появятся одиночные шарниры (см. рис. 3.3, б).

3.3. Представление на расчетной схеме МКЭ стержневой системы шарнирных узлов

В рассматриваемой раме (см. рис. 3.1, а) узел примыкания нижнего ригеля рамы к правой стойке является полностью шарнирным. В то же время, на построенной промежуточной схеме (см. рис. 3.6, б) узел 4 является жестким.

Так как шарнир в рассматриваемом шарнирном узле на заданной раме является двойным, то при установке эквивалентных ему двух одиночных шарниров на три, сходящихся в узле конечных элемента, возможны следующие три варианта.

1. Два одиночных шарнира ставятся соответственно в узлах 1 и 2 конечных элементов 3 и 4. В этом варианте узел 4 будет иметь вид, изображенный на рис. 3.5, а, что означает соединение концов КЭ, сходящихся в узле 4, связями, показанными на рис. 3.5, б.

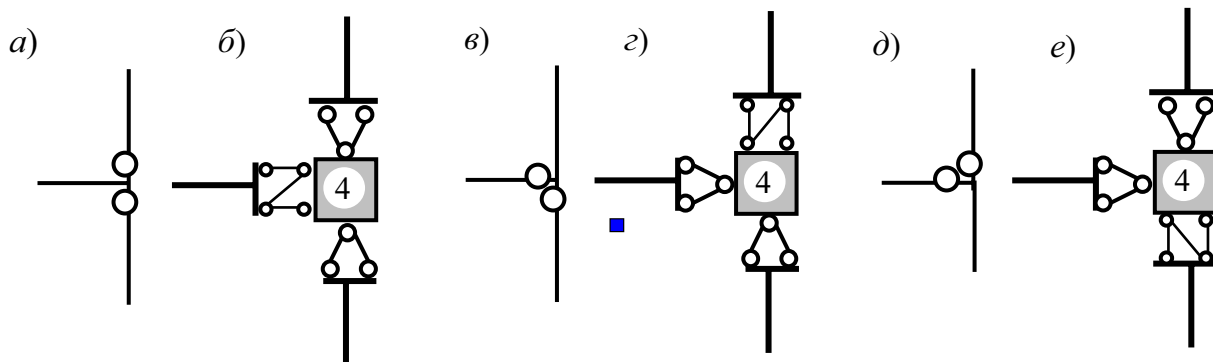


Рис. 3.5

В этом варианте на промежуточной расчетной схеме (рис. 3.3, б) с помощью программы SCAD выполняется процедура удаления связи UY в узлах 1 и 2 (в местной системе координат) КЭ 3 и 4. В результате получится расчетная схема МКЭ для рассматриваемой рамы в виде, изображенном на рис. 3.6, а.

2. Два одиночных шарнира поставлены соответственно в узлах 2 КЭ 3 и 5. В этом варианте узел 4 на расчетной схеме МКЭ будет иметь вид, изображенный на рис. 3.5, в, что означает соединение концов КЭ, сходящихся в

узле 4, связями, изображенными на рис. 3.5, *г*.

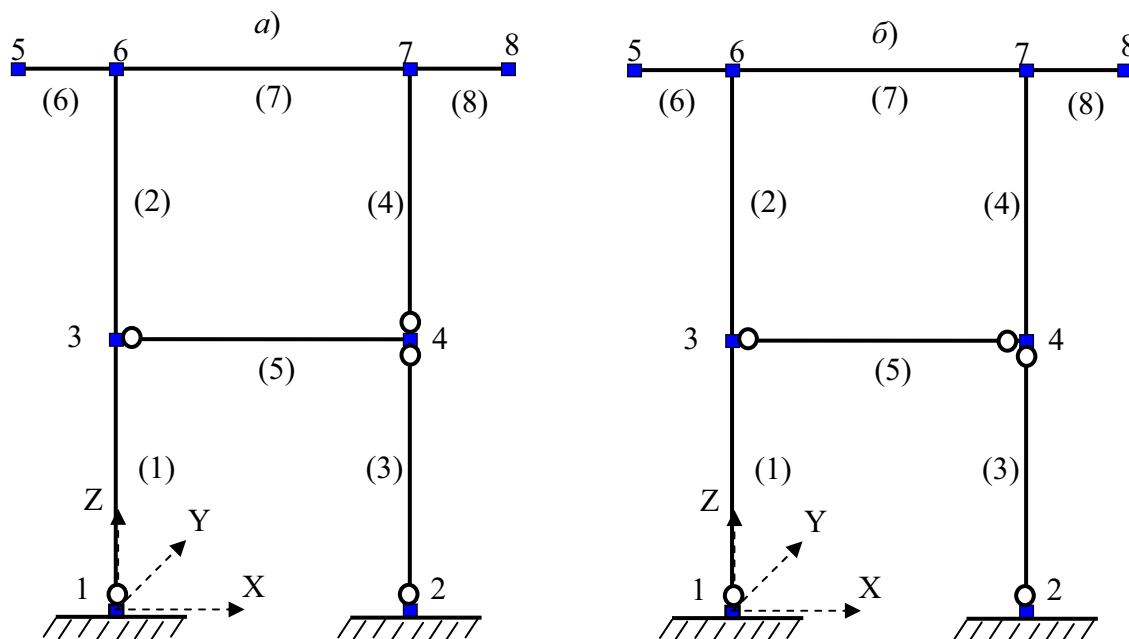


Рис. 3.6

В этом варианте на промежуточной расчетной схеме (рис. 3.3, *б*) с помощью программы SCAD выполняется процедура удаления связи UY в узлах 2 (МСК) КЭ 3 и 5. В результате получится расчетная схема МКЭ для рассматриваемой рамы в виде, изображенном на рис. 3.6, *б*.

3. Одиночные шарниры поставлены в узлах 2 и 1 соответственно конечных элементов 5 и 4. В этом варианте узел 4 на расчетной схеме МКЭ будет иметь вид, изображенный на рис. 3.5, *д*. Это означает соединение концов конечных элементов, сходящихся в узле 4, связями, изображенными на рис. 3.5, *е*.

В этом варианте на промежуточной расчетной схеме (рис. 3.3, *б*) с помощью программы SCAD выполняется процедура удаления связи UY в узлах 2 и 1 соответственно КЭ 5 и 4. В результате получится расчетная схема МКЭ для рассматриваемой рамы в виде, изображенном на рис. 3.7, *а*.

Постановка шарниров в любом из рассмотренных вариантов не уменьшает число неизвестных в узле 4. Во всех вариантах он будет иметь три степени свободы, а значит три неизвестных компонента перемещений (два линейных и один угол поворота).

Однако, в рассмотренных вариантах 1, 2, 3 имеются в виду различные углы поворота: соответственно узла 2 КЭ 5, узла 1 КЭ 4, узла 2 КЭ 3.

Обычно при использовании МКЭ для стержневых систем углы поворотов сечений КЭ, подходящих к шарнирным узлам, не принимают за неизвестные

величины, как это было сделано применительно к шарнирным опорным узлам.

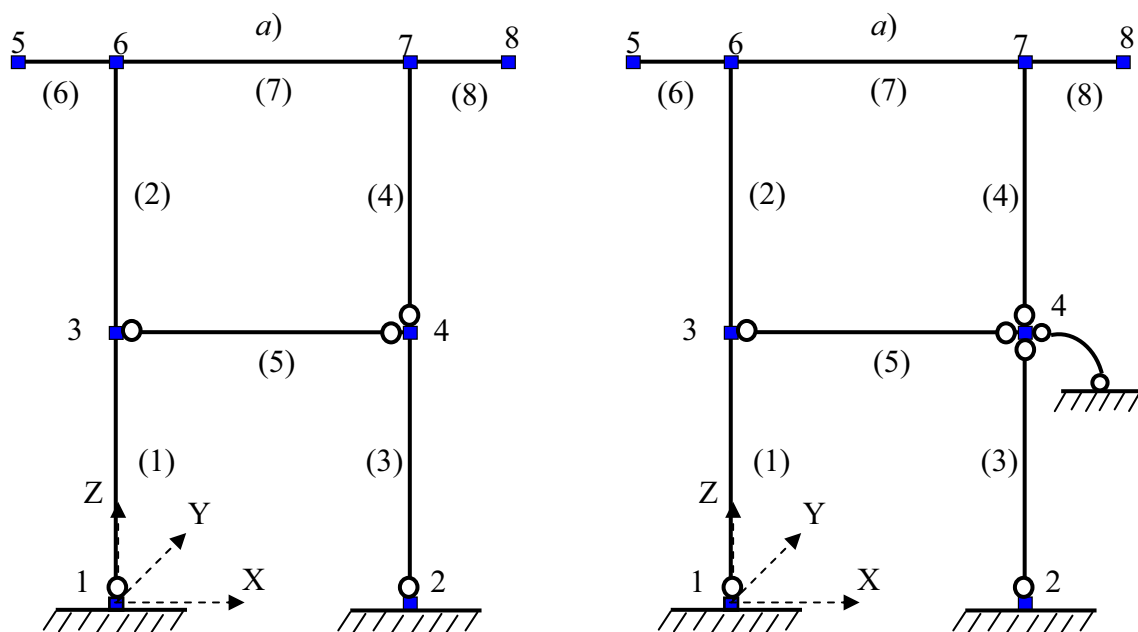


Рис. 3.7

Поэтому принятый за неизвестную величину угол поворота узла 4 можно вообще исключить из числа неизвестных, выполнив процедуру, аналогичную той, которая была выполнена для опорных узлов 1 и 2.

Это означает, что узел 4 можно сделать не поворачивающимся постановкой дополнительной **внешней** связи, делающей поворот узла 4 в направлении UY невозможным. Такая связь в узле 4 условно изображена на строящейся с помощью программы SCAD расчетной схеме (см. рис. 3.7, б) и на отдельном изображении схемы узла 4 в виде рис. 3.8, а и рис. 3.8, б.

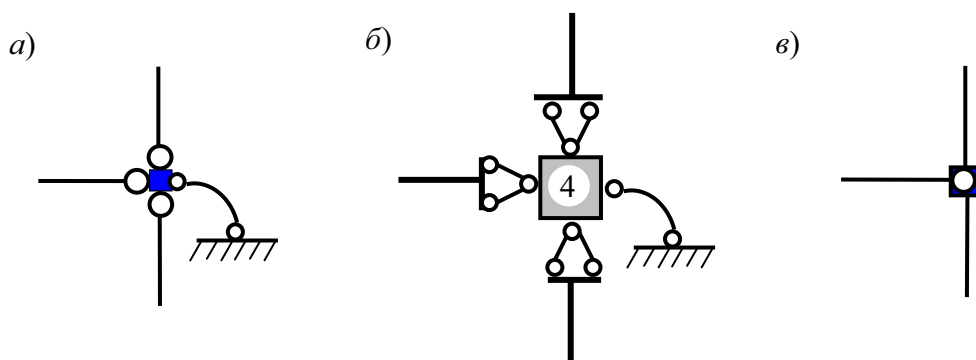


Рис. 3.8

Линейные перемещения узла 4 в направлениях X и Z при этом остаются возможными.

Одновременно в расчетной схеме МКЭ необходимо удалить связь UY на том КЭ, подходящем к узлу 4, на котором эта связь с жестким узлом 4 есть. Эта

операция аналогична постановке в узле 4 третьего шарнира на третьем конечном элементе, подходящем к узлу 4, на котором в рассматриваемом узле шарнира нет. При этом на строящейся с помощью программы SCAD расчетной схеме МКЭ для рассматриваемой рамы появится шарнир и на третьем стержне (рис. 3.7, б).

Схема шарнирного соединения всех трех КЭ, подходящих к узлу 4, изображена и на отдельно вырезанном узле (рис. 3.8, а и рис. 3.8, б).

Обычно на расчетной схеме МКЭ (не в программе SCAD) такой узел, имеющий только две линейных степени свободы и не имеющий в числе неизвестных угла поворота обозначается в виде, приведенном на рис. 3.8, в.

Число неизвестных компонентов перемещений в расчетной схеме, изображенной на рис. 1.7, б будет равно $n_{\text{н}} = 3 \cdot 8 - 6 - 1 = 17$.

3.4. Особенность учета на расчетной схеме МКЭ консольных стержней

Эта особенность связана с узлами МКЭ, намеченными на концах консолей, например, в рассматриваемой раме (см. рис. 3.1, а).

Дело в том, что при построении с помощью программы SCAD начальной схемы МКЭ стержневой системы жесткие узлы назначаются и на концах консолей. Это означает, что при решении задачи расчета, например, рассматриваемой рамы, МКЭ в форме метода перемещений в общее число $n_{\text{н}} = 17$, подсчитанных выше неизвестных, вошли и шесть неизвестных перемещения концов консолей ($n_{\text{н},5} + n_{\text{н},8} = 6$).

Иногда перемещения концов консолей могут расчетчика не интересовать.

Тогда при расчете рамы с консолями можно применить прием по исключению неизвестных перемещений концов консолей из общего числа неизвестных величин в расчетной схеме МКЭ, который был применен выше при исключении углов поворота узлов 1, 2, 4.

Поступим следующим образом (рис. 3.9):

1) полностью закрепим узлы 5 и 8 расчетной схемы МКЭ, введя в каждый из этих узлов по три **внешних жестких**

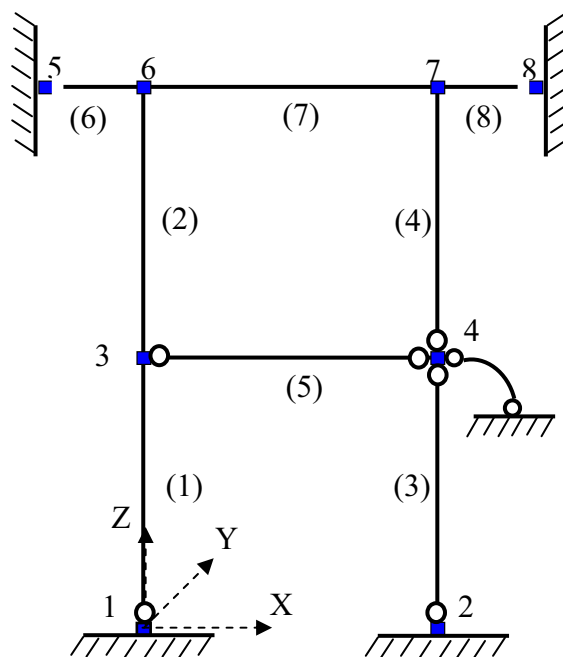


Рис. 3.9

связи по направлению степеней свободы этих узлов (связи в направлениях X, Z, UY);

2) удалим по три **внутренних связи**, соединяющие узлы 1 и 2 (нумерация узлов в местной системе координат) конечных элементов 6 и 8 соответственно с жесткими только что закрепленными (см. п. 1)) узлами 5 и 8.

В результате этих действий на расчетной схеме МКЭ рамы (см. рис. 3.9) при подсчете неизвестных величин n_n в формуле (1.2) получим $n_n = 3 \cdot 8 - 6 - 1 - 6 = 11$.

Обратим внимание, что при расчете рамы МКЭ по расчетной схеме, приведенной на рис. 3.9, эпюры усилий M, Q, N на консоли будут построены даже при исключении из числа неизвестных перемещений узлов 5 и 8.

Исключение узлов 5 и 8 из расчетной схемы МКЭ рамы может быть получено и приемом исключения вообще консолей из рассматриваемой рамы.

Действительно, консоли являются статически определимыми частями рассматриваемой рамы (см. рис. 3.1, *а*). Поэтому для определения усилий в любом сечении консолей их можно отделить от рамы и рассматривать отдельно как консольные балки с заземляющими опорами в сечениях, где консоли присоединяются к раме.

Затем, составляющие M, Q, N опорных реакций, полученные в заземляющих опорах консолей, прикладываются на оставшуюся после удаления консолей часть рамы в виде внешней нагрузки на соответствующие узлы рамы.

Построение расчетной схемы МКЭ рамы без консолей остается прежним. Она будет иметь вид, приведенный на рис. 3.9, но без консольных конечных элементов. Соответственно изменится и нумерация узлов и конечных элементов расчетной схемы. Однако изменение нумерации узлов и конечных элементов не влияет на результаты ее расчета МКЭ.

3.5. Внутренние усилия в концевых сечениях КЭ типа 2 и правило знаков для них

После того, как в МКЭ будут определены компоненты перемещений **всех намеченных узлов** расчетной схемы МКЭ стержневой системы, определяются усилия в концевых сечениях стержневых конечных элементов.

Это означает, что применительно к рассматриваемой статически неопределимой раме (см. рис. 3.1, *а*) в общем случае от внешнего воздействия на нее сначала определятся $n_n = 17$ компонентов перемещений для схемы, изображенной на рис. 3.7, *б*, или $n_n = 11$ для схемы, изображенной на рис. 3.9.

Затем находятся внутренние усилия M_k, Q_k, N_k в концевых сечениях k стержневых конечных элементов типа 2, входящих в рассматриваемую расчетную схему.

Эти усилия определяются в местной системе координат (МСК) для каждого конечного элемента, поэтому $k=1$ для концевого сечения, в котором находится начало осей координат и $k=2$ для второго концевого сечения (см. рис. 3.4).

Число и вид определяемых усилий на любом конце элемента равно числу связей, прикрепляющих его к соответствующему жесткому узлу в расчетной схеме МКЭ (см. например, рис. 3.3).

На рис. 3.4 изображен КЭ с жесткими узлами на концах 1 и 2, что соответствует трем усилиям ($M_k, Q_k, N_k, k=1, 2$), действующим в этих связях.

На рис. 3.10, а, б изображены в вырезанном из стержневой системы виде соответственно любой наклонный ($+90^\circ > \varphi > -90^\circ$) и вертикальный ($\varphi = -90^\circ$) конечные элементы типа 2 (см. рис. 3.4, где эти элементы изображены сплошными линиями). Положительным считается угол поворота элемента φ в направлении против вращения часовой стрелки, если смотреть с конца оси Y (см. рис. 3.10, а). Горизонтальный КЭ имеет угол наклона $\varphi = 0^\circ$.

При этом разрезанные связи, присоединяющие элемент к соответствующим узлам стержневой системы, удалены и заменены усилиями M_k, Q_k, N_k ($k=1, 2$).

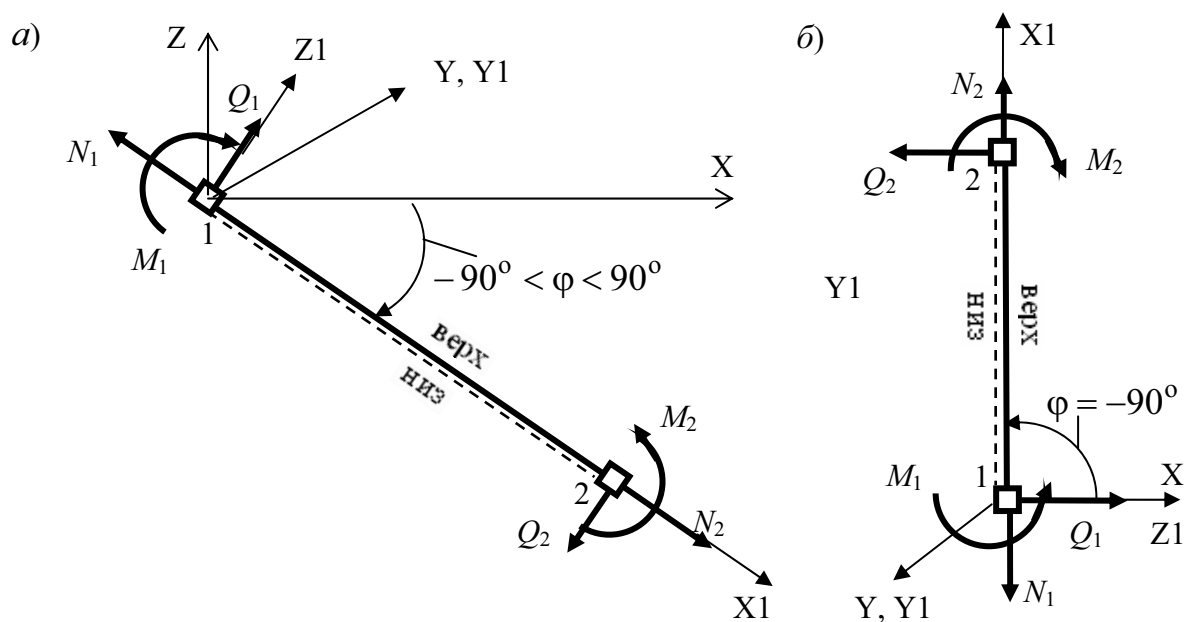


Рис. 3.10

Если на конечных элементах, изображенных на рис. 3.10, а, б, направление оси $X1$ МСК будет изменено на обратный (такая возможность в программе SCAD предусмотрена), то элементы примут вид, изображенный соответственно на рис. 3.11, а, б.

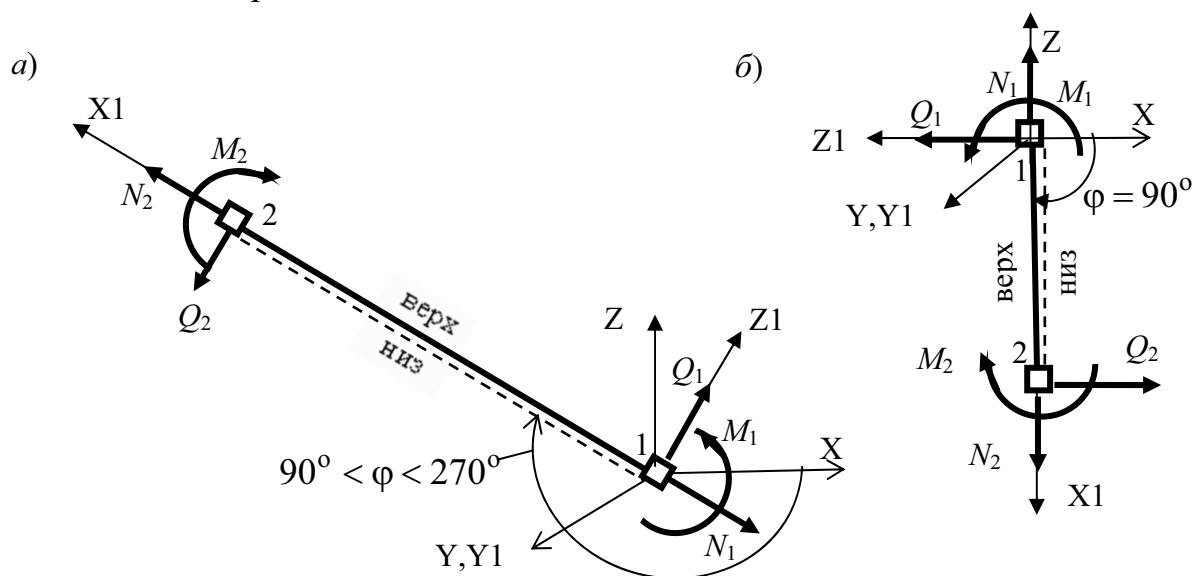


Рис. 3.11

На вертикальном и на наклонных КЭ изменятся углы φ наклона оси $X1$ относительно оси X (см. рис. 3.4, рис. 3.10). Они станут соответственно равными $\varphi = 90^\circ$ и $90^\circ < \varphi < 270^\circ$. Горизонтальный стержень будет иметь угол наклона $\varphi = 180^\circ$. Кроме этого МСК повернется еще относительно оси $X1$ на угол $\psi = 180^\circ$.

На рис. 3.10 и рис. 3.11 в соответствии с принятыми в подразделе 1.7 положительными направлениями усилий в сечении плоского стержня (см. рис. 1.7) показаны положительные направления действия внутренних усилий в узлах элементов. При этом для программы SCAD правила для положительных усилий в узлах КЭ могут быть сформулированы следующим образом.

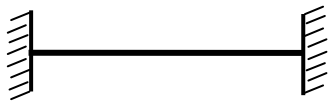
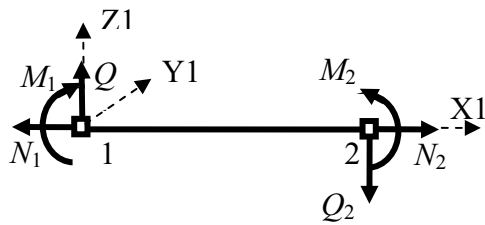
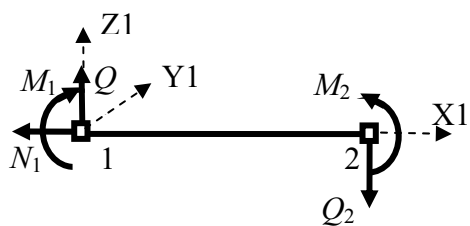
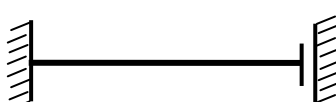
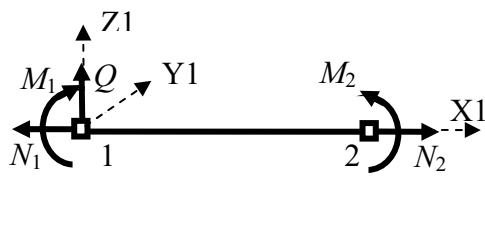
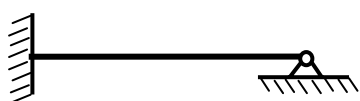
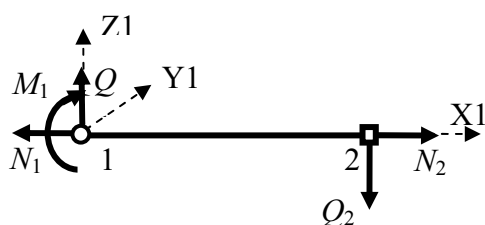
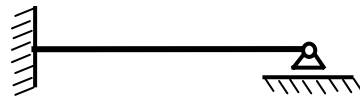
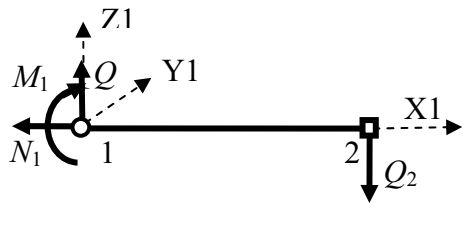
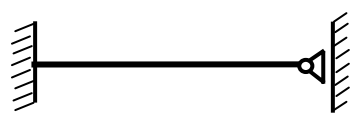
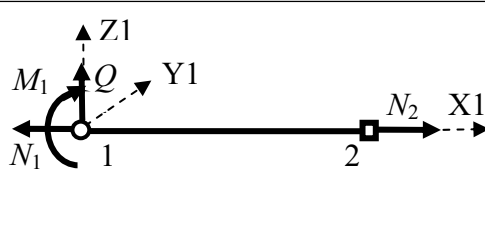
Продольное усилие в узле считается положительным, когда оно растягивает стержень.

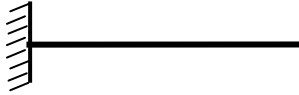
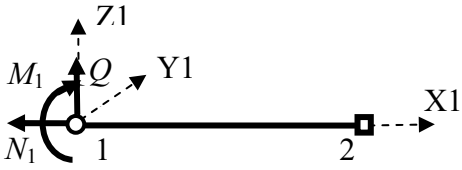
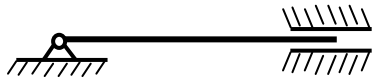
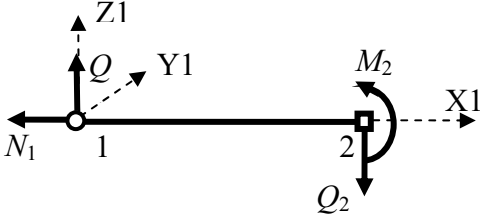
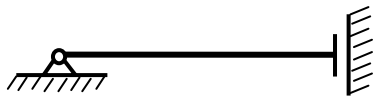
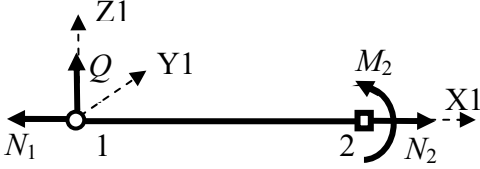
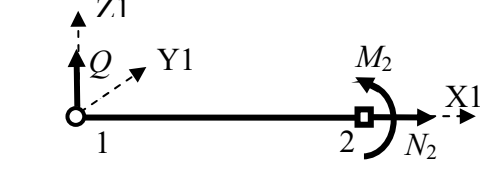
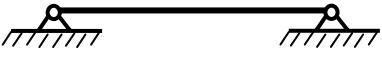
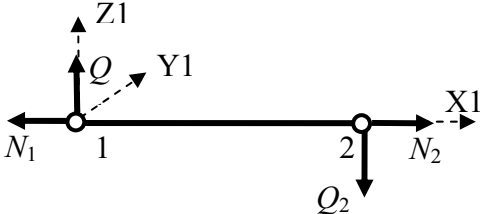
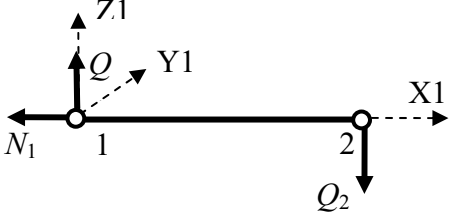
Поперечная сила положительна, когда ее вектор в узле 1 совпадает по направлению с положительным направлением оси $Z1$ местной системы координат, а в узле 2 – имеет противоположное направление.

Изгибающий момент положителен, если он растягивает «нижнюю» (по отношению к направлению оси $Z1$) сторону стержня. На рис. 3.10 и

рис. 3.11 «низ» и «верх» стержня (в том числе и вертикального) обозначен соответствующими надписями).

Таблица 3.1

№ варианта	Вид прикрепления конечных элементов к узлам расчетной схемы МКЭ	Внутренние усилия в опорных связях конечных элементов
1	2	3
1		
2		
3		
4		
5		
6		

№ варианта	Вид прикрепления конечных элементов к узлам расчетной схемы МКЭ	Внутренние усилия в опорных связях конечных элементов
1	2	3
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Другие варианты конечного элемента типа 2 (табл. 3.1) получаются

удалением из жестких узлов 1 и 2 рассмотренного конечного элемента тех или иных связей. При этом элемент должен оставаться геометрически неизменяемым.

Во втором столбце табл. 3.1 отражен характер опирания концов стержневого конечного элемента типа 2 в расчетной схеме МКЭ.

Вид опор определяется числом и видом опорных связей (см. рис. 1.3).

Варианты конечных элементов, которые получаются из приведенных путем перемены опор местами, в таблице не приводятся.

В третьем столбце таблицы показаны положительные направления внутренних усилий, действующих в его опорных связях, на элемент.

3.6. Назначение жесткостей конечных элементов в расчетной схеме МКЭ стержневой системы

Из алгоритма МКЭ, который в соответствии с рабочей программой изучения строительной механики (см. УМК по строительной механике на сайте <http://smitu.cef.spbstu.ru> а также в сети классов ПК кафедр «Строительная механика и теория упругости» и отделения «Энергетические и промышленно-гражданские сооружения» кафедры «Гражданское строительство и прикладная экология») будет рассматриваться в части 2 учебного пособия, следует, что при использовании программы SCAD для плоских элементов типа 1 необходимо задавать продольную жесткость, а для конечных элементов типа 2 и изгибную жесткость.

Для понимания этого вопроса на данном этапе использования программы SCAD обратим внимание на следующее.

При анализе системы уравнений (1.3) – (1.5) для определения неизвестных перемещений, усилий и деформаций в стержневых системах может быть отмечена следующая важная информация:

1. При определении усилий M, Q, N в статически определимых стержневых системах из уравнений равновесия (1.3) не требуется задавать значения жесткостей стержней.

2. При определении действительных (реальных) перемещений u, w, θ сечений тонких стержней (без учета сдвиговых деформаций) в статически определимой системе требуется задание действительных (реальных) продольных EA и изгибных EI жесткостей стержней.

Однако, *при использовании для расчета стержневых систем программы SCAD, реализующей МКЭ в форме метода перемещений, задание жесткостей стержней требуется даже при определении только усилий в статически определимых системах* [3].

Правда, учитывая информацию 1, заметим, что, *если в статически определимой стержневой системе требуется определить только усилия, то при расчете с помощью программы SCAD можно задать произвольные значения жесткостей стержней. Например, можно принять $EF = EI_y = 1$.*

Если же стержневая система статически определима, но в ней требуется определить перемещения, или она статически неопределима, то при назначении жесткостей стержней необходимо использовать реальные значения жесткостей стержней.

Процедура задания жесткостей стержней при использовании программы SCAD рассмотрена в данном пособии в примерах расчета конкретных стержневых систем.

3.7. Загружение расчетной схемы МКЭ

Загружением в программе SCAD называют систему одновременно действующих нагрузок.

Одна и та же стержневая система может быть рассчитана от нескольких загружений. Поэтому предусмотрена их нумерация.

Программа SCAD позволяет сразу выполнить расчет от нескольких вариантов загружений и от любых их комбинаций.

В соответствии с видом нагрузок, которые встречаются в учебных работах, в УМК рассмотрено: задание сосредоточенных сил и моментов, действующих в узлах расчетной схемы и в любом сечении по длине элемента типа 2, и равномерно распределенной нагрузки, приложенной на участке длины элемента типа 2.

Процедура задания этого вида нагрузок в программе SCAD продемонстрирована на конкретных примерах, которые будут рассмотрены далее. Здесь рассмотрим только некоторые общие вопросы.

Задание узловой нагрузки. Прежде всего, отметим, что узловая нагрузка задается в общей системе координат.

Для плоской стержневой системы, расчетная схема которой находится в плоскости XOZ, узловая нагрузка представляется сосредоточенными силами в направлении осей X и Z и моментом, действующим вокруг оси Y (рис. 3.14, а). Показаны положительные направления задаваемых узловых усилий.

Задание нагрузки на элемент. Нагрузка на сам элемент может задаваться как в общей (рис. 3.14, б), так и в местной (рис. 3.14, в) системах координат. При этом надо быть внимательным, так как одна и та же нагрузка будет относиться к разным осям координат.

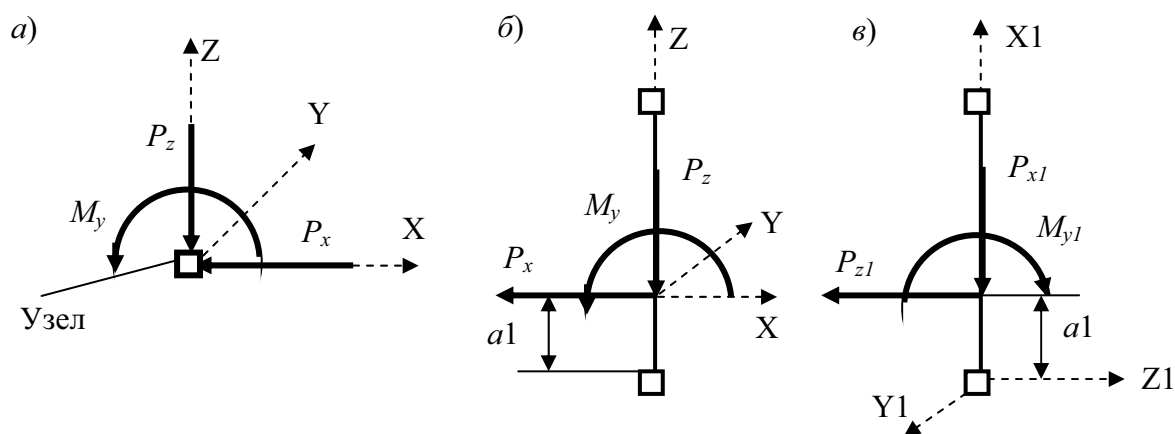


Рис. 3.14

На рис. 3.14, б нагрузка отнесена к общей системе координат. Поэтому горизонтальная составляющая P_x соотносится с осью X общей системы координат, а вертикальная P_z – с осью Z. Момент действует относительно оси Y. Все указанные составляющие положительны.

На рис. 3.14, в нагрузка отнесена к осям местной системы координат: горизонтальная составляющая является проекцией на ось Z1; вертикальная – на ось X1; момент задается действующим вокруг оси Y1.

Как видим, чтобы момент был положительным, в местной системе координат он должен иметь противоположное направление по сравнению с его заданием в общей системе координат (см. рис. 3.14, б).

При задании сосредоточенной нагрузки на элемент указывается не только ее значение и знак, но и расстояние $a1$ от узла 1 до точки приложения сосредоточенной нагрузки.

Аналогичное правило знаков используется и при распределенной вдоль стержня нагрузке. В локальном окне задания нагрузки на стержневой элемент в программе SCAD предусмотрено задание линейно изменяющейся распределенной нагрузки на любом участке стержня.

После задания нагрузок в конкретном загрузении надо сохранить его под соответствующим этому загрузению номером (см. далее примеры расчета).

4. ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ M, Q, N НА СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

4.1. Эпюры внутренних усилий M, Q, N

При представлении НДС стержневой системы принято строить вдоль стержней графики возникающих в стержнях внутренних усилий. Эти графики в инженерной практике называют эпюрами усилий.

Как было показано в подразделе 1.7, в общем случае в сечениях стержней плоской стержневой системы возникают усилия M, Q, N . В строительной механике из трех эпюр указанных усилий принято считать эпюру изгибающих моментов M основной и, как правило, строить ее первой.

Второй изображают эпюру поперечных сил Q , связанных с изгибающими моментами уравнением равновесия $Q = dM/dx$ для бесконечно малого элемента (см. рис. 1.5 и уравнения равновесия (1.3)), где ось X направлена вдоль оси каждого стержня.

Затем изображают эпюру продольных сил на стержнях.

Такая последовательность удобна, например, при расчете статически определимых, рам вручную, так как, построив эпюру M , можно построить по ней эпюру Q , а затем по эпюрам M и Q построить эпюру N . Это будет продемонстрировано в дальнейшем.

4.2. Эпюра изгибающих моментов M

Правило построения эпюры M

Для построения ординаты эпюры M в каком либо сечении k стержня необходимо выполнить следующие две операции.

1. Подсчитать в сечении k численное значение изгибающего момента M_k

2. Отложить найденное численное значение в виде ординаты перпендикулярно оси стержня *с растянутой изгибающим моментом стороны стержня (со стороны растянутого изгибающим моментом волокна стержня)*.

Численное значение изгибающего момента M_k в сечении k равно численному значению алгебраической суммы $\sum_i M_{k,i}$ моментов $M_{k,i}$ всех сил

P_i , действующих на стержневую систему с любой одной из сторон сечения, взятых относительно точки k на оси стержня:

$$M_k = \sum_i M_{ki} \quad (4.1)$$

Растянутая сторона стержня в сечении, может быть установлена из физических соображений (см. рис. 1.7).

Предположим, что с помощью этого правила на статически определимой стержневой системе в виде консоли ломаного очертания (рис. 4.1) построены три эпюры M соответственно для трех вариантов загрузки консоли сосредоточенным моментом, сосредоточенной силой и равномерно распределенной нагрузкой.

Ординаты соответствующих трех эпюр M построены на растянутой стороне стержней, образующих консоль.

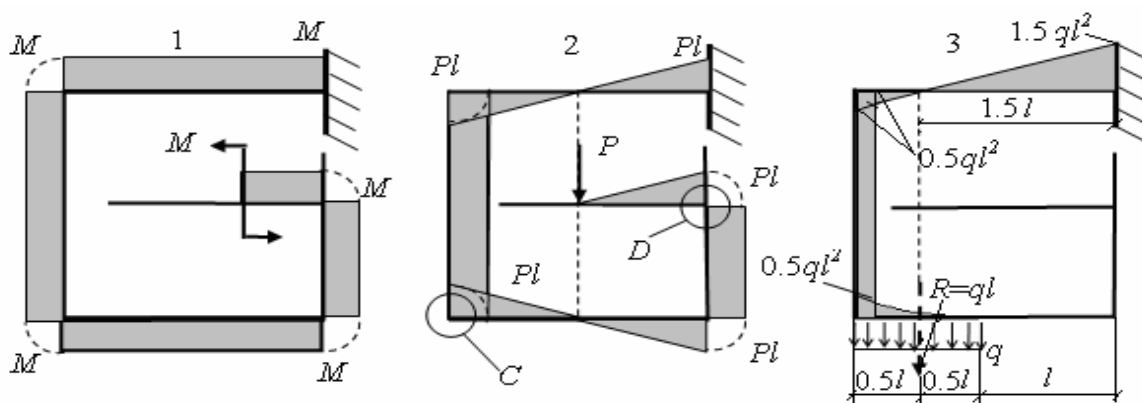


Рис. 4.1

Вид эпюры M , ординаты которой отложены от оси стержня с растянутой стороны стержня (см. рис. 4.1) позволяет отметить следующие признаки правильного вида эпюр изгибающих моментов на стержневых системах.

Признаки правильного вида эпюры M

1. На участке прямого стержня, свободном от нагрузки, эпюра прямолинейна.
2. На участке распределенной нагрузки она очерчена кривой линией, выпуклой в сторону действия нагрузки. Когда нагрузка равномерно распределена вдоль длины стержня, кривая является параболой второй степени.
3. В точке приложения сосредоточенной силы эпюра имеет излом, острие которого направлено в сторону действия силы.
4. В точке приложения сосредоточенного момента эпюра имеет скачок в ординатах, равный величине момента.

5. В сечении, находящемся на границе незагруженного участка стержня и участка, загруженного распределенной нагрузкой, кривая линия эпюры плавно (без излома) переходит в прямолинейную эпюру, которая является касательной к криволинейному участку.

Эти признаки будем использовать как при построении эпюры M вручную, так и для контроля уже построенных эпюр, например, с помощью персонального компьютера, реализующего МКЭ с использованием программы SCAD. Это далее будет продемонстрировано на примерах.

Правило знаков для ординат эпюр M

При построении ординат эпюры M вручную, как это было продемонстрировано на рис. 4.1, растянутая сторона стержня в каком-либо сечении может быть определена из чисто физического представления об изгибе сечения стержня приложенным к нему моментом (см. рис. 1.7).

Однако *при численном расчете, в том числе МКЭ с использованием программы SCAD, каждой ординате эпюры M присваивается знак.*

В дальнейшем при назначении знака ординаты эпюры M , отложенной с растянутой стороны стержня, будем использовать понятия «низ» и «верх» стержня, которые были применены в подразделе 3.5 по отношению к конечному элементу стержня (см. рис. 3.10, рис. 3.11).

Эти понятия были приняты в соответствии с положительным направлением оси $Z1$ местной системы координат конечного элемента (см. рис. 3.10 и рис. 3.11). Но они относятся к любому участку прямого стержня, на котором строится эпюра (см. рис. 1.7), даже если этот участок не разделен на конечные элементы.

Если растянуто «нижнее» волокно стержня, то ордината откладывается от оси стержня «вниз» и ей присваивается знак «+» (рис. 4.2).

Если же растянуто «верхнее» волокно стержня, то ордината откладывается от оси стержня «вверх» и ей присваивается знак «-» (рис. 4.3).

Использование пунктира для обозначения: «низа» стержня; направления оси $X1$ местной системы координат и указания начала (н) и конца (к) конечного элемента

На расчетной схеме стержневой системы, когда изображена вручную вся расчетная схема МКЭ (см., например, рис. 4.4), с целью обозначения «нижней» стороны стержня и положительного направления оси $X1$ неудобно рисовать оси местной системы координат на каждом ее элементе. Удобнее «нижнюю»

сторону конечных элементов отметить пунктиром так, как это показано на рис. 3.10, рис. 3.11 и на рис. 4.2, рис. 4.3.

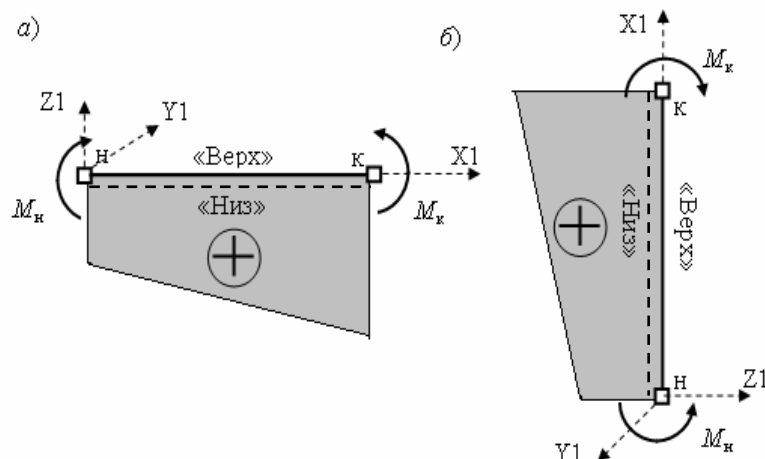


Рис. 4.2

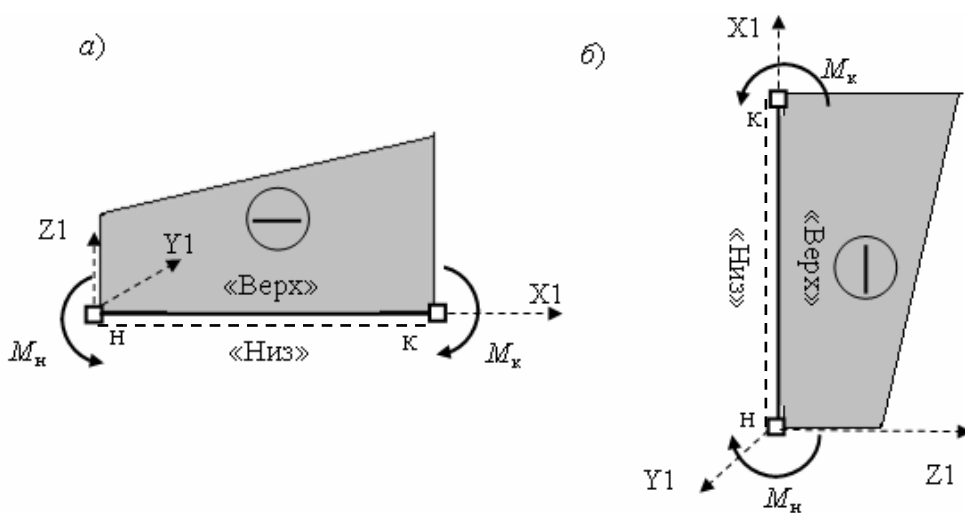


Рис. 4.3

Как известно (см. рис. 3.4), на одном и том же конечном элементе, расположенном в стержневой системе горизонтально, наклонно или вертикально, ось $X1$ МСК может быть направлена либо в одну, либо в обратную сторону.

При этом начало (н) и конец (к) КЭ меняются местами, но ось $Z1$ может остаться направленной в ту же сторону (см. наклонный КЭ соответственно на рис. 3.10 и рис. 3.11) или сменить направление (см. вертикальный стержень на тех же рисунках). Иными словами, с изменением направления оси $X1$ положение «низа» и «верха» на наклонном и горизонтальном КЭ не изменяется а на вертикальном КЭ изменяется.

Таким образом, поставленный «снизу» КЭ пунктир показывает

направление оси $Z1$ МСК, но не показывает направления оси $X1$ и «начальный» (1, н) узел КЭ, где расположено начало осей МСК.

Для того, чтобы пунктир указывал не только на направление оси $Z1$, т.е. «нижней» и «верхней» сторон КЭ, но и направление оси $X1$ правой МСК и, таким образом, указывал начало (н) и конец (к) конечного элемента, *условимся для всех горизонтальных и наклонных конечных элементов «по умолчанию» ось $X1$ направлять вдоль оси стержня «слева – направо» по отношению к «низу» стержня, т.е. так, как она направлена для конечных элементов при $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$ и $270^\circ < \varphi \leq 360^\circ$* (см. рис. 3.4).

Иными словами, *условимся, что пунктир, поставленный с «нижней» стороны горизонтального или наклонного стержня, «по умолчанию» будет показывать не только направление оси $Z1$ «вверх» от оси стержня, но и направление оси $X1$ вдоль стержня, совпадающее с направлением движения по его оси, при котором пунктир остается «справа».*

При смене направления оси $X1$ положение оси $Z1$ и пунктира не изменятся, но начало (н) оси $X1$ будет находиться в «правом» (по отношению к «низу» элемента) узле (оси таких элементов на рис. 3.4 отмечены штриховой линией).

Условимся также «по умолчанию», на вертикальном конечном элементе нижний его узел считать началом (н) осей правой МСК и направлять ось $X1$ вверх. Тогда, с учетом направления оси $Z1$ на этом элементе (см. рис. 3.4) *левая сторона вертикального стержня будет условно считаться «нижней» стороной конечного элемента. Она и отмечается пунктиром* (см. рис. 3.10, рис. 4.2 и рис. 4.3).

При смене направления оси $X1$ на вертикальном стержне и направлении ее сверху вниз (см. вертикальный элемент на рис. 3.4, ось которого обозначена штриховой линией, и рис. 3.11) «началом» (н) оси $X1$ будет верхний узел КЭ. При этом ось $Z1$ сменит направление и «нижней» стороной вертикального стержня станет правая его сторона. Она и должна быть отмечена пунктиром (см. рис. 3.11).

Построение эпюры M на элементе стержня свободном от нагрузки

Из приведенных выше свойств эпюры M (признаков правильной эпюры) известно, что, *если на конечном элементе стержня нет внешней нагрузки, то эпюра изгибающих моментов на нем будет прямолинейной.* Для ее построения достаточно вычислить ординаты только в конечных сечениях такого элемента.

Рассмотрим пример использования этого свойства при построении эпюры

M вручную и приведем методическое указание по использованию этого свойства в программе SCAD.

Пример 1. Если для построения эпюр изгибающих моментов для стержневой системы при трех вариантах ее загрузки (см. схемы 1, 2 и 3 на рис. 4.1) построены расчетные схемы МКЭ (схемы 1, 2 и 3 на рис. 4.4), то их можно использовать и для построения соответствующих эпюр M вручную.

Пунктиром на этих схемах отмечена «нижняя» сторона конечных элементов. При этом пунктир указывает также «по умолчанию» направление оси X1 местной системы координат и на начало (н) и конец (к) конечного элемента (см. рис. 4.2 и рис. 4.3).

Эпюра изгибающих моментов на каждом свободном от нагрузки элементе прямолинейна. Она может быть построена по двум ординатам, подсчитанным для сечений (н) и (к) по концам конечных элементов, подходящих к жестким узлам соответствующих расчетных схем МКЭ.

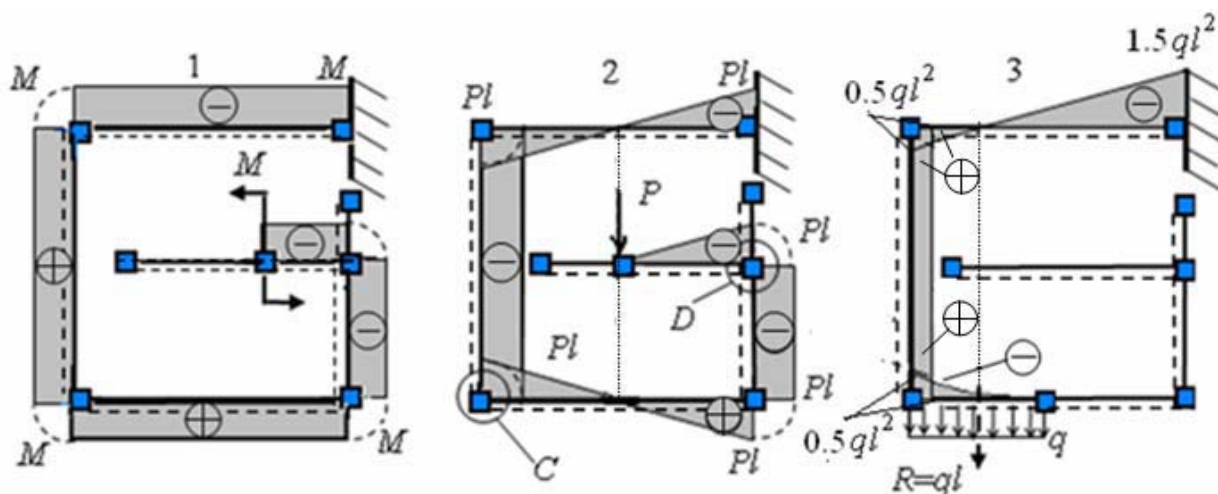


Рис. 4.4

Каждая из таких ординат при ручном расчете вычисляется из уравнения равновесия составленного относительно рассматриваемого сечения стержня для части стержневой системы, расположенной с любой стороны от сечения. Для рассматриваемой системы консольного вида проще составить уравнение равновесия для свободной от заделки части.

Методическое указание при подсчете ординат вручную. Для определения изгибающего момента в сечении стержня, при ручном подсчете алгебраической суммы моментов всех сил с одной стороны от сечения (4.1), рекомендуется сразу ставить знаки слагаемых моментов M_k^r в соответствии с принятым выше правилом знаков для «нижней» и «верхней» сторон стержня.

Затем величина M_k^r в виде ординаты откладывается от оси стержня на растянутой стороне стержня, которая отмечается знаком: при знаке «плюс» ордината откладывается «вниз» (со стороны пунктира); при знаке «минус» – «вверх» (со стороны обратной пунктиру).

В результате в узлах (н) и (к) всех свободных от нагрузки элементов будут получены и отложены в соответствии с принятым правилом ординаты эпюры M . соединяя эти

ординаты на каждом конечном элементе прямыми линиями построим часть эпюры M с линейными участками (см. рис. 4.4).

Методическое указание при расчете с помощью программы SCAD. При использовании программы SCAD для построения эпюры изгибающих моментов необходимо использовать возможность этой программы назначать на конечном элементе необходимое число сечений.

Для конечного элемента, без нагрузки на его пролете, с целью уменьшения численной информации, выдаваемой программой SCAD после расчета стержневой системы МКЭ, рекомендуется назначить только два сечения по концам элемента (см. [2, 19] и методические указания, приведенные в разделе 6 этого учебного пособия).

Построение эпюры на конечном элементе с равномерно распределенной нагрузкой выполняется с использованием второго из перечисленных выше свойств эпюр изгибающих моментов. Рассмотрим практические рекомендации по построению этой эпюры вручную и с помощью программы SCAD.

Построение эпюры M на элементе стержня при действии по его длине равномерно распределенной нагрузки

Если по всей длине КЭ расположена равномерно распределенная нагрузка, то эпюра изгибающих моментов на нем будет иметь вид параболы второй степени с выпуклостью направленной в сторону действия нагрузки.

Для приближенного построения эпюры изгибающих моментов указанного параболического очертания достаточно вычислить только три ее ординаты: сначала в сечениях (н) и (к) конечного элемента, а затем в его среднем сечении (с).

Покажем простой и удобный, приближенный способ вычисления средней ординаты по ординатам в крайних сечениях КЭ.

Пример 2. Вырежем (по узлам «н» (1) и «к» (2) МСК) из стержневой системы элемент, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 4.5, а).

Рассмотрим его, как балку на двух опорах, под действием внутренних усилий по концам элемента и распределенной нагрузки (рис. 4.5, б).

Добавление указанных трех опорных связей не влияет на усилия в элементе, так как в вырезанном состоянии он находится в равновесии, поэтому в добавленных связях усилия (реакции) будут нулевыми.

Изгибающий момент M_c в среднем сечении элемента (см. рис. 4.5, б) можно вычислить как сумму средней ординаты $M_c(\text{лом}) = 0.5(M_n + M_k)$ (рис. 4.5, в) линейной эпюры моментов (линии опорных моментов, или «л.о.м») и средней ординаты $M_c^o = ql^2/8$ параболической эпюры в простой балке на двух опорах от равномерно распределенной нагрузки (рис. 4.5, г):

$$M_c = 0.5(M_n + M_k) + M \quad (4.2)$$

Обе суммируемые ординаты в рассмотренном примере положительны, так как они

расположены снизу от оси балки.

На рис. 4.6 показан вариант, когда ордината $M_c(\text{лом}) = 0.5(M_H + M_K)$ отрицательна (ордината $M_c^o = ql^2/8$ при указанном направлении нагрузки q положительна).

На рис. 4.5 и рис. 4.6 продемонстрирован графоаналитический способ построения параболической эпюры по трем ее суммарным ординатам (M_H, M_c, M_K) и по трем касательным к параболе в соответствующих точках на концах ординат (отмечены крестиком).

Смысл этого графоаналитического способа будет понятен, если рассмотреть на указанных рисунках эпюру $M(R)$ треугольной формы, показанную штриховыми линиями.

Эта эпюра является эпюрой в балке от равнодействующей $R = ql$ распределенной нагрузки. Ее ордината в месте приложения равнодействующей ровно в два раза больше ординаты M_c^o от равномерно распределенной нагрузки (см. рис. 4.5, z и рис. 4.6).

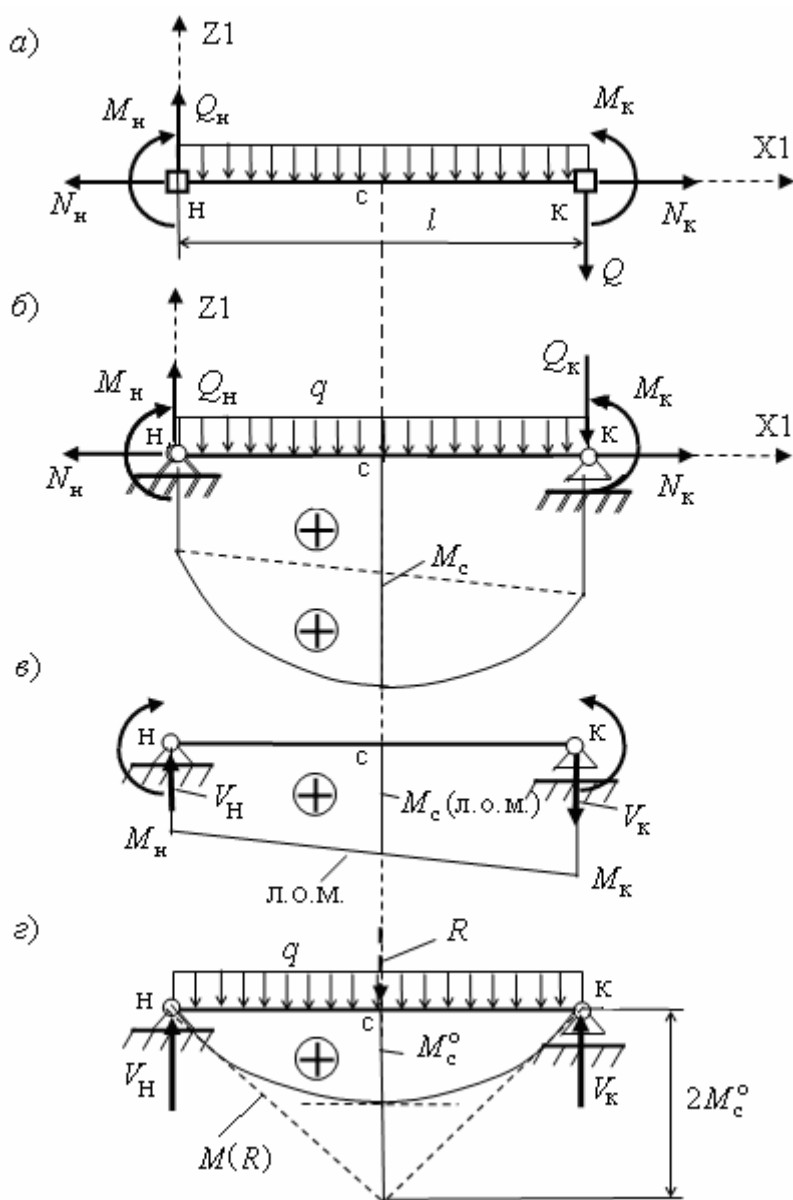


Рис. 4.5

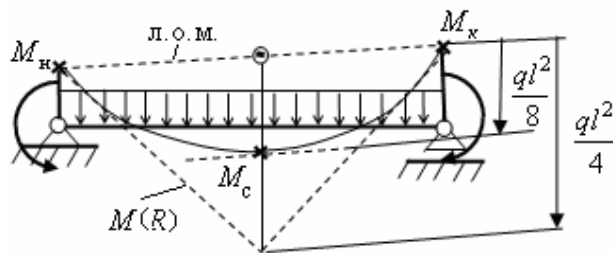


Рис. 4.6

Кроме того, видно, что линии ординат этой эпюры, в точках опор являются касательными к эпюре в виде параболы. Третья касательная к криволинейной эпюре M^o проводится через конец ординаты M_c^o (см. рис. 4.5, з и рис. 4.6).

Поскольку при суммировании ординат в среднем сечении стержня **ордината M_c^o откладывается от л.о.м перпендикулярно оси стержня**, то касательная к криволинейной эпюре в этом сечении должна быть параллельна л.о.м (см. рис. 4.6).

При использовании формулы (4.1) моменты подставляются в нее со своим знаком. В примере на рис. 4.7 предполагается, что ордината M_c (л.о.м.) = $0.5(M_n + M_k)$ отрицательна, а ординат $M_c^o = ql^2/8$ положительна численно больше ординаты M_c (л.о.м.). В результате суммарная ордината M_c будет положительной величиной.

В схеме 3 на рис. 4.4 конечный элемент, на который действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , изгибающие моменты на левом (н) и правом (к) концах при вычислении с помощью уравнения равновесия (4.1) оказались соответственно равными:

$$M_n^r = R \cdot (0.5l) = 0.5ql; M_k^r = 0 \quad (4.3)$$

Применение указанного графоаналитического приема для этого случая продемонстрировано на рис. 4.7.

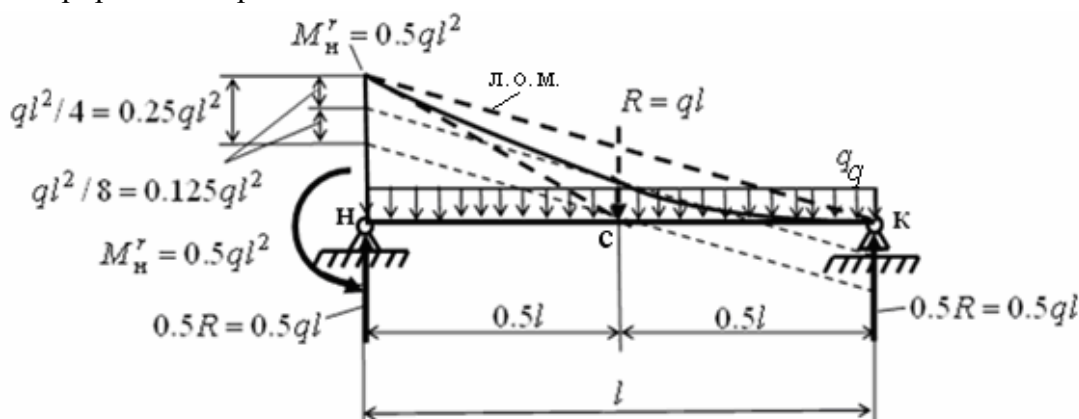


Рис. 4.7

Так как рассматриваемый на схеме 3 рис. 4.4 элемент является консольным, то изгибающий момент в среднем сечении консоли просто вычисляется по формуле (4.1):

$$M_c^r = -\left(\frac{ql}{2}\right) \cdot \left(\frac{l}{4}\right) = -\frac{ql^2}{8} = -0.125ql^2.$$

Методическое указание при расчете с помощью программы SCAD. При использовании программы SCAD для построения эпюры изгибающих моментов необходимо использовать возможность этой программы назначать на конечном элементе необходимое число сечений.

Для конечного элемента, с равномерно распределенной нагрузкой на его пролете, с целью уменьшения численной информации, выдаваемой программой SCAD после расчета стержневой системы МКЭ, достаточно назначить по длине элемента только три сечения: два по концам элемента и одно по его середине (см. [2, 19] и методические указания, приведенные в разделе 6 данного учебного пособия).

Рассмотренный прием может быть использован и при другого вида нагрузке. Это будет продемонстрировано в дальнейшем при решении практических задач.

4.3. Эпюра поперечных сил Q

Правила построения ординат эпюры Q

Для построения ординаты эпюры Q в каком – либо сечении необходимо:

1. Определить численное значение поперечной силы в сечении и ее знак.
2. Отложить найденное численное значение в виде ординаты перпендикулярно оси стержня с одной из сторон стержня в соответствии со знаком Q , который связывают с направлением ее вектора (см. рис. 1.7 и рис. 3.10, рис. 3.11).

При положительном (отрицательном) знаке ординату откладывают с положительной (отрицательной) стороны оси Z_1 МСК, т.е. на «верхней» («нижней») стороне стержня.

Численное значение поперечной силы в сечении и ее знак можно определить двумя способами.

Способ 1. Определение поперечной силы в сечении стержня из уравнения равновесия части стержневой системы слева или справа от сечения

Численное значение поперечной силы Q_k в любом сечении k стержня равно численному значению алгебраической суммы $\sum_i P_{n,i}$ проекций всех внешних сил P_i , действующих на стержневую систему с любой одной из сторон сечения, на нормаль n к оси стержня в сечении k :

$$Q_k = \sum_i P_{n,i}, \quad (4.4)$$

Знак поперечной силы Q_k определяется по направлению ее вектора в сечении k (см. рис. 1.7).

Применительно к узлам конечного элемента типа 2 «Стержень плоской рамы» правило определения знака поперечной силы в узлах КЭ было сформулировано в подразделе 3.5.

Построение эпюры Q первым способом на участке прямого стержня (или на прямом конечном элементе) без нагрузки по его длине

В этом случае необходимо определить численное значение и знак ординаты Q_n в начале участка, например, в начале (н) конечного элемента (рис. 4.8) и отложить ее в выбранном масштабе от оси стержня.

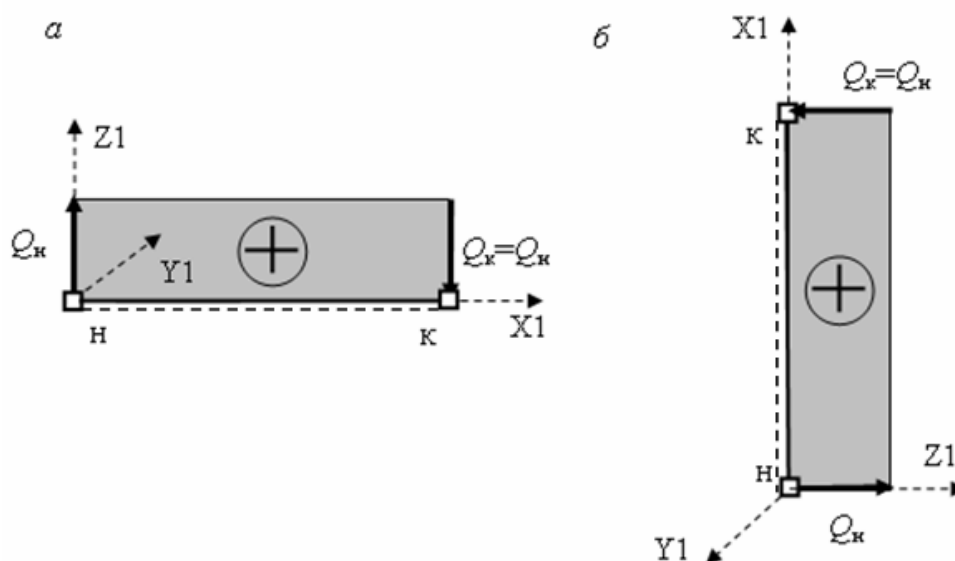


Рис. 4.8

При отсутствии нагрузки по длине участка стержня (или на конечном элементе) определенная поперечная сила Q_n из условия равновесия останется постоянной для любого сечения этого участка стержня (конечного элемента), в том числе на его конце ($Q_k = Q_n$). Поэтому эпюра Q будет иметь вид, изображенный на рис. 4.8, когда поперечная сила положительна, или вид, изображенный на рис. 4.9, когда поперечная сила имеет знак «минус».

При этом в сечениях «н» (1) и «к» (2) КЭ в МСК показаны направления векторов положительных и отрицательных поперечных сил.

Направление поперечной силы в любом сечении стержня можно найти по правилу «тупого угла»: если идти по эпюре моментов, построенной на растянутой стороне стержня, в направлении сечения стержня, то вектор поперечной силы в этом сечении образует тупой угол с эпюрой M (или с

касательной к ней, если эпюра M криволинейна) (рис. 4.10).

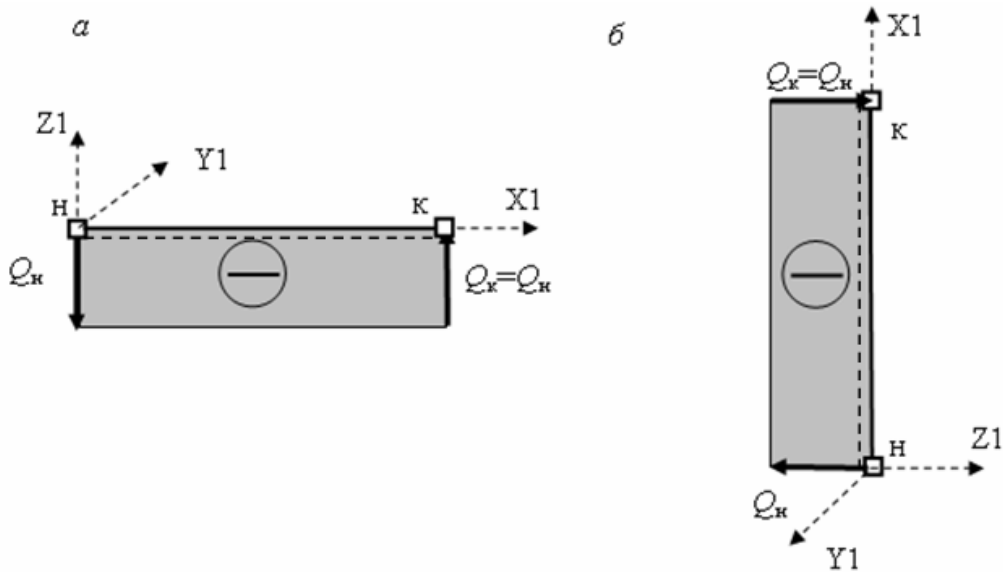


Рис. 4.9

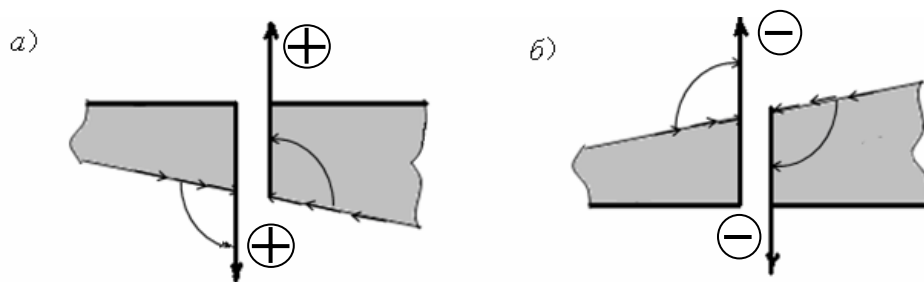


Рис. 4.10

Направление движения по эпюре моментов к сечению показано на рис. 4.10 стрелками. Полученное направление вектора Q указывает и на его знак в соответствии с направлением на стержне оси $Z1$.

Способ 2. Определение поперечной силы в сечении стержня по эпюре моментов из уравнения равновесия $Q = dM / dx$ для бесконечно малого элемента dx

Численное значение Q получается из того условия, что $Q = dM / dx = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона касательной к эпюре M в рассматриваемом сечении к оси стержня.

При линейной эпюре M угол α равен углу наклона самой эпюры к оси стержня (рис. 4.11, рис. 4.12):

$$Q = \frac{dM}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_K - M_H}{l}. \quad (4.5)$$

Знак Q определяется по знаку производных dx и dM .

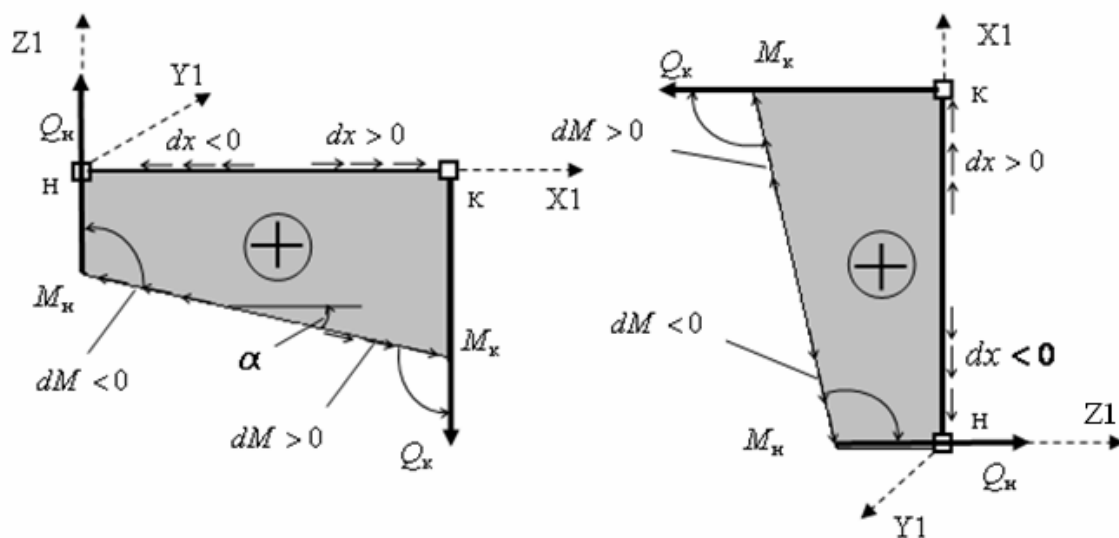


Рис. 4. 11

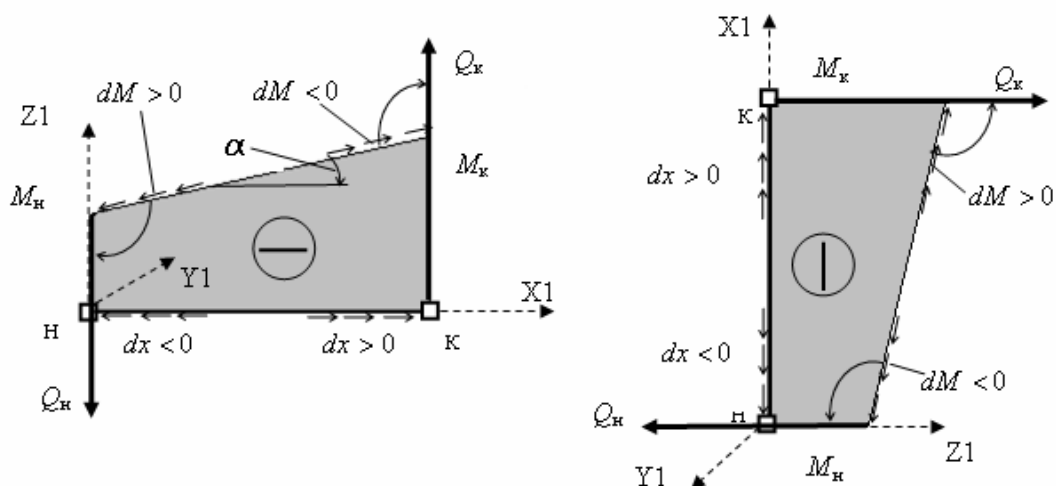


Рис. 4.12

На рис.4.11, 4.12 приведены эпюры M на горизонтальном и вертикальном конечных элементах соответственно с положительными и отрицательными знаками ординат. Показаны направления, по которым происходит положительное или отрицательное приращение производных dx и dM .

На рис. 4.11 и рис. 4.12 показан и способ получения направления векторов поперечных сил (а значит и знака Q в соответствии с осью $Z1$) в начальном (н) и конечном (к) сечениях конечных элементов по правилу «тупого узла».

Пример 3. Построим эпюры Q для трех расчетных схем, для которых на рис. 4.1 и 4.4 были построены эпюры M , первым способом. Эпюры Q для приведенных примеров первым способом строятся просто вручную. Они приведены на рис. 4.13.

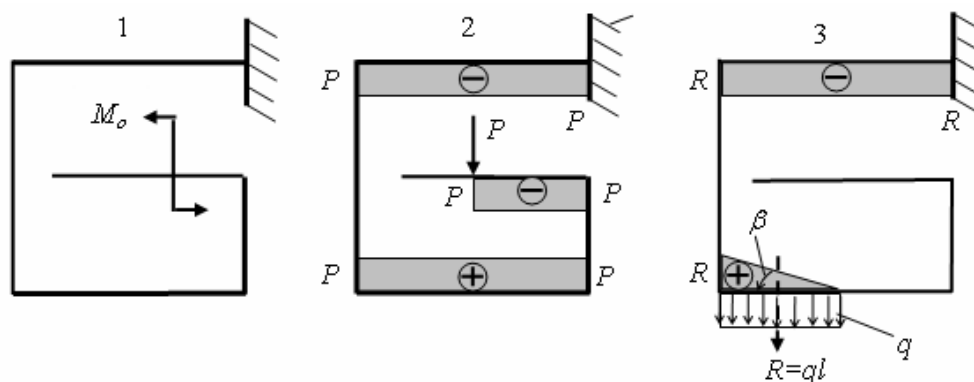


Рис. 4.13

Анализируя эти эпюры, можно отметить следующие свойства эпюры Q , являющиеся признаками ее правильного вида, которые будем далее использовать при контроле эпюры Q .

Признаки правильного вида эпюры Q

1. На прямом элементе без нагрузки по его длине поперечная сила постоянна и эпюра Q имеет прямоугольную форму.

2. В сечении, которое совпадает с действующей поперек оси стержня сосредоточенной силой, ординаты эпюры Q слева и справа от силы имеют скачок, равный величине этой силы.

3. На участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра Q прямолинейна и имеет наклон к оси стержня (рис. 3.11, 3), тангенс угла которого равен интенсивности нагрузки $q = dQ / dx = \operatorname{tg} \beta$. Нулевому значению на эпюре Q на участке с равномерно распределенной нагрузкой соответствует экстремальное значение на эпюре M .

Построение эпюры Q на участке прямого стержня (или на прямом конечном элементе) с равномерно распределенной нагрузкой по его длине

Вырежем участок стержня с равномерно распределенной нагрузкой по его длине и представим его в виде конечного элемента, отнесенного к местной системе координат (см. рис. 4.5, а).

Представив этот элемент, находящийся в равновесии под действием нагрузки и усилий по его концам, как балку на двух опорах (см. рис. 4.5, б), используем принцип независимости действия сил и рассмотрим балку отдельно от действия только опорных моментов (см. рис. 4.5, в) и только от нагрузки (см. рис. 4.5, г). Поперечные силы и продольные силы, действующие на балку по ее концам ни изгибающих моментов ни поперечных сил в балке не вызывают, поэтому далее они не рассматриваются.

При действии на балку только равномерно распределенной нагрузки

эпюра Q^o поперечной силы приведена на рис. 4.14, а.

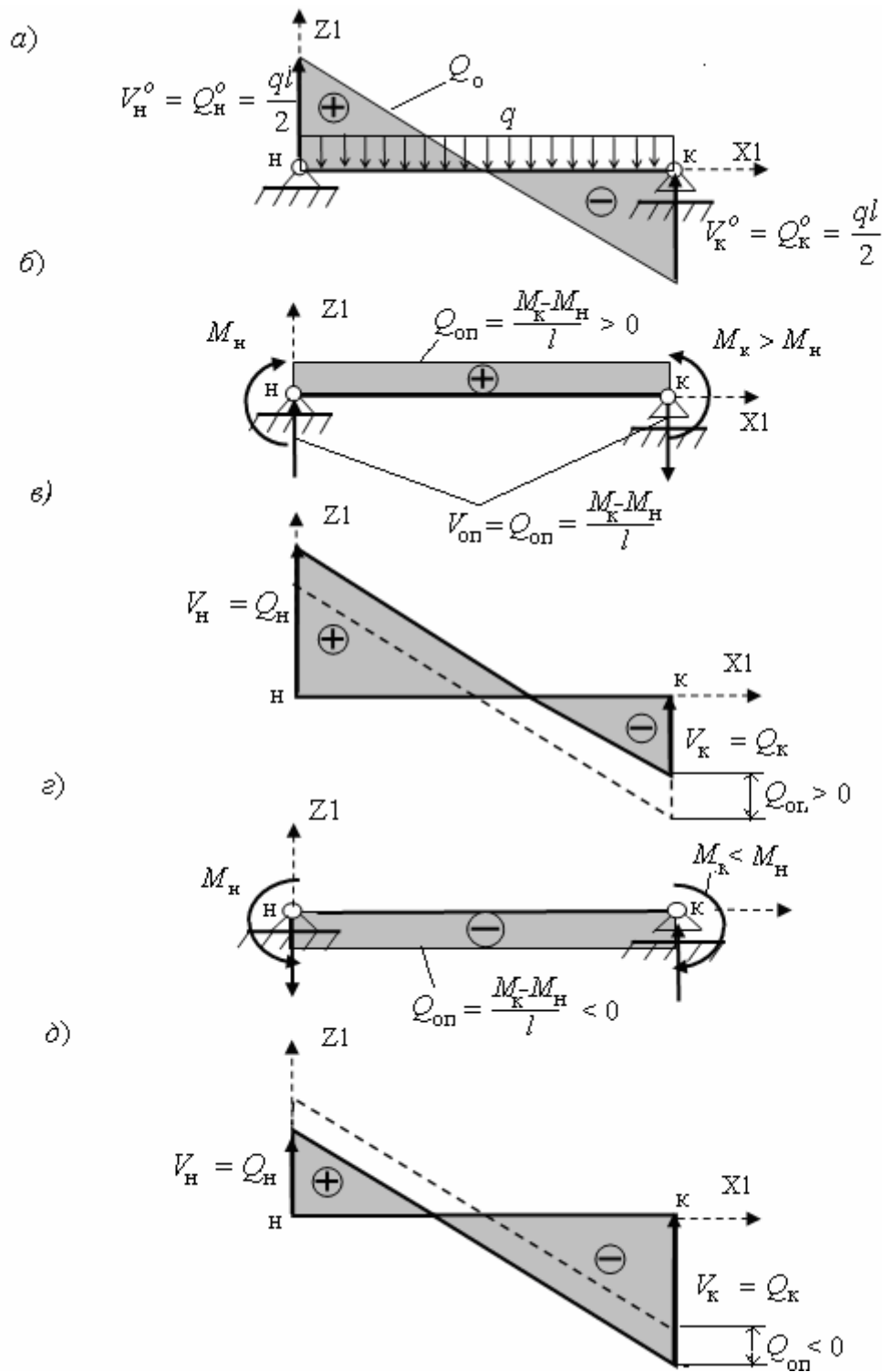


Рис. 4.14

Ее ординаты в начальном и конечном сечениях балки равны опорным реакциям:

$$Q_{H,K}^o = \pm 0.5ql. \quad (4.6)$$

Эпюра поперечных сил от действия на балку опорных моментов в любом

сечении балки имеет постоянную ординату (рис. 4.14, б), равную

$$Q_{\text{оп}} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_{\text{к}} - M_{\text{н}}}{l}. \quad (4.7)$$

Знак ординаты зависит от соотношения опорных моментов $M_{\text{н}}$ и $M_{\text{к}}$ в выражении (4.7). Если $M_{\text{к}} > M_{\text{н}}$, то знак величины $Q_{\text{оп}}$ будет положительным (см. рис. 4.14, б), в противном случае – отрицательным (см. рис. 4.14, в).

Суммарная эпюра Q получится линейной, поэтому для ее построения достаточно вычислить ординаты только в начальном (н) и конечном (к) сечениях рассматриваемого участка стержня (конечного элемента):

$$Q_{\text{н,к}} = Q_{\text{н,к}}^0 + Q_{\text{оп}} = \pm 0.5ql + \frac{M_{\text{к}} - M_{\text{н}}}{l}. \quad (4.8)$$

Суммарные эпюры Q для вариантов, когда $Q_{\text{оп}} > 0$ и $Q_{\text{оп}} < 0$, построены соответственно на рис. 4.14, в и рис. 4.14, д.

Вычислим по формуле (4.8) ординаты эпюры Q на участке с равномерно распределенной нагрузкой на схеме 3 рис. 4.13.

При назначенной МСК (см. рис. 4.4) для конечного элемента с равномерно распределенной нагрузкой имеем $M_{\text{н}} = -0.5ql^2$, $M_{\text{к}} = 0$. Тогда по формуле (4.8) для этого же элемента получаем ординаты эпюры перерезывающих сил в начальном (н) и конечном (к) сечениях:

$$Q_{\text{н,к}} = \pm 0.5ql + \frac{0 - (-0.5ql^2)}{l} = \pm 0.5ql + 0.5ql = \begin{cases} ql \\ 0 \end{cases}. \quad (4.9)$$

Результат расчета рассмотренным способом совпадает с результатом расчета этих ординат первым способом (см. схему 3 на рис. 4.13).

4.4. Эпюра продольных сил N

Правила построения ординат эпюры N

Для построения ординаты эпюры N в каком – либо сечении стержня необходимо:

1. Одним из приведенных ниже способов определить численное значение продольной силы в сечении и ее знак.
2. Отложить найденное численное значение N в виде ординаты перпендикулярно оси стержня *с одной из сторон стержня в соответствии со знаком N* .

Принято положительную (отрицательную) ординату продольной силы N откладывать с положительной (отрицательной) стороны оси Z_1 МСК, т.е. на «верхней» («нижней») стороне стержня.

Способ 1. Определение продольной силы в сечении стержня из уравнения равновесия части стержня слева или справа от сечения

Численное значение продольной силы N_k в любом сечении k стержня равно численному значению алгебраической суммы проекций **всех внешних сил** P_i , действующих на стержневую систему **с любой одной из сторон сечения**, на касательную к оси стержня в сечении k :

$$N_k = \sum_i^{\text{слева}} P_{\text{кас},i} = \sum_i^{\text{справа}} P_{\text{кас},i} \quad (4.10)$$

Касательная к оси прямолинейного стержневого КЭ совпадает с осью $X1$ его МСК, поэтому $P_{\text{кас},i} = P_{X1,i}$.

Знак продольной силы N_k определяется по направлению ее вектора в сечении k (см. рис. 1.7):

Растягивающая продольная сила в сечении стержня считается положительной, сжимающая – отрицательной (см. рис. 1.7 и рис. 4.15).

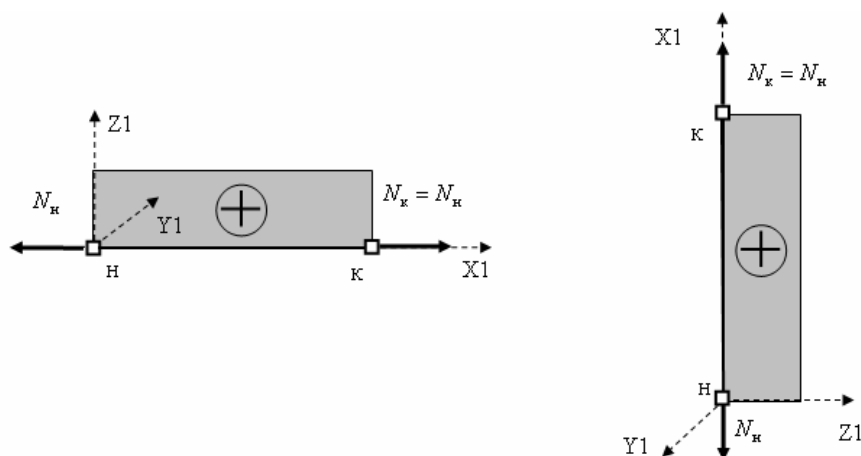


Рис.4.15

Эпюры N для стержневой системы, рассмотренной в предыдущих подразделах (см. рис. 4.1, рис. 4.13) от трех видов нагрузок, приведены на схемах 1, 2, 3 рис. 4.16.

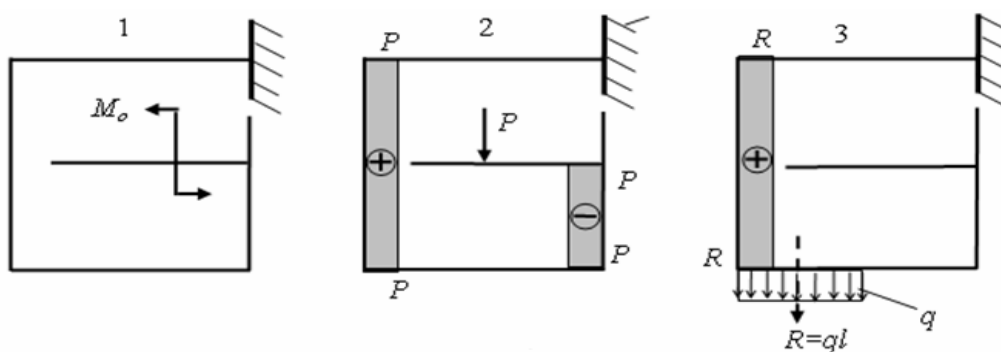


Рис. 4.16

Ординаты этих эпюр во всех сечениях вычислены рассмотренным способом, т. е с использованием уравнений равновесия (4.10).

Способ 2. Определение продольной силы в сечении стержня из рассмотрения равновесия узлов стержневой системы

Для иллюстрации второго способа рассмотрим узел C на схеме 2 рис. 4.1. Вырежем узел и рассмотрим его равновесие под действием поперечных и продольных сил. Векторы поперечных сил, действующие на узел, найдем по правилу «тупого узла» (см. рис. 4.10). Продольные силы в двух разрезанных стержнях (с номерами s и r) определятся из двух уравнений равновесия вида $\sum X = 0$; $\sum Z = 0$ (рис. 4.17).

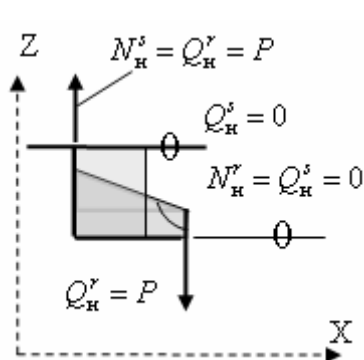


Рис. 4.17

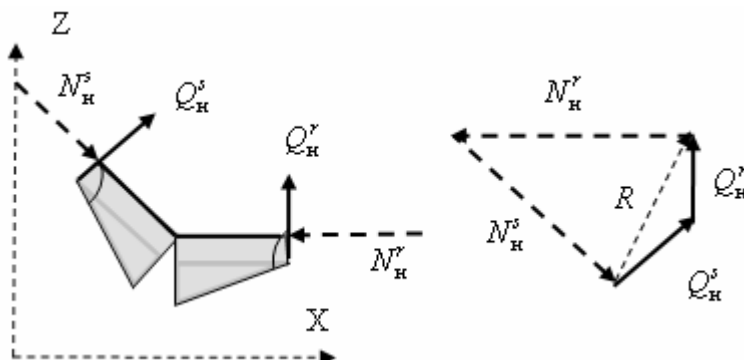


Рис. 4.18

Рассмотрим теперь некоторый узел с двумя наклонными по отношению друг к другу стержнями (рис. 4.18).

Предположим, что поперечные силы, действующие на узел, известны. Для определения продольных сил в двух разрезанных стержнях (с номерами s и r) можно использовать те же уравнения равновесия, что и для предыдущего узла. Но теперь при аналитическом решении придется решить систему двух уравнений с двумя неизвестными.

На рис. 4.18 равновесие рассматриваемого узла отражено графически с помощью многоугольника сил.

Отложив последовательно (в любой очередности) в выбранном масштабе сил известные векторы поперечных сил в проведенных (бесконечно близко к узлу) сечениях, получим их равнодействующую R .

Эту равнодействующую раскладываем на два направления, параллельных осям разрезанных стержней и замыкаем треугольник сил, поставив направления векторов искомых продольных сил так, чтобы равнодействующая всех сил, действующих на узел, была равна нулю.

Направления найденных векторов продольных сил показывают, сжаты

или растянуты стержни (в нашем примере – сжаты).

Очевидно, что из двух уравнений равновесия узла могут быть определены продольные силы только в двух стержнях.

Если же вырезанный узел имеет большее число стержней, то все остальные продольные силы, кроме искоемых двух (не лежащих на одной прямой) должны быть определены из каких-то других узлов, иначе продольные усилия в узле будут статически неопределимы..

В качестве примера статически определимого узла с числом стержней, сходящихся в узле, больше двух рассмотрим узел D (см. схему 2 на рис. 4.1).

Из его рассмотрения видим, что три вектора поперечных сил в сечениях стержней у узла известны (два из них равны нулю). Известно и продольное усилие в примыкающей сверху к узлу консоли (оно равно нулю). Поэтому, хотя в узле и сходится более двух стержней, неизвестных продольных усилий будет только два. Они и определяются из двух уравнений равновесия.

Признаки правильного вида эпюры N

1. На прямом стержне без нагрузки по его длине продольная сила постоянна и эпюра N имеет прямоугольную форму.

2. В сечении, которое совпадает с действующей вдоль оси стержня сосредоточенной силой, ординаты эпюры Q слева и справа от силы имеют скачок, равный величине этой силы.

3. На участке с равномерно распределенной вдоль стержня нагрузкой интенсивностью q_{x1} эпюра N прямолинейна и имеет наклон к оси стержня, тангенс угла которого равен интенсивности нагрузки $q_{x1} = dN / dx = \operatorname{tg} \beta$.

Последний вариант рассмотрен на рис. 4.19 для прямолинейного КЭ.

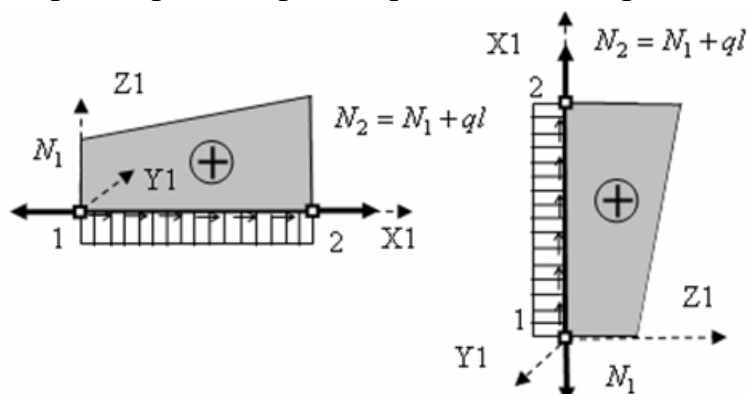


Рис. 4.19

4.5. Используемые способы контроля построенных эпюр M , Q , N

После построения эпюр M , Q , N вручную или на ПК, с помощью,

например, программы SCAD, они должны быть обязательно проверены расчетчиком.

Этот контроль выполняется как по внешнему виду эпюр (по перечисленным выше свойствам (признакам) правильных эпюр), так и путем проверки равновесия стержневой системы и любых отсеченных из нее частей.

В практике расчетов для контроля построенных эпюр используются следующие варианты применения трех уравнений равновесия для плоской задачи:

1. Используется уравнение равновесия $Q=dM/dx$ бесконечно малого элемента dx стержня. С его помощью проверяется соответствие эпюр M и Q по их виду и знаку.

2. Рассматривается равновесие всей стержневой системы, т.е. используются три уравнения равновесия для плоской стержневой системы вида системы $\sum_i M_i = 0$, системы $\sum_i P_{i,X} = 0$; системы $\sum_i P_{i,Z} = 0$ (конструкция относится к общей системе координат XOZ).

3. Рассматривается равновесие узлов стержневой системы, т.е. используются те же три вида уравнений равновесия, но для любого вырезанного узла: $\sum_i^{\text{узла}} M_i = 0$, $\sum_i^{\text{узла}} P_{i,X} = 0$; $\sum_i^{\text{узла}} P_{i,Z} = 0$, где i – номер стержня, подходящего к узлу.

3.1. Обычно равновесие узлов по моментам ($\sum_i^{\text{узла}} M_i = 0$) иллюстрируется показом вырезанных узлов (см. например, рис. 4.17 и рис. 4.18).

При выполнении расчетных работ учащемуся, для наглядности равновесия узлов по моментам, рекомендуется показывать вырезанные узлы рядом с чертежом эпюры M (см. далее примеры расчетов стержневых систем).

3.2. Рассмотрение оставшихся двух уравнений равновесия узлов плоской стержневой системы ($\sum_i^{\text{узла}} P_{i,X} = 0$; $\sum_i^{\text{узла}} P_{i,Z} = 0$) отражает равновесие узлов по поперечным и продольным силам.

Это равновесие также иллюстрируют демонстрацией вырезанных узлов. Уравнения равновесия узлов проверяются либо аналитически (записываются уравнения равновесия на наиболее подходящие для проверки оси) или показывается замкнутый при равновесии многоугольник всех сил, действующих на узел (см., например, рис. 4.18).

4. Очень быстрой проверкой правильности эпюр в рамах является проверка равновесия вырезанных ригелей рам. Эта проверка продемонстрирована далее во многих примерах расчета рам.

Перейдем к рассмотрению рациональных способов использования уравнений равновесия вручную (без применения ПК) для определения усилий в различных типах статически определимых стержневых систем.

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ВЫБОРА РАЦИОНАЛЬНОГО СПОСОБА ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСИЛИЙ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

5.1. Последовательность определения усилий вручную

Усилия при расчете плоских статически определимых систем определяются в различных связях: в опорных (опорные реакции), в шарнирных (давления в шарнирах), в трех условных внутренних связях в каждом сечении стержней (внутренние усилия M, Q, N).

Последовательность определения этих усилий при ручном расчете стержневой системы (без применения ПК) может быть различной и зависит как от поставленной задачи ручного расчета, так и от конструктивных особенностей стержневой системы.

В этом подразделе учебного пособия будем рассматривать статически определимую стержневую систему с точки зрения необходимости построения в ней вручную эпюр внутренних усилий M, Q, N . С этой точки зрения будем строить и последовательность решения задачи, имея также в виду построение наиболее рационального и наглядного пути определения усилий.

В строительной механике стержневых систем при построении вручную (без использования ПК) эпюр M, Q, N в таких статически определимых стержневых системах как рамы и балки принято строить вначале эпюру M , так как затем по ней может быть построена эпюра Q . Для рам по эпюре Q может быть построена эпюра N (см. подраздел 4.4).

В общем случае построение эпюры M может быть затруднено или невозможно без предварительного определения опорных реакций и давлений в шарнирах. Поэтому расчет статически определимых стержневых систем вручную обычно начинают с определения именно этих усилий.

Некоторые рассуждения на тему определения усилий в опорных связях и

давлений в шарнирах были приведены в подразделе 2.4. Там рассмотрены две задачи.

При решении первой задачи в стержневой системе удаляются все опорные связи и связи в шарнирах и заменяются соответствующими усилиями. Стержневая система превращается в систему отдельных дисков, для каждого из которых можно составить три уравнения равновесия. При этом в статически определимой системе будет соблюдаться равенство (2.17). Из $3n_d$ уравнений равновесия и определяются все опорные реакции и все давления в шарнирах. Затем на каждом диске отдельно могут быть построены эпюры усилий.

При втором варианте решения задачи в стержневой системе вначале удаляются только опорные связи. По шарнирам, соединяющим диски между собой, система не разрезается.

Примечание. В статически определимых рамах с дисками в виде замкнутых контуров для построения эпюр усилий необходимо выполнить «раскрытие» контуров путем разрезания одного из трех шарниров, имеющих в контуре (удаление двух связей) и определение заменяющих шарнир двух давлений. Это будет продемонстрировано в примере подраздела (5.3).

После определения опорных реакций и по два усилия в разрезанном шарнире каждого контура также возможно построение всех эпюр усилий. Соответствующие примеры приведены в подразделах (5.3) и (5.4).

Иногда построение эпюры M может быть выполнено с предварительным определением только части опорных реакций стержневой системы, или даже без определения опорных реакций. Это будет продемонстрировано на примере расчета рамы в подразделе (5.3).

В данном разделе учебного пособия продемонстрированы примеры рационального использования конструктивных особенностей стержневых систем при определении: усилий в сечениях стержней, опорных реакций и давлений в шарнирах.

5.2. Использование этажной схемы шарнирной балки

Изучим этот способ на примере шарнирной балки, расчетная схема которой изображена на рис. 1.2, в.

Придадим балке конкретные размеры и загрузим ее конкретной нагрузкой (рис. 5.1, а). Пусть $l_1 = l_2 = l$; $l_3 = 1.4l$; $a = b = 0.2l$; $c = 0.15l$; $d = 0.2l$; $q_1 = 2q$; $q_2 = q$; $P_1 = P_2 = 0.6ql$; $M_o = 0.2ql^2$.

При выполнении структурного анализа этой шарнирной балки с целью исследования ее геометрической неизменяемости (см. подраздел 2.5) была

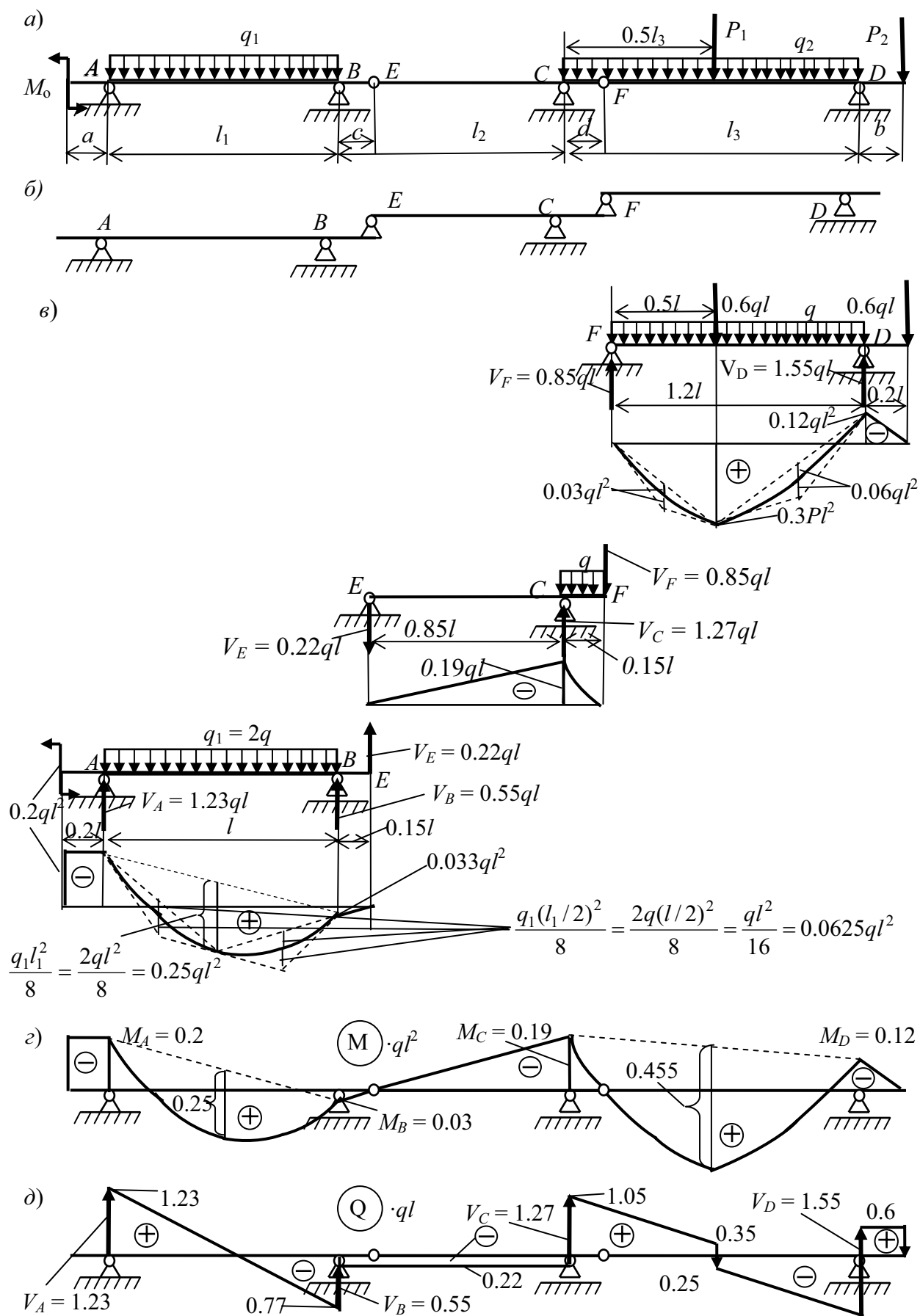


Рис. 5.1

использована этажная схема (рис. 5.1,б), Она показала, что балка является геометрически неизменяемой статически определимой системой.

Этажная схема оказывается удобной для рационального применения уравнений равновесия при определении опорных реакций балки и усилий в ее сечениях.

Действительно, из этажной схемы хорошо видно, что звено FD является самой верхней прикрепленной частью конструкции и может быть рассчитано независимо от других. Применив уравнения равновесия для расчета этой прикрепленной части и определив в числе других неизвестных и опорную реакцию V_F , можно перейти к расчету оставшейся нижележащей части балки AF , которая по отношению к прикрепленному звену FD являлась основной частью конструкции.

Анализируя нижележащую часть AF видим, что в ней звено EF является прикрепленной частью, а звено AB – основной частью конструкции. При этом реакцию V_F необходимо приложить как нагрузку на нижнюю часть, направленную, конечно, в обратную сторону по отношению с направлением реакции V_F на вышележащую часть конструкции – звено FD .

Основное звено AB рассчитать отдельно нельзя, так как не известна величина V_E давления на него вышележащей прикрепленной части. Поэтому продолжением расчета будет рассмотрение сначала прикрепленной части, а затем основной.

Указанная процедура расчета шарнирной балки, называемая аналитическим способом, обычно применялась при ручном расчете с применением малых вычислительных средств (например, калькулятора).

Результаты такого расчета для рассматриваемой балки, взятые из учебного пособия [7], приведены на рис. 5.1, в-д.

5.3. Использование конструктивных особенностей статически определимых рам без замкнутых контуров

Рассмотрим вначале раму, изображенную на рис. 5.2,а.

Рама статически определима, т.к.:

- 1) по формуле (2.21) получаем $n = (4 + 3 \cdot 0) - (3 + 1) = 0$;
- 2) простой структурный анализ показывает, что рама геометрически неизменяема.

Отметим, что рама состоит из основной части в виде диска AC , прикрепленного к основанию тремя связями в защемляющей опоре A , и прикрепленной части в виде диска CB . Последний диск прикреплен двумя

связями в шарнире C к основному диску и одной связью (вертикальной) – к основанию.

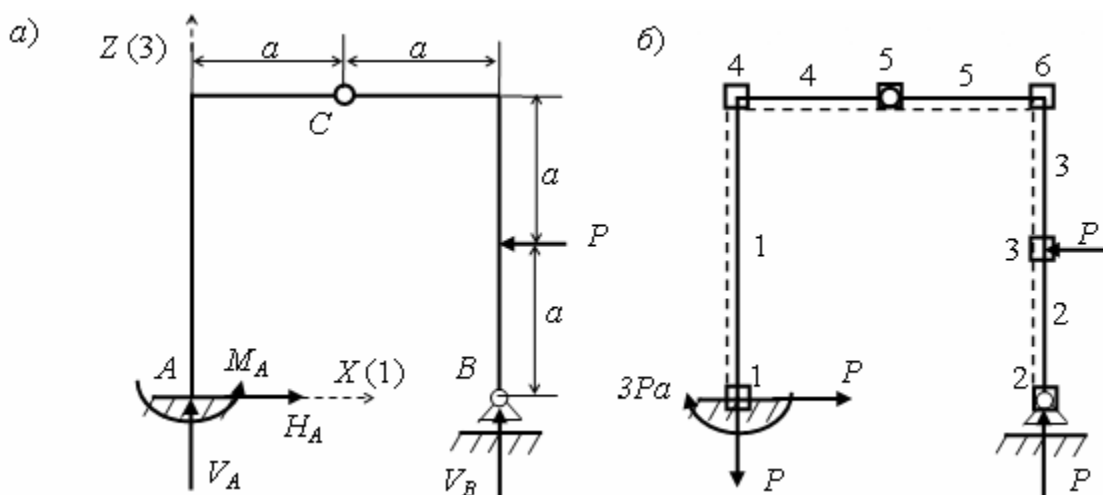


Рис. 5.2

Поскольку рама статически определима, с помощью уравнений равновесия в ней можно определить любые усилия.

Для того, чтобы иметь возможность полного сопоставления с результатами расчета рамы на ПК с использованием программы SCAD, реализующей МКЭ, разобьем раму на те же КЭ (рис. 5.2, б), на которые она разбивается при ее расчете по указанной программе (см. подраздел 3)

Знаки внутренних усилий будем определять в соответствии с заданной для каждого КЭ местной системой осей координат по правилам, принятым в программе SCAD (см. раздел 4).

Чтобы не рисовать на каждом стержне оси МСК, при ручном счете будем отмечать ее на схеме стержневой системы с помощью «правила пунктира» (см. подраздел 4.2).

В соответствии с заданной нагрузкой и сделанной разбивкой рамы на КЭ еще до выполнения расчетов обращаем внимание на то, что на каждом элементе эпюра M будет прямолинейна. Это означает, что для ее построения на каждом элементе достаточно иметь две ординаты эпюры изгибающих моментов: в начальном и конечном сечении элементов. При этом очевидно также, что концевые ординаты в узле, где сходятся только два соседних элемента, будут численно равны друг другу (знак, зависящий от направления оси Z_1 МСК на этих элементах, может различаться, см. раздел 4).

Поставим задачу определения опорных реакций и построения эпюр усилий M , Q , N рамы.

Последовательность решения задачи вручную

Структура рамы такова, что выполнить поставленную задачу можно в различной последовательности. Различие вариантов состоит, прежде всего, в подходе к определению опорных реакций, а именно:

Вариант 1. Прежде чем приступать к построению эпюр усилий можно определить все четыре реакции (H_A, V_A, M_A, V_B). Затем построить эпюры M, Q, N

Вариант 2. Определить только реакцию V_B . Затем построить эпюры M, Q, N , в процессе построения которых определятся и остальные опорные реакции.

Вариант 3. Эпюра M может быть построена сразу, без определения опорных реакций. Затем по ней с использованием уравнения $Q = dM/dx$ может быть построена эпюра Q и потом из рассмотрения равновесия узлов рамы могут быть определены продольные силы в элементах рамы и построена эпюра N .

Первый вариант последовательности решения задачи. При подсчете степени статической неопределимости n (см. начало подраздела 5.3) сопоставлялось число (4) неизвестных опорных реакций рамы (H_A, V_A, M_A, V_B) с числом (3+1) уравнений равновесия, которые можно составить для их определения. Очевидно, что эти уравнения можно записать в виде:

$$1. \sum X = 0; \quad 2. \sum Z = 0; \quad 3. \sum M_A = 0; \quad 4. \sum M_C^{\text{справа}} = 0 \quad (5.1)$$

Поэтому и решение задачи можно начать с решения этой системы уравнений. Это позволит сразу определить опорные реакции рамы.

Решение системы уравнений можно выполнить по-разному.

1. Можно сразу составить всю систему уравнений, назначив направления искомых реакций произвольно, например, в соответствии с направлением общей системы осей координат для рамы (рис. 5.2, *а*), и решить ее (для рам с многими неизвестными система уравнений может быть решена с помощью специальной программы для ПК, например, с помощью программы, имеющейся в учебном классе ПК).

2. При решении простых задач рационализация решения системы уравнений состоит в том, что необходимо, прежде всего, выделить из системы уравнений уравнения равновесия с одной неизвестной реакцией. Например, в рассматриваемой системе уравнений таких уравнений два (первое и четвертое).

Решив эти уравнения, с учетом уже найденных неизвестных продолжить поиск таких же уравнений. Если таковых нет, искать системы уравнений с двумя неизвестными и т. д.

В нашем случае вся система уравнений может быть решена как отдельное решение четырех уравнений с одним неизвестным каждое:

1. Из $\sum X = 0$ найдем $H_A = P$.

2. Из $\sum M_C^{\text{справа}} = 0$ найдем $V_B = P$.

3. Из $\sum Z = 0$ получим $V_A = -P$.

4. Из $\sum M_A = 0$ определим, что реактивный момент в заделке равен $M_A = -3Pa$.

Знак « $-$ » у реакции V_A и у момента M_A показывает, что каждая из этих реакций направлена в обратную сторону по сравнению с соответственно первоначально заданным направлением (см. рис. 5.2, а).

Неправильные направления реакций надо зачеркнуть и поставить правильные. В нашем случае правильные направления реакций и их определенные значения (в общем виде) приведены на рис. 5.2, б).

Определив опорные реакции можно достаточно быстро построить эпюры внутренних усилий M, Q, N . Будем строить их, полагая $P = 1 \text{ кН}$, $a = 2 \text{ м}$.

Построение эпюры M

Так как эпюра на каждом элементе линейная, будем вычислять изгибающие моменты в начале (узел 1 МСК) и в конце (узел 2 МСК) элемента (или наоборот). Знаки ординат отмечаем по «правилу пунктира» и в соответствии с правилом знаков откладываем от оси стержня «снизу» или «сверху» от оси стержня. Размерность ординат, кНм, на рис. 5.3, а, где построена эпюра, не указываются.

Построение эпюры M начнем с конечного элемента рамы под номером 2, а затем последовательно рассмотрим КЭ 3, 5, 4, 1 (см. рис. 5.2, б).

Элемент 2. $M_1^2 = M_2^2 = 0$. Эпюра имеет нулевые ординаты не зависимо от величины опорной реакции V_B .

Элемент 3. $M_1^3 = 0$; $M_2^3 = -1 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}$. По этим двум ординатам строим эпюру M на элементе 3 правой стойки рамы.

Элемент 5. Изгибающий момент M_2^5 в узле 2 (МСК) на КЭ 5 найдем из рассмотрения равновесия моментов в узле 6 системы КЭ (см. рис. 5.2, б и рис. 5.3). По известному моменту $M_2^3 = 2$ находим $M_2^5 = M_2^3 = 2$. По тому как момент M_2^5 действует на узел 6, видно, что он растягивает верхнюю сторону элемента 5, а значит и его ордината в сечении 2 (МСК) должна быть отложена

сверху и по правилу знаков ордината имеет отрицательный знак.

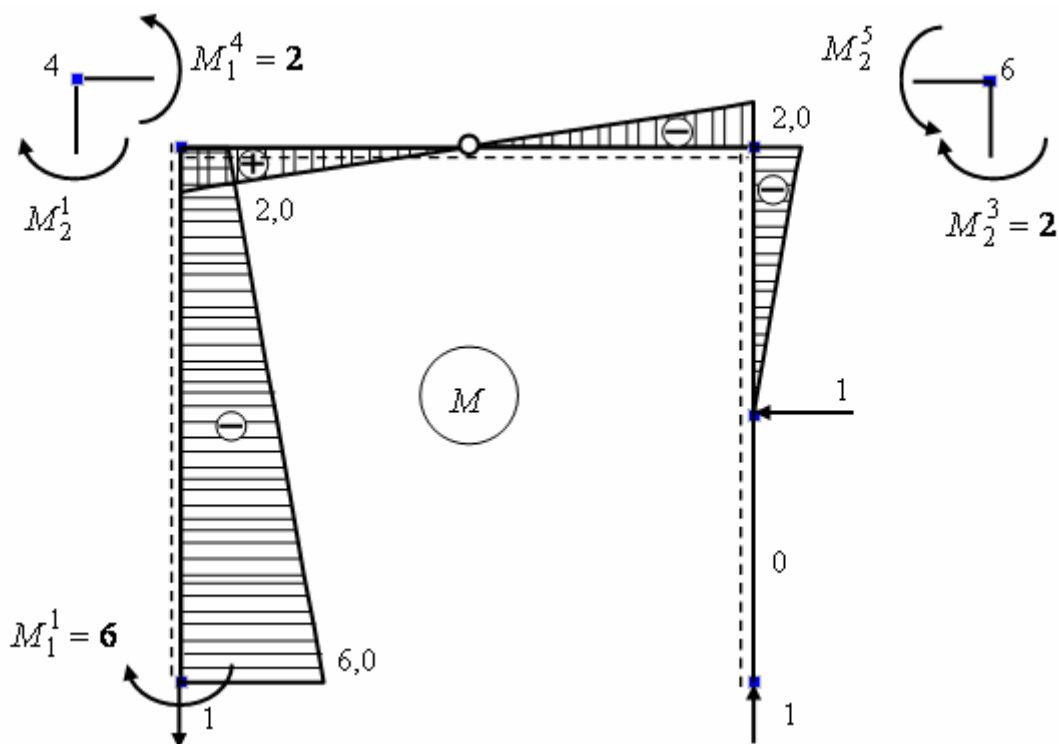


Рис. 5.3

Поскольку в узле 5 (в заданной раме он обозначен буквой *C*) установлен шарнир, то изгибающий момент M_1^5 в узле 1 КЭ 5 должен быть равен нулю. Именно из уравнения равновесия $\sum M_C^{\text{справа}} = 0$ и была определена реакция $V_B = P = 1$. Поэтому прямая линия, ограничивающая ординаты эпюра изгибающих моментов на элементе 5 пройдет через вершину ординаты $M_2^5 = -2$ в узле 2 (МСК) элемента и нулевую ординату в узле 1 (МСК).

Элемент 4. По признакам правильного вида эпюры M прямолинейная эпюра на элементе 5 без изломов должна продолжиться и в пределах КЭ 4. При этом все ординаты на элементе 4 окажутся с нижней стороны элемента. Это означает, что изгибающие моменты растягивают нижнюю сторону элемента 4 и имеют положительный знак. Из подобия треугольников видно, что ордината в узле 1 (МСК) элемента 4 равна +2.

Элемент 1. Изгибающий момент M_2^1 в сечении 2 (МСК) КЭ 1 определится из равновесия узла 4 (см. рис. 5.2, б и рис. 5.3) по моментам. По известному моменту $M_1^4 = 2$ найдем $M_2^1 = M_1^4 = 2$. Так как этот момент на левой стойке растягивает «верхние» волокна, то и найденная ордината откладывается от оси стойки «вверх», т.е. вправо (в направлении оси Z_1 МСК). Такая ордината по правилу знаков, принятому в программе SCAD, имеет знак

«минус».

В узле 1 (МСК) КЭ 1 ордината изгибающего момента известна, поскольку она равна определенной опорной реакции: $M_1^1 = M_A = 6$ (см. рис. 5.2, б). Так как этот момент растягивает верхнюю сторону элемента 1, то и ординату эпюры M в узле 1 надо отложить «сверху». Такая ордината считается отрицательной.

Построение эпюры Q

Предварительный анализ ожидаемой эпюры Q показывает, что на каждом КЭ она имеет постоянные ординаты, численное значение которых и их знак просто определяются и первым и вторым способами, описанными в подразделе 4.2 учебного пособия. Эпюра Q приведена на рис.5.4.

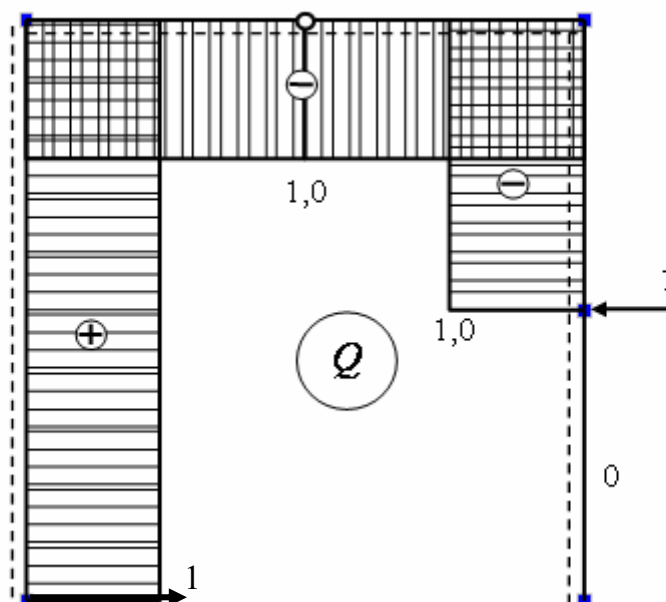


Рис. 5.4

Построение эпюры N

Эпюра N (рис. 5.5) легко строится как первым, так и вторым способами, описанными в подразделе 3.3.

Для определения продольных сил вторым способом на рис. 5.5 показаны вырезанные узлы 4 и 6 рамы (см. рис. 5.2, б), из которых по найденным ранее поперечным силам (см. рис. 5.4) определяются продольные силы в элементах 1, 3, 4 и 5.

Продольная сила в элементе 2 определится по продольной силе $N_1^3 = N_2^3 = 1$ из рассмотрения равновесия узла 3 (см. рис. 5.5).

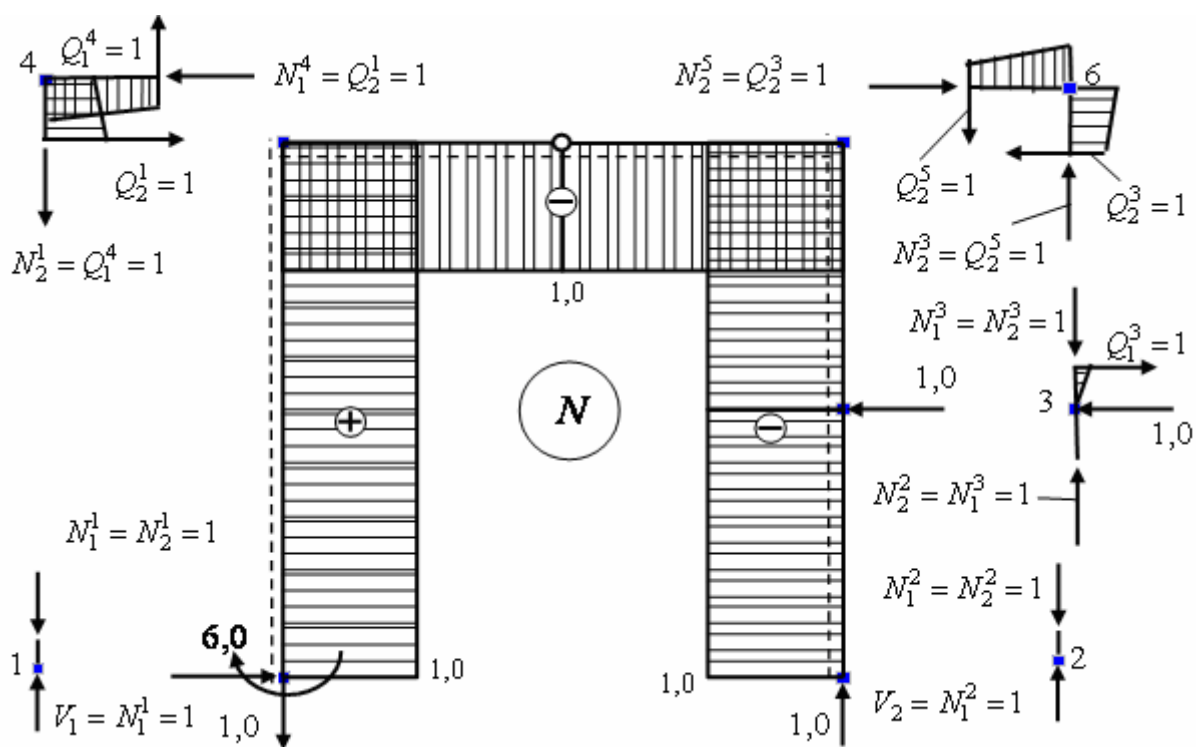


Рис. 5.5

Второй вариант последовательности решения задачи. В этом варианте перед построением эпюр M, Q, N вручную из уравнения $\sum M_C^{\text{справа}} = 0$ определяется только опорная реакция $V_B = P = 1$. После этого возможно построение любой из эпюр в любой последовательности. При этом опорные реакции в заделке B определяются в процессе построения соответствующих эпюр усилий на левой стойке рамы.

Третий вариант последовательности решения задачи. В этом варианте перед построением эпюр M, Q, N реакции предварительно не определяются. Поэтому оказывается невозможным построить эпюры Q, N ни одним из способов (см. подразделы 4.3 и 4.4). Однако эпюра M может быть построена. Затруднение возникнет только при определении изгибающего момента в сечении 1 (МСК) элемента 1 который, казалось бы, невозможно определить без определения опорной реакции V_B . Но это не так: есть возможность вычислить изгибающий момент в этом сечении с помощью следующих рассуждений.

Вырежем ригель рамы сечением по стойкам рамы, проходящим бесконечно близко от ригеля. Поперечная сила в проведенном сечении 2 на элементе 3 правой стойки известна по значению и по направлению действия на отсеченный ригель ($Q_2^3 = P = 1$, рис. 5.6). Но тогда из рассмотрения равновесия

всех сил, действующих на ригель в горизонтальном направлении, можно утверждать, что поперечная сила Q_2^1 в сечении 2 элемента 1 имеет такое же значение, как и поперечная сила $Q_2^3 = P = 1$, но имеет противоположное направление (см. рис. 5.6). Это показывает, что угол наклона α и эпюры M к оси левой стойки равен углу наклона эпюры M к оси правой стойки. Равны и величины $tg \alpha = 1$.

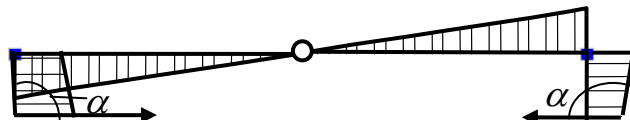


Рис. 5.6

Так как верхняя ордината эпюры M на стойке равна $M_2^1 = 2$, то момент в нижнем сечении стойки будет $M_1^1 = M_1^1 + 2a \cdot tg \alpha = 2 + 4 \cdot 1 = 6$.

Построив эпюру M , можно по ней (т.е. вторым способом, см. подраздел 4.3) построить эпюру Q , а затем способом вырезания узлов определить продольные силы в стержнях рамы (см. подраздел 4.3 и вырезанные узлы на рис. 5.5).

Примечание. При определении продольных сил в стержнях рамы способом вырезания узлов вертикальные составляющие опорных реакций определяются из рассмотрения равновесия опорных узлов в вертикальном направлении. Тогда из узла 1 рамы (см. рис. 5.2, б) найдем $V_A = V_1 = N_1^1 = 1$ и из узла 2: $V_B = V_2 = N_1^2 = 1$ (см. рис. 5.5).

Если же опорные реакции были определены заранее, то равновесие опорных узлов будет служить одним из контролей определения усилий.

5.4. Использование конструктивных особенностей статически определимых рам, имеющих замкнутые контуры

Рассмотрим раму в виде одного прямоугольного замкнутого контура со сторонами параллельными осям X и Z общей системы координат (рис. 5.7).

Установка трех разрезающих контур шарниров, необходимых для статической определимости контура, представлена тремя вариантами:

1. Два шарнира обязательно поставлены на какой-то одной (любой) стороне контура (рис. 5.7, а).
2. Каждый из шарниров поставлен на трех разных сторонах контура. При этом два из них лежат на прямой линии параллельной двум сторонам контура (рис. 5.7, б).
3. Все три шарнира расположены на трех сторонах контура так, что не имеет место ни один из предыдущих случаев (рис. 5.7, в).

Расчет этой статически определимой рамы вручную по определению усилий должен начинаться с определения опорных реакций. Для всех вариантов расстановки шарниров в контуре, последовательно используя

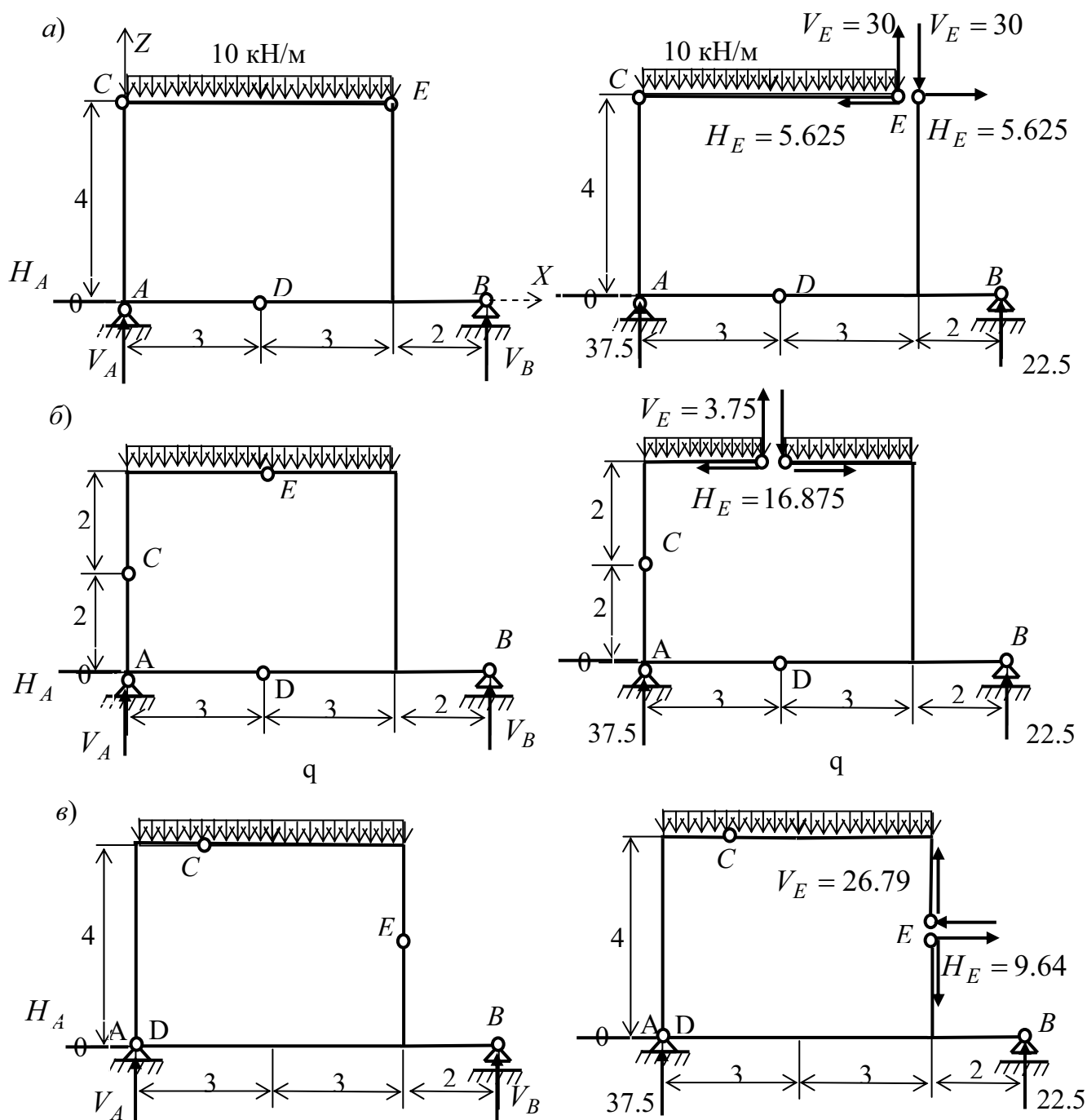


Рис. 5.7

уравнения равновесия $\sum X = 0$; $\sum M_A = 0$; $\sum Z = 0$, найдем соответственно:
 $H_A = 0$; $V_B = 22.5$ кН; $V_A = 37.5$ кН.

Затем для построения эпюр усилий на стержнях замкнутого контура необходимо разрезать контур минимум по одному из шарниров. На рис. 5.7 для каждого варианта расстановки шарниров в контуре показан шарнир, который

наиболее удобно разрезать, чтобы определить в нем два усилия в удаленных в результате разреза шарнира связях.

В вариантах 1 и 2 расстановки шарниров разрез выполнен в шарнирах E , что позволяет каждое неизвестное усилие в этих шарнирах найти из одного уравнения равновесия.

Так в варианте 1 (см. рис. 5.7, *а*) из $\sum M_C^{CE} = 0$ найдем $V_E = 30$ кН. Затем, из $\sum M_D^{DBE} = 0$ определим $H_E = 5.625$ кН.

В варианте 2 (см. рис. 5.7, *б*) из $\sum M_D^{DCE} = 0$ найдем $H_E = 16.875$ кН. Затем, из $\sum M_C^{CE} = 0$ определим $V_E = 3.75$ кН.

В варианте 3 расстановки шарниров практически безразлично, какой шарнир разрезать, так как при разрезании любого из трех шарниров для определения в них продольной и поперечной силы придется совместно решать два уравнения равновесия. На рис. 5.7, *в* разрезан шарнир E .

Для составления двух уравнений равновесия необходимо предварительно задать направления векторов поперечных и продольных сил. Эти направления могут быть выбраны произвольно. После решения системы уравнений неизвестные усилия в шарнире получатся с положительным или с отрицательным знаком. При отрицательном знаке найденного усилия направление вектора надо заменить на обратное и продолжить расчет по дальнейшему определению усилий в раме при правильных направлениях усилий в шарнирных связях.

На рис. 5.7, *в* показаны действительные направления усилий в шарнире E , определенные из системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$1. \sum M_D^{DBE} = 0; \quad 2. \sum M_D^{DCE} = 0. \quad (5.2)$$

Дальнейший ход решения задачи по построению и контролю эпюр усилий M, Q, N и их контролю выполняется по методике, рассмотренной в предыдущем примере, и здесь не приводится.

5.5. Использование конструктивных особенностей трехшарнирных арок

Трехшарнирная арка является статически определимой стержневой системой, расчетная схема которой встречается в двух видах:

1. Трехшарнирная арка без затяжки (рис. 5.8, *а*).
2. Трехшарнирная арка с затяжкой (рис. 5.8, *б*).

Рассмотрим последовательность определения усилий в этой конструкции с помощью уравнений равновесия всей арки и ее отдельных частей.

Для лучшего понимания особенностей работы арки выполним два условия:

- рассмотрим действие на нее только вертикальной нагрузки.
- Расчет опорных реакций и усилий в статически определимых арках без затяжки и с затяжкой будем выполнять одновременно с балкой, имеющей такой же пролет и такую же нагрузку, как и арка (см. рис. 5.8).

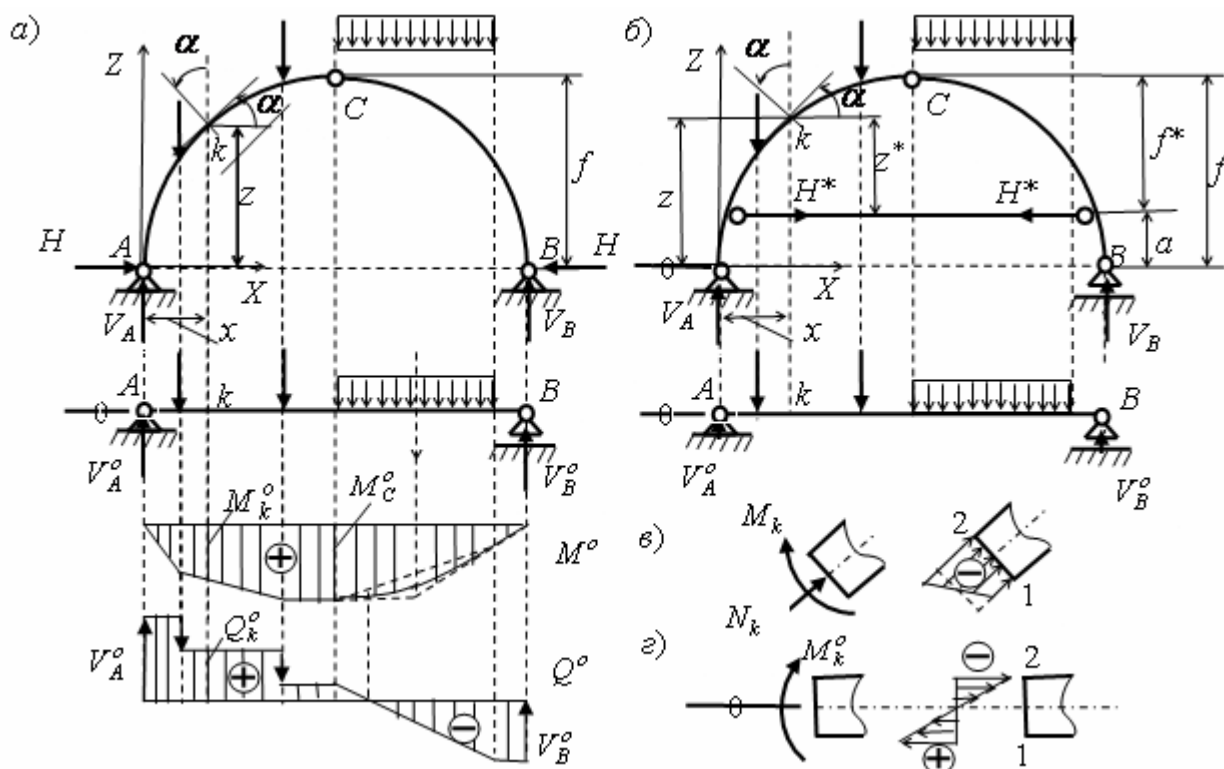


Рис. 5.8

В результате использования соответствующих уравнений равновесия получаются выражения для определения опорных реакций и внутренних усилий M, Q, N в сечениях арки. Вначале рассмотрим вопрос об опорных реакциях в трехшарнирной арке.

Вертикальные реакции опор в трехшарнирной арке без затяжки

1. Из уравнения $\sum M_B = 0$ находим:

$$V_A = V_A^o = \sum M_B^P / l. \quad (5.3)$$

2. Из уравнения $\sum Z = 0$ получаем

$$V_B = V_B^o = \sum Z^P - V_A. \quad (5.4)$$

Горизонтальные опорные реакции в трехшарнирной арке без затяжки

3. Из уравнения $\sum X = 0$ устанавливаем, что

$$H_A = H_B = H. \quad (5.5)$$

4. Из уравнения $M_C = \sum M_C^{\text{слева}} = \sum M_C^{\text{справа}} = 0$ получаем

$$H = \frac{M_C^o}{f}. \quad (5.6)$$

Горизонтальное усилие H называется **распором арки**. Для пояснения этого названия рассмотрим рис. 5.9, а.

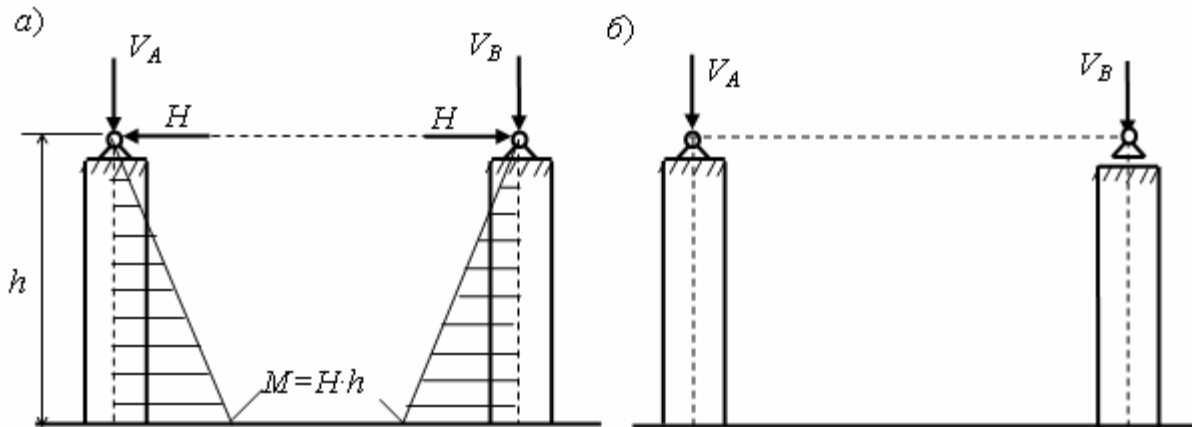


Рис. 5.9

На нем изображено действие усилий в опорных связях арки без затяжки, когда арка опирается на стены какого-то здания. Видно, что усилия H «распирают» стены и создают в них изгибающие моменты, вызывающие на внутренних сторонах поперечных сечений стен растягивающие напряжения.

Несмотря на наличие в поперечных сечениях стены сжимающих напряжений от ее собственного веса и от сжимающих стену вертикальных давлений от опор арки, с внутренней стороны стены суммарные напряжения могут остаться растягивающими. В бетонной стене для восприятия этих растягивающих напряжений можно подобрать арматуру, а в кирпичной стене растягивающих напряжений допускать нельзя.

Поскольку распор арки H передается на ниже лежащую конструкцию через горизонтальную опорную связь, то, для того чтобы убрать действие распора, в одной из опор арки горизонтальную связь удаляют. Чтобы трехшарнирная арка осталась геометрически неизменяемой и статически определимой, удаленную связь ставят в виде затяжки, соединяющей между собой левую и правую шарнирные опоры арки. Для увеличения высоты находящегося под аркой помещения, затяжка может быть поставлена выше опор (см. рис. 5.8, б).

Поскольку при арке с затяжкой одна из ее опор делается шарнирно –

подвижной, она передает на ниже лежащую часть конструкции только вертикальное давление арки. При вертикальной нагрузке на арку и шарнирно – неподвижная опора будет передавать только вертикальное давление. Поэтому давление арки с затяжкой на ниже лежащую конструкцию будет только вертикальным (см. рис. 5.9, б).

Вертикальные реакции опор в трехшарнирной арке с затяжкой

Вертикальные реакции арки с затяжкой остаются такими же, как и в арке без затяжки и определяются из выражений (5.3) и (5.4).

Горизонтальные реакции в трехшарнирной арке с затяжкой отсутствуют.

Теперь перейдем к определению усилий в сечениях арки. Наметим на оси арки некоторое сечение k (см. рис. 5.8, а, б).

Внутренние усилия M, Q, N в любом сечении k арки без затяжки определяются из выражений (индекс k будем опускать):

$$M = M^o - H \cdot z ; \quad (5.7)$$

$$Q = Q^o \cos \alpha - H \sin \alpha ; \quad (5.8)$$

$$N = -(Q^o \sin \alpha + H \cos \alpha), \quad (5.9)$$

где M^o, Q^o являются соответственно изгибающим моментом и поперечной силой в любом сечении k простой балки, имеющей такой же пролет и несущей такую же нагрузку, как арка (см. рис. 5.8, а);

α представляет собой угол наклона касательной (нормали) в рассматриваемом сечении к оси арки по отношению к горизонтальной (вертикальной) оси X (Z) (см. рис. 5.8, а, б).

Примечание. Для вычисления ординаты сечения z и значений $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ в зависимости от очертания оси арки используются следующие формулы.

При параболическом очертании:

$$\begin{aligned} z &= \frac{4f}{l^2}(lx - x^2); \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x); \\ \sin \alpha &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

При круговом очертании:

$$\begin{aligned} r &= \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2}; \quad z = f - r(1 - \cos \alpha); \\ \sin \alpha &= \frac{0.5l - x}{r}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где r – радиус окружности, по которой очерчена арка.

Внутренние усилия M, Q, N в любом сечении k арки с затяжкой

В сечениях арки ниже затяжки усилия M, Q, N определяются только по вертикальным реакциям. Поэтому их можно вычислить из выражений:

$$M = M^0; \quad Q = Q^0 \cos \alpha; \quad N = -Q^0 \sin \alpha \quad (5.12)$$

Для определения усилий в сечениях арки выше затяжки необходимо предварительно «раскрыть» замкнутый контур DEC и определить продольное усилие H^* в затяжке (см. рис. 5.8, б). С этой целью удалим затяжку («раскроем» замкнутый контур). Действие затяжки на левую и правую части арки заменим усилием H^* . Тогда оно определяется из уравнения:

$$M_C = \sum M_C^{\text{слева}} = \sum M_C^{\text{справа}} = 0. \quad (5.13)$$

Отсюда выражение для вычисления H^* можно представить в виде

$$H^* = \frac{M_C^0}{f^*}. \quad (5.14)$$

После определения H^* усилия в любом сечении арки выше затяжки можно найти из выражений:

$$M = M^0 - H^* \cdot z^*; \quad (5.15)$$

$$Q = Q^0 \cos \alpha - H^* \sin \alpha; \quad (5.16)$$

$$N = -(Q^0 \sin \alpha + H^* \cos \alpha), \quad (5.17)$$

где $z^* = z - a$ (см. рис. 5.8, б).

Примечание. Если затяжка будет поставлена на уровне опор, то (см. рис. 5.8, б) получим $a = 0$, $f^* = f - a = f$, $z^* = z - a = z$ и усилие H^* в затяжке (5.14) станет равно распору H арки (5.6), а формулы (5.15) – (5.17) перейдут в формулы (5.7) – (5.9).

Сопоставление внутренних усилий M, Q, N в сечениях арки и балки показывает различие в значениях и знаках соответствующих усилий и значениях и характере нормальных и касательных напряжений, вызываемых этими усилиями.

Отметим следующие факторы:

1. Распор H арки (или усилия H^* в затяжке) благоприятно влияет на значения изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях арки.

Действительно, из формул (5.7) и (5.13) видно, что изгибающие моменты M в арке меньше балочных M^0 на величину $H \cdot z$ (или $H^* z^*$ для арки с затяжкой). Из формул (5.8) и (5.14) видно, что уменьшаются значения и

поперечных сил.

2. *Материал арки работает в более благоприятном напряженном состоянии, чем в балке.*

Действительно, кроме уменьшения изгибающих моментов в арке, отметим появление в ней сжимающих усилий N .

Как видно из формулы внецентренного сжатия $\sigma_{1,2} = N/A \pm M/W$, в связи с наличием в любом сечении арки продольной силы, имеющей отрицательный знак, нормальные напряжения в сечении арки распределены по сечению более равномерно, чем в балке. Они могут быть сжимающими во всех точках сечения (см. вид эпюры, приведенный на рис. 5.8, в. В формуле соответственно принято: 1, 2 – нижняя и верхняя точки сечения арки; A, W – площадь и момент сопротивления сечения).

В балке же, наоборот, в соответствующем сечении k , при большем значении изгибающего момента, отсутствует продольная сила. Поэтому в балке эпюра нормальных напряжений возникает только от изгиба и имеет вид, приведенный на рис. 5.8, г.

Поэтому арка, перекрывающая такой же пролет и несущая такую же нагрузку как балка, и выполненная из такого же материала, будет иметь более тонкое поперечное сечение, чем балка.

Безмоментная трехшарнирная арка

Из формулы (5.7) для арки без затяжки (см. рис. 5.8, а) видно, что *изгибающие моменты в трехшарнирной арке будут нулевыми во всех ее сечениях, если она несет постоянную нагрузку и очерчена по кривой, совпадающей с эпюрой изгибающих моментов в балке от этой нагрузки.*

Действительно, приравняв нулю выражение (5.7), получим:

$$z = \frac{M^0}{H}. \quad (5.18)$$

Так как значение H постоянно, то ординаты z безмоментной арки изменяются по длине ее пролета также как изменяются изгибающие моменты M^0 в балке при рассматриваемой нагрузке. На рис. 5.10 показано очертание безмоментной арки для нескольких видов нагрузок.

При нагрузках в виде сосредоточенных сил безмоментная трехшарнирная арка по внешнему виду, соответствующему эпюре M^0 в простой балке от заданной нагрузки, становится трехшарнирной рамой (см. рис. 5.10, а). Опорные реакции, распор и внутренние усилия в таких рамах определяются по

полученным выше формулам для криволинейной трехшарнирной арки.

При равномерно распределенной нагрузке эпюра M^o имеет очертание квадратичной параболы, поэтому и безмоментная арка при этой нагрузке должна быть очерчена по квадратичной параболе (см. рис. 5.10, б).

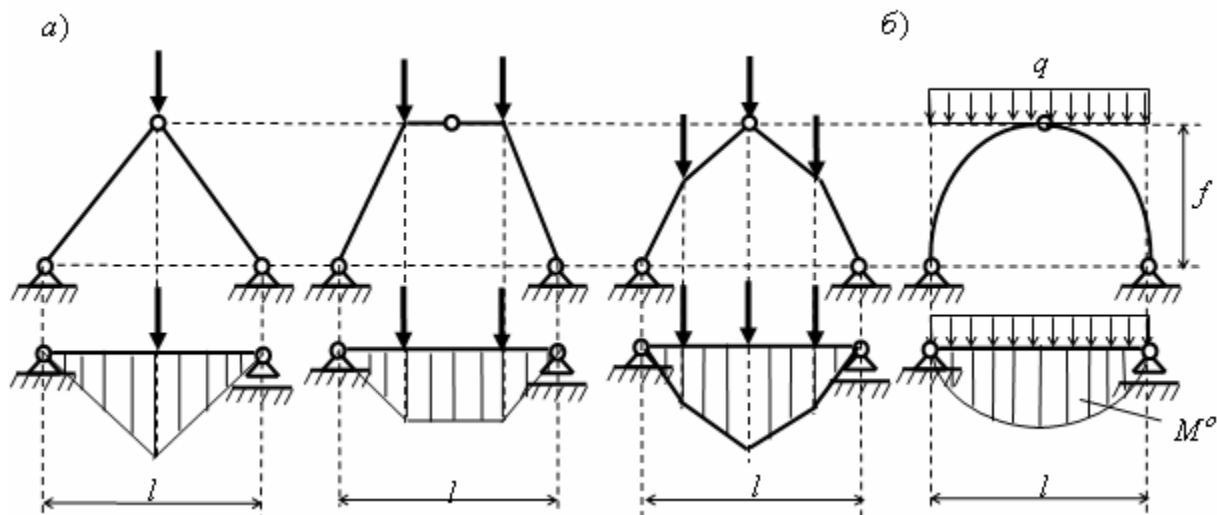


Рис. 5.10

Ординаты z арок не зависят от значений нагрузок, а вычисляются по соответствующей формуле (5.10) только по ее заданным параметрам: пролету l и стреле f .

5.6. Использование конструктивных особенностей ферм

В подразделе 2.6 учебного пособия было отмечено основное свойство стержневой системы, называемой в инженерной практике фермой:

при нагрузке на такую систему, передаваемую в виде сосредоточенных сил на узлы, в которых соединяются стержни, в расчетной схеме фермы для определения усилий и перемещений во всех узлах устанавливаются идеальные (без трения) шарниры.

При этом ферма должна остаться геометрически неизменяемой системой, в каждом стержне k которой возникает только продольное усилие N_k (см. рис. 2.10).

В инженерной практике встречаются фермы различной конфигурации с различным видом стержневой решетки.

С классификацией ферм по этим признакам можно, в частности, познакомиться с помощью программы SCAD. Для этого надо открыть какой-нибудь проект (см. приложение 1 УМК), открыть раздел **Схема**, а затем на инструментальной панели нажать кнопку «Генерация прототипа фермы».

Появится диалоговое окно, с помощью которого можно познакомиться с различными типами ферм и с их различными стержневыми решетками.

Для предварительного ознакомления с наименованием элементов фермы приведен рис. 5.11, взятый из учебного пособия [7].

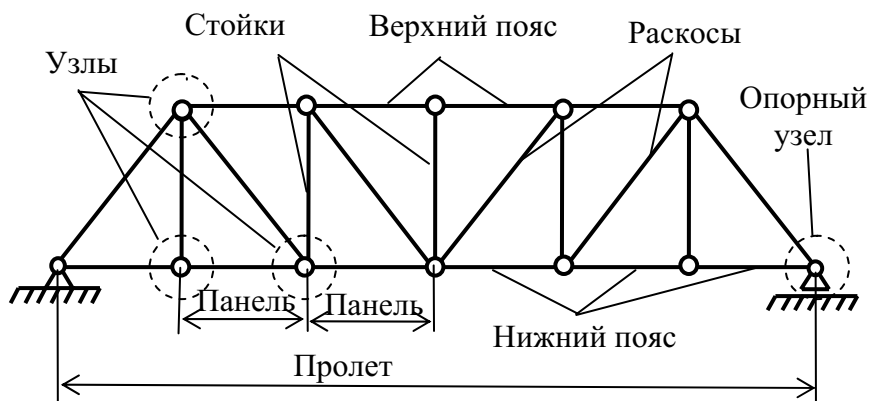


Рис. 5.11

Число неизвестных усилий n_n в ферме равно сумме числа n_c неизвестных продольных усилий в стержнях фермы и числа $n_{оп}$ продольных усилий в опорных стержнях фермы, т.е. $n_n = n_c + n_{оп}$.

В статически определимой ферме число $n_n = n_c + n_{оп}$ должно равняться числу уравнений равновесия $n_{ур} = 2n_y$ вида (2.22), где n_y равно числу узлов фермы. Иными словами, степень статической неопределимости статически определимой фермы, определяемой из выражения (2.23), должна быть равна нулю. Это условие является и необходимым условием для того, чтобы статически определимая ферма была геометрически неизменяемой системой. Неизменяемость фермы проверяется с помощью ее структурного анализа (см. подраздел 2.6).

Рациональные способы применения уравнений равновесия для определения усилий в стержнях ферм

При расчетах ферм вручную или контроле усилий, полученных расчетом на ПК, например с помощью программы SCAD, реализующей МКЭ, усилия в стержнях плоских статически определимых ферм определяются с помощью уравнений равновесия.

При ручном расчете с помощью уравнений равновесия обычно вначале определяют опорные реакции фермы. Методика их определения аналогична рассмотренной при определении опорных реакций балок, рам, арок.

Уравнения равновесия используются для определения усилий и в

стержнях ферм. При этом, в зависимости от конструктивных особенностей фермы, используют уравнения равновесия либо только для одного узла, вырезанного из фермы, либо для части фермы, отрезанной от фермы сечением.

В инженерной практике эти приемы называют «Способ вырезания узлов» или «Способ сечений». Строгости в этих названиях нет, т. к. в обоих случаях проводится сечение, отрезающее часть фермы от целой конструкции.

Для выделенного узла, в котором сходятся два стержня и более, применимы только два уравнения равновесия вида (2.22). Третье уравнение равновесия, равенство нулю моментов, удовлетворяется тождественно при любом (даже не верном) значении усилий и поэтому не может использоваться для определения усилий в стержнях, сходящихся в узле.

В некоторых случаях при ручном счете для определения усилия в каком-либо стержне фермы более рациональным оказывается способ, в котором последовательно используются оба названных выше способа. Тогда говорят об определении усилия «комбинированным способом».

Способ вырезания узлов

Продemonстрируем этот способ на примере определения усилия 4 (рис. 5.12, а) фермы, взятой из учебного пособия [7].

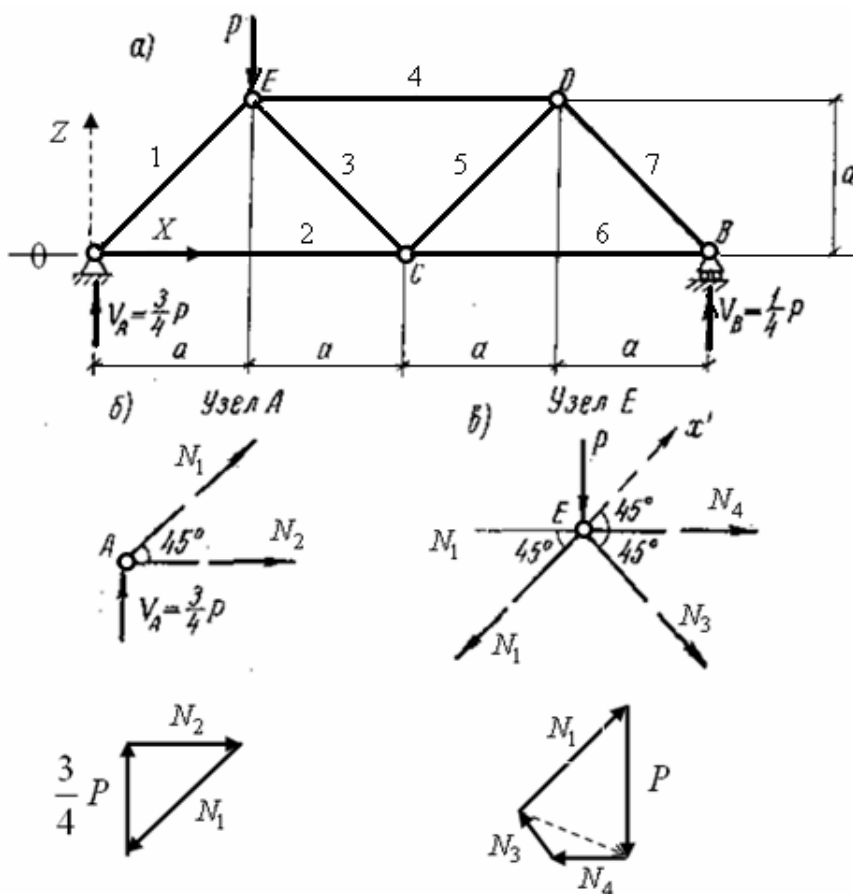


Рис. 5.12

Опорные реакции в ферме будем считать уже определенными.

В этом способе используется как аналитическое, так и графическое решение. В обоих случаях *из одного узла можно найти только два (по числу уравнений равновесия для узла) неизвестных усилия. Остальные усилия, действующие на узел, должны быть известны.*

Аналитическое решение. Сразу определить усилие N_4 вырезанием одного узла (E или D) не удастся, так как в каждом из указанных двух узлов стержня 4 сходятся по три неизвестных усилия. Поэтому, чтобы решить поставленную задачу, вырежем сначала, например, узел A (рис. 5.12, б) и из уравнения равновесия

$$\sum Z = V_A + N_1 \sin 45^\circ = 0 \quad (5.19)$$

сил, действующих на узел (неизвестные усилия направляем как растягивающие), определим усилие N_1 :

$$N_1 = -\frac{3}{2\sqrt{2}}P \quad (5.20)$$

Затем, получив величину усилия N_1 , вырежем узел E (рис. 5.12, в) и запишем уравнение равновесия сил, действующих на этот узел, на ось x' перпендикулярную стержню 3 (усилию N_3):

$$-N_1 - P \cos 45^\circ + N_4 \cos 45^\circ = 0. \quad (5.21)$$

Подставив сюда из (5.20) найденное усилие N_1 , получим усилие $N_4 = -P/2$. Знак минус показывает, как и в случае усилия N_1 , что стержень сжат, а не растянут, как мы это предполагали при записи уравнений равновесия.

Графическое решение. Равновесие сил, действующих на опорный узел A , можно представить графически. Узел будет находиться в равновесии только тогда, когда равнодействующая этих сил равна нулю. Это означает, что треугольник, составленный из векторов сил, действующих на узел, должен быть замкнут. Поскольку известной пока является только опорная реакция V_A , то для построения треугольника сил необходимо отложить вектор этой силы в удобном для построений масштабе и разложить его на две составляющие, параллельные стержням 1 и 2 фермы. Направления полученных таким образом усилий N_1 и N_2 в треугольнике сил ставятся так, чтобы равнодействующая всех сил, действующих на узел A , была равна нулю.

Теперь, когда определено усилие N_1 , аналогично рассматривается равновесие сил, действующих на узел E . Сложив вектор усилия N_1 ,

действующего на этот узел, с вектором силы P , получим вектор равнодействующей известных сил, действующих на узел E (она показана штриховой линией). Разложив эту равнодействующую на две составляющие параллельные стержням 3 и 4 фермы и поставив соответствующие направления векторов N_3 и N_4 из условия равенства нулю равнодействующей всех сил, действующих на узел E , найдем усилия в стержнях 3 и 4 и направление их действия на узел E .

Нулевые стержни в ферме

При расчете ферм встречаются случаи, когда при загрузлении фермы усилия в некоторых ее стержнях оказываются равными нулю. Такие стержни называются ***нулевыми***.

Есть нулевые стержни, которые выявляются на чертеже фермы по простым признакам. Основными признаками, построенными на способе вырезания узлов, являются следующие два признака:

1) если незагруженный узел соединяет только два стержня, не лежащих на одной прямой, то оба стержня будут нулевыми;

2) если незагруженный узел соединяет три стержня, два из которых лежат на одной прямой, то усилие в третьем стержне будет нулевым.

Пример первого узла изображен на рис. 5.13, *а*, второго на рис. 5.13, *б*.

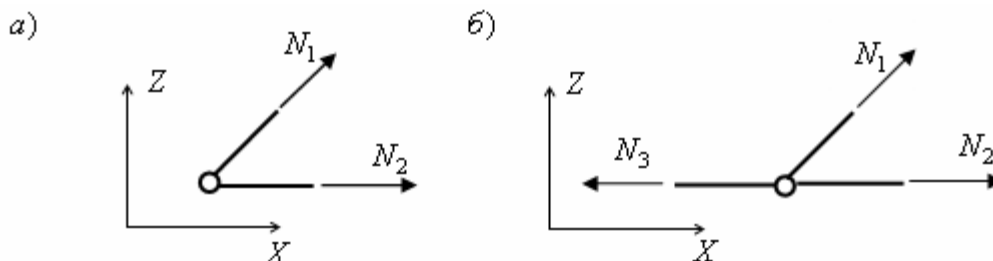


Рис. 5.13

Доказательством первого признака является применение к первому узлу сначала уравнения равновесия $\sum Z = 0$, из которого следует, что $N_1 = 0$, а затем уравнения равновесия $\sum X = 0$, из которого следует, что и усилие $N_2 = 0$.

Доказательство второго признака получается из уравнения равновесия $\sum Z = 0$, примененного ко второму узлу. Получим $N_1 = 0$. Из уравнения $\sum X = 0$ получится $N_3 = N_2$.

Прежде чем применить эти признаки к ферме необходимо определить усилия в опорных стержнях фермы.

Иногда загрузка фермы может быть таким, что большинство стержней

в ней от приложенной нагрузки не работают, т. е. являются нулевыми. Такой пример приведен на рис. 5.14.

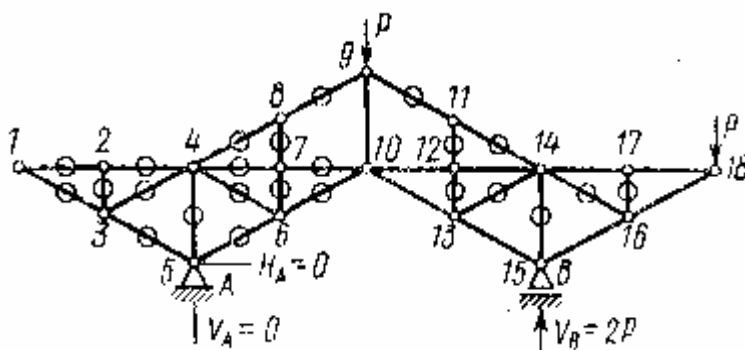


Рис. 5.14

В некоторых случаях нулевые стержни фермы выявляются не по приведенным признакам, а в результате некоторого анализа, например, учитывающего симметричность усилий в стержнях фермы, получающуюся вследствие симметрии самой фермы и симметрии ее загрузки.

Примером такого случая является ферма, изображенная на рис. 5.15 [7]. Прежде всего, в ней из рассмотрения равновесия узла 6 устанавливается, что вследствие симметрии усилия в наклонных стержнях, подходящих к узлу 6 должны быть симметричными и равными друг другу: $N_6 = N_7$.

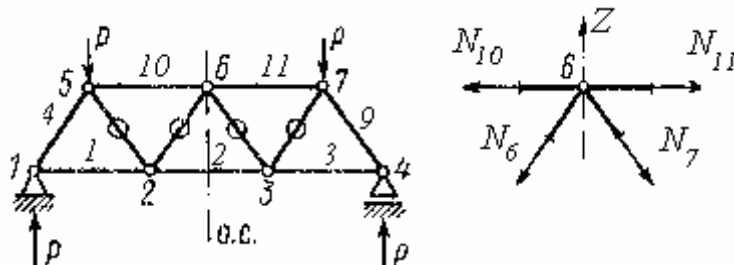


Рис. 5.15

В то же время, из уравнения равновесия $\sum Z = 0$ для узла 6 следует, что $N_6 = -N_7$. Такие противоречивые требования могут быть выполнены только в случае, когда оба усилия будут нулевыми. После этого по второму признаку нулевых стержней из узлов 2 и 3 получится, что и усилия N_5 и N_8 будут также нулевыми.

Примечание. Чертежи ферм на рис. 5.14 и на рис. 5.15 взяты из учебного пособия [7]. Нулевые стержни там отмечены кружками. Так их будем отмечать и далее.

Имеются и другие примеры обнаружения явно нулевых стержней в фермах (см., например, [7]).

Расчет фермы вручную рекомендуется выполнять в такой последовательности:

1. Определяются опорные реакции фермы.
2. На расчетной схеме фермы по различным признакам отмечаются все явно нулевые стержни. Это может упростить дальнейшее определение усилий в других стержнях.
3. С учетом отмеченных нулевых стержней выбирается способ определения конкретного усилия, интересующего расчетчика. Способ вырезания узлов был только что продемонстрирован. Рассмотрим теперь способы сечений и комбинированный.

Способы сечений и комбинированный

Применим сначала способ сечений для определения усилия N_1 в ферме, изображенной на рис. 5.16. Будем считать, что операции по проверке статической определимости фермы выполнены. Определены также опорные реакции и отмечены (кружками) явно нулевые стержни.

Усилие N_1 можно найти способом последовательного вырезания и рассмотрения равновесия узлов a, b, c, d . Можно также, проведя сечение 1-1, расечь ферму на две части и определить N_1 из одного уравнения равновесия

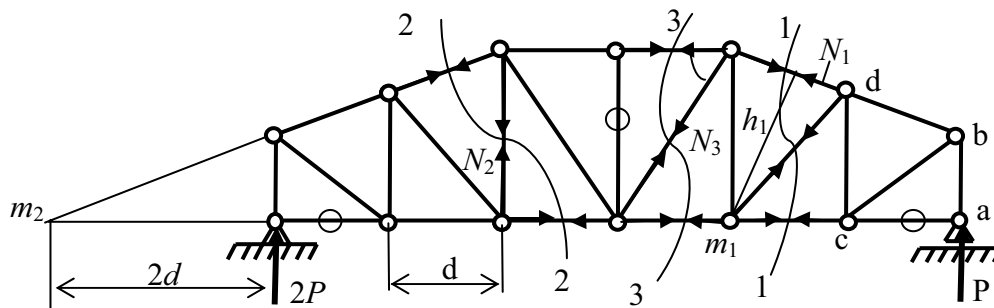


Рис. 5.16

$\sum M_{m_1} = P \cdot 2d + N_1 \cdot h_1 = 0$ для части фермы справа от сечения. Это уравнение отражает равенство нулю всех сил, действующих на правую отсеченную часть фермы относительно точки m_1 , которая называется моментной точкой. Использование из трех уравнений равновесия именно этого уравнения связано с тем, что в моментной точке пересекаются усилия еще двух стержней, попавших в разрез фермы на две части. Поскольку они, как и интересующее нас усилие N_1 , также не известны, то возможность их исключения и связана с выбором этого уравнения равновесия. В результате получим: $N_1 = 2Pd / h_1$.

Точно также, при необходимости определения усилия N_2 , удобно использовать способ расчленения фермы сечением 2-2 (см. рис. 5.16) и определить это усилие из уравнения равновесия в виде $\sum M_{m_2} = 2P \cdot 2d - P \cdot (3d + 4d) + N_2 \cdot 4d = 0$ для части фермы слева от сечения 2-2. Тогда получим $N_2 = 0.75P$.

При определении усилия N_3 также используется способ сечений (сечение 3-3), но необходимое для определения этого усилия уравнение равновесия будет иметь вид $\sum Z = P - N_3 \cos(90^\circ - \alpha) = 0$ для сил справа от сечения 3-3. Отсюда $N_3 = P / \sin \alpha$.

Способ сечений применим не только в случае, когда сечение, рассекающее ферму, разрезает три стержня. Этот способ применим и при большем числе пересекаемых стержней, если есть возможность исключить из уравнения равновесия для определения искомого усилия все остальные усилия, попавшие в разрез. Примером является усилие N_1 в ферме, изображенной на рис. 5.17. Оно может быть определено с помощью сечения 1-1, хотя оно пересекает четыре стержня. Усилия в трех из них не войдут в уравнение равновесия всех сил, действующих на часть фермы правее сечения, составленное относительно моментной точки m_1 : $\sum M_{m_1} = 0.75P \cdot d + N_1 \cdot h_1 = 0$. Из него определится усилие $N_1 = -0.75Pd / h_1$.

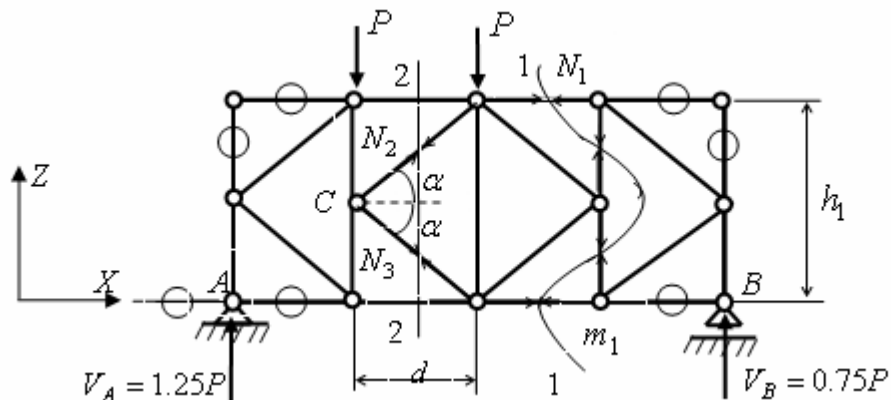


Рис. 5.17

Комбинированный способ продемонстрируем на примере определения усилия N_3 . Здесь расчленение фермы на две части, например сечением 2-2, не приводит к возможности составления одного уравнения равновесия для определения одного неизвестного усилия N_3 .

Можно составить уравнение равновесия, например, для части фермы

слева от сечения: $\sum Z = 1.25P - P - N_3 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0$, но в него входят два неизвестных усилия.

Необходимо иметь второе уравнение с этими же двумя неизвестными. Таким уравнением является уравнение равновесия $\sum X = N_3 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha = 0$ узла C на ось X . Из него следует, что $N_2 = -N_3$. Подставив это выражение для усилия N_2 в предыдущее уравнение равновесия для всей левой части фермы, получим одно уравнение с неизвестным N_3 , из которого найдем: $N_3 = -0.125P / \sin \alpha$.

5.7. Основные свойства статически определимых и статически неопределимых стержневых систем в сравнении

Отметим только основные свойства статически определимых и статически неопределимых стержневых систем, которые очевидны из анализа соответствующих им систем уравнений (1.3) – (1.5).

Приведем сопоставление этих свойств, записав их в два параллельных столбца табл. 5.1.

Отметим также следующее важное свойство статически определимых и статически неопределимых стержневых систем, которое вытекает из анализа числа связей в этих системах (см. раздел 2 пособия).

Разрушение от перегрузки любой связи в статически определимой стержневой системе делает эту систему частично или полностью геометрически изменяемой системой.

В статически неопределимой стержневой системе разрушение связи может привести не к разрушению конструкции, а только к перераспределению в ней внутренних усилий.

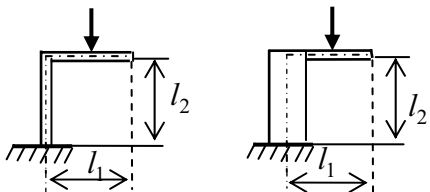
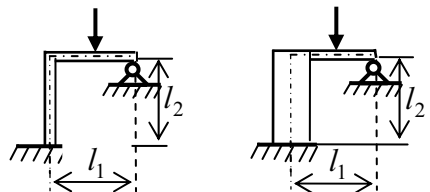
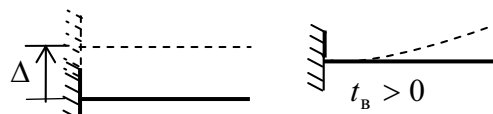
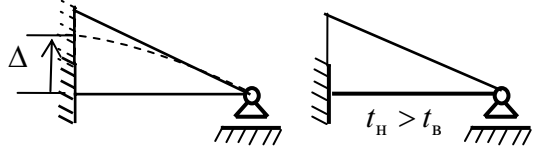
Для пояснения этого рассмотрим стержневые системы, приведенные в примере раздела 1 табл. 5.1.

Допустим, что в статически определимой и в статически неопределимой системах изгибающие моменты в заделках превысили некоторые допустимые пределы и разрушили связи, воспринимающие моменты.

Тогда, статически определимая система, потеряв одну (защемляющую) связь станет геометрически изменяемой системой и будет не способна нести нагрузку указанного вида.

Статически неопределимая система, потеряв защемляющую связь, останется геометрически неизменяемой системой, в которой произойдет перераспределение усилий.

Таблица 5.1

Статически определимые (СО) системы	Статически неопределимые (СН) системы
1. Усилия в сечениях стержней и вид их эпюр вдоль осей стержней <i>не зависят</i> от параметров E, G, ν материала, из которого выполнена стержневая система, и от размеров поперечных сечений стержней. Пример. Усилия M, Q, N в двух СО системах, выполненных из разных материалов и имеющих различные поперечные сечения стержней будут совершенно одинаковыми. 	1. Усилия в сечениях стержней и вид их эпюр вдоль осей стержней <i>зависят</i> от параметров E, G, ν материала, из которого выполнена стержневая система, и от размеров сечений стержней. Пример. Усилия M, Q, N в двух СН системах, выполненных из разных материалов и имеющих различные поперечные сечения стержней будут совершенно разными [4, 5]. 
2. Усилия в СО стержневой системе возникают <i>только</i> от заданной нагрузки и не возникают от воздействий в виде осадки опор и температурных воздействий. Примеры. 1. Осадка заделки изображенной СО балки приведет к свободному смещению всей консоли 2. Указанное изменение температуры волокон балки вызовет свободные (без усилий) деформации удлинения и изгиба балки. 	2. Усилия в СН стержневой системе возникают <i>не только</i> от заданной нагрузки, но и от осадки опоры от температурных воздействий [3, 8]. Примеры. Осадка заделки и указанное изменение температуры волокон изображенной СН балки приведет к возникновению <i>не свободных изгибных деформаций, сопровождающихся изгибающими моментами</i> (см. табл. 2.3 и 2.4 в [4]). 

5.8. Исследование геометрической неизменяемости стержневых систем статическим способом «нулевых нагрузок» при соблюдении необходимого условия $n = 0$

При установлении принадлежности стержневой системы к статически определимым системам сначала подсчитывается степень ее статической неопределимости n (см. раздел 2). Получение результата в виде $n = 0$ показывает, что необходимое условие ее статической определимости и геометрической неизменяемости выполняется. Необходимо дополнительно проверить правильность структурного образования стержневой системы из

составляющих систему дисков.

В некоторых случаях структурный анализ затруднен, как это было показано на примере фермы, изображенной на рис. 2.11.

Тогда для исследования геометрической неизменяемости стержневых систем применяют другие способы. Одним из них для систем, у которых соблюдается условие $n = 0$, является способ «нулевых нагрузок», основанный на том, что в *статически определимой стержневой системе при отсутствии действия на нее нагрузки усилия во всех стержнях будут нулевыми*.

Это свойство следует из рассмотрения уравнений равновесия при отсутствии нагрузки на статически определимую систему, поэтому способ «нулевых нагрузок» является статическим способом исследования геометрической неизменяемости статически определимых стержневых систем.

Определение усилий в стержневой системе статическим способом «нулевых нагрузок» вручную сводится к использованию конструктивных особенностей стержневых систем, рассмотренных в предыдущих подразделах.

Обычно при соблюдении условия $n = 0$ используют такую последовательность расчета.

1. Сначала, если это возможно, из соответствующих уравнений равновесия определяют опорные реакции стержневой системы. При нулевой нагрузке на статически определимую систему они должны быть равны нулю.

2. Затем, выявляют явно нулевые внутренние усилия в элементах стержневой системы.

3. В части стержневой системы, в которой усилия не определенными с могут быть определены из уравнений равновесия, задаются каким-либо усилием, предполагая возможность его возникновения, как если бы эта часть была статически неопределимой.

Затем, с помощью уравнений равновесия определяют все остальные усилия. При этом могут встретиться два варианта:

- 3.1. Без противоречий удалось определить все усилия и они, как и заданное усилие, получились не нулевыми. Это означает, что сделанное допущение о возможности возникновения заданного усилия правильное и исследуемая часть системы является статически неопределимой системой, а вся конструкция (при $n = 0$) – геометрически изменяемой.

Пример 1. Рассмотрим ферму (рис. 5.18, а). Для установления принадлежности ее к СО или СН системам по формуле (2.23) выполняем проверку степени ее статической неопределимости: $n = (n_c + n_{оп}) - 2n_y = (9 + 3) - 2 \cdot 6 = 0$. Этот результат показывает, что соблюдается необходимое условие статической определимости и геометрической

неизменяемости фермы.

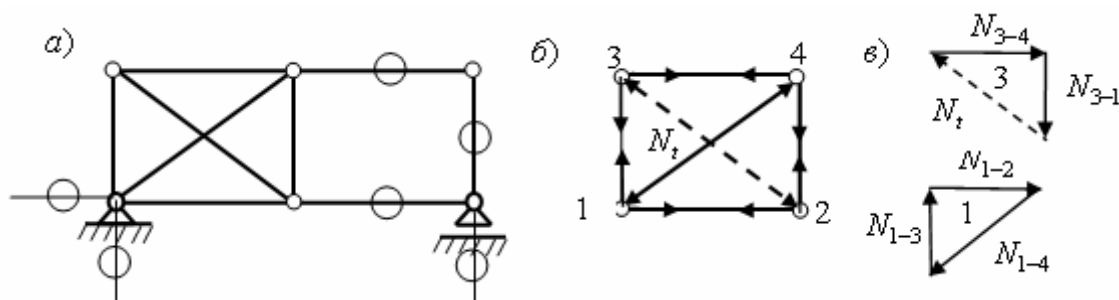


Рис. 5.18

Совершенно очевидно, что эта ферма геометрически изменяема, т. к. в ее структуре имеется замкнутый контур, состоящий из четырех дисков, соединенных четырьмя шарнирами. Однако, для ознакомления с процедурой статического способа исследования геометрической неизменяемости, для исследования геометрической неизменяемости фермы применим статический способ в только что приведенной последовательности.

1. Из трех уравнений равновесия для всей фермы устанавливаем, что усилия в трех опорных связях равны нулю.

2. По признакам явно нулевых стержней устанавливаем, что три стержня фермы являются явно нулевыми.

3. К оставшейся части фермы с неопределенными усилиями применим допущение, что эта часть статически неопределима и поэтому в ее стержнях возможно возникновение усилий и без нагрузки (например, от температурного воздействия).

Выделим эту часть из фермы (рис. 5.18, б) и сделаем предположение, что стержень, отмеченный штриховой линией, нагрет и давит на узлы, к которым он прикреплен, силой N_t .

Из равновесия сил, действующих на узел 3, найдем усилия N_{3-4} и N_{3-1} (рис. 5.18, в).

Затем, из последовательного рассмотрения равновесия узлов 1, 2, 4 (на рис. 5.18, в) показан только узел 1), найдем усилия во всех стержнях выделенного фрагмента фермы. При этом, видно, что не встретится никакого противоречия: все узлы будут в равновесии и все усилия не будут равны нулю.

Это означает, что заданное не нулевое усилие N_t в левой части конструкции действительно возможно, как и все определенные усилия в стержнях выделенного фрагмента. Это означает, что выделенный фрагмент фермы статически неопределим. При соблюдении условия $n = 0$ это возможно только в том случае, если в другой части фермы не достаточно связей, и она геометрически изменяема (что и видно из рисунка фермы).

3.2. При определении усилий получилось противоречие (отсутствие равновесия какого-либо узла или другого элемента). Это означает, что сделанное допущение не подтвердилось. Тогда принятое не нулевым заданное усилие необходимо принять равным нулю. Затем найти другие появившиеся нулевые усилия. Если при этом все остальные усилия оказываются нулевыми, система правильно образована и является статически определимой.

Если часть стержней остаются с неопределенными усилиями, такое исследование повторяется.

Пример 2. Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 2.11. Для нее соблюдается необходимое требование статической определимости: $n = 0$. Это означает, что общее число связей в ферме достаточно для того, что бы она была геометрически неизменяема и статически определима.

Простой структурный анализ этой фермы оказывается невозможным, так как нет ни одного треугольника, который можно было бы взять за основу образования фермы, как это было возможно для ферм, приведенных на схемах 1 и 2 рис. 1.2, е.

Поэтому применим для исследования ее ГН рассматриваемый статический способ «нулевых нагрузок».

1. Из уравнений равновесия для всей фермы устанавливаем, что опорные реакции равны нулю (рис. 5.19, а).

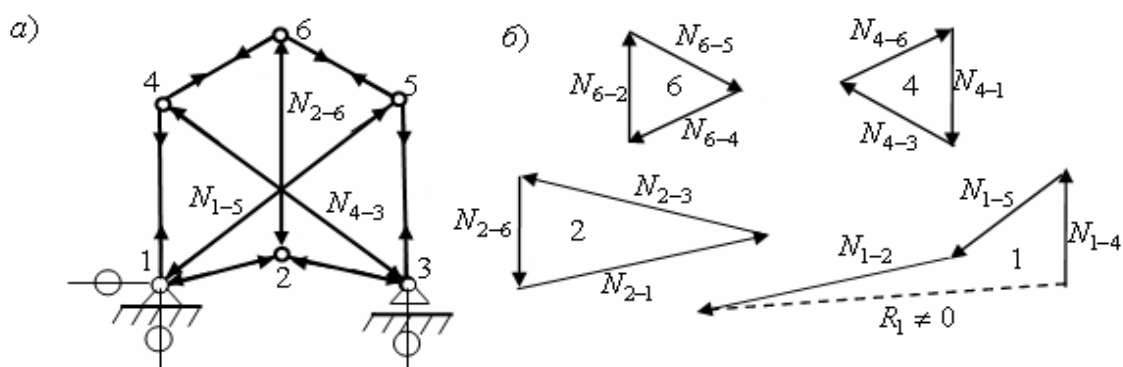


Рис. 5.19

2. Явно нулевых стержней нет. В то же время усилия в стержнях остаются не определяемыми ни способом вырезания узлов, ни сечений.

3. Сделаем предположение о том, что, не смотря на соблюдающееся условие $n = 0$, система СН и в ней возможно возникновение усилий и при нулевой нагрузке (как это было сделано в предыдущем примере).

Зададимся усилием N_{6-2} и, последовательно вырезая узлы 6, 4, 2, 1, найдем усилия в стержнях, соединенных в узле 1 (см. треугольники сил на рис. 5.19, б).

При построении треугольника сил для узла 1, обнаруживаем, что он получился незамкнутым. Это означает, что равнодействующая сил, действующих на узел 1 не равна нулю и, следовательно, узел 1 не находится в равновесии. Этого быть не может: при любой нагрузке и без нее узел должен находиться в равновесии. Отсюда следует и такой вывод: наше допущение о том, что без нагрузки на ферму в стержне 2-6 возможно возникновение усилия, не правильно. Усилие N_{6-2} следует принять равным нулю.

Но как только мы приравняем усилие N_{6-2} нулю, из приведенных треугольников сил получатся нулевыми все усилия в ферме. Отсюда делаем общий вывод: так как соблюдается необходимое условие $n = 0$ и при нулевой нагрузке все усилия равны нулю, то ферма геометрически неизменяема и статически определима.

Аналогичное исследование может быть выполнено и для стержневых систем других типов.

Пример 3. Рассмотрим раму, изображенную на рис. 5.20, а. Для нее удовлетворяется необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости: $n = (n_{\text{оп}} + 3n_k) - (3 + n_{\text{лш}}) = (5 + 3 \cdot 0) - (3 + 2) = 0$.

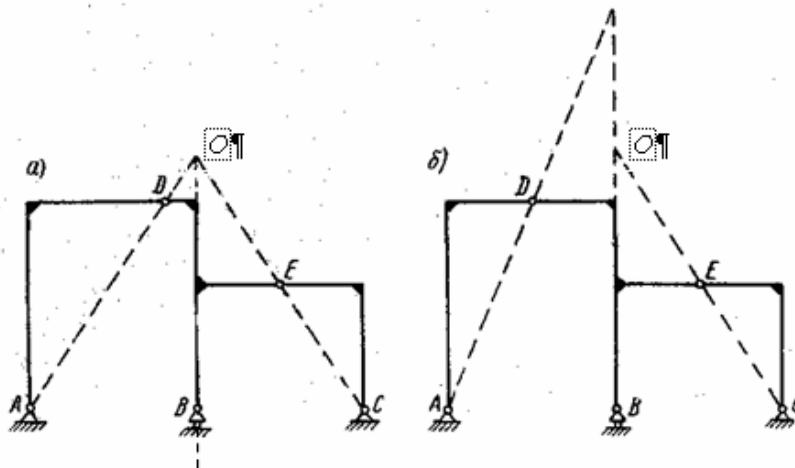


Рис. 5.20

Проверку ГН выполним способом нулевой нагрузки, выполнив следующие рассуждения.

Линия действия полной реакции в опоре A из условия равновесия диска AD пройдет через шарнир D . Из тех же соображений линия действия полной опорной реакции в опоре C пройдет через шарнир E . Обе линии действия пересекутся в точке O с вертикальной реакцией V_B .

Так как все три опорных реакции пересеклись в одной точке, то, задавшись одной из них как некоторой не нулевой величиной, можем из треугольника сил, построенного для точки O , определить две других реакции. При этом не встретим никакого противоречия: треугольник сил будет замкнут, и вся система будет находиться в равновесии.

Отсюда получаем вывод: наше допущение о возможности возникновения реакций и без нагрузки показывает, что система, несмотря на выполнение условия $n = 0$, является геометрически изменяемой системой.

Если сдвинуть шарнир D или E (см. рис. 5.20, б), то линии действия реакций не будут пересекаться в одной точке.

В этом случае, при предположении о возможности возникновения одной из реакций, получим противоречие: рама не будет находиться в равновесии.

Значит, любая из реакций в варианте б рамы равна нулю, а значит, равны нулю и все усилия в сечениях стержней рамы.

Это в свою очередь означает, что система правильно образована и является геометрически неизменяемой и статически определимой.

5.9. Понятие о линиях влияния и их использовании при расчете стержневых систем

Введение

До сих пор в этом разделе пособия рассматривалась методика определения усилий статическим методом (с помощью уравнений равновесия) в статически определимых стержневых системах от действия на них **неподвижной** нагрузки.

Однако, на некоторые сооружения действуют и **подвижные** нагрузки, Примером может служить промышленное здание, в котором при его эксплуатации предусмотрено использование крана.

Станина крана может перемещаться, например, вдоль машинного зала электростанции по специальным подкрановым балкам. Вдоль подкрановых балок уложены рельсы, на которые через колеса станины крана передаются силы давления от собственного веса крана и несущего им груза.

Таким образом, при движении крана подкрановая балка будет испытывать давление колес крана в виде группы подвижных сосредоточенных сил.

Поскольку подкрановая балка опирается на поперечные рамы промышленного здания, то действие подвижной нагрузки передается и на поперечные рамы здания и на их фундамент.

Вторым примером сооружений, воспринимающих подвижные нагрузки, являются мосты. При этом силы давления на мост могут быть самые разнообразные (от группы сосредоточенных давлений колес поезда или от многочисленного и разнообразного автотранспорта, от распределенного давления по какой-то длине моста, например, от движущейся колонны людей и т. д.).

При движущейся по сооружению или его элементу нагрузке все внутренние усилия и опорные реакции будут изменяться по своему значению и по направлению действия.

Поэтому возникает вопрос о методике расчета сооружений и их элементов от подвижной нагрузки.

Движущаяся нагрузка может быть рассмотрена и как статическая (не вызывающая появления дополнительной нагрузки в виде сил инерции) и как динамическая (когда появляются силы инерции, которые необходимо учитывать как дополнительную нагрузку на сооружение).

Как показано в подразделе 1.4 учебного пособия на схеме разделения

строительной механики на «статика сооружений» и на «динамику сооружений», данное учебное пособие соответствует части «Статика сооружений».

Поэтому подвижную нагрузку в данном пособии будем рассматривать как статическую. Вопросы динамики будут изучаться в части «Динамика сооружений».

Изучение вопроса о расчете сооружений на статическую подвижную нагрузку начнем с понятия о линиях влияния.

Понятие о линиях влияния для усилий

Рассмотрим однопролетную балку, по которой движется сосредоточенная сила $P = 1$ кН.

При указанном положении единичного груза из уравнений равновесия опорные реакции выразятся как линейные функции координаты x :

$$V_A = 1 \cdot \frac{l-x}{l}; \quad V_B = 1 \cdot \frac{x}{l} \quad (5.22)$$

Эти функции являются **функциями влияния** единичной силы на величины (на значения и знаки) опорных реакций.

Графики этих функций влияния называются **линиями влияния** единичной силы на величины опорных реакций.

Графики линейных функций влияния можно построить по двум ординатам, например, при $x = 0$ и $x = l$ (рис. 5.21).

Линии влияния можно построить и для усилий M_k и Q_k в любом сечении k пролета балки.

При этом отдельно строятся два графика для каждого усилия: когда груз находится слева от рассматриваемого сечения k и когда он находится справа от сечения. Получается ветви л.в. M_k и л.в. Q_k слева и справа от сечения k (см. рис. 5.21).

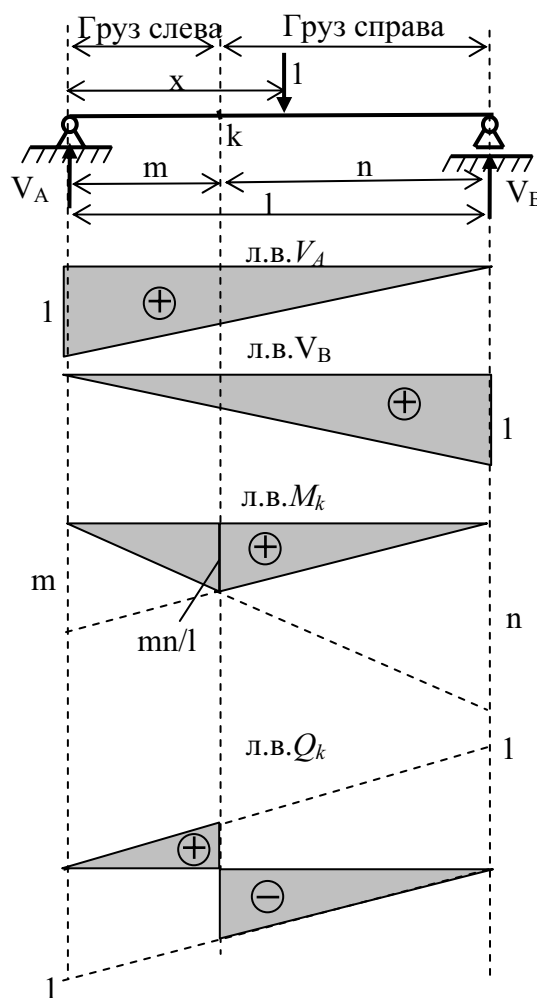


Рис. 5.21

Использование линий влияния для усилий с целью определения искомого усилия от группы сил

Линию влияния можно использовать для определения величины усилия, для которого она построена, от любой группы сил, действующих на рассматриваемую конструкцию (в данном примере – на простую балку).

Вычисление искомого усилия от группы сосредоточенных сил P_i с номером i и от группы равномерно распределенных нагрузок интенсивностью q_j с номером j будет выполняться по формуле:

$$\text{Усилие} = \sum_i P_i \cdot z_i + \sum_j q_j \cdot \omega_j. \quad (5.23)$$

Здесь z_i является ординатой линии влияния для рассматриваемого усилия, соответствующей сосредоточенной силе P_i ; ω_j представляет собой площадь линии влияния находящейся под распределенной нагрузкой интенсивности q_j . Все произведения в формуле (5.23) берутся со своими знаками.

Для получения максимального значения искомого усилия необходимо разместить грузы таким образом, чтобы вычисление по формуле (5.23) дало это значение.

Вопрос о построении линий влияния был продемонстрирован на примере простой однопролетной балки. Аналогично с использованием уравнений равновесия можно построить линии влияния для опорных реакций и внутренних усилий M , Q , N в сечениях стержней любых статически определимых стержневых систем (шарнирных балок, рам, трехшарнирных арок и ферм) [7, 10].

Значительно более сложно линии влияния для искомых усилий строятся для статически неопределимых стержневых систем. Однако использование современных программных комплексов (например, программы SCAD) позволяет достаточно быстро определять искомые усилия от любой нагрузки при любом ее конкретном положении в процессе передвижения по сооружению.

5.10. Информация о сборнике заданий для самостоятельных расчетных работ студентов на тему «Определение усилий и построение эпюр M, Q, N в статически определимых стержневых системах»

Изучение рациональных способов определения усилий в статически определимых стержневых системах с учетом их конструктивных особенностей является очень важным этапом учебного процесса по дисциплине

«Строительная механика».

Умение определять усилия с помощью уравнений равновесия в различных типах статически определимых стержневых систем (балок, рам, арок, ферм) позволяет учащемуся лучше понимать их общие свойства и различие, определяемое конструктивными особенностями.

В тоже время, как отмечалось в предисловии к пособию, при выполнении задач построения эпюр усилий в статически определимых стержневых системах учащийся должен начать изучение современной методики расчета стержневых систем на ПК. Предварительные сведения по этому вопросу были даны в пособии в разделах 3 и 4.

С целью выработки знаний и умений студентов по этим двум методикам им задаются для самостоятельного решения ряд расчетных работ из сборника заданий и задач [6]. Часть заданий в сборнике, относящихся к разделу «Расчет статически определимых стержневых систем», приведена в приложении 1.

Расчетные работы по построению эпюр усилий в статически определимых балках, рамах и фермах состоят из двух разделов:

1. Расчеты на ПК с использованием программы SCAD, реализующей МКЭ.

2. Контроль результатов расчета вручную (без применения ПК). При этом используются признаки (свойства) правильных эпюр, приведенные в разделе 4, и рациональные способы применения уравнений равновесия.

Для подготовки учащихся по использованию программы SCAD на уровне «Пользователя» кроме предварительных данных, приведенных в разделе 3, в разделах 6 – 9 пособия приведены методические указания по применению этой программы на примерах расчета многопролетной балки, рамы и фермы.

Расчетная работа по определению усилий и построению соответствующих эпюр в статически определимой трехшарнирной арке выполнена в пособии с использованием не программы SCAD, а программы ARKA [21], реализующей расчет по формулам, приведенным в подразделе 5.5.

Методические указания по оформлению расчетных работ (заданий) при выполнении указанных выше двух разделов приведены в пособии [4] и (для статически определимых стержневых систем) в разделах 6 – 11.

Дополнительно к сборнику заданий по построению эпюр усилий в статически определимых стержневых системах в приложении 2 приведены контрольные задачи, а в приложении 3 – вопросы для подготовки к зачету и экзамену по методикам расчета статически определимых стержневых систем.

6. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОГРАММЫ SCAD ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

Введение

В данном учебном пособии процедура решения задачи по определению НДС плоских стержневых систем с помощью программы SCAD условно разделена на следующие этапы.

1. *Запуск программы и подготовка к созданию расчетной схемы*

1.1. Запуск программы SCAD.

1.2. Создание нового проекта для выполнения расчета заданной стержневой системы и его наименование.

1.3. Задание имени файла в директории SDATA, в котором будет сохраняться вся информация по введенным исходным данным. Выход на схему «Дерево проекта» для начала работы.

1.4. Открытие окна «Расчетная схема» для формирования расчетной схемы МКЭ рассматриваемой стержневой системы.

2. *Создание расчетной схемы стержневой системы для МКЭ*

2.1. Графическое представление расчетной схемы в общей системе осей координат. Контроль за направлением осей местной системы координат на каждом элементе.

2.2. Назначение типа элементов.

2.3. Назначение жесткости элементов.

2.4. Назначение опорных связей.

2.5. Назначение шарниров в узлах элементов.

2.6. Печать или сохранение расчетной схемы.

3. *Загружение расчетной схемы МКЭ*

3.1. Задание узловой нагрузки.

3.2. Задание нагрузки на элемент.

3.3. Сохранение загрузки.

3.4. Печать или сохранение расчетной схемы с созданным загружением.

4. *Выполнение линейного расчета и представление его результатов*

4.1. Выполнение линейного расчета.

4.2. Графическое представление полученных результатов расчета

стержневой системы. Их сохранение и печать.

4.3. Табличное представление полученных результатов расчета стержневой системы. Их сохранение и печать.

В разделе 7 рассматриваются некоторые общие вопросы выполнения данной последовательности расчета на этапах 1÷3.

Конкретные действия на этих этапах приведены в разделах 8 ÷ 10, где рассматриваются примеры выполнения расчетных работ по определению усилий в статически определимых стержневых системах: многопролетных балках, рамах и фермах. Там же рассмотрены действия расчетчика на этапе 4 применения программы SCAD.

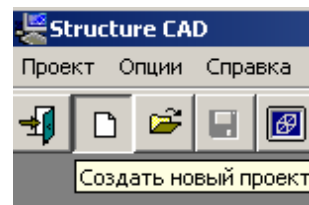
Вопросы определения перемещений в статически определимых стержневых системах с помощью программы SCAD рассмотрены только в разделе 11.

Нумерация, использованная внутри раздела и подразделов, выполнена в соответствии с указанной выше нумерацией этапов и делением их на подэтапы.

1. Запуск программы и подготовка к созданию расчетной схемы

1.1. Запуск программы SCAD

После запуска программы на экране появится окно, информирующее о загрузке программы с указанием на операционную систему, в которой она работает. Окно имеет меню из трех разделов: **Проект**, **Опции**, **Справка** и инструментальную панель из 5 кнопок.



1.2. Создание нового проекта для выполнения расчета его наименование

Курсор устанавливается на одноименной кнопке «Создать новый проект» и нажимается левая кнопка мыши. На экран выводится диалоговое окно **Новый проект**. Вид этого окна в разных версиях SCAD различается.

В данном варианте (ниже приведена только часть окна) выполним следующие действия.

Ввод наименования проекта. Введем, например, «Работа 1».

Ввод названий: организации, выполняющей расчет, и объекта. В окне «Организация» учащемуся можно ничего не записывать. В нашем примере записано: СПбГПУ. В окне «Объект» введем, например, «Балка 1».

Установка единиц измерения. Открываем окно «Единицы измерения» и в соответствии с выбранной расчетчиком системой (СИ или технической, например, МТС) назначаются единицы измерения основных величин.

Выбор типа схемы. При расчете плоской балки используется конечный элемент типа 2 «Стержень плоской рамы». Поэтому при расчете плоских балок и рам в этом диалоговом окне надо выбрать: «2. Плоская рама».

При расчете плоской фермы используется конечный элемент типа 1 «Стержень плоской фермы». Поэтому на поле «Тип схемы» необходимо выбрать «Плоская шарнирно-стержневая система».

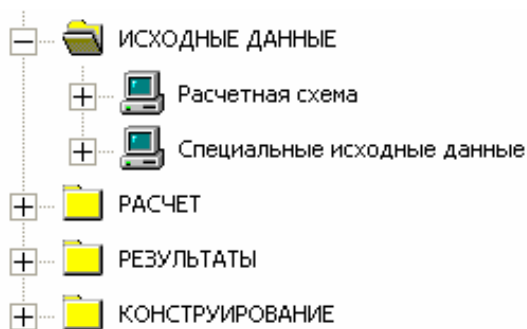
Пояснения по указанным типам стержневых элементов частично были приведены в разделе 3 и будут рассмотрены далее на этапе 2 последовательности расчета.

Сохранение нового проекта. Для сохранения введенных данных о новом проекте курсор подводится к кнопке «OK» в рассматриваемом диалоговом окне и нажимается левая кнопка мыши. При этом на экран будет выведено окно **Создание нового проекта SCAD** с открытой папкой SDATA (здесь это окно не приводится).

1.3 Задание имени файла в директории SDATA. Выход на схему «Дерево проекта» для начала работы

В открывшемся окне с папкой SDATA необходимо задать имя файла, в котором будет сохранен проект.

Команда «Сохранить» открывает окно со схемой, которая называется **Дерево проекта** (здесь изображена только его часть).



Созданный файл будет храниться в папке SDATA, а затем имя файла будет присвоено всем служебным файлам и порождаемым в процессе работы комплекса файлам с результатами. Эти рабочие файлы будут храниться в рабочей папке SWORK.

Примечание к этапу 1. При необходимости повторной работы с созданным проектом, после запуска программы SCAD на инструментальной панели из 5 кнопок надо нажать

кнопку  «Открыть существующий проект». Появится окно **Открытие проекта SCAD**. В открывшемся окне в папке SDATA уже будет находиться созданный ранее файл. Его необходимо выбрать и дать команду «Открыть». Это приведет к появлению схемы **Дерево**

проекта. Далее выполняем следующие действия.

1.4. Открытие окна «Расчетная схема»

Дерево проекта содержит четыре папки: **Исходные данные**, **Расчет**, **Результаты** и **Конструирование** (см. приведенную выше часть дерева).

В первую очередь необходимо войти в папку **Исходные данные** и открыть ветвь **Расчетная схема**.

В результате откроется рабочее окно по созданию расчетной схемы, в котором имеется шесть функциональных разделов (их названия указаны ниже информационной панели).

Каждому разделу соответствует своя инструментальная панель с рабочими кнопками. Сначала окно откроется с активной инструментальной панелью раздела **Управление**.

Одновременно в окне появятся две подвижные инструментальные панели: **Фильтры отображения** и **Визуализация**. Можно изменять размеры сторон этих панелей и сделать их удобными для одновременного размещения в поле окна вместе с расчетной схемой.

Панели видны только в том случае, если на инструментальной панели раздела **Управление** соответственно нажаты кнопки  и .

Прежде чем перейти к **Этапу 2** раздела 2 вернемся к рассмотрению предварительных сведений об МКЭ и программе SCAD (см. раздел 1 пособия).

В разделе 3 пособия были предварительно рассмотрены следующие общие вопросы, связанные с применением конечных элементов в плоских стержневых системах:

- 1) о типах плоских конечных элементов, которые используются для построения расчетных схем плоских стержневых систем;
- 2) об общей и о местной системах осей координат;
- 3) о нумерации концевых узлов конечных элементов в местной системе координат и общей нумерации узлов и элементов в расчетной схеме стержневых систем;
- 4) о задании жесткостей конечных элементов на растяжение – сжатие EF и на изгиб $EI = EI_y$;

Здесь дадим некоторые дополнительные сведения по этим вопросам.

К вопросу 2). В программе SCAD в разделе **Назначения** предусмотрена возможность смены направления оси $X1$ местной системы координат. Это делается следующим образом.



1. На инструментальной панели этого раздела нажимается кнопка «Перевернуть местную ось стержня».

2. На построенной расчетной схеме с помощью курсора и левой клавиши мыши отмечается элемент (его ось на экране становится красной), в котором изменяется направление оси, и нажимается кнопка «ОК» на инструментальной панели раздела. После этого цвет элемента восстанавливается, а ось $X1$ оказывается повернутой в обратном направлении по сравнению с первоначальным направлением. При этом изменится положение начала осей координат, что приведет к замене номеров 1 (н) и 2 (к) узлов элемента соответственно на номера 2 (к) и 1 (н) (см. рис. 3.11). Изменяются также положение осей $Z1$, $Y1$ и положительные направления усилий M и Q .

К вопросу 3). В расчетной схеме стержневой системы, которая будет строиться в рабочем окне (см. п. 1.4. этапа 1) нумеруются и узлы и элементы. В принципе эта нумерация может быть произвольной.

Впервые вопрос о нумерации узлов и элементов в расчетной схеме МКЭ, которая строится с помощью программы SCAD, встретился на примере рамы (см. рис. 3.1 в разделе 3 пособия). Там было отмечено, что в программе SCAD указанная нумерация выдается автоматически. Эта нумерация связана с последовательностью ввода узлов и конечных элементов.

Так узлы элементов балки обычно вводятся последовательно слева направо. Поэтому первый номер будет у левого крайнего узла, а наибольший номер (3) – у крайнего правого (рис. 6.1).

Эти крайние узлы балки отмечены прямоугольниками, так как в них в дальнейшем будут поставлены опорные связи (см. далее подраздел 2.4 этапа 2).

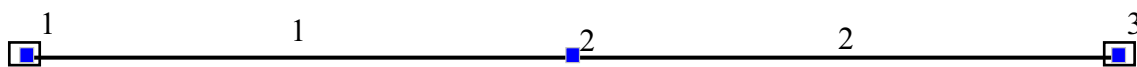


Рис. 6.1

Нумерация узлов и элементов в раме была показана на рис. 3.1, б. При указанной нумерации узлов, отражающей порядок их ввода, местные системы координат на конечных элементах будут направлены так, как показано на рис. 3.10.

Нумерация узлов и элементов в ферме продемонстрирована на рис. 6.2.

Номера элементов и узлов на расчетной схеме изображаются при нажатых на панели **Фильтры отображения** кнопках  и .

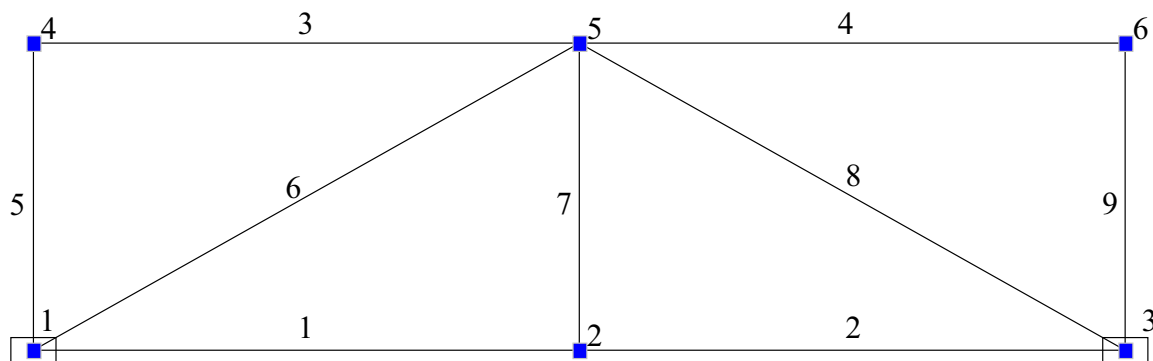


Рис. 6.2

Теперь вернемся к продолжению этапов расчета, приведенных выше в разделе 7, и выполним действия, соответствующие этапу 2.

2. Создание расчетной схемы стержневой системы для МКЭ

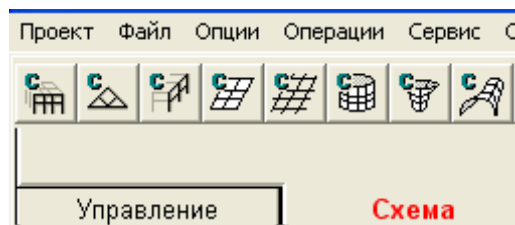
2.1. Графическое представление расчетной схемы

Геометрическое изображение расчетных схем плоских балок, рам и ферм, встречающихся в заданиях (см. приложение 1 к пособию), в программе SCAD может быть выполнено двумя способами (или их комбинацией):

- 1) использованием типовых схем плоских стержневых систем;
- 2) последовательным вводом сначала узлов элементов расчетной схемы, а затем изображением самих элементов (вводом элементов).

Использование типовых схем. Для создания расчетной схемы этим способом необходимо войти в раздел **Схема**. С этой целью курсор устанавливается на закладке **Схема** и нажимается левая кнопка мыши. Появится инструментальная панель (здесь приведена только ее часть), соответствующая разделу **Схема**.

Для построения расчетной схемы плоской балки или рамы необходимо нажать первую кнопку на инструментальной панели **Схема**, а для построения плоской фермы следует нажать вторую кнопку.



Выполнение построения конкретных расчетных схем с помощью типовых схем показано в примерах расчета балок, рам и ферм в разделах 7 – 9.

Построение расчетной схемы способом последовательного ввода узлов и элементов. В этом способе каждый стержневой элемент расчетной схемы вводится отдельно. Перед выполнением этой операции учащемуся рекомендуется сначала изобразить на бумаге вид расчетной схемы с предварительным указанием номеров узлов и элементов. Затем необходимо выбрать узел, в котором будет находиться начало общей системы осей координат, и изобразить направление координатных осей (см., например, рис. 3.1, б для рамы).

После этого можно начать процедуру ввода узлов по их координатам в общей системе координат.

Ввод узлов. Для ввода узлов открываем раздел **Узлы и элементы** и нажимаем кнопку  «Узлы». Появляется инструментальная панель для работы с узлами расчетной схемы, в которой нажимаем кнопку  «Ввод узлов».

В результате откроется одноименное диалоговое окно. Первый узел вводится с нулевыми координатами и нажимается кнопка «Добавить». В результате (при нажатой на панели фильтра отображения кнопке ) в поле окна для изображения расчетной схемы появится изображение узла, а при нажатой кнопке  - номер узла.

Затем, в соответствии с предварительно назначенными номерами узлов, вводятся остальные узлы.

Ввод элементов. Ввод стержневого элемента представляет собой соединение прямой линией его концевых узлов. Для этого необходимо на инструментальной панели раздела **Узлы и элементы** нажать кнопку  и на появившейся инструментальной панели нажать кнопку  «Добавление стержней».

Изменивший форму курсор подвести к узлу, который предполагается быть узлом 1 (по нумерации в местной системе координат), и нажать левую клавишу мыши.

Не отпуская нажатую клавишу провести линию до узла 2 (по нумерации в местной системе координат). Отпустить клавишу и снова нажать и отпустить.

Если при этом на фильтре отображения нажата кнопка  «Номера

элементов», то появится номер введенного элемента.



При нажатии на фильтре отображения кнопки будет обозначена местная система осей координат элемента. Направление оси X_1 будет совпадать с направлением рисования оси элемента. Например, для получения местной системы координат на горизонтальном элементе 2 (см. расчетную схему балки на рис. 7.1) ось элемента надо рисовать от узла 2 к узлу 3. Аналогично следует рисовать горизонтальные элементы на рамах слева направо.

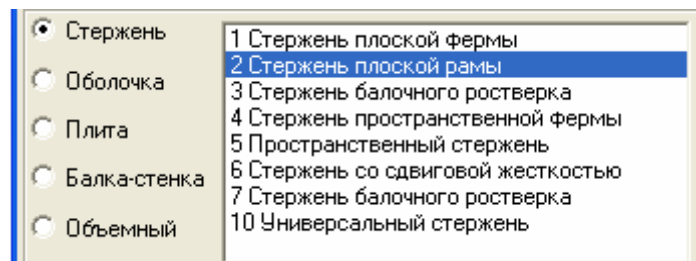
Желательно также, чтобы у всех вертикальных элементов рамы местная система осей координат имела вид, изображенный на рис. 3.10, б. Поэтому все вертикальные элементы надо рисовать снизу вверх.

2.2. Назначение типа элементов

После построения расчетной схемы, рекомендуется с помощью фильтра отображения проверить тип элементов нажатием кнопки .

Если на введенном элементе не будет обозначен его тип (или выбран не тот тип), то необходимо открыть раздел **Назначения** и на его инструментальной панели нажать кнопку .

Откроется окно **Назначение типа элементов** (ниже показана только его часть).



При расчете стержневой системы в диалоговом окне необходимо выбрать «Стержень» и указать назначаемый тип стержня (в приведенной части окна выбран тип 2 «Стержень плоской рамы»).

Нажатие кнопки «ОК» приводит к закрытию окна. Курсор при этом примет иную форму.

Теперь курсором на расчетной схеме надо **выделить** стержень, которому будет назначаться выбранный тип элемента. Это выделение состоит в следующем.

Курсор подводится к изображению элемента. Нажимается и отпускается левая клавиша мыши (слышится щелчок). Линия, изображающая элемент,

изменит первоначальный цвет на красный.

На инструментальной панели нажимается кнопка «ОК». При этом элементу возвращается исходный цвет и (при нажатой на панели фильтров отображения кнопке ) появится номер типа элемента.

Если подобным образом надо отметить сразу несколько элементов, то их можно **выделить все сразу** с помощью вызова правой кнопкой мыши окна **Выбор узлов и элементов**. Как это делается, будет показано в примерах расчета.

2.3. Назначение жесткостей элементов

Некоторые общие вопросы, связанные с особенностями задания жесткостей стержней стержневых систем были предварительно рассмотрены в подразделе 3.6.

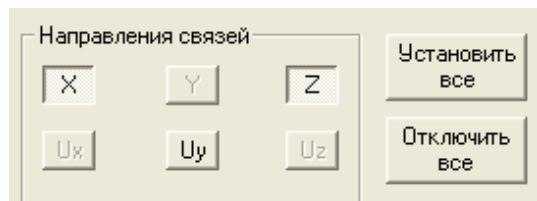
В программе SCAD предусмотрены различные способы задания этих жесткостей, которые будут пояснены далее в конкретных примерах расчета.

2.4. Назначение опорных связей

Стержневая система часто опирается на основание, которое считается жестким. В этом случае в узел, который присоединяется к жесткому основанию, вводятся жесткие связи. Сначала рассмотрим именно этот вариант.

Для установки жестких связей в опорных узлах плоской стержневой системы (с помощью курсора и левой клавиши мыши) нажмем кнопку  «Установка связей в узлах» инструментальной панели раздела **Назначения**.

Появится диалоговое окно **Связи**.



В открывшемся диалоговом окне (здесь приведена только его часть) предусмотрено назначение связей для пространственного узла (6 связей в

соответствии с 6 степенями свободы жесткого узла в пространственной задаче).

В общей системе осей координат связи X, Y, Z означают закрепление узла в направлении одноименных осей общей системы координат.

Связи UX, UY, UZ означают закрепление узла от поворотов относительно указанных осей общей системы координат.

В плоской стержневой системе, расчетная схема которой находится в плоскости XOZ, для закрепления жесткого узла используются следующие три связи:

связь X для закрепления узла от линейных смещений в направлении оси X;

связь Z для закрепления узла от линейных смещений в направлении оси Z;
связь UY для закрепления узла от поворота вокруг оси Y.

В приведенном окне продемонстрирована установка горизонтальной и вертикальной связей в узел 1 расчетной схемы балки (см. рис. 6.1)

С помощью курсора и левой мыши нажимаем кнопки X и Z и ОК. Подводим курсор к узлу 1 построенной расчетной схемы балки и нажимаем левую клавишу мыши. На цветном дисплее квадратик, обозначающий узел, становится красным.

Подтверждаем ввод этих связей нажатием на инструментальной панели кнопки ОК. При этом узел теряет красный цвет и, если на фильтре отображения нажата позиция , узел со связями отмечается прямоугольником.

Аналогично вводится вертикальная связь Z в узле 3, который соответствует шарнирно подвижной опоре балки (см. рис. 6.1).

Если в плоской балке или раме необходимо в расчетной схеме установить опору в виде заделки, то в приведенном окне одновременно должна быть нажата кнопка с обозначением UY. Это будет означать установку связи в жестком узле для закрепления его от поворота вокруг оси Y.

Вопрос о назначении упругих опор или непрерывного упругого основания будет рассмотрен во второй части учебного пособия (см. также пособие [3], посвященное примерам расчета статически неопределимых стержневых систем).

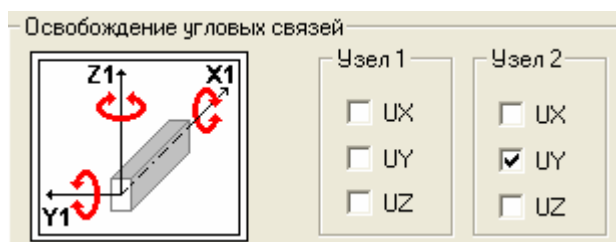
2.5. Назначение шарниров в узлах элементов

В расчетной схеме фермы шарниры устанавливать не требуется, поскольку используются типовые элементы типа 1 (см. рис. 6.2). Вопрос назначения шарниров в узлах конечных элементов типа 2 был рассмотрен в примере построения расчетной схемы для рамы в разделе 3.

Здесь рассмотрим процедуру установки шарниров на примере плоской рамы, изображенной на рис. 6.3.

Установка шарниров выполняется в разделе **Назначения**. Необходимо нажать кнопку  «Установка шарниров». Откроется окно **Условия примыкания стержней** (приведена только его часть).

Постановка одиночного шарнира в узлах 2, 3 и 5 (см. рис. 6.3, б) должна быть выполнена на любом одном



элементе, примыкающем к указанным узлам.

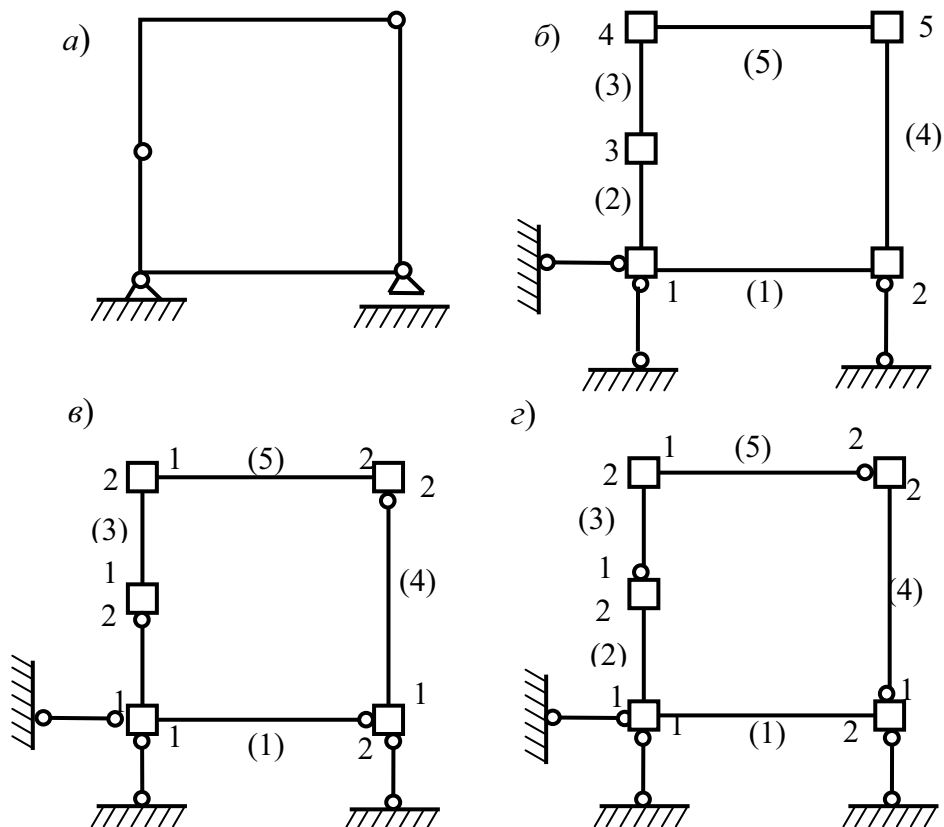


Рис.6.3

Элементы при постановке шарниров рассматриваются в местной системе осей координат. В связи с этим на рис. 6.3, в, г узлы всех элементов отмечены цифрами 1 и 2 в соответствии с направлением оси $X1$ на элементах.

Открывшееся окно может использоваться как в пространственной, так и в плоской задачах. В рассматриваемой плоской задаче на рис. 6.3, в рассмотрен вариант, когда на элементах 1, 2, и 5 освобождена только одна угловая связь U_Y в узле 2 каждого из этих элементов.

Если такую связь освободить в узле 2 элементов 1, 2 и 4, то это равносильно поставке шарниров заданной на рис. 6.3, в рамы.

Для подтверждения выбранного варианта удаления связи необходимо нажать в окне кнопку «ОК». Тогда это диалоговое окно исчезнет, а на экране в окне раздела **Назначение** появится рассматриваемая схема рамы.

На расчетной схеме необходимо подвести курсор к элементу 1 и нажать левую клавишу мыши. Элемент 1 выделится красным цветом. Тоже сделать с элементом 2 и, например, с элементом 4. Затем нажать кнопку «ОК» с зеленой галочкой на инструментальной панели раздела **Назначения**. Тогда красное выделение указанных элементов исчезнет, а на расчетной схеме (при нажатой

кнопке  на панели **фильтры отображения**) на строящейся расчетной схеме рамы появятся введенные шарниры (рис. 6.3, в).

Еще один вариант удаления связей показан на рис. 6.3, г. Здесь удалена связь UY в узле 1 элементов 3, 4 и в узле 2 элемента 5. Процедура удаления этих связей аналогична только что рассмотренной процедуре. В результате получим расчетную схему, показанную на рис. 6.3, г, которая будет так же аналогична заданной на рис. 6.3, а раме.

Очевидно, что возможны и другие варианты постановки шарниров в рассматриваемой расчетной схеме рамы для МКЭ.

2.6. Печать или сохранение расчетной схемы

Имеются различные возможности печати и сохранения созданной расчетной схемы и ее дальнейшего использования для отчета по работе. Отметим следующие три.

1. Самым простым и быстрым для выполнения в программе SCAD является печать расчетной схемы сразу с экрана. Для этого в меню окна с расчетной схемой необходимо войти в раздел **Файл** и выполнить указанные действия для печати.

Эта печать будет воспроизводить на странице не только изображение расчетной схемы, но и специальный формат оформления страницы, предложенный разработчиками программы.

2. Для получения распечатки только расчетной схемы (без специального формата листа) можно с помощью клавиши «Print Screen SysRq» на клавиатуре компьютера зафиксировать вид страницы в разделе **Файл** (при просмотре) и скопировать его в рабочее окно программы Paint. Затем из полученного в рабочем окне программы Paint изображения страницы вырезать только вид расчетной схемы и скопировать его в документ с расширением doc отчета по работе.

3. Для отложенной по времени печати можно сохранить вид сформированной для МКЭ расчетной схемы в файле. Необходимо выйти в меню раздела **Управление** и нажать кнопку с изображением фотоаппарата .

Далее надо выполнить ряд операций, описание которых дано разработчиками программы в справке, и сохранить образ расчетной схемы в файле с расширением wmf в рабочей папке SWORK.

Затем, при написании отчета о работе в документ с расширением doc, можно сделать вставку рисунка из указанного файла.

3. Загружение расчетной схемы МКЭ

Предварительное рассмотрение этого вопроса было выполнено в подразделе 3.7. Здесь обратим внимание только на вопрос о дроблении конечного элемента на более мелкие элементы в зависимости от вида нагрузки на него.

Дробление плоского стержневого элемента типа 2, связанное с видом нагрузки на конечный элемент. В принципе в программе SCAD на элемент типа 2 предусмотрено задание по его длине любой сосредоточенной и распределенной нагрузки.

Однако, иногда, для упрощения анализа эпюр усилий и для получения перемещений в местах приложения сосредоточенных сил намечаются узлы и в местах приложения сосредоточенных сил и в местах начала и конца участка стержня с распределенной нагрузкой.

Поясним это на примере одного конечного элемента (рис. 6.4, а). Пусть на него действует нагрузка, указанная на рис. 6.4, б).

В результате расчета стержневой системы с помощью программы SCAD в таблице с результатами усилий выдаются усилия (в местной системе координат) в любом числе заранее назначенных сечений этого элемента.

Более просто анализируются результаты расчета при указанной нагрузке, если дополнительно разбить элемент 1 с узлами 1 и 2 на четыре элемента с пятью узлами (см. рис. 6.4, в).

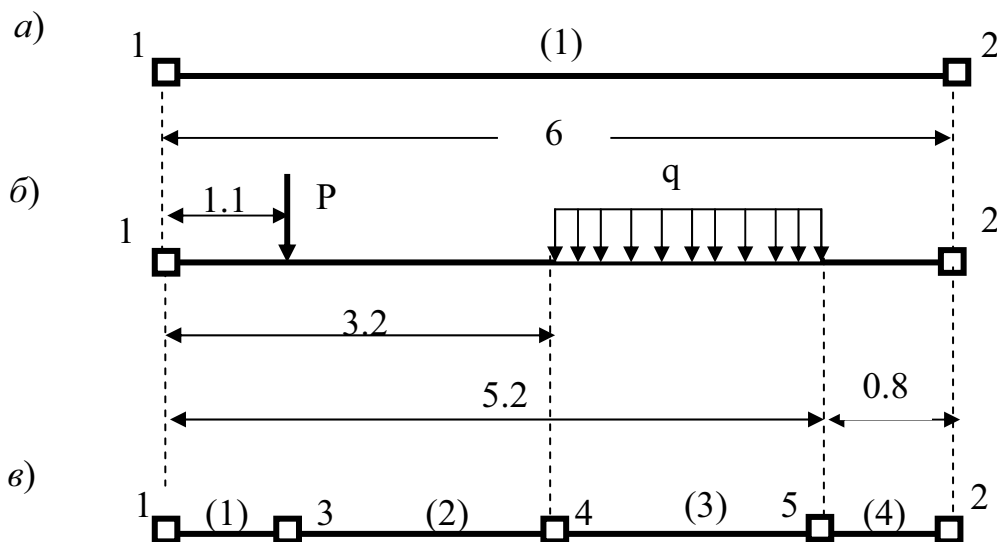


Рис. 6.4

Если такое разбиение можно предусмотреть сразу, то тогда нумерация узлов и конечных элементов слева направо на схеме будет последовательной.

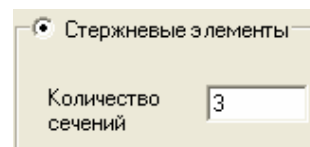
На рис. 6.4, в показан другой вариант, когда дополнительное разбиение элемента сделано после первого разбиения на элемент с узлами 1 и 2.

В любом случае в окне **Расчетная схема** необходимо выбрать раздел **Назначения** и в меню выбрать кнопку  «Назначение промежуточных сечений для расчета усилий». При ее нажатии открывается локальное окно, в котором необходимо указать необходимое расчетчику число сечений по длине стержня.

При назначении четного числа сечений n_c^r на элементе r он разбивается на нечетное число $(n_c^r - 1)$ равных участков. При назначении нечетного числа сечений n_c^r элемент разбивается на четное число $(n_c^r + 1)$ равных участков.

Ниже приведена только часть окна для заказа вычисления усилий в трех сечениях элемента (например, элемента (3) на рис. 6.4, в).

На элементах без какой-либо нагрузки по его длине, необходимо назначить только два сечения по его концам.



В этих сечениях в таблице с результатами усилий и будут выданы (в местной системе координат для каждого элемента) их значения и знаки.

Если положение нагрузки таково, что деление на равные участки не даст желаемого результата, то целесообразно разделить элемент на более мелкие равные или неравные элементы, выбрав в разделе **Узлы и элементы** подраздел



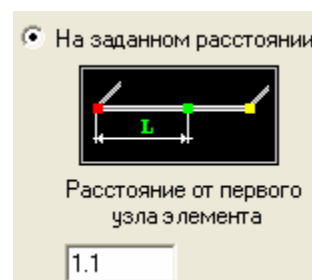
«Элементы» и в нем опцию



«Разбивка стержня».

При нажатии последней кнопки откроется одноименное окно (приведем только его часть).

Для того, чтобы в результирующей таблице усилий получить усилия в месте приложения сосредоточенной силы и в сечениях в начале и конце участка с равномерно распределенной нагрузкой, сначала в окне «Разбивка стержня» выбираем функцию «На заданном расстоянии».



Введем значение расстояния сосредоточенной силы от узла 1 (1.1 м). Нажимаем в окне кнопку ОК и с помощью курсора и левой клавиши мыши **выделяем** стержень, на котором вводим дополнительный узел. После нажатия кнопки «ОК» на инструментальной панели подраздела «Элементы» раздела **Узлы и элементы** на стержне появляется изображение узла и его номер 3 (для этого на панели **фильтры отображения** должны быть нажаты кнопки  и ). При этом элемент 1 разделится на два элемента с

номера 1 и 3 (для появления номеров на панели **фильтры отображения** должна быть нажата кнопка ).

Аналогично введем узел 4 на расстоянии 2.1 м от узла 3 (появится узел 4 и элементов станет три) и узел 5 на расстоянии 2 м от узла 4 (появится узел 5 и элементов станет 4, см. рис. 6. 4, в).

Обратим внимание на то, что во вновь полученных элементах направление осей местной системы координат и номера узлов 1 и 2 останутся без изменения (см. рис. 3.10, а).

4. Выполнение линейного расчета и анализ результатов

4.1. Выполнение линейного расчета

Теперь, когда все необходимые для расчета параметры балки и нагрузки на нее заданы, нужно войти в раздел **Управление** и нажать кнопку  для выхода на схему **Дерево проекта**.

На дереве проекта в группе функций **Расчет** выбираем «Линейный».

Нажатие кнопки  «Линейный» открывает окно **Параметры расчета**. Здесь необходимо выбрать функцию «Полный расчет» и нажать в окне кнопку «ОК».

Возникнет информационное окно о прохождении математических расчетов по формированию и решению системы уравнений для МКЭ. Этот вопрос в пособии (на данной стадии применения учащимися программы SCAD как начинающими «Пользователями») не рассматривается.

По окончании процедуры решения появится информация «Задание выполнено».

После этого необходимо нажать кнопку «Выход», что приведет к появлению окна со схемой **Дерево проекта**, в котором становится доступным раздел **Результаты**.

Примечание. Если режим расчета не доступен на дереве проекта будет значок . Это означает, что введены не все исходные данные. Надо вернуться в окно **Расчетная схема** и проверить ввод исходных данных.

Действия пользователя программой SCAD в подразделах «Графический анализ» и «Печать таблиц» дерева проекта будут рассмотрены на примерах расчета конкретных стержневых систем в разделах 7 – 9 пособия.

7. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M, Q В МНОГОПРОЛЕТНОЙ ШАРНИРНОЙ БАЛКЕ

Постановка задачи и анализ заданной расчетной схемы балки.

Рассмотрим пример выполнения расчетной работы 1 из сборника заданий (см. приложение 1 или [1, 2]).

По шифру ABCD из сборника выбираем расчетную схему шарнирной балки (рис. 7.1, а), ее размеры, м, и нагрузку на нее, кН·м, кН/м, кН.

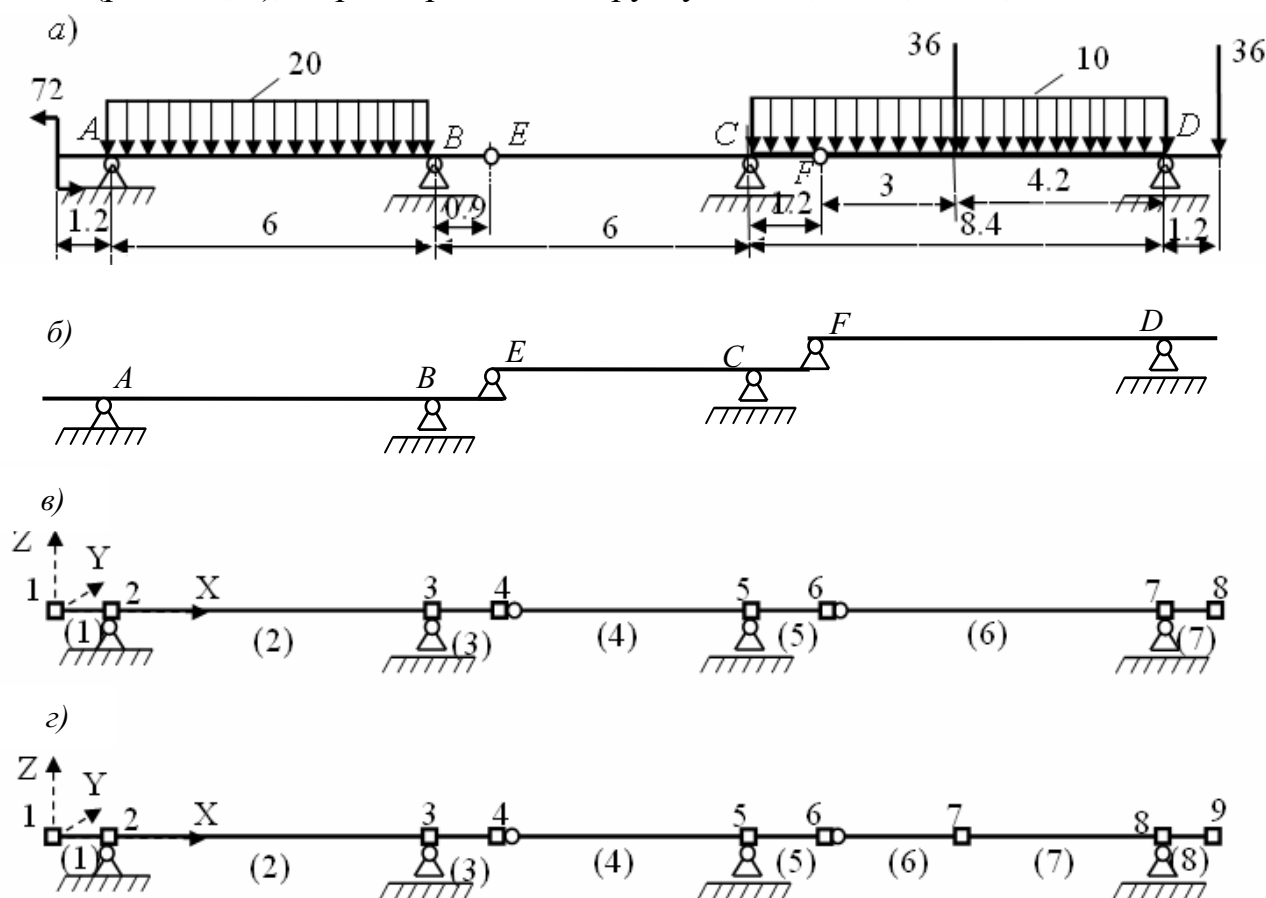


Рис. 7.1

В соответствии с заданием к работе 1 требуется:

7.1. Построить эпюры усилий M и Q в балке расчетом МКЭ на ПК с использованием программы SCAD и определить по эпюрам усилия опорные реакции балки.

7.2. Выполнить контроль результатов расчета (см. разделы 4 и 5 пособия).

7.1. РАСЧЕТ БАЛКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

Перед началом работы на компьютере необходимо выполнить следующие две операции с заданной расчетной схемой балки.

1. Выяснить принадлежность балки к статически определимым или к статически неопределимым системам.

Необходимость в этом связана с тем, что для статически определимых систем *при определении в них только усилий* упрощается задание жесткостей стержней при использовании программы SCAD (см. подраздел 3.6).

2. Вручную разбить балку на конечные элементы типа 2 (стержневой элемент плоской рамы, см. табл. 3.1, рис. 3.10, 3.11) с учетом особенностей ее конструкции и вида, действующей на нее нагрузки.

Проверка статической определимости балки

Эта операция выполняется в следующей последовательности.

1, а. Подсчитывается степень статической неопределимости *n* балки. Для этого используется формула:

$$n = n_{\text{оп}} - (3 + n_{\text{ш}}), \quad (7.1)$$

где $n_{\text{оп}}$ — число неизвестных составляющих опорных реакций во всех опорах балки;

$n_{\text{ш}}$ — число уравнений равновесия вида $\sum M_{\text{ш}} = 0$, которые можно записать для каждого одиночного шарнира дополнительно к имеющимся трем уравнениям равновесия для всей балки.

В заданной балке $n_{\text{оп}} = 5$; $n_{\text{ш}} = 2$. В результате по указанной формуле получаем *необходимое условие статической определимости балки*: $n = 0$.

1, б. Исследуется геометрическая неизменяемость балки. В данном случае для этого достаточно выполнить структурный анализ балки.

Действительно, заданную балку (рис. 7.1, а) можно рассматривать как систему, состоящую из трех жестких дисков (*ABE*, *ECF* и *FD*) (рис. 7.1, б).

Диск *ABE* неподвижно прикреплен к основанию тремя опорными связями и, таким образом, геометрически неизменяем.

Диск *ECF* прикреплен двумя связями к неподвижному диску *ABE* и одной связью с неподвижным основанием, поэтому он также геометрически неизменяем.

Аналогично доказывается, что диск *FD* геометрически неизменяем, а значит, геометрически неизменяема и вся заданная шарнирная балка.

Таким образом, на основании исследований, выполненных в пунктах 1, а

и 1. б, делаем вывод о том, что заданная балка является статически определимой системой.

Построение вручную расчетной схемы МКЭ

Второй подготовительной операцией перед началом расчета на ПК с помощью программы SCAD является изображение расчетной схемы МКЭ заданной балки вручную:

- Изображаем заданную расчетную схему балки, на которой с учетом расположения опор и шарниров и с учетом вида нагрузки (см. указания в разделе 3 и на этапе 3 раздела 7 данного пособия), разбиваем стержни на конечные элементы.

Примечание. Приведено два варианта разбиения заданной балки: без учета вида нагрузки на конечных элементах (рис. 7.1, б) и разбиение с учетом вида нагрузки (рис. 7.1, в). Этот вопрос был рассмотрен в предыдущем разделе 6 на этапе 3.

- Нумеруем узлы и элементы.
- Выбираем начало общей системы координат.
- Указываем значения длин элементов для последующего более быстрого их ввода при работе непосредственно на компьютере.

Такая заранее подготовленная в тетради вспомогательная расчетная схема позволит более рационально использовать время по созданию соответствующей расчетной схемы с использованием возможностей программы SCAD.

Инструкция по выполнению расчета балки с помощью программы SCAD

1. Запуск программы и подготовка к созданию расчетной схемы

На этапе 1 последовательности операций при использовании программы SCAD (см. пункты этапа 1 во введении к разделу 6) действия при запуске программы и открытии окна **Новый проект** остаются такими же, какими они описаны в разделе 6.

Поэтому здесь сразу начнем с описания этапа 2 по формированию расчетной схемы балки по заранее заготовленному образцу (см. рис. 7.1, г).

2. Создание расчетной схемы балки для МКЭ

2.1. Синтез расчетной схемы балки

Для создания расчетной схемы шарнирной балки из конечных элементов типа 2 (синтез расчетной схемы) можно использовать два способа.

1. Использовать заготовку для построения расчетной схемы типовой плоской рамы. В этом варианте необходимо войти в раздел **Схема**. С этой целью курсор устанавливается на закладке **Схема** и нажимается левая кнопка мыши. Появится инструментальная панель, соответствующая разделу **Схема**.

С этой целью на поле «Жесткости» нажимаем кнопку «Ригели». Откроется первое диалоговое окно «Жесткость стержней» (ниже приведена только его часть).

Жесткости стержней | Численное описание

Способ задания

- ☐ Параметрические сечения
- ☐ Профили металлопроката
- ☒ Численное описание
- ☐ Численно-параметрическое описание
- ☐ Произвольные сечения

«Стержень плоской рамы» (тип 2) и, поскольку поставлена задача определения только усилий в статически определимой балке, зададим единичные жесткости в окнах «Продольная жесткость» и «Изгибная жесткость» (см. подраздел 3.6).

Общие данные | Численное описание | Коэффициенты упругого основания

Тип элемента

☐ Стержень плоской фермы (Тип 1)
☒ Стержень плоской рамы (Тип 2)
☐ Стержень балочного ростверка (Тип 3)

Продольная жесткость EF Т

Изгибная жесткость

EIy Т*М²

Размеры ядра сечения

Y1 м

Подтверждаем выбранную жесткость нажатием кнопки «ОК». Снова появится окно **Задание параметров регулярной рамы**, которое теперь можно закрыть, нажав в нем кнопку «ОК». Появится расчетная схема балки (рис. 7.2).

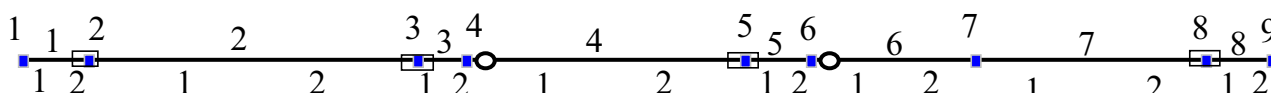


Рис. 7.2

2. Кнопку «Назначение типа КЭ» также можно не нажимать, так как тип КЭ (тип 2) был уже назначен в окне **Новый проект**, где был выбран тип схемы «Плоская рама» (с. 118).

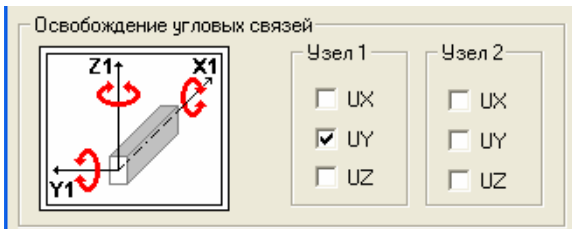
На расчетной схеме балки (в результате нажатия соответствующих кнопок на панели «Фильтры отображения») отображены: узлы элементов; их номера (верхние числа выше оси балки); номера КЭ (в серединах элементов выше оси); тип заданной для расчета жесткости КЭ (цифра 1 ниже оси), тип КЭ (цифра 2 ниже оси).

Примечание. На появившейся на экране расчетной схеме МКЭ (см. рис. 7.2) еще не будет прямоугольников, которыми на приведенной схеме отмечены опоры. Для того чтобы они появились, необходимо ввести опорные связи и отобразить их ввод с помощью панели «Фильтры отображения».

Для назначения опорных связей следует войти в раздел **Назначения** и нажать кнопку «Установка связей в узлах» (на панели «Фильтры отображения» необходимо нажать кнопку «Связи»). Далее все нужно сделать так же, как это описано в пункте 2.4 инструкции к этапу 2 в разделе 6.

Аналогично в разделе **Назначения** выполнена установка изображенных на схеме шарниров. С этой целью нажать кнопку «Установка шарниров». Откроется окно **Условия примыкания стержней**.

Поскольку шарнир в шарнирной балке позволяет подходящим к нему сечениям элементов балки поворачиваться вокруг оси Y , его установка в каком либо узле балки означает *освобождение в этом узле угловой связи*, которая в программе SCAD обозначена UY .



Для пояснения рассмотрим шарниры E и F (см. рис. 7.1, a).

В расчетной схеме МКЭ (см. рис. 7.1, $з$) эти одиночные шарниры отнесены соответственно к узлу 1 элемента 4 и узлу 1 элемента 6 (номера узлов в местной системе координат). Поэтому для элементов 4 и 6 в демонстрируемом диалоговом окне галочкой отмечено, что связь UY удалена в каждом из этих элементов в узле 1.

После подтверждения выбранного варианта постановки шарниров нажатием в диалоговом окне кнопки «ОК» снова появится расчетная схема балки в окне раздела **Назначения**.

На расчетной схеме необходимо подвести курсор к элементу 4 и нажать левую клавишу мыши. Элемент 4 выделится красным цветом. Тоже надо сделать с элементом 6. Затем нажать кнопку «ОК» на инструментальной панели раздела **Назначения**. Тогда красное выделение указанных элементов исчезнет, а на расчетной схеме (при нажатой кнопке  на панели **Фильтры отображения** появятся введенные шарниры).

Способы печати в отчете расчетной схемы, изображенной на рис. 7.2 были изложены в пункте 2.6 этапа 2 процедуры расчета балки.

3. Загрузка расчетной схемы балки

3.1. Загрузка узлов балки и ее элементов

Процедура загрузки узлов балки сосредоточенными нагрузками (узлы 1, 7 и 9). Сначала введем внешний момент, заданный в узле 1 (см. рис. 7.1, а). В разделе **Загрузки** нажимаем кнопку «Узловые нагрузки». В появившемся диалоговом окне на поле «Моменты» выбираем «UY».

Момент считается положительным при его действии по часовой стрелке, если смотреть с положительного конца оси Y.

Поэтому в нашем примере вводим положительную величину момента 72 кН·м.

После нажатия кнопки «ОК» снова появится расчетная схема. На ней надо выделить узел, на который действует момент, и нажать кнопку «ОК» на меню панели **Загрузки**. При нажатых на панели

Фильтры отображения кнопках  и  на расчетной схеме балки в узле 1 (см. рис. 7.3) появятся обозначение момента и его значение и знак.

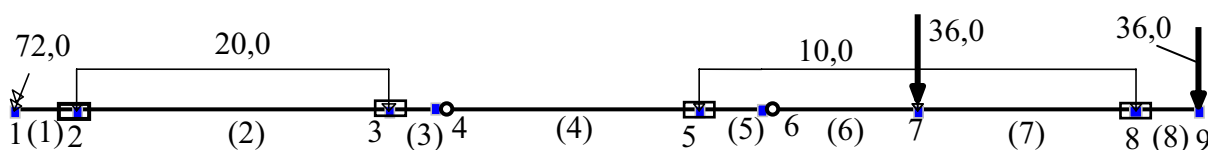


Рис. 7.3

При задании сосредоточенных сил $P_1 = P_2 = 36$ кН используется это же окно, но нажимается кнопка Z в поле «Силы» и указывается соответствующая величина вводимой сосредоточенной силы.

Процедура загрузки элементов балки равномерно распределенной нагрузкой (элементы 2, 5, 6 и 7). В меню раздела **Загрузки** необходимо

нажать кнопку  «Нагрузки на стержни».

Появится окно **Задание нагрузки на стержневые элементы** (отдельно показаны две его части, в которых задана нагрузка на элемент 2, см. рис. 7.1, а, з).

В первой части окна выполнены следующие операции: выбирается общая система координат, в которой задается нагрузка; отмечается, что нагрузка распределенная.

Во второй части окна: отмечается направление «Z» действия нагрузки в общей системе координат; задается знак нагрузки (в данном случае он положителен, см. пояснение в подразделе 3.7) и ее значение.

Направление действия нагрузки					
Силы			Моменты		
X	Y	Z	U _x	U _y	U _z
Значение нагрузки					
P	20	кН/м			

После нажатия на кнопку «ОК» появится рассматриваемая расчетная схема балки, на которой с помощью курсора и левой клавиши мыши выделим элемент 2. несущий задаваемую нагрузку, и нажимаем кнопку «ОК» на панели раздела **Загружения**.

При нажатых на панели **Фильтры отображения** кнопках  и  на элементе 2 расчетной схемы появятся изображение равномерно распределенной нагрузки, ее значение и знак (см. рис. 7.3).

Аналогично загружаем элементы 5, 6 и 7 равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью 10 кН/м.

Если загрузка балки с одновременно действующими нагрузками сформировано, его необходимо сохранить как загрузку с определенным номером. С этой целью на инструментальной панели раздела **Загружения**

нажимаем кнопку  «Сохранить/Добавить загрузку» в результате чего появится окно **Сохранить загрузку**. (его вид не приводится).

Задаем имя загрузки (в рассматриваемом примере: «суммарное») и подтверждаем сохранение загрузки под этим именем нажатием кнопки «ОК». Появится сообщение «Загрузка будет записано под номером 1». При согласии нажимаем кнопку «Да». При несогласии нажимаем кнопку «Нет» и задаем нужный номер в окне **Сохранить загрузку**.

Вид расчетной схемы с любым загрузением можно сохранить в соответствующем файле с расширением wmf в рабочей папке SWORK и при необходимости вставить в текст отчета по работе (см. рис. 7.3).

После назначения номеров загрузений можно выйти в раздел **Управление** и, нажав кнопку , – в окно с деревом проекта для выполнения линейного расчета сразу для всех заданных загрузений.

Однако перед выходом на дерево проекта рекомендуется решить вопрос о назначении числа сечений на элементах расчетной схемы, в которых необходимо иметь численные результаты искомых усилий (в данном случае M и Q).

Как уже было показано в разделе 2, при рассмотрении этапа 3 последовательности расчета с помощью программы SCAD, для этой цели в

окне **Назначения** используется кнопка , нажатие которой открывает диалоговое окно **Вычисление усилий в дополнительных сечениях**.

На стержневых элементах с линейной эпюрой M для ее построения достаточно иметь только по две ординаты. Поэтому в окошке с названием «Количество сечений» надо ввести цифру 2 и нажать кнопку «ОК». На появившейся снова расчетной схеме отметить элементы, в которых ожидается линейная эпюра M (в рассматриваемом примере такая эпюра M будет на конечных элементах с номерами 1, 3, 4, 8), и нажать кнопку «ОК» с зеленой галочкой на инструментальной панели раздела **Назначения**.

Аналогично на элементах с равномерно распределенной нагрузкой (2, 5, 6, 7) рекомендуется иметь усилия не менее чем в 3 сечениях по длине элемента: в сечениях по концам элемента и в среднем сечении. При этом последовательно выполняются только что описанные действия для назначения трех сечений на отмеченных элементах.

Переход к выполнению линейного расчета после выполнения этих действий является более рациональным.

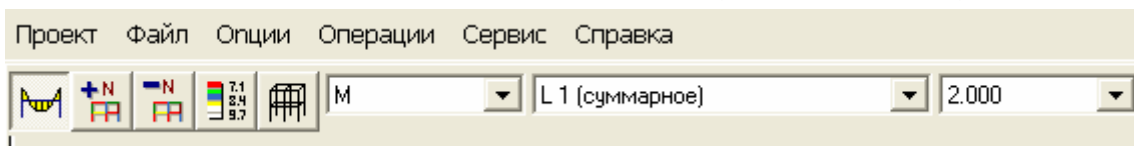
4. Выполнение линейного расчета и анализ результатов

Вопрос о выполнении линейного расчета составленной и загруженной расчетной схемы МКЭ стержневой системы был рассмотрен в разделе 6 пособия (см. подраздел 4.1 этапа 4 процедуры расчета).

После выполнения указанных там действий перейдем к анализу результатов расчета рассматриваемой в примере балки.

4.2. Представление полученных результатов в виде эпюр усилий M , Q в балке. Их сохранение и печать

Установим курсор на позицию **Графический анализ** раздела **Результаты** «дерева проекта» и нажмем левую кнопку мыши. Появится диалоговое окно для вывода эпюр перемещений и усилий. Ниже приведена только его часть для построения эпюры M при суммарном нагружении балки.



При выдаче информации рекомендуется не спешить. Необходимо выбрать наглядный масштаб эпюры (здесь выбран масштабный коэффициент 2) и далее напечатать ее в отчете по работе одним из трех, указанных ранее,

способов (см. выше подраздел 2.6 этапа 2 процедуры расчета).

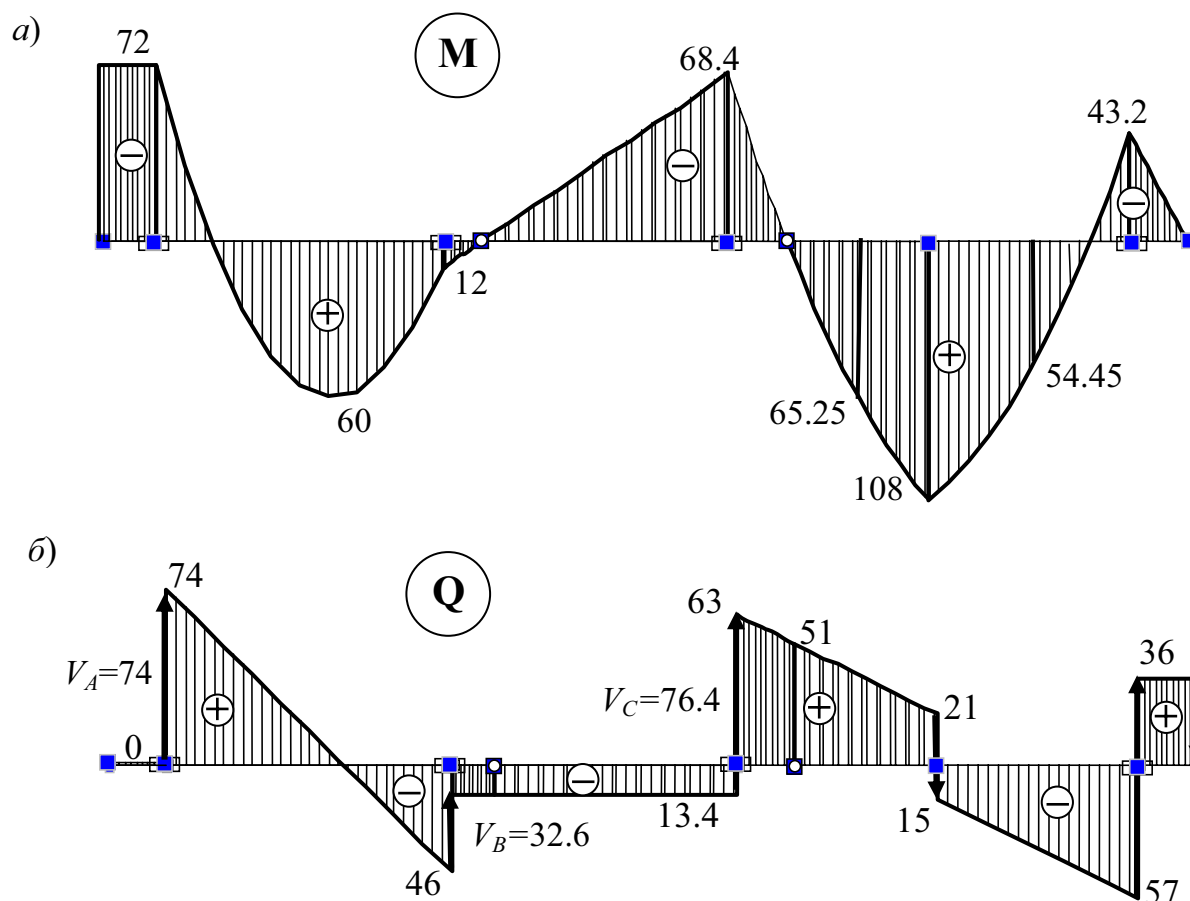


Рис. 7.4

Затем на распечатанной эпюре, необходимо (вручную, или с помощью компьютера) отметить знаками участки с положительными и отрицательными ординатами (рис. 7.4, а). Потом проставить на эпюре M значения характерных ординат в узлах элементов, а для элементов с равномерно распределенной нагрузкой значения и в их средних сечениях по длине конечных элементов. На коротких консольных элементах значения ординат в средних сечениях элементов можно не отмечать (см. рис. 7.4, а).

Чтобы отметить вручную на рисунке с эпюрой M численные значения ее характерных ординат, необходимо сначала открыть таблицу с результатами расчета. Для этого надо выйти на схему **Дерево проекта**, где и выбрать «Печать таблиц». В результате откроется окно «Оформление результатов расчета».

4.3. Таблица усилий в стержнях

Для анализа таблицы усилий, полученных в результате расчета в намеченных сечениях балки, выберем на открывшемся окне строку «Усилия и напряжения» и нажмем кнопку «Параметры вывода». Откроется

дополнительная информация «Состав выходных таблиц».

Последовательно заходим в имеющиеся там разделы и выполняем ряд операций:

- *Список элементов.* Отмечаем: «Все элементы» и «ОК»;
- *Список загрузжений.* Отмечаем «Все загрузки» и «ОК»;
- *Параметры оформления.* Здесь выбирается необходимое расчетчику число значащих цифр. Кроме того, необходимо выбрать положение таблицы на странице и размер шрифта. При завершении работы в окне нажать «ОК».

• *Выходные единицы измерения.* В начале расчета были заданы *входные* единицы измерения сил: в кН. При печати результатов рекомендуется убедиться в том, что и полученные усилия в стержнях будут в этих же единицах. При необходимости можно изменить размерность. Завершается работа с окном «Состав выходных таблиц» нажатием кнопки «ОК».

После этого последовательно нажимаем кнопки «Формирование документа» и «Просмотр результатов». Появляется окно с таблицей искомых усилий M, Q .

Эта таблица может быть распечатана сразу или скопирована в отчет (в документ с расширением doc).

Возможно использование этой таблицы в любое другое время, так как результаты расчета в программе SCAD сохраняются в папке рабочих файлов SWORK.

Усилия M , кН·м и Q , кН в назначенных сечениях элементов балки при суммарном загрузжении для первых четырех элементов приведены в отредактированной табл. 7.1.

Таблица 7.1

У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ									
	1-1	1-2	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	4-1	4-2
1 - суммарное									
M	-72	-72	-72	60,03	12,07	12,07	0	0	-68,4
Q	0	0	73.89	13.95	-45.98	-13.41	-13.41	-13.41	-13.41

Примечание к таблице 7.1. Во второй строке таблицы каждая первая цифра означает номер конечного элемента в расчетной схеме МКЭ балки (см. рис. 7.1, z и рис. 7.3). Вторая цифра означает для незагруженных конечных элементов: (1) – сечение в начале элемента; (2) – сечение в конце элемента. Для элементов загруженных равномерно распределенной нагрузкой вторые цифры (1), (2), (3) означают соответственно начало (н), середину (с) и конец (к) конечного элемента.

Из этой таблицы и следует взять значения ординат и указать их на эпюре M (см. рис. 7.4, а).

Аналогично строится и эпюра поперечных сил Q на балке (рис. 7.4, б). С помощью этой эпюры определяются опорные реакции балки. Они равны в выбранном масштабе ординат эпюры «скачкам» ординат эпюры на опорах балки. Направление вектора опорной реакции видно по направлению излома эпюры M в месте действия реакции. Это направление соответствует и направлению скачка ординат эпюры Q при движении по эпюре слева направо (см. раздел 4.3 пособия и пособие [1]).

Примечание. После построения эпюр усилий необходимо выполнить их контроль, в соответствии с указаниями, приведенными в подразделе 4.5 данного пособия. Поэтому в расчетном задании обязательно выполняется второй его раздел (см. постановку задачи в расчетной работе 1). Этот контроль применительно к рассмотренной шарнирной балке приведен также в пособии [4].

7.2. КОНТРОЛЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА БАЛКИ

Контроль по признакам правильных эпюр усилий

Выполняя этот контроль (см. раздел 4 пособия) устанавливаем, что эпюры M и Q отвечают признакам правильных эпюр.

Методическое указание. Конкретную иллюстрацию этой проверки студент сообщает преподавателю устно при защите расчетной работы.

Контроль уравнений равновесия бесконечно-малого элемента dx

Из уравнений равновесия $dQ/dx = q_z$ и $dM/dx = Q$ бесконечно малого элемента dx балки (см. уравнения (1.3)) следует, что эпюра Q балки должна соответствовать нагрузке q_z на балку, а эпюра Q – эпюре M . Проверка построенных эпюр показывает, что такое соответствие имеется:

Контроль соблюдения уравнения равновесия $dQ/dx = q_z$.

1) На незагруженных по длине элементах 1, 3, 4 и 8 $q_z = 0$. Поэтому $dQ/dx = 0$. Это означает, что эпюра поперечной силы на указанных элементах должна иметь постоянное значение. Это требование соблюдается.

2) На загруженных элементах 2 и элементах 5, 6, 7 должны соблюдаться уравнения соответственно равновесия $dQ/dx = \text{tg}\beta_2 = 20$ кН и $dQ/dx = \text{tg}\beta_{5-7} = 10$. Эти равенства соблюдаются.

Контроль соблюдения уравнения равновесия $dM/dx = Q$.

1) На незагруженных элементах 1, 4, 8 должны соответственно соблюдаться уравнения $dM/dx = 0$, $dM/dx = \text{tg}\alpha_4 = 13.4$ кН, $dM/dx =$

$= \operatorname{tg} \alpha_8 = 36$ кН. Эти уравнения соблюдаются.

2) На загруженных элементе 2 и элементах 5, 6, 7 должны наблюдаться соответствие эпюр M и Q по знакам: при $dx > 0$ и $dM > 0$ ($dM < 0$) должна соответствовать эпюра $Q > 0$ ($Q < 0$); при $dM / dx = 0$ на эпюре Q должна быть нулевая ордината. Эти условия соблюдаются.

Проверка уравнений равновесия для всей балки и для любой ее конечной части

Должна находиться в равновесии, как вся балка, так и любая выделенная из нее сечениями часть.

Проверка равновесия всей балки. Так как после определения опорных реакций балки стали известны все внешние силы, действующие на нее в плоскости XZ , то, прежде всего, должны удовлетворяться три уравнения равновесия балки: $\sum X = 0$; $\sum Z = 0$; $\sum M_k = 0$ (k – любая точка на плоскости XZ).

Первое уравнение удовлетворяется, так как на балку не действуют горизонтально направленные силы. Равновесие второго уравнения соблюдается, так как эпюра Q отражает равенство нулю суммы всех вертикальных сил (это видно при движении слева направо по оси отсчета ординат эпюры Q). Проверка третьего уравнения здесь не приводится.

Проверка равновесия любой выделенной части балки. Ограничимся рассмотрением равновесия части балки, выделенной из нее двумя сечениями, расположенными бесконечно близко (слева и справа) к опоре D (рис. 7.4)

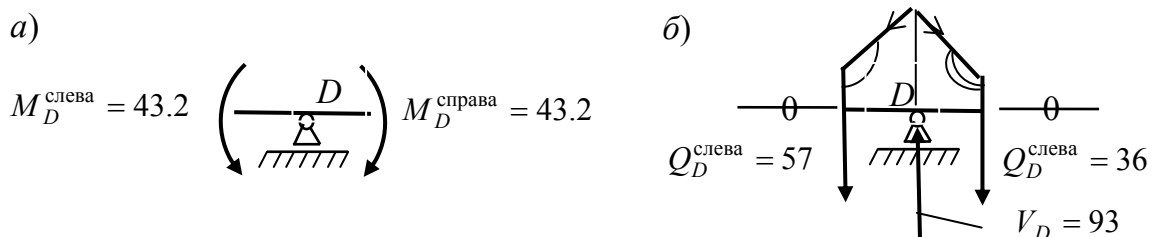


Рис. 7.4

Применяя к этой части три уравнения равновесия, видим, что они тождественно удовлетворяются.

Использование конструктивных особенностей балки для определения любых опорных реакций и усилий в сечениях балки

В подразделе 5.2 пособия приведена методика расчета шарнирной балки вручную с использованием ее конструктивной особенности опирания частей

балки между шарнирами друг на друга и на основание в виде этажной схемы (см. рис. 5.1 в разделе 5).

Продemonстрируем определение опорной реакции V_D , давления V_F в шарнире балки и построение эпюр M и Q для верхнего звена FD этажной схемы балки (см. рис. 7.1, б). Выделим это звено и рассмотрим его как балку на двух опорах (рис. 7.5).

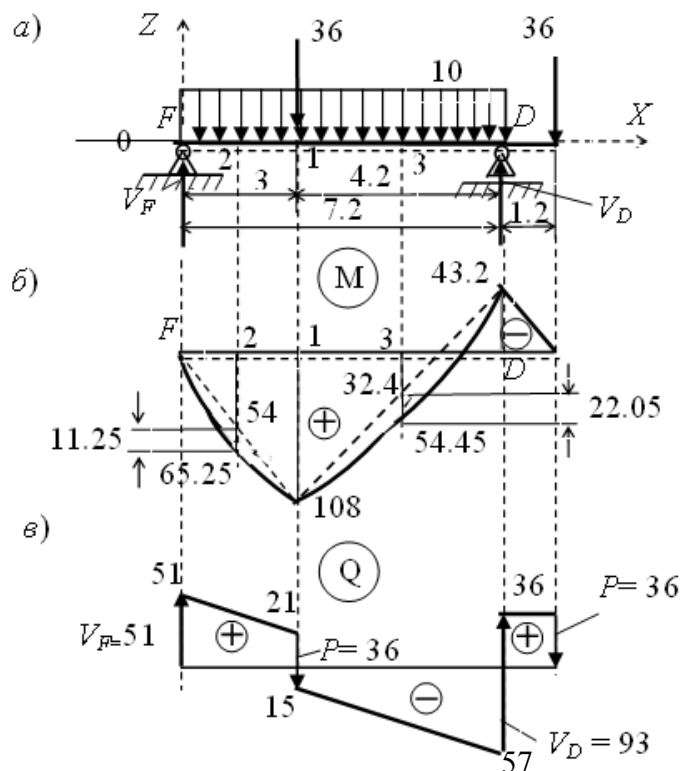


Рис. 7.5

Определяем опорные реакции звена FD

1. $\sum X = 0: H_F = 0$
2. $\sum M_F = V_D \cdot 7.2 - (10 \cdot 7.2) \cdot 3.6 - 36(3 + 8.4) = 0; V_D = 93 \text{ кН.}$
3. $\sum Z = -(10 \cdot 7.2) - 36 \cdot 2 + 93 + V_F = 0; V_F = 51 \text{ кН.}$

Строим эпюру изгибающих моментов M звена FD

В соответствии с ожидаемым видом эпюры M (см. признаки правильной эпюры M и рекомендациями по ее построению в подразделе 4.2 пособия) для ее построения вручную наметим минимальное число сечений **достаточное для построения эпюры. В данном случае достаточно вычислить ординаты эпюры в четырех сечениях: опорном сечении D и сечениях 1, 2 и 3 в пролете балки.** Намечаем эти сечения на расчетной схеме звена FD (см. рис. 7.5).

Для отражения знака изгибающего момента в рассматриваемом сечении **нижняя сторона балки отмечена пунктиром** (см. правило знаков для

изгибающего момента и правило пунктира в подразделе 4.2).

Из указанных четырех сечений вычислим вначале изгибающие моменты в опорном сечении D и в сечении 1 в пролете балки под сосредоточенной силой:

Сечение D : $M_D = -(36 \cdot 1.2) = -43.2$ кН·м. Знак «минус» показывает, что в сечении балки над опорой растянута верхняя сторона балки. Отложив найденную ординату M_D от оси отсчета, построим на консоли окончательную эпюру изгибающих моментов (см. рис. 1.5).

Сечение 1: $M_1 = +51 \cdot 3 - (10 \cdot 3) \cdot 1.5 = +108$ кН·м. Знак «плюс» показывает, что в сечении 1 пролета балки, где приложена сосредоточенная сила со значением 36 кН, растянута нижняя сторона балки. Отложим полученную ординату снизу от оси отсчета и соединим ее с ординатами эпюры M в опорных сечениях F и D (штриховые линии на рис. 7.5).

Для построения эпюры M в пределах пролета балки необходимо еще подсчитать ординаты в сечениях 2 и 3. Сделаем это с помощью приема, продемонстрированного на рис. 4.5 подраздела 4.2 пособия:

$$\text{Сечение 2: } M_2 = +\frac{108}{2} + \frac{10 \cdot 3^2}{8} = +54 + 11.25 = +65.25 \text{ кН·м.}$$

$$\text{Сечение 3: } M_3 = +\frac{108 - 43.2}{2} + \frac{10 \cdot (4.2)^2}{8} = +32.4 + 22.05 = +54.45 \text{ кН·м.}$$

Отложив эти ординаты от оси отсчета, достроим эпюру M на всем звене.

Строим эпюру поперечных сил Q звена FD

Способ 1 (см. подраздел 4.3 пособия). Начнем построение с крайнего левого сечения балки: поперечная сила в этом сечении равна опорной реакции $V_F = 51$ кН (см. рис. 7.5). В соответствии с направлением реакции поперечная сила имеет знак «плюс».

В сечении 1 (слева от силы) получим: $Q_1^{\text{слева}} = +51 - (10 \cdot 3) = +21$ кН.

В сечении 1 (справа от силы) получим: $Q_1^{\text{справа}} = Q_1^{\text{слева}} - 36 = +21 - 36 = -15$ кН.

В сечении D (слева от опоры): $Q_D^{\text{слева}} = Q_1^{\text{справа}} - (10 \cdot 4.2) = -15 - 42 = -57$ кН. Справа от опоры D и сечениях на консоли (слева от силы на конце консоли): $Q_D^{\text{справа}} = Q_{\text{конс}} = +36$ кН. Суммарный разрыв в ординатах эпюры Q на опоре D равен реакции этой опоры $V_D = 93$ кН.

Ординаты эпюры Q откладываются от оси отсчета в соответствии с правилом знаков, описанном в подразделе 4.3.

Способ 2. Значения и знаки Q могут быть определены и вторым способом (по эпюре M с помощью зависимости $Q = dM / dx$). При этом значения и знаки Q в начале участка (н) и в конце участка (к) (границами участков являются опоры и сосредоточенная сила) вычисляются по формуле:

$$Q_{н,к} = \pm ql_{уч} / 2 + (M_к - M_н) / l_{уч}.$$

Для первого (слева) участка балки: $ql_{уч} = \pm(10 \cdot 3) = \pm 30$ кН; $M_н = 0$
 $M_к = +108$ кН·м; Тогда $Q_н = +15 + 36 = +51$ кН; $Q_к = -15 + 36 = +21$ кН.

Для второго (слева) участка: $ql_{уч} = \pm 10 \cdot 4.2 = \pm 42$ кН; $M_к = -43.2$ кН·м;
 $M_н = 108$ кН·м. Тогда $Q_н = +21 + (-43.2 - 108) / 4.2 = +21 - 36 = -15$ кН;
 $Q_к = -21 - 36 = -57$ кН.

Сопоставляем результаты расчетов вручную с результатами расчетов на ПК

Подсчитанные вручную с помощью уравнений равновесия опорная реакция V_D , вертикальное давление V_F в шарнире F балки и построенные эпюры усилий M и Q на звене FD заданной шарнирной балки полностью совпадают с соответствующими результатами расчетов на ПК.

Примечания.

1. Аналогичный расчет может быть выполнен и для других звеньев балки. *Для заданной балки их результаты были продемонстрированы в подразделе 5.2 и на рис. 5.1 учебного пособия.* Здесь эти расчеты не приводятся.

2. Поскольку суммарные эпюры M и Q для всей балки построены с помощью программы SCAD, то при ручном расчете суммарные эпюры приводить не нужно.

Методическое указание учащимся по оформлению отчета по расчетной работе 1

Представленный здесь учебный материал по работе располагается на шестнадцати страницах. В отчете по работе учащимся рекомендуется добиться рационального его объема, излагая основную часть хода расчета и его результаты. Можно, например, опустить представление диалоговых окон программы SCAD.

Примерная схема оформления отчета по работе 1 приведена в УМК по строительной механике [21].

8. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M , Q , N В РАМАХ

Постановка задачи и анализ заданной расчетной рамы. Рассмотрим пример выполнения расчетной работы 2 из сборника заданий и задач (см. приложение 1 или [1, 2]).

По шифру ABCD из сборника выбираем расчетную схему шарнирной балки (рис. 8.1), ее размеры, м, и нагрузку на нее кН/м, кН.

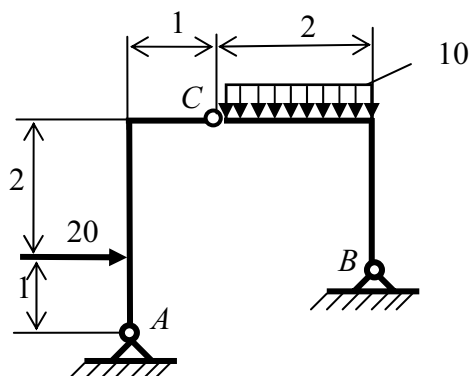


Рис. 8.1

В соответствии с заданием к работе 2 требуется:

8.1. Построить эпюры усилий M , Q , N в раме расчетом МКЭ на ПК с использованием программы SCAD и определить по эпюрам усилия опорные реакции расы.

8.2. Выполнить контроль результатов расчета (см. разделы 4 и 5 пособия).

8.1. РАСЧЕТ РАМЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

Перед началом работы на компьютере необходимо выполнить две подготовительных операции:

1. Проверить, является ли заданная рама статически определимой или статически неопределимой системой. Это связано с тем, что для статически определимых систем при нахождении в них только усилий упрощается задание жесткостей стержней при использовании программы SCAD (см. подраздел 3.6).

2. Вручную разбить раму на конечные элементы типа 2 (стержневой элемент плоской рамы, см. рис. 3.10) с учетом особенностей ее конструкции и вида, действующей на нее нагрузки.

При этом выбрать начало общей системы осей координат и выбрать методику построения расчетной схемы МКЭ с помощью программы SCAD.

Проверка статической определимости балки

Эта операция выполняется в следующей последовательности.

1, а. Сначала подсчитываем степень статической неопределимости *n* рамы. Для этого используем формулу:

$$n = n_{\text{н}} - n_{\text{ур}} = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) - (3 + n_{\text{ш}})$$

где $n_{\text{оп}}$ — число неизвестных составляющих опорных реакций во всех опорах рамы;

$n_{\text{к}}$ — число замкнутых контуров в раме;

$3n_{\text{к}}$ — число неизвестных усилий, которые необходимо определить в каждом контуре, чтобы построить в них эпюры указанных усилий;

$n_{\text{ш}}$ — число уравнений равновесия вида $\sum M_{\text{ш}} = 0$, которые можно записать для каждого одиночного шарнира дополнительно к имеющимся трем уравнениям равновесия для всей стержневой системы.

В рассматриваемой раме (см. рис. 8.1): $n_{\text{оп}} = 4$; $n_{\text{к}} = 0$; $n_{\text{ш}} = 1$ и $n = 0$.

1, б. Затем исследуем геометрическую неизменяемость рамы. В данном случае для этого достаточно выполнить структурный анализ рамы.

Действительно, заданную раму (см. рис. 8.1) можно рассматривать как систему, состоящую из трех жестких дисков (AC , BC и неподвижного жесткого диска в виде основания), которые соединены шарнирами.

Такую систему можно рассматривать как жесткий треугольник (см. раздел 2 данного пособия и пособие [1]). Поэтому такая конструкция является геометрически неизменяемой системой.

Таким образом, на основании исследований, выполненных в пунктах 1, а и 1, б, делаем вывод о том, что *заданная рама является статически определимой системой.*

Составление вручную расчетной схемы рамы для МКЭ

Второй подготовительной операцией перед началом работы на ПК и использованием программы SCAD является формирование расчетной схемы МКЭ рамы вручную.

Изображается расчетная схема рамы с разбивкой на элементы, которая учитывает расположение узлов рамы, опор, шарниров и вид нагрузки (рис. 8.2).

Выбирается начало общей системы координат (в данном примере выбираем начало осей координат совпадающим с опорой A (узел 1)).

Нумеруются элементы и узлы с учетом рекомендаций подраздела 3.1 пособия и пояснений по нумерации узлов и элементов в разделе 6.

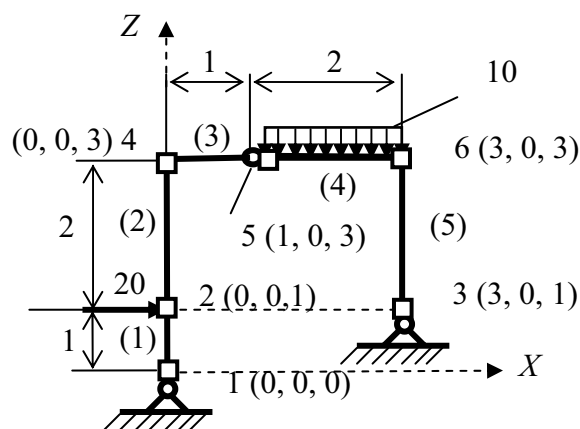


Рис. 8.2

Примечание. Если построение расчетной схемы МКЭ рамы в программе SCAD предполагается выполнить с использованием предварительно изображенной схемы узлов рамы, где каждый узел введен по его координатам в назначенной общей системе координат, то рядом с номерами узлов на вручную подготавливаемой схеме (см. рис. 8.2) указываются их координаты в общей системе координат в последовательности X, Y, Z (так как рама плоская, координата Y у всех узлов равна нулю).

Если в программе SCAD предполагается строить схему рамы с использованием типовой схемы рамы (она уже использовалась при построении расчетной схемы шарнирной балки), то координаты узлов на подготавливаемой вручную схему приводить не нужно.

Инструкция по выполнению задания с помощью программы SCAD

Подготовка исходных данных для построения расчетной схемы МКЭ рамы с целью построения эпюр усилий в ее стержнях, расчет и вывод результатов производится в диалоговом режиме в последовательности, указанной в разделе 6 пособия.

Процедуру использования возможностей программы SCAD при построении схемы рамы, будем рассматривать в сокращенном виде в тех пунктах инструкции, которые уже были описаны в разделе 6.

1. Запуск программы и подготовка к созданию расчетной схемы

Процедура запуска программы SCAD и процедура выхода в окно **Новый проект** остаются таким же, как и при расчете фермы и шарнирной балки.

В окне **Новый проект** (см. с. 118) выполняем следующие действия.

Вводим: наименование проекта (Работа 2); наименование организации); объект расчета и его номер (Рама 1).

В соответствии с выбранной системой (например, СИ или технической) назначаем единицы измерения основных величин.

В окне «Тип схемы» выбираем: «2. Плоская рама».

Сохраняем сделанный ввод нажатием кнопки «ОК».

Далее в появившемся окне **Создание нового проекта SCAD** с открытой папкой SDATA выполняется процедура задания имени файла, в котором будет сохраняться проект (см. пункт 1.3 этапа 1 в разделе 7 и аналогичный пункт в примере расчета балки).

Команда «Сохранить» сохраняет имя файла в папке SDATA и открывает окно со схемой, которая называется **Дерево проекта** (см. с. 118).

Нажимаем на дереве проекта кнопку «Расчетная схема» и в открывшемся рабочем окне начинаем выполнение этапа 2 по формированию расчетной схемы рамы по заранее заготовленному образцу (см. рис.8.2).

2. Создание расчетной схемы рамы для МКЭ

Для создания схемы рамы из конечных элементов типа 2 можно использовать два способа, изложенных в пункте 2.1 этапа 2 раздела 6.

2.1. Первый способ построения расчетной схемы рамы

Входим в раздел **Схема**. Нажимаем первую кнопку панели – «Генерация прототипа рамы». Появится окно **Выбор конфигурации рамы**.

В соответствии с подготовленной на рис. 8.2 расчетной схемой рамы для МКЭ выбирается конфигурация рамы, отмеченная точкой в круглом светлом окне (см. с. 134), и нажимается кнопка «ОК».

На экране появится окно **Задание параметров регулярной рамы** (приводится только его часть).

	Длины пролетов	Количество пролетов
1	1	1
2	2	1
3		
4		

	Высоты этажей	Количество этажей
1	1	1
2	2	1
3		
4		

Связи

☐ Автоматическая установка связей

Этим окном можно воспользоваться для построения расчетной схемы рамы для МКЭ, которая предварительно была построена на рис. 8.2.

Сначала построим схему вспомогательной рамы с двумя указанными в окне пролетами и этажами (см. рис.8.3).

В поле окна «Связи» уберем галочку из окошка «Автоматическая установка связей». Войдем в окно «Назначение типа КЭ», выберем: «2. Стержень плоской рамы» и после нажатия кнопки «ОК» снова выйдем в окно **Задание параметров регулярной рамы**.

Для установки жесткостей у элементов ригеля рамы нажмем кнопку «Ригели». Появится первая страница диалогового трехстраничного диалогового

окна по назначению жесткости конечных элементов. Назначение жесткости стержневым элементам типа 2 выполним так же, как это было показано в инструкции для шарнирной балки. Аналогично назначаются жесткости элементов колонн рамы.

После выхода из окна **Задание параметров регулярной рамы** на экране появится расчетная схема вспомогательной рамы в виде осей введенных колонн и ригелей (см. рис. 8.3).

Используем панель **Фильтры отображения** для анализа полученной расчетной схемы. Сначала с помощью кнопки отметим узлы построенной расчетной схемы.

Затем с помощью кнопок  на расчетной схеме соответственно появляются номера элементов, узлов, типа элементов и жесткости (см. рис. 8.3).

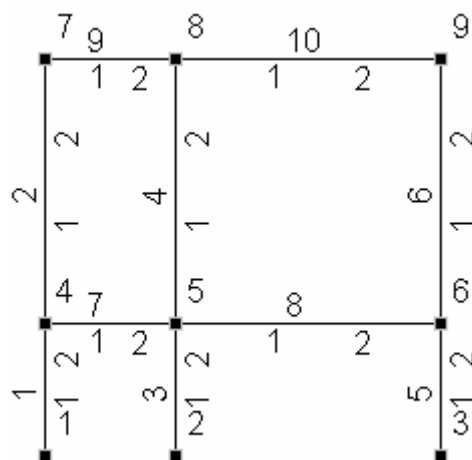
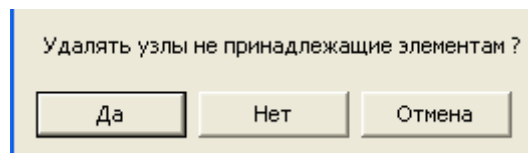


Рис. 8.3

Как видно, в полученной вспомогательной расчетной схеме по сравнению с предварительно намеченной схемой (см. рис. 8.2) имеется различие: в ней лишними являются 5 стержней (3, 4, 7, 8 и 5).

Для их удаления войдем в раздел **Узлы и Элементы**. Нажав в двухкнопочном меню кнопку  «Элементы», откроем меню для выполнения операций с элементами и нажмем кнопку  «Удаление элементов».

Далее с помощью курсора и левой клавиши мыши выделяем указанные пять стержней и в меню нажимаем кнопку «ОК» с зеленой галочкой (см. описание этой процедуры в пункте 2.2 этапа 2 раздела 6). Удаляемые стержни исчезнут, но нумерация оставшихся элементов и узлов останется без изменения.



Чтобы удалить из расчетной схемы и узлы, которые соединяли удаленные элементы и произвести перенумерацию оставшихся видимых узлов и элементов надо выполнить так называемую «Упаковку данных». Это достигается нажатием кнопки .

При этом появляется диалоговое окно SCAD (см. его часть), в котором

надо нажать кнопку «Да». После этого расчетная схема рамы примет вид, изображенный на рис. 8.4.

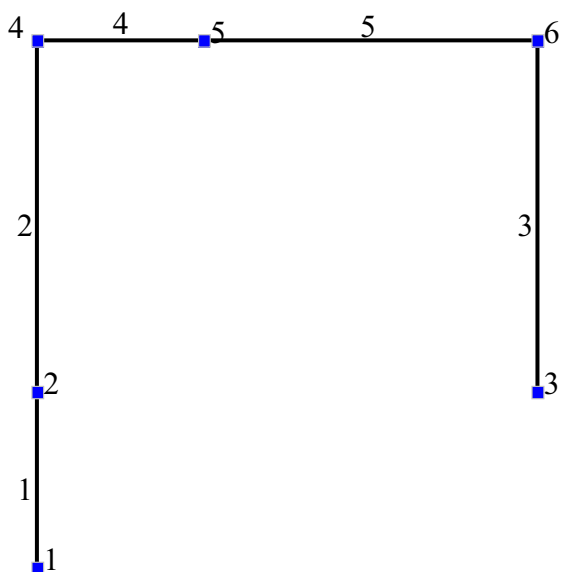


Рис. 8.4

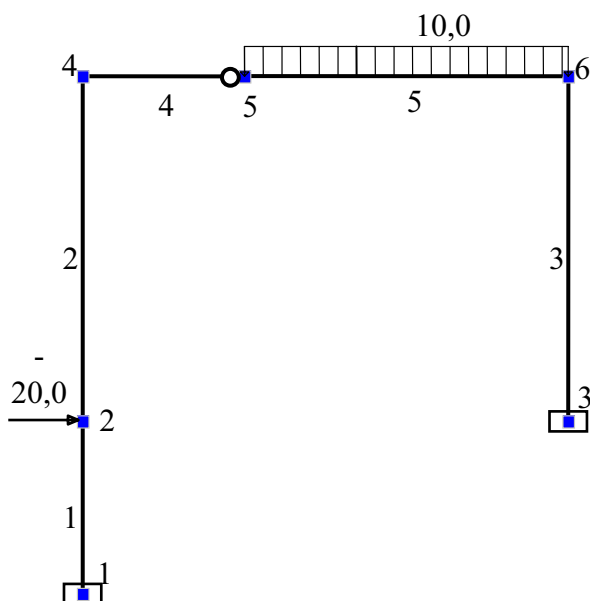


Рис. 8.5

Полученная расчетная схема еще не имеет опорных связей, шарниров и к ней не приложена нагрузка.

Процедуры назначения опорных связей, введения шарниров и нагрузок уже были рассмотрены в разделах 6 и 7. Поэтому обратим внимание только на следующее:

1. Поставим одиночный шарнир в узле 2 (нумерация местной системы координат) элемента 4;

2. Введем значение заданной на раму (см. рис. 8.2) сосредоточенной силы в узле 2 (нумерация узлов в общей системе координат) как силу, действующую по направлению оси X в общей системе координат и имеющую знак «минус», так как она направлена в положительном направлении оси X (см. подраздел 3.7 и пример расчета балки в разделе 7).

В результате получим расчетную схему рамы для МКЭ построенную для расчетов по программе SCAD в виде, приведенном на рис. 8.5 (вариант суммарного нагружения двумя заданными нагрузками).

2.2. Второй способ построения расчетной схемы рамы

Построение расчетной схемы рамы этим способом вручную начинается с ввода ее узлов.

Для того, чтобы при ручном вводе узлов получить раму с теми же номерами узлов, что и при ее построении первым способом, их надо вводить в указанной последовательности (см. рис. 8.2), где отмечены и номера узлов и

их координаты). Получится схема расположения узлов, показанная на рис. 8.2, с использованием которой рисуются элементы в программе SCAD.

Последовательность ввода элементов должна быть также в соответствии с предварительно намеченной схемой (см. рис. 8.2).

После изображения узлов и осей элементов рамы, как и в предыдущем способе построения расчетной схемы рамы вводятся опорные связи, шарнир на элементе 4 (узел 2 в местной для элемента 4 системе координат) и выполняется загрузка рамы и его сохранение.

При использовании второго способа получим расчетную схему рамы для МКЭ в том же виде, в каком она была получена первым способом (см. рис. 8.5).

Операции по выходу в **Дерево проекта**, выполнению линейного расчета, графическому анализу и печати таблиц с найденными усилиями уже выполнялись в предыдущем примере.

Результаты расчета рамы при заданном нагружении приведены соответственно в виде эпюр M (рис. 8.6), Q (рис. 8.7), N (рис. 8.8) и в виде табл. 8.1 с усилиями (кН, кН·м) в заданных для расчета сечениях.

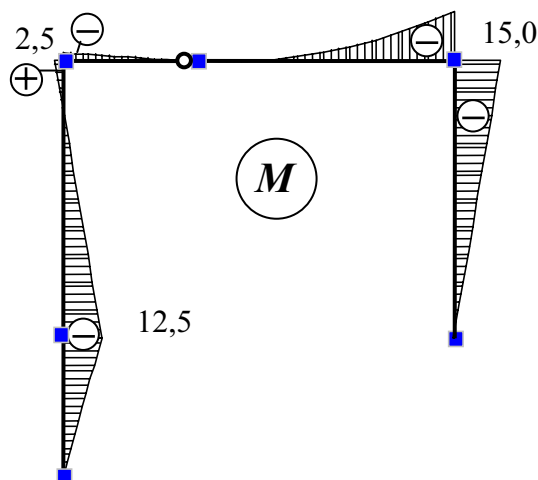


Рис. 8.6

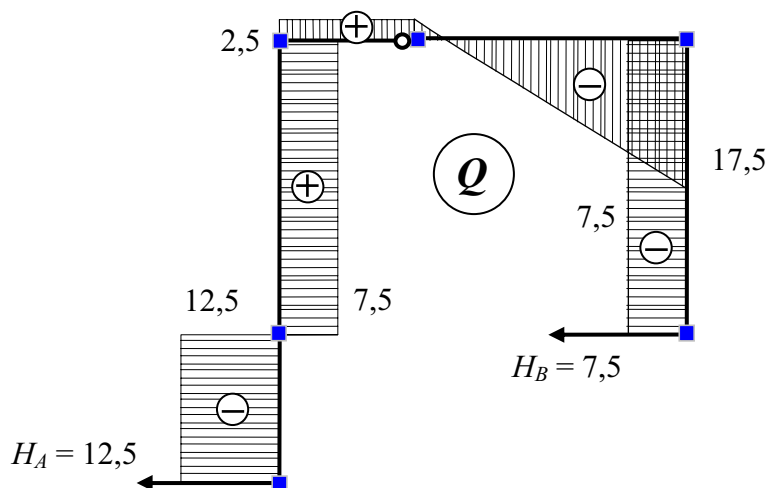


Рис. 8.7

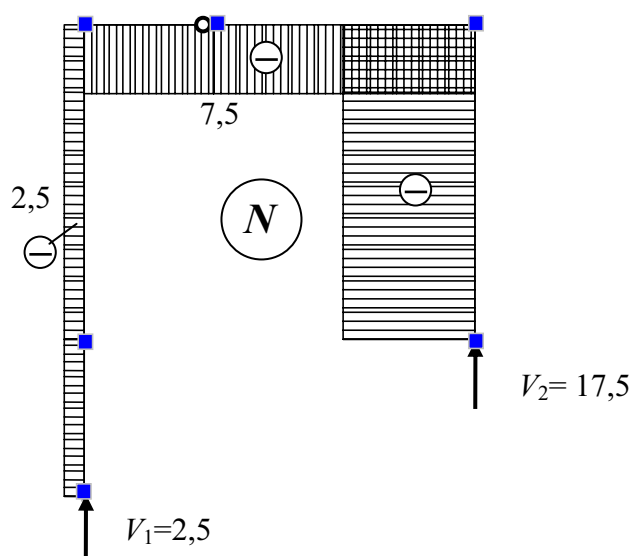


Рис. 8.8

Таблица 8.1

У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ											
	1-1	1-2	2-1	2-2	3-1	3-2	4-1	4-2	5-1	5-2	5-3
1 -	суммарное										
N	-2.5	-2.5	-2.5	-2.5	-17.5	-17.5	-7.5	-7.5	-7.5	-7.5	-7.5
M	0	-12.5	-12.5	2.5	0	-15.	-2.5	0	-2.e-5	-2.5	-15.
Q	-12.5	-12.5	7.5	7.5	-7.5	-7.5	2.5	2.5	2.48	-7.51	-17.5

Примечание. В соответствии с заданием к расчетной работе 2 (см. начало работы) после построения эпюр усилий необходимо выполнить их контроль, в соответствии с указаниями, приведенными в подразделе 4.5 пособия (см. также [1, 4]).

8.2. КОНТРОЛЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА РАМЫ

Прежде всего, убеждаемся, что построенные эпюры усилий M, Q, N (см. рис. 8.6 – 8.8) удовлетворяют признакам правильных эпюр (см. подразделы 4.2 – 4.4 в учебном пособии).

Использование уравнений равновесия для контроля результатов расчета

В соответствии с рекомендациями, приведенными в подразделе 4.5 пособия, с помощью уравнений равновесия выполним следующие проверки полученных результатов расчета.

Проверка равновесия всей рамы

Рама должна находиться в равновесии под действием всех заданных нагрузок и под действием найденных при расчете опорных реакций (их значения и направления очевидны из построенных эпюр усилий), т. е. должны удовлетворяться уравнения равновесия: $\sum X = 0$, $\sum Z = 0$, $\sum M = 0$.

В раме имеем опорные реакции (см. эпюры Q и N на рис. 8.7, 8.8):

$$H_1 = 12.5 \text{ кН}; V_1 = -2.5 \text{ кН}; H_3 = 7.5 \text{ кН}; V_3 = -17.5 \text{ кН}.$$

Знаки этих усилий берем по правилам знаков, принятом в программе SCAD для внешних нагрузок по отношению к осям общей системы координат (см. подраздел 3.7).

В результате получим:

$$\sum X = -20 + 12.5 + 7.5 = 0;$$

$$\sum Z = (10 \cdot 2) - 2.5 - 17.5 = 0;$$

$$\sum M_1 = -20 \cdot 1 - (10 \cdot 2)2 + 7.5 \cdot 1 + 17.5 \cdot 3 = 0.$$

Все уравнения являются тождествами. Рама находится в равновесии.

Проверка равновесия узлов рамы по моментам

При этой проверке все узлы рамы вырезаются рассечением стержней бесконечно близко к узлу. Тогда при составлении суммы моментов всех усилий, действующих на узел, относительно точки пересечения всех стержней, продольные силы в стержнях моментов не дают.

Поперечные силы дают бесконечно малые моменты (плечи поперечных сил относительно узловой точки бесконечно малы). При стремлении бесконечно малых плеч к нулю моменты от поперечных сил также стремятся к нулю и ими можно пренебречь.

Иными словами уравнение равновесия в виде суммы моментов относительно указанной узловой точки $\sum_i^{\text{узла}} M_i = 0$ может рассматриваться только для изгибающих моментов в сечениях стержней, примыкающих к каждому узлу.

Для заданной рамы это продемонстрировано при ее суммарном нагружении (рис. 8.9, а). Размерность моментов кН·м. Видно, что равновесие моментов в каждом узле соблюдается.

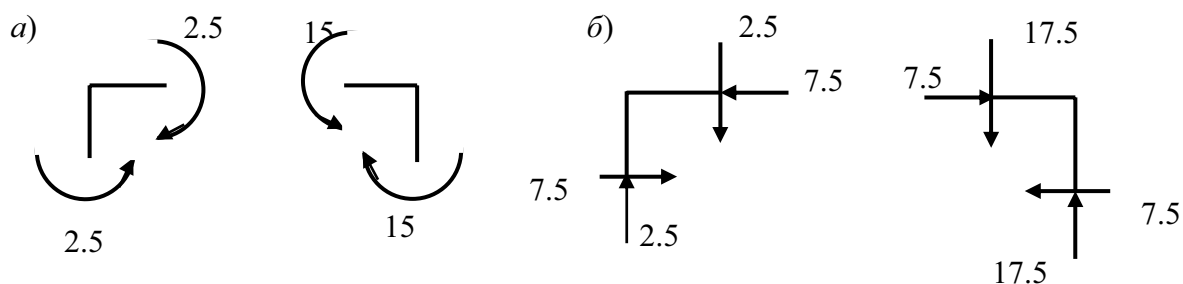


Рис. 8.9

Проверка равновесия узлов рамы под действием поперечных и продольных сил

При проверке равновесия любого плоского узла с номером i должны соблюдаться еще два уравнения равновесия: $\sum_i^{\text{узла}} X_i = 0$ $\sum_i^{\text{узла}} Z_i = 0$. В них войдут продольные и поперечные силы в подходящих к узлу стержнях.

На рис. 8.9, б эти силы показаны для узлов, рассмотренных в варианте суммарного нагружения рамы.

Равновесия левого узла проверим аналитическим способом, записав указанные уравнения (силы, кН):

$$\sum X_i = 7.5 - 7.5 = 0;$$

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.

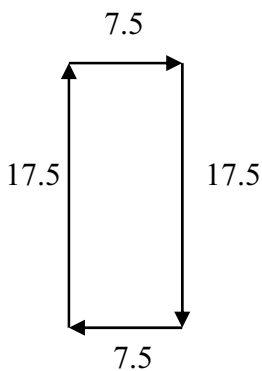


Рис. 8.10

Проверку равновесия правого узла выполним графическим способом: в выбранном удобном масштабе построим многоугольник сил, действующих на узел (рис. 8.10). Как видим, многоугольник сил, действующих на узел, замкнут. Следовательно, узел находится в равновесии.

Равновесие любой отсеченной части рамы

Предыдущие проверки равновесия выполнялись для всей рамы и для любого ее отдельного узла.

Однако в равновесии должна находиться любая отсеченная часть рамы. Иногда бывает удобно рассмотреть равновесие какой-то конкретно выбранной и вырезанной части рамы.

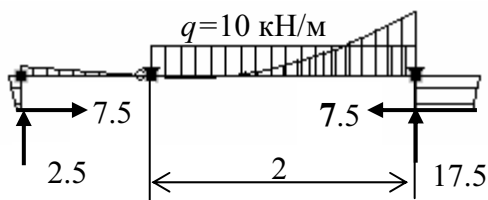


Рис. 8.11

На рис. 8.11 показана проверка равновесия ригеля рамы, отделенного от стоек сечениями, проходящими бесконечно близко к ригелю. Уравнения равновесия $\sum X = 0$; $\sum Z = 0$ отсеченного ригеля рамы соблюдаются.

Проверка равновесия любого бесконечно малого элемента dx на оси стержня

Любой бесконечно малый элемент длиной dx , нагруженный продольной и поперечной распределенными нагрузками интенсивностью соответственно q_x и q_z , находится в равновесии, если соблюдаются уравнения равновесия (1.3)

этого элемента:

Проверка соблюдения этих уравнений является проверкой правильности построенных эпюр.

В рассматриваемой раме:

1) $q_x = 0$. Поэтому $dN/dx = 0$. Отсюда следует, что все эпюры N должны быть параллельны осям стержней. Это соблюдается.

2) На элементах 1, 2, 3, 4 $q_z = 0$. Поэтому $dQ/dx = 0$.

Значит, все эпюры Q на указанных элементах должны быть параллельны осям стержней. Это соблюдается.

3) Как видно из третьего уравнения, при постоянном значении Q на элементах 1 – 4 соответствующие эпюры M должны быть прямолинейными и наклонными к оси стержней под углом $\alpha_i = \arctg Q_i$ ($\operatorname{tg} \alpha_i = dM_i/dx = Q_i$), где i – номер элемента. Это требование выполнено.

На элементе 5 с равномерно распределенной нагрузкой эпюра M представляет собой параболу второй степени. Следовательно, эпюра Q_5 будет описываться линейной функцией. Там, где $Q_5 = 0$, на эпюре M_5 будет максимум. Это соответствие в эпюрах M_5 и Q_5 имеется.

Выполненные проверки позволяют сделать вывод, что *расчет рамы по определению усилий в сечениях ее стержней и в опорных связях выполнен правильно.*

8.3. ПРИМЕР РАСЧЕТА РАМЫ С НАКЛОННЫМ СТЕРЖНЕМ МКЭ НА ПК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

Построим эпюры усилий в раме, имеющей наклонный стержень, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой (рис. 8.12).

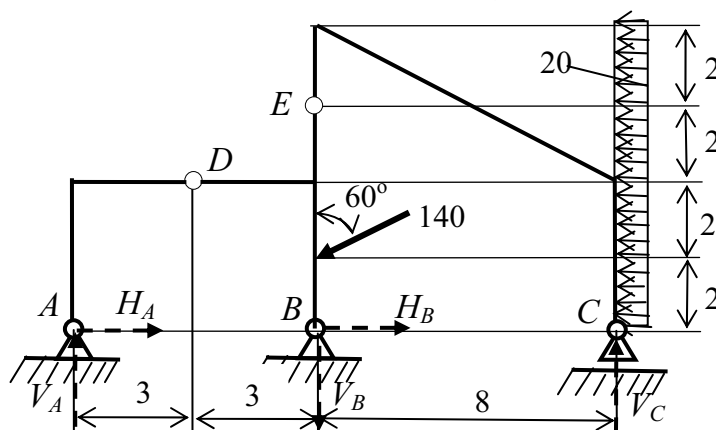


Рис. 8.12

Примечание к рис. 8.12. На схеме рамы дополнительно обозначены опорные и шарнирные узлы и показаны составляющие опорных реакций, которые определены после расчета рамы с помощью программы SCAD (см. рис. 8.16).

Вся процедура расчета рамы по программе SCAD остается такой же, как в предыдущем примере. Будем считать, что две подготовительные операции перед началом работы на ПК выполнены:

1. Установлено, что рама статически определима.
2. Построена вручную расчетная схема МКЭ рамы (рис. 8.13, а).

Оси МСК на горизонтальных конечных элементах примем совпадающими с осями ОСК. На вертикальных КЭ ось $X1$ будем считать направленной снизу вверх. Тогда оси $Y1$ и $Z1$ на вертикальных стержнях будут расположены так, как показано на рис. 8.13, б. Изображение МСК на каждом элементе схемы рамы (см. рис. 8.13, а) заменено изображением «нижней» стороны КЭ с помощью пунктира (см. рис. 3.10).

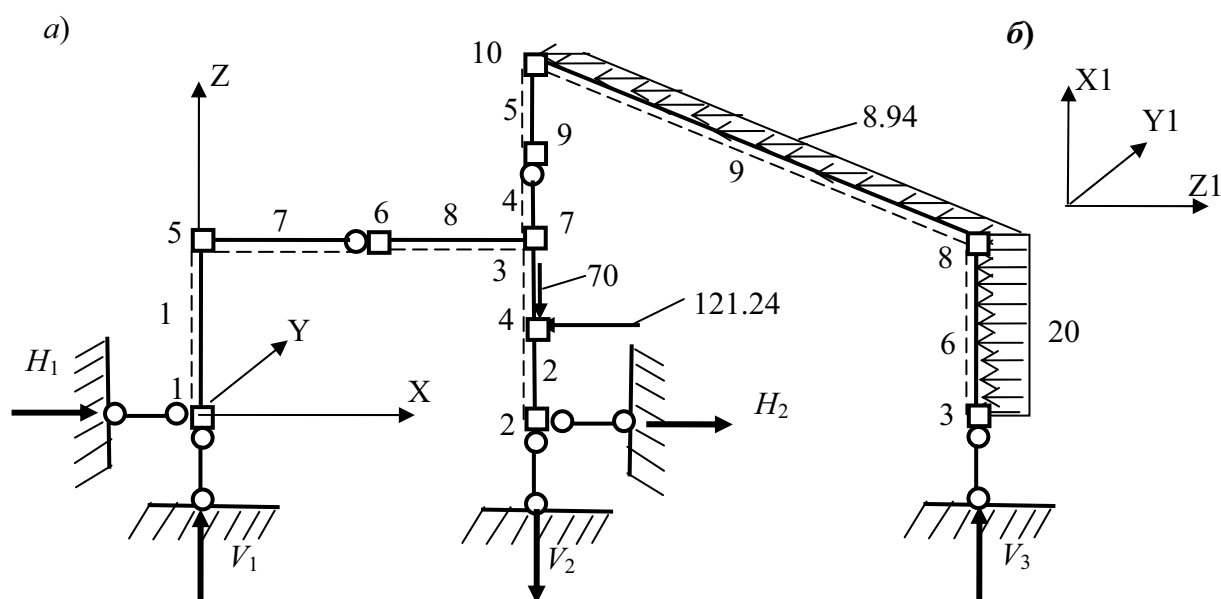


Рис. 8.13

Далее отметим только некоторые особенности работы с программой SCAD, связанные с наличием: наклонного стержня, наклонной силы, равномерно распределенной нагрузки на наклонном стержне.

Особенность построения расчетной схемы заданной рамы с наклонным стержнем. Используем для построения расчетной схемы комбинацию двух способов, описанных в пункте 2.1 этапа 2 (см. раздел 6).

В разделе **Схема** открываем окно **Выбор конфигурации рамы** и затем окно **Задание параметров регулярной рамы**. Фрагменты последнего окна были продемонстрированы при расчете шарнирной балки (см. с. 134) и при расчете предыдущей рамы (см. с. 151).

Для получения схемы заданной рамы сначала построим схему вспомогательной рамы (рис. 8.14, а). С этой целью введем исходные данные,

показанные в приводимой части последнего окна.

Длины пролетов	Количество пролетов		Высоты этажей	Количество этажей
6	1		4	2
8	2			

Затем из вспомогательной рамы удалим элементы 2, 6, 8, 9, 10 и выполним операцию  «Упаковка данных». Схема после удаления указанных элементов и упаковки данных изображена на рис. 8.14, б.

Наклонный элемент заданной рамы (см. рис. 8.12) достроим по узлам 6 и 7 (см. пункт 2.1 этапа 2 в разделе 6).

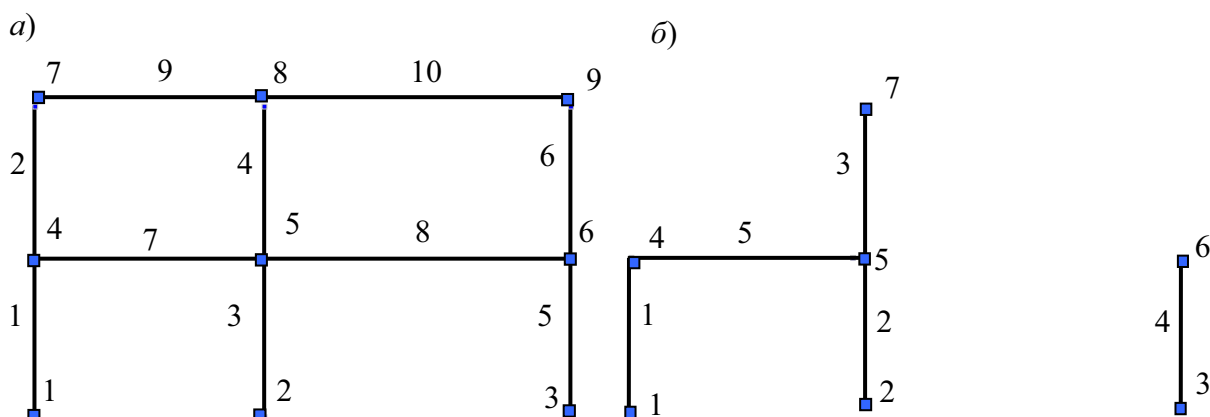


Рис. 8.14

Для установки шарниров на элементах 3 и 5 и для назначения узла в точке приложения сосредоточенной силы на элементе 2 разобьем каждый из этих элементов на два (см. пояснения к рис. 6.4 в разделе 6).

Окончательная расчетная схема рамы с введенными дополнительными узлами, опорными связями и шарнирами изображена на рис. 8.15.

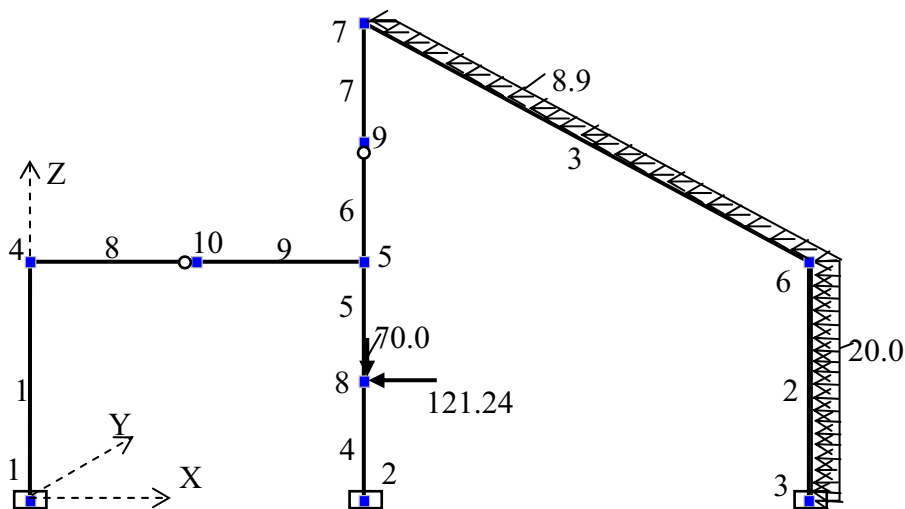


Рис. 8.15

Примечание о нумерации узлов и элементов. Нумерация узлов и элементов на рис. 8.15 получена в программе SCAD автоматически с учетом последовательности их ввода и соответствующей упаковки данных в процессе выполненного конструирования схемы.

Как видим, эта нумерация не совпала с намеченной на построенной вручную предварительной расчетной схеме (см. рис. 8.13).

Однако, во-первых, *результат расчета рамы не изменяется от последовательности ввода ее узлов и конечных элементов и, следовательно, от получившейся их нумерации.*

Во-вторых, можно получить совпадения нумерации узлов и элементов в предварительно построенной вручную расчетной схеме и в схеме, построенной с помощью программы SCAD.

Для этого надо при использовании программы SCAD сначала ввести узлы рамы (по их координатам в общей системе координат) в намеченной на предварительной схеме последовательности, а затем в последовательности, соответствующей предварительно намеченной нумерации элементов, ввести эти элементы, используя соответствующую процедуру программы SCAD (см. раздел 6).

Особенности загрузки рамы. Обратим внимание на следующие два момента процедуры загрузки заданной рамы.

1. Наклонная сосредоточенная сила, приложенная к узлу 8 (см. рис. 8.15), разложена на две составляющие: горизонтальную (121.24 кН), параллельную оси X общей системы координат; вертикальную (70 кН), параллельную оси Z общей системы координат. Обе составляющие задаются со знаком «плюс» (см. этап 3 в разделе 6).

2. Для загрузки наклонного элемента 3 горизонтальной равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 8.15) необходимо:

- найти равнодействующую горизонтальной нагрузки $R_3 = 20 \cdot 4 = 80$ кН, соответствующей проекции наклонного стержня 3 на ось Z (см. рис. 8.15).

- найти длину наклонного стержня 3: $l_3 = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$;

- определить интенсивность горизонтальной равномерно распределенной нагрузки $q' = R_3 / l_3 = 80 / \sqrt{80} = \sqrt{80} = 8.94$ кН/м, действующей по длине стержня 3 (см. рис.8.15), и задать ее в диалоговом окне **Задание нагрузки на**

Направление действия нагрузки					
Силы			Моменты		
☒ X	☐ Y	☐ Z	☐ Mx	☐ My	☐ Mz
Значение нагрузки					
P	8.94				кН/м

стержневые элементы (см. приведенный здесь фрагмент этого окна).

Анализ эпюр усилий. Эпюры усилий M , Q , N в рассматриваемой раме приведены соответственно на рис. 8.16, а, б, в.

При анализе этих эпюр обратим внимание на направление и знак поперечной силы Q на наклонном стержне.

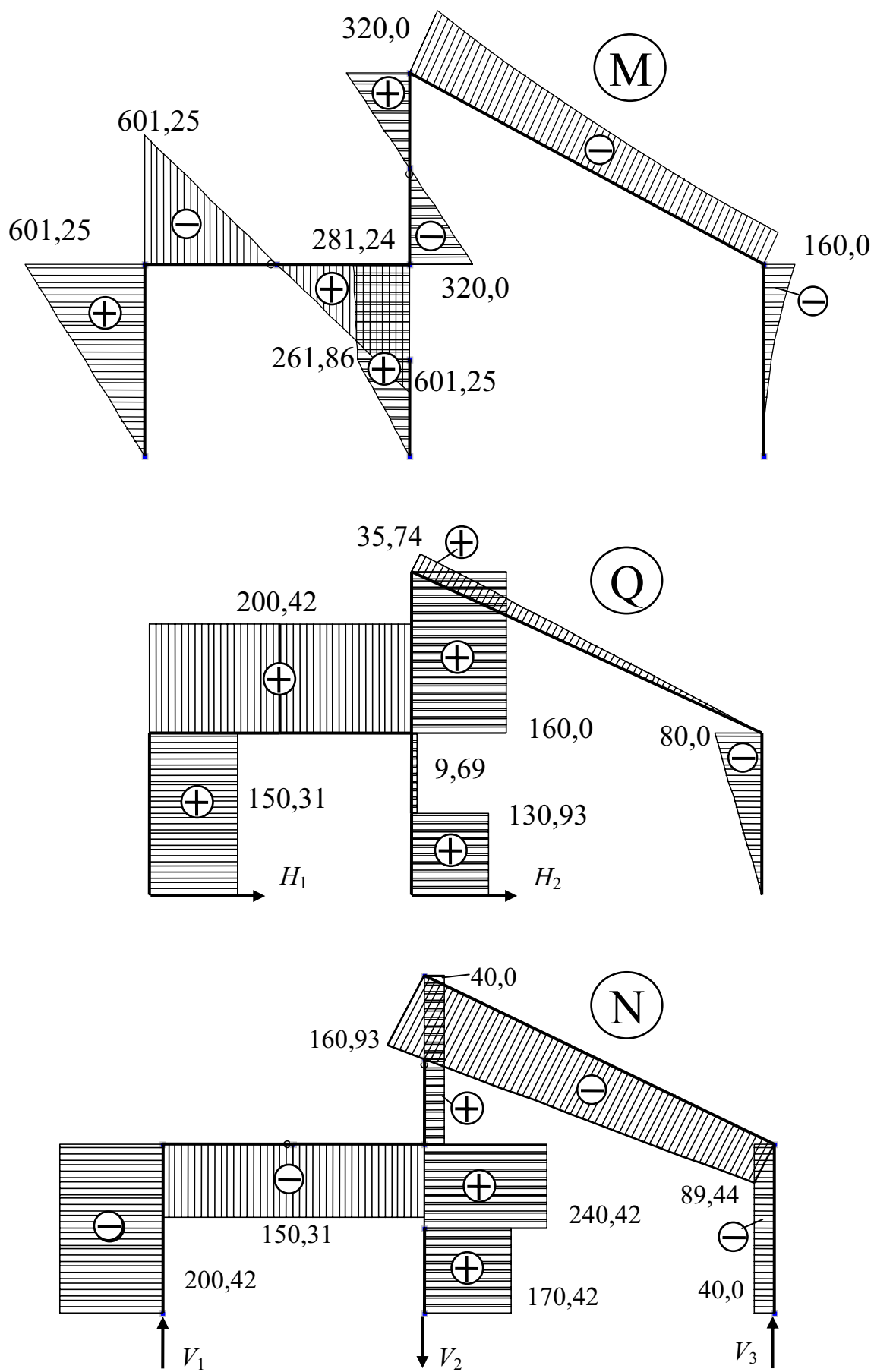


Рис. 8.16

1. Ручное построение оси наклонного элемента по узлам 7 и 6 (см. рис. 8.14, б) было выполнено от узла 7 к узлу 6. В этом направлении будет направлена и ось $X1$. Это означает, что узел 7 в местной системе координат имеет номер 1, а узел 6 – номер 2.

2. Знак плюс на эпюре Q показывает, что вектор поперечной силы, действующей на стержень слева, совпадает с положительным направлением оси $Z1$ местной системы координат («вверх», см. рис. 3.10, а) и что при $dx_1 > 0$ производная $dM > 0$ и поэтому $Q = dM / dx_1 > 0$ (см. рис. 8.16).

3. При другом направлении построения оси наклонного стержня на рис. 8.14, б (от узла 6 к узлу 7), или при смене направления оси $X1$ в предыдущем построении (см. рис. 3.11, а), первым узлом по нумерации местной системы координат станет узел 6. Изменится и знак поперечной силы: в этом варианте при $dx_1 > 0$ на наклонном элементе 3 будем иметь $dM < 0$ и $Q = dM / dx_1 < 0$. Изменяет знак и векторы поперечных сил по концам элемента (см. рис. 3.11).

Обратим внимание на то, что *направления векторов поперечных сил в сечениях по концам наклонного стержня не изменяются при изменении их знака, связанного с поворотом оси $X1$ и всей местной системы осей координат.*

Определение опорных реакций рамы. Направления и значения опорных реакций в раме (см. рис. 8.13) легко определяются по соответствующим эпюрам усилий (см. рис. 8.16, а, б, в).

Реакции рамы в программе SCAD можно также определить, используя процедуру определения нагрузок (давлений) от стоек рамы на фундаменты. Эти давления будут иметь противоположное направление по сравнению с соответствующими реакциями.

Для решения поставленной задачи, прежде всего в основном рабочем окне, где была создана расчетная схема, войдем в раздел **Группы**.

На открывшейся инструментальной панели, состоящей из пяти кнопок,



изображения которых приведены здесь, выполним следующие действия.

1. Нажмем первую слева кнопку «Отметка группы узлов».

2. На схеме рамы отметим группу опорных узлов, в которых предполагается определить опорные реакции (на цветном дисплее узлы станут красными).

3. С помощью третьей кнопки откроем окно для задания имени этой

группы и ее сохранения.

4. На поле «Имя группы» записываем «Опоры рамы» и нажимаем кнопку «Добавить группу». В поле для списка групп появится номер созданной группы и ее имя.

5. Выходим из окна, нажав кнопку «ОК», и нажимаем последнюю кнопку «Сброс всех отметок» (отметка узлов красным цветом исчезнет).

Те же действия выполним для создания группы элементов стоек 1, 4, 2 рамы, к которым относятся опоры. Придадим им имя «Стойки рамы».

Далее на дереве проекта заходим на ветвь **Специальные исходные данные** и открываем окно **Нагрузки от фрагмента схемы**. В этом окне уже будут указаны наименования групп узлов и элементов и их номера. Подтверждаем назначение исходных данных нажатием кнопки «ОК».

Снова окажемся на дереве проекта, где в разделе **Расчет** выберем наименование «Нагрузки от фрагмента схемы».

После выполнения этого расчета последовательно заходим в разделы: **Результаты, Графический анализ, Постпроцессоры**.

Нажимаем кнопку «Анализ нагрузок от фрагмента схемы», а затем кнопку  «Отображение нагрузок от фрагмента схемы».

В опорных узлах на схеме рамы появятся векторы усилий (по выбору: R_X, R_Z, R_{UY}), представляющие собой нагрузки (давления) на фундамент.

При нажатой на фильтре отображения кнопке «Оцифровка изополей изолиний» у векторов усилий будут поставлены значения.

8.4. КОНТРОЛЬ РАСЧЕТА РАМЫ С НАКЛОННЫМ СТЕРЖНЕМ

Прежде всего, убеждаемся, что построенные эпюры усилий M, Q, N удовлетворяют признакам правильных эпюр (см. подраздел 4.2 в учебном пособии).

Использование уравнений равновесия для контроля результатов расчета

В соответствии с рекомендациями, приведенными в подразделе 4.5, выполним следующие проверки полученных результатов расчета.

Проверка определенных опорных реакций

Для определения пяти составляющих опорных реакций (см. рис. 8.12) H_A, V_A, H_B, V_B, V_C (они же на рис. 8.13, а обозначены H_1, V_1, H_2, V_2, V_3), действующих на раму в опорных узлах, имеем пять уравнений равновесия:

- три для всей плоской рамы, например,
 - 1) $\sum X = -121.24 - (20 \cdot 8) + 150.31 + 130.93 = -281.24 + 281.24 = 0$;
 - 2) $\sum Z = -70 - 170.42 + 200.42 + 40 = -240.42 + 240.42 = 0$;
 - 3) $\sum M_1 = -70 \cdot 6 + 121.24 \cdot 2 - 170.42 \cdot 6 + 40 \cdot 14 + (20 \cdot 8)4 = 8 \cong 0$;
- два уравнения равновесия вида $\sum M_{ш} = 0$
 - 4) $\sum M_E^{справа} = -(20 \cdot 8)2 + 40 \cdot 14 = 0$ (или $\sum M_E^{слева} = 0$);
 - 5) $\sum M_D^{слева} = 150.31 \cdot 4 - 200.42 \cdot 3 \cong 0$ (или $\sum M_D^{справа} = 0$).

Все уравнения тождественно удовлетворяются. Рама при найденных опорных реакциях находится в равновесии. Это показывает, что **опорные реакции определены правильно.**

Проверка равновесия узлов рамы по моментам

Сумма моментов, действующих на любой узел рамы, должна быть равна нулю. На рис. 8.17 показано равновесие узлов 5, 7, 8, 10 (см. рис. 8.15). Для всех этих узлов удовлетворяется уравнение равновесия $\sum M_k = 0$, где индекс «к» – номер узла.

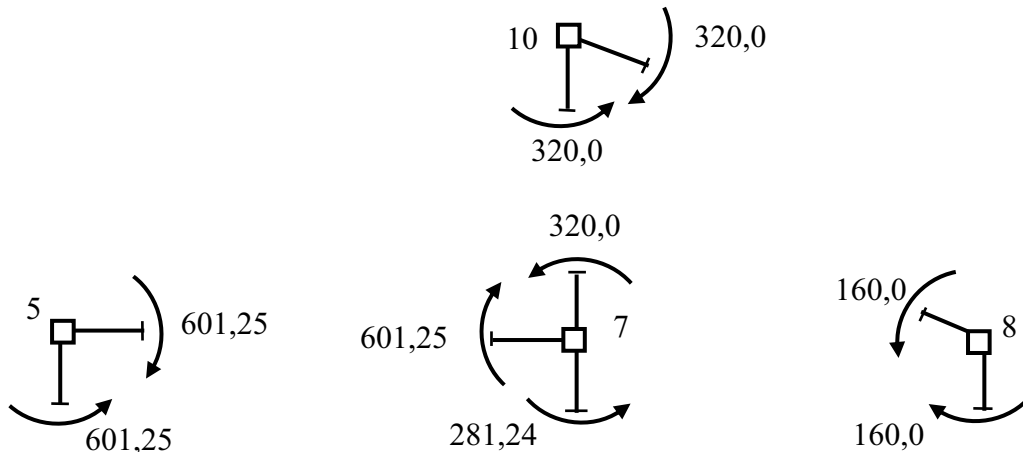


Рис. 8.17

Проверка равновесия узлов рамы при действии на них поперечных и продольных сил

Каждый узел расчетной схемы рамы (см. рис. 8.15), должен удовлетворять еще двум уравнениям равновесия, например, на оси ОСК. На рис. 8.18 показаны поперечные и продольные силы, взятые с эпюр усилий, построенных на рис. 8.16. Направления действия векторов поперечных сил на узлы определены с помощью правила «тупого угла» (см. раздел 4.4 пособия).

Видно, что уравнения равновесия узлов вида $\sum X_{узла} = 0$ и $\sum Z_{узла} = 0$ тождественно удовлетворяются.

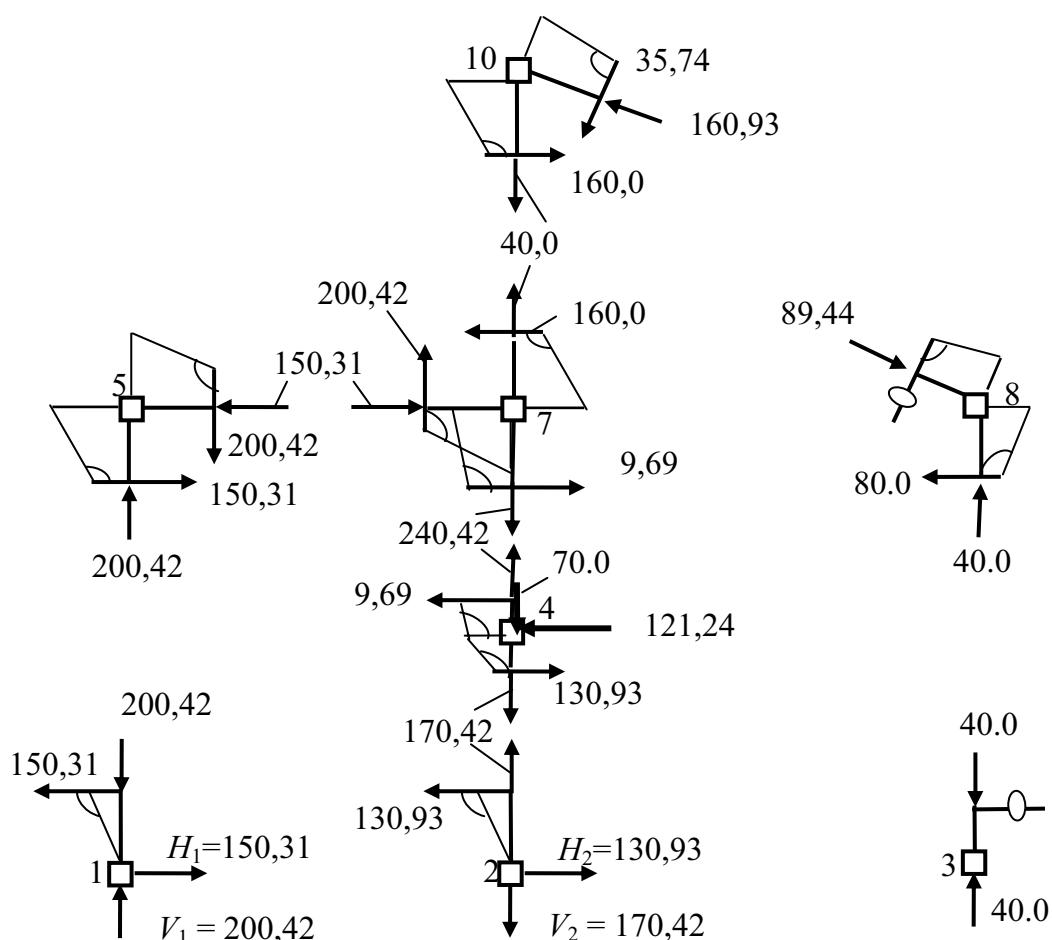


Рис. 8.18

Проверка равновесия любой части рамы

Предыдущие проверки равновесия относились ко всей раме и к узлам намеченной системы конечных элементов на расчетной схеме МКЭ.

Однако иногда, для контроля построенных эпюр усилий, удобно рассмотреть равновесие какой – либо части рамы. Для заданной рамы такой частью является, например, горизонтальный ригель (рис. 8.19).

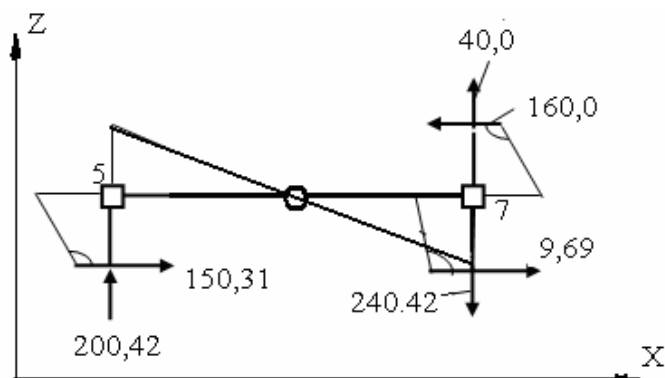


Рис. 8.19

Для быстрой проверки вырезанной части рамы используем не три

уравнения равновесия, а только два: $\sum X_{\text{части}} = 0$ и $\sum Z_{\text{части}} = 0$. Видно, что равновесие соблюдается.

Такая проверка (по углам наклона эпюр M на разрезанных стойках) позволяет судить и о правильности вида эпюры M на стойках рамы.

**Проверка удовлетворения уравнений равновесия
для любого бесконечно малого элемента dx рамы**

Как показано в подразделе 1.7, любой бесконечно малый элемент длиной dx , нагруженный продольной и поперечной распределенными нагрузками интенсивностью соответственно q_{x1} и q_{z1} , находится в равновесии, если соблюдаются уравнения равновесия этого элемента:

$$1) \frac{dN}{dx} = q_{x1}; 2) \frac{dQ}{dx} = q_{z1}; 3) \frac{dM}{dx} = Q.$$

Проверка соблюдения этих уравнений является проверкой правильности построенных эпюр.

В рассматриваемой раме:

1) на всех КЭ $q_{x1} = 0$. Поэтому $dN/dx = 0$. Отсюда следует, что все эпюры N должны быть параллельны осям стержней. Это соблюдается.

2) На элементах 1 – 5 $q_{z1} = 0$. Поэтому $dQ/dx = 0$.

Значит, все эпюры Q на указанных элементах должны быть параллельны осям стержней. Это соблюдается.

3) Как видно из третьего уравнения, при постоянном значении Q на элементах 1 – 5 соответствующие эпюры M должны быть прямолинейными и наклонными к оси стержней под углом $\alpha_i = \arctg Q_i$ ($\operatorname{tg} \alpha_i = dM_i/dx = Q_i$), где i – номер элемента. Это требование выполнено.

На элементах 6 и 9 с равномерно распределенной нагрузкой эпюра M представляет собой параболу второй степени. Следовательно, эпюры Q_6 и Q_9 будут описываться линейной функцией. Там, где $Q_6 = 0$ и $Q_9 = 0$, на эпюрах M_6 и M_9 соответственно будут экстремальные значения ординат изгибающих моментов. Это соответствие в эпюрах M и Q на указанных стержнях имеется.

Заключение

Выполненные проверки позволяют сделать вывод, что *расчет рамы по определению усилий в сечениях ее стержней и в опорных связях выполнен правильно.*

9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ

Постановка задачи и анализ заданной расчетной рамы. Рассмотрим пример выполнения расчетной работы 4 из сборника заданий и задач (см. приложение 1 или [1, 6]).

По шифру ABCD из сборника выбираем расчетную схему фермы (рис. 9.1), ее размеры, м, и нагрузку на нее в виде загрузений 1 и 2 сосредоточенными силами, кН, приложенными в узлах верхнего пояса фермы.

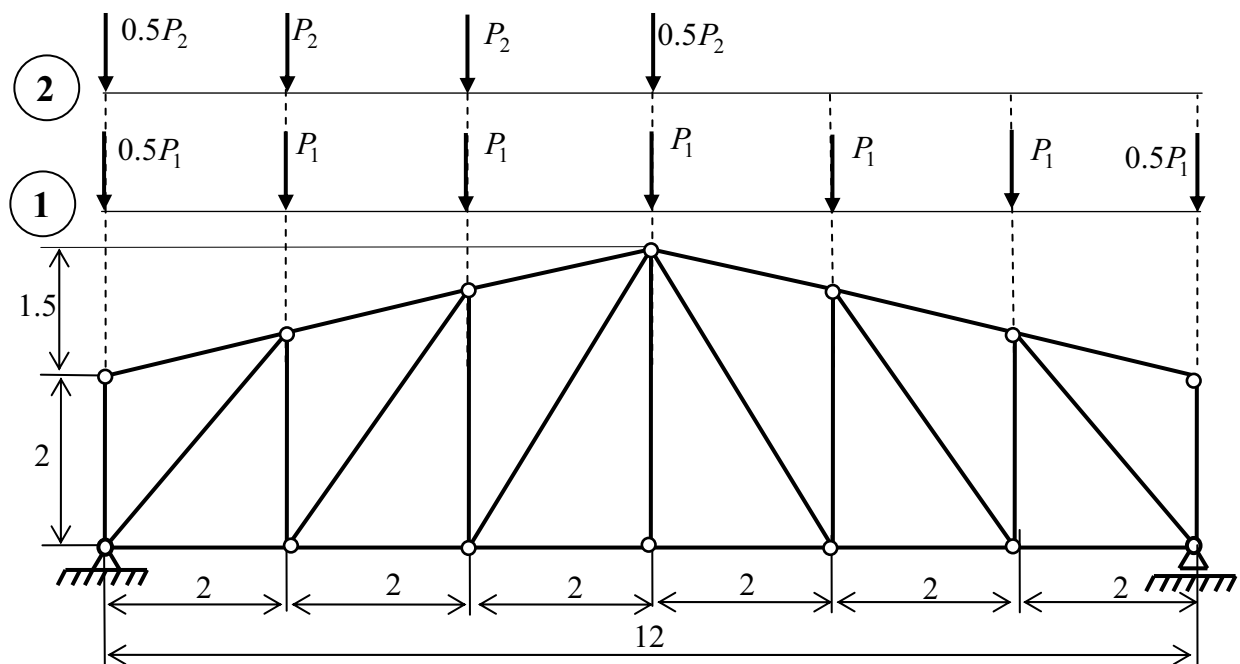


Рис. 9.1

В соответствии с заданием к работе 4 требуется:

9.1. Расчетом МКЭ на ПК с использованием программы SCAD определить усилия N в стержнях фермы и построить их эпюры. По определенным усилиям в стержнях из уравнений равновесия опорных узлов подсчитать опорные реакции фермы.

9.2. 2. Выполнить контроль определенных нулевых усилий и усилий в отмеченных на схеме стержнях, используя рациональные способы применения уравнений равновесия с учетом конструктивных особенностей фермы (см. подразделы 4.4 и 4.5 и 5.6) пособия).

9.1. РАСЧЕТ ФЕРМЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

Поскольку на данном этапе изучения методов расчета стержневых систем изучается методика расчета статически определимых стержневых систем, прежде чем приступить к расчету по программе SCAD, необходимо проверить выполнение условий статической определимости фермы. С этой целью выполняются две операции:

1. Подсчитывается степень статической неопределимости:

$$n = (n_c + n_{оп}) - 2n_y, \quad (9.1)$$

где n_c , $n_{оп}$, n_y – соответственно число стержней решетки фермы, число опорных стержней, число узлов фермы (см. подраздел 2.6).

В рассматриваемой ферме получаем: $n = (25+3) - 2 \cdot 14 = 0$. Необходимое условие статической определимости фермы выполнено. Оно означает, что число неизвестных усилий в стержнях фермы с учетом усилий в опорных стержнях равно числу уравнений равновесия, которые можно записать для всех узлов фермы. Чтобы сделать окончательный вывод о статической определимости фермы кроме условия (9.1) должна соблюдаться геометрическая неизменяемость фермы. Поэтому выполняется операция 2:

2. Проверяется геометрическая неизменяемость фермы.

Структурный анализ фермы (см. раздел 2 пособия) показывает, что она является жестким диском, прикрепленным к жесткому основанию тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными. Таким образом, ферма геометрически неизменяема.

Эти два результата позволяют сделать вывод, что *заданная ферма является статически определимой системой.*

Инструкция по использованию программы SCAD

В инструкции не повторяется описание тех операций, которые были рассмотрены в разделах 6 – 8 пособия. Поэтому при выполнении этапа 1 «Запуск программы SCAD и подготовка к созданию расчетной схемы фермы» будем руководствоваться инструкцией, приведенной в разделе 6.

Здесь продолжим конкретное выполнение инструкции, начиная с этапа 2 раздела 6.

2. Создание расчетной схемы фермы для МКЭ

2.1. Графическое представление расчетной схемы фермы

Расчетную схему заданной фермы можно построить с использованием имеющихся в программе SCAD типовых схем. С этой целью после открытия

окна для создания расчетной схемы фермы необходимо войти в раздел **Схема**. Курсор устанавливается на закладке **Схема** и нажимается левая кнопка мыши. Появится инструментальная панель, соответствующая разделу **Схема** (ее часть была приведена в разделе 6, см. с. 121).

Пролет фермы (L)	12	м
Высота фермы (H)	2	м
☐ Длина панели (Lp) или	6	
☒ Количество панелей		
Угол наклона (α)	14	Град

На этой панели нажимается вторая кнопка слева «Генерация прототипа фермы». Появится окно **Конфигурация поясов фермы**, в котором из представленных типов ферм выбирается «Двускатная ферма». После подтверждения выбора нажатием кнопки «ОК» появится очередное диалоговое окно **Параметры схемы**, в котором изображены 8 типовых схем двускатных ферм.

В соответствии с заданием (см. рис. 9.1), выбираем восьмой сверху тип фермы и вводим для нее требуемые в окне исходные данные (см. приведенную здесь часть окна **Параметры схемы**).

После подтверждения нажатием кнопки «ОК» назначенных параметров на экране появится окно с созданной расчетной схемой фермы для МКЭ.

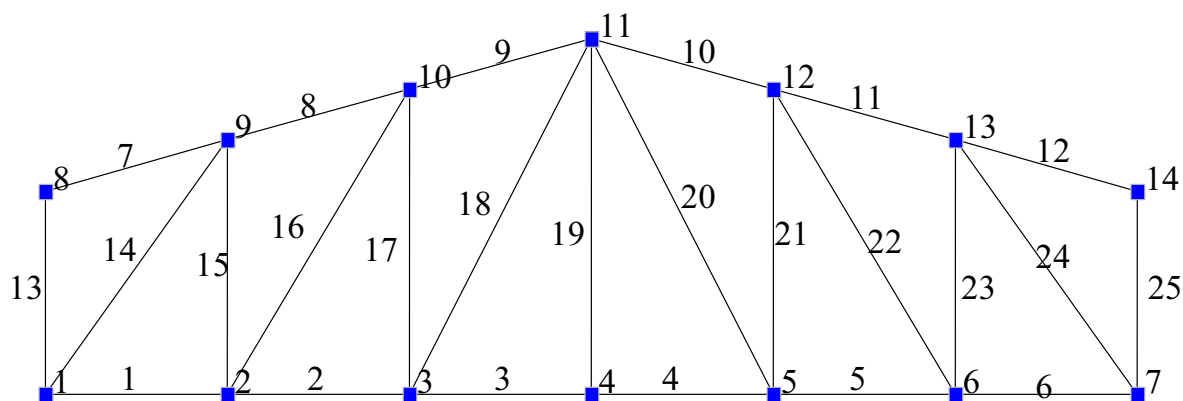


Рис. 9.2

Как уже отмечалось в разделе 6 (см. этап 1, пункт 1.4), вместе со схемой фермы в окне появятся две подвижных панели: **Фильтры отображения** и **Визуализация**, форма которых может быть изменена расчетчиком.

Нажатые на панели **Фильтры отображения** кнопки позволили отобразить на схеме фермы узлы и номера узлов и элементов. Можно отобразить также общую систему координат и местные системы координат всех элементов.

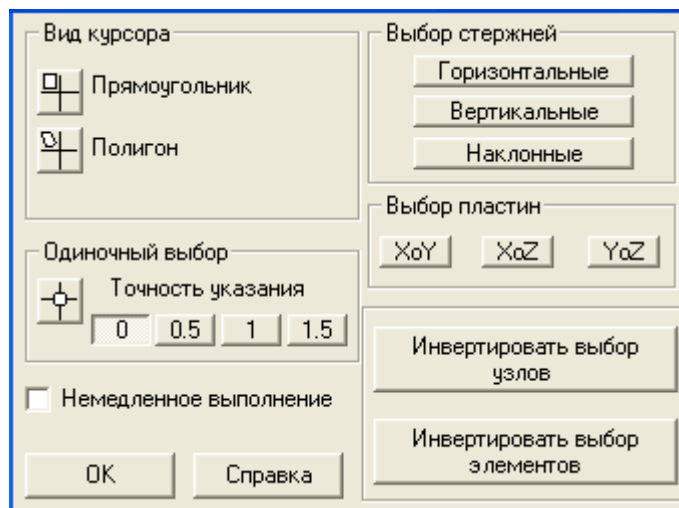
Однако одновременно нажимать много кнопок на этой панели не рекомендуется, так как некоторые цифровые информации будут накладываться друг на друга. Рекомендуется выполнять контроль заданных параметров фермы постепенно.

2.2. Назначение типа элементов

В окне **Создание нового проекта** (оно здесь не приводится, но его вид и работа с ним были рассмотрены в пункте 1.2 этапа 1 инструкции, см. с. 118) должен быть назначен тип схемы «Плоская шарнирно стержневая система».

Поэтому при нажатии на панели **Фильтры отображения** кнопки  «Типы элементов» все элементы будут отмечены цифрой 1. Если же выбор типа схемы не был сделан, или его надо изменить, то для назначения типа элементов надо войти в раздел **Назначения**, которому будет соответствовать своя инструментальная панель.

На этой панели нажимаем кнопку  «Назначение типов конечных элементов» и в появившемся одноименном окне (его часть была показана на с. 123) последовательно выбираем: «Стержень»; «1. Стержень плоской фермы». Подтверждаем выбор нажатием кнопки «ОК».



Для придания выбранного типа элемента сразу всем стержням фермы **выделим все ее элементы**. С этой целью подведем курсор к схеме фермы и нажмем правую клавишу мыши. Появится окно **Выбор узлов и элементов** (здесь приведена его часть).

Нажимаем кнопку «Инвертировать выбор элементов». При этом на цветном дисплее все линии,

изображающие стержни фермы, выделятся красным цветом.

Подтверждаем операцию выделения нажатием в этом же окне кнопки «ОК». Окно исчезнет и снова появится расчетная схема фермы.

Заключительной операцией выбора типа элементов является нажатие на инструментальной панели раздела **Назначения** кнопки  «ОК». Все стержни на расчетной схеме снова станут белыми (при черном поле на дисплее)

или черными (при белом поле). Если на фильтре отображения будет нажата кнопка  «Тип элемента», то все стержни расчетной схемы фермы отметятся цифрой 1.

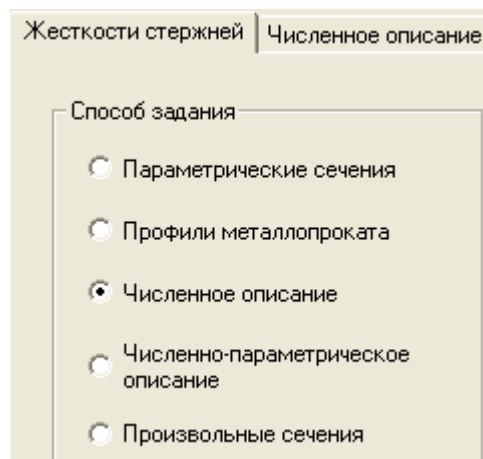
2.3. Назначение жесткости элементов фермы

В задании к расчету поставлена задача определения только усилий в стержнях фермы.

Так как ферма статически определима, жесткости стержней фермы в программе SCAD могут быть заданы в виде произвольных значений, например равными единице (см. подраздел 3.6)

Для назначения жесткостей стержневых конечных элементов типа 1 на инструментальной панели раздела **Назначения** нажимаем

кнопку . Откроется первая страница трехстраничного диалогового окна **Жесткости стержневых элементов** (приведен только фрагмент первой страницы).



Для задания единичной жесткости, выбираем в первом диалоговом окне способ задания «Численное описание» (подведем курсор к круглому окошечку и щелчком левой кнопки мыши поставим в окне точку).

Затем нажатием кнопки «Численное описание» в верхнем меню перейдем на вторую страницу диалогового окна **Жесткость стержневых элементов**.

На второй странице с помощью курсора и левой клавиши мыши отмечаем тип элемента (тип 1) и вводим единичное значение продольной жесткости ($EF = 1$). На этой же странице нажатием кнопки «ОК» подтверждается сделанное назначение жесткости.

Для придания указанной жесткости всем стержням фермы снова выполняем процедуру выделения стержней (см. окно **Выбор узлов и элементов** в предыдущем подразделе 2.2 этапа 2). Окончательное подтверждение, что жесткость назначается всем выделенным красным цветом стержням фермы, является нажатие на инструментальной панели раздела **Назначения** кнопки «ОК».

2.4. Назначение опорных связей фермы

Процедура была рассмотрена в пункте 2.4 этапа 2 в разделе 6.

2.5. Назначение шарниров в узлах элементов

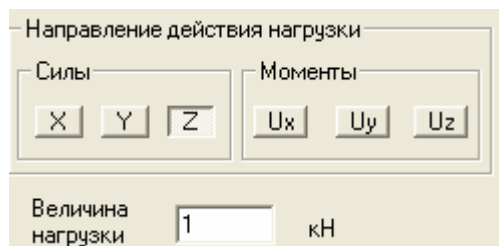
Поскольку при формировании расчетной схемы фермы для МКЭ использовались конечные элементы типа 1 (см. рис. 5.1), то все узлы в расчетной схеме МКЭ будут шарнирными. Поэтому использовать процедуру ввода шарниров в узлы, описанную в пункте 2.5 раздела 6 для элемента типа 2, при расчете фермы не требуется.

2.6. Сохранение созданной расчетной схемы и ее печать

Способы печати созданной на экране расчетной схемы рассмотрены в пункте 2.6 раздела 6. В данном примере использован описанный там третий способ. Сформированная промежуточная расчетная схема фермы была приведена на рис. 9.2.

3. Загрузка расчетной схемы фермы

3.1. Создание загрузок узлов фермы



Управление функциями задания нагрузок выполняется в разделе **Загрузки** с помощью соответствующей этому разделу инструментальной панели.

Так как в соответствии с заданием на расчетную схему фермы действуют только узловые нагрузки (см. рис. 9.1), то для их ввода с помощью курсора и левой клавиши мыши нажимаем кнопку  «Узловые нагрузки». В результате этого откроется диалоговое окно «Ввод узловых нагрузок».

В этом диалоговом окне продемонстрирован вариант задания в узле направленной вниз вертикальной нагрузки, равной 1 кН. Нагрузка имеет положительный знак, т. к. она имеет направление обратное по отношению к положительному направлению оси Z.

Подтверждением выбранной нагрузки является нажатие в окне кнопки «ОК». При этом окно исчезнет и снова появится расчетная схема фермы (см. рис. 9.2).

Для приложения заданной сосредоточенной силы к узлам расчетной схемы фермы, на которые она действует (см. рис. 9.1), можно применить следующие два способа.

1. Последовательно подводим курсор к загружаемым узлам и нажимаем левую клавишу мыши. При этом узлы отметятся красным цветом.

2. Правой кнопкой мыши вызываем уже использованное ранее окно **Выбор узлов и элементов**, в котором выбираем вид курсора «Прямоугольник». и подтверждаем выбор нажатием кнопки «ОК». На схеме фермы с помощью курсора заключаем нагружаемые узлы в прямоугольник и щелчком левой кнопки мыши выделяем эти узлы красным цветом.

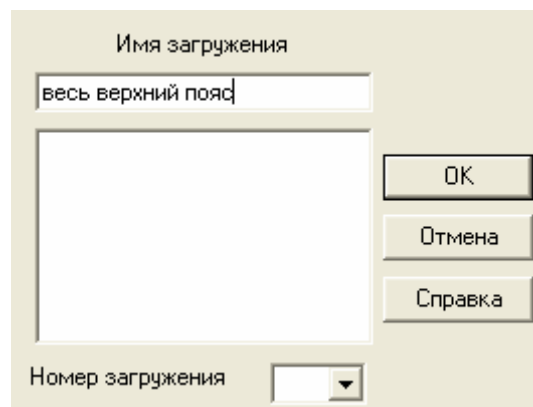
Окончанием процедуры загрузки выделенных узлов в обоих вариантах будет нажатие кнопки «ОК» на инструментальной панели раздела **Загрузки**.

В результате загружаемые узлы потеряют красный цвет их выделения и, если будут нажаты кнопки  «Узловая нагрузка» и  «Значения нагрузок» на панели **Фильтры отображения**, то в указанных узлах появятся изображения вертикальных сосредоточенных сил и указание их значений.

Аналогично загружаются другие узлы фермы, если на них одновременно с рассмотренными силами действуют другие сосредоточенные силы. Так как вариантов загрузок может быть несколько, то их нумеруют. Номера присваиваются при сохранении конкретного нагружения.

3.2. Сохранение созданного нагружения фермы

Для сохранения созданного нагружения фермы нажимается кнопка . «Сохранить /Добавить/ нагружение» на инструментальной панели **Загрузки**. Появится диалоговое окно **Сохранить нагружение**, в котором задается имя нагружения и нажимается кнопка «ОК».



В демонстрируемом окне присвоено имя «весь верхний пояс» первому варианту нагружения фермы (см. рис. 9.1).

Появится окно с сообщением о присвоении нагружению номера 1.

При согласии с присвоенным номером в окне сообщения нажимается кнопка «ОК». При несогласии номер нагружения присваивается расчетчиком в окне **Сохранить нагружение**.

Аналогично производится второе нагружение фермы (с номером 2).

3.3. Сохранение расчетной схемы с созданным нагружением и ее печать

Для сохранения вида расчетной схемы с нагружением и ее печати можно использовать способы, описанные в пункте 2.6 раздела 6.

На рис. 9.3 приведена схема фермы с загрузением 1, вставленная в текст этого пособия с помощью третьего способа.

4. Выполнение линейного расчета и анализ результатов

4.1. Линейный расчет

Теперь, когда все необходимые параметры фермы и нагрузки заданны, нужно войти в раздел **Управление** и нажать кнопку  для выхода в дерево управления проектом.

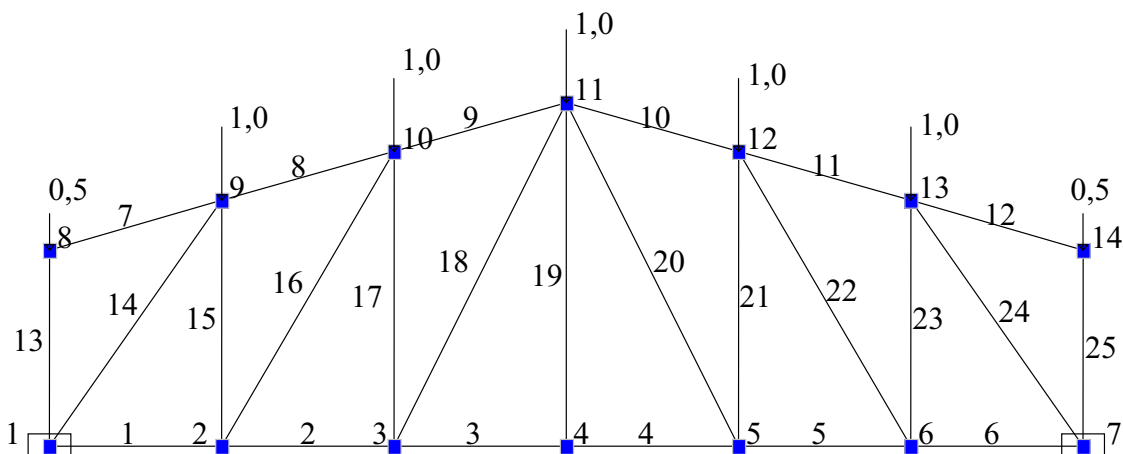


Рис. 9.3

В дереве проекта, в группе функций **Расчет** выбираем «Линейный».

Нажатие кнопки  **Линейный** открывает диалоговое окно **Параметры расчета**, в котором выбираем «Полный расчет» и «ОК».

Возникает информативное окно о прохождении этапов расчета в виде протокола. По окончании расчета будет сообщение «Задание выполнено». После этого надо нажать кнопку «Выход», что приведет к появлению окна с деревом проекта, в котором становятся доступным раздел **Результаты**.

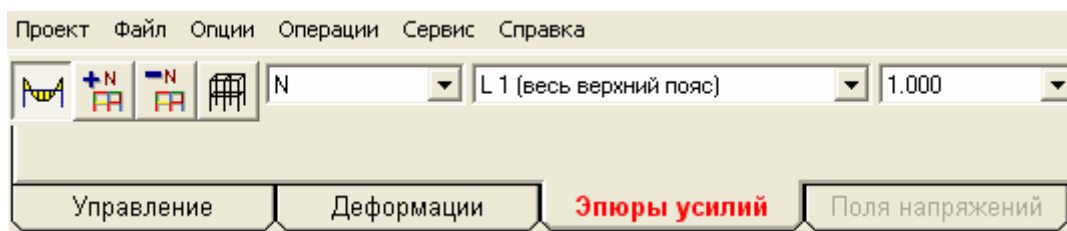
Примечание. Если режим расчета не доступен на дереве проекта будет значок . Это означает, что введены не все исходные данные. Надо вернуться в окно **Расчетная схема** и проверить ввод исходных данных.

4.2. Представление полученных результатов в виде эпюр усилий в стержнях фермы. Их сохранение и печать

Установим курсор на позицию **Графический анализ** раздела **Результаты** дерева проекта и нажмем левую кнопку мыши. Появится окно для вывода различных результатов.

Для получения эпюры N продольных сил в стержнях фермы войдем в раздел **Эпюры усилий**. В трех светлых рабочих окнах надо выбрать (слева

направо): обозначение усилия, для которого предполагается построить эпюру (для фермы это будет N); номер загрузки с соответствующим названием, если оно было задано); масштабный коэффициент для ординат эпюры.



Нажмем кнопку  «Эпюры усилий». При этом на экране появится расчетная схема фермы с эпюрой N для выбранного нагружения 1 (рис. 9.4, а).

Аналогично получается эпюра N при нагружении 2 фермы (рис. 9.4, б).

Для этого необходимо выбрать вариант второго нагружения (в окне будет записано: L2 (верхний пояс слева)).

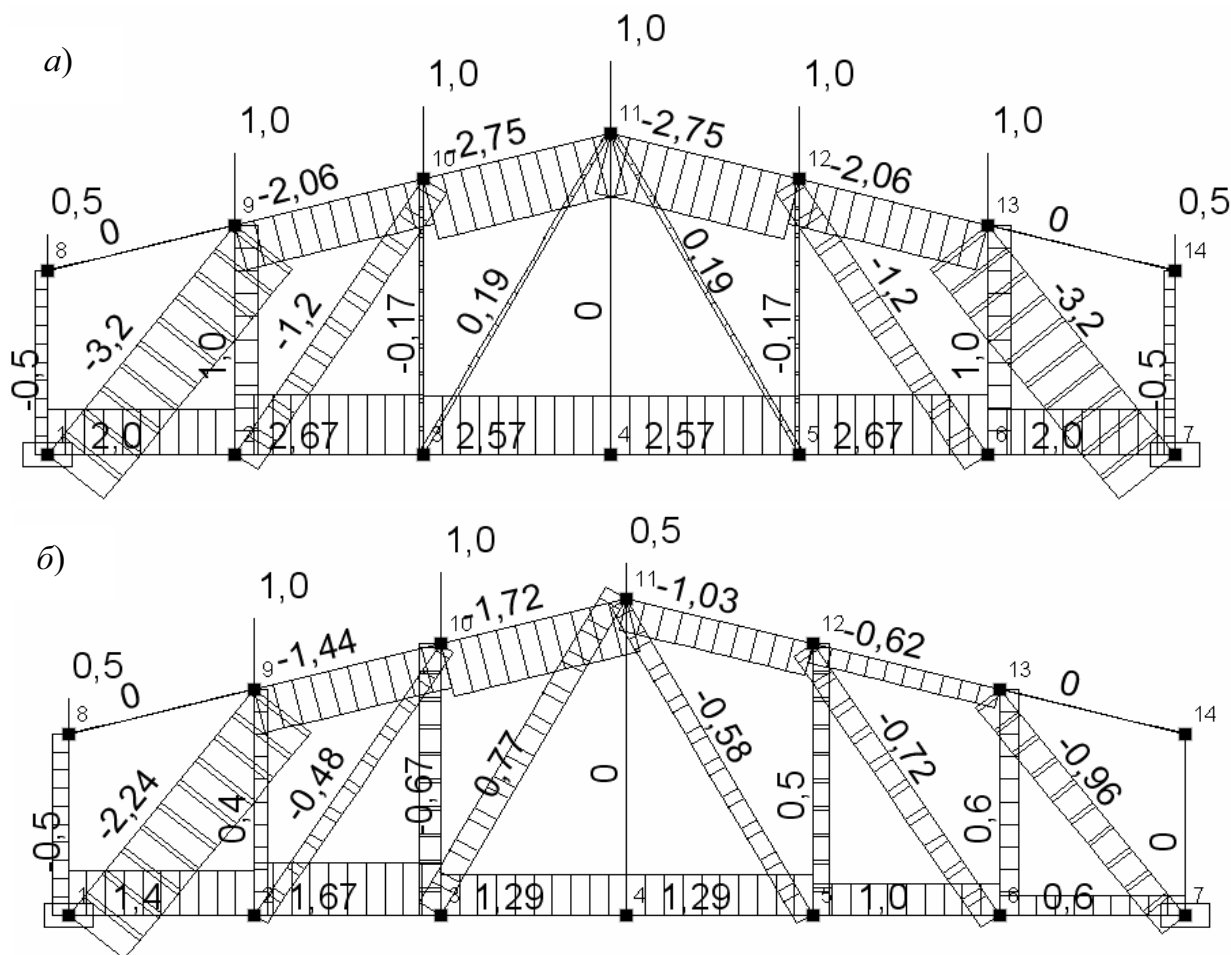


Рис. 9.4

Примечание. Рис. 9.4, а и рис. 9.4, б скопированы с экрана компьютера с помощью программы **Paint**.

4.3. Таблица усилий в стержнях фермы

В разделе **Результаты** дерева проекта есть подраздел **Печать таблиц**. Если войти в этот подраздел, то откроется окно **Оформление результатов расчета**.

Для печати таблицы продольных усилий в стержнях фермы отметим точкой соответствующее окно «Усилия и напряжения» и нажмем кнопку «Параметры вывода». Откроется дополнительная информация «Состав выходных таблиц».

Последовательно заходим в имеющиеся там разделы и выполняем ряд операций:

- *Список элементов*. Отмечаем: «Все элементы» и «ОК»;
- *Список загрузжений*. Отмечаем «Все загрузжения» и «ОК»;
- *Параметры оформления*. Здесь выбирается число значащих цифр в таблице. Кроме того, выбирается положение таблицы на странице и размер шрифта. При завершении работы в окне нажать «ОК».
- *Выходные единицы измерения*. В начале расчета были заданы *входные* единицы измерения сил: в кН. При печати результатов рекомендуется убедиться в том, что и полученные усилия в стержнях получатся в этих же единицах. При необходимости можно изменить размерность. Завершается работа с окном «Состав выходных таблиц» нажатием кнопки «ОК».

После этого последовательно нажимаем кнопки «Формирование документа» и «Просмотр результатов». Появляется окно с таблицей продольных усилий *N*. Эта таблица может быть распечатана сразу, или скопирована в отчет (в документ с расширением doc).

Возможно получение этой таблицы в любое другое время, так как результаты расчета в программе SCAD сохраняются в папке рабочих файлов SWORK.

Часть этой таблицы для первых четырех элементов продемонстрирована в данном пособии в виде табл. 9.1 (значения усилий даны в кН).

Таблица 9.1

1	У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ							
2	1-1	1-2	2-1	2-2	3-1	3-2	4-1	4-2
3	1	1	2	2	3	3	4	4
4	2	2	3	3	4	4	5	5
5	1 - весь верхний пояс							
6	N	2.001	2.001	2.669	2.669	2.574	2.574	2.574
7	2 - верхний пояс слева							
8	N	1.4	1.4	1.668	1.668	1.287	1.287	1.287

Примечания к табл. 9.1.

1. Если при оформлении отчета по работе, приведен результат определения усилий в виде эпюр N (см. рис 9.4, *а* и рис. 9.4, *б*), то таблицу с усилиями в отчете по работе можно не приводить.

2. Расчет фермы был выполнен при $P_1 = 1$ и $P_2 = 1$ (см. рис. 9.1).

Так как рассматриваемая ферма предполагается линейно–деформируемой (по допущениям, принятым при изучении строительной механики стержневых систем (см. подраздел 1.1), то при конкретно заданных значениях P_1 и P_2 все полученные в результате расчетов усилия должны быть умножены: в первом нагружении на P_1 ; во втором нагружении на P_2 .

3. В табл. 9.1 строки имеют следующее назначение.

Строка 2 – номера элементов в ОСК и номера узлов по их концам в МСК.

Строки 3 и 4 – номера соответственно левого и правого (в МСК) узлов элементов по их концам в ОСК.

Строки 5 и 7 – номера нагружений и их наименование.

Строки 6 и 8 – значения и знаки продольных усилий N , кН в стержнях фермы.

4. Результаты расчета необходимо проверить, например, используя уравнений равновесия (см. учебные пособия [1, 4]. Поэтому выполняется второй раздел расчетной работы 4 (см. постановку задачи в начале расчетной работы 4).

9.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ФЕРМЫ

Заданная ферма является статически определимой системой, поэтому усилия в ее стержнях (в том числе и опорных) могут быть найдены с помощью только уравнений равновесия.

Используя уравнения равновесия плоского тела, как ко всей ферме, так и к любым отдельным ее отсеченным частям, выполним контроль усилий в отмеченных на рис. 9.1 стержнях фермы и ее опорных реакций, определенных на ПК с помощью программы SCAD. При этом будем использовать рациональные способы применения этих уравнений равновесия с учетом конструктивных особенностей заданной фермы.

Использование уравнений равновесия для всей фермы

Условием равновесия всей фермы под действием всех заданных внешних сил и всех опорных реакций является удовлетворение трех уравнений равновесия (запишем их в соответствии с общей системой координат, принятой в программе SCAD):

$$\sum X = 0; \sum Z = 0; \sum M_y = 0 \quad (9.2)$$

Поскольку в заданной статически определимой ферме (см. рис. 9.1) имеются только три опорных связи (не пересекающихся в одной точке и не параллельных друг другу), то реакции в них могут быть определены из

указанных уравнений. В результате для первого нагружения фермы получим: $H_1=0$; $V_1=3$ кН; $V_7=3$ кН.

Такие же значения реакций получились при расчете МКЭ с помощью программы SCAD. Поэтому уравнения равновесия (9.2) могут быть использованы для контроля опорных реакций найденных с помощью программы SCAD: при их подстановке в эти уравнения равновесия должны получиться тождества.

Определение с помощью уравнений равновесия для узлов явно нулевых стержней фермы

Как показано в подразделе 5.6 пособия и в пособиях [1, 7, 10, 16], есть правила определения явно нулевых стержней в ферме, полученные на основе использования уравнений равновесия одного из узлов, к которому присоединяется рассматриваемый стержень. Если в заданной ферме имеются стержни, усилия в которых являются явно нулевыми, то и при расчете методом конечных элементов по программе SCAD они должны получиться нулевыми.

Приведенные выше эпюры N показывают три нулевых стержня в заданном нагружении 1 фермы. По известным правилам определения явно нулевых стержней констатируем, что они и должны быть нулевыми.

Определение усилия N_{13} (см. рис. 9.3) из уравнения равновесия вырезанного из фермы узла 8

Кроме явно нулевого стержня с номером 7, нулевое усилие в котором определяется из уравнения равновесия $\sum X_8 = 0$ для узла 8, также просто способом «вырезания узла 8» определяется усилие в вертикальном стержне 13.

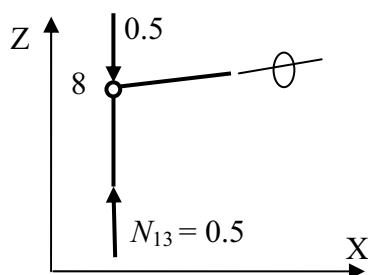


Рис. 9.5

Из уравнения $\sum Z_8 = 0$ находим, что $N_{13} = 0.5$ кН.

Так как стержень сжат, то по правилу знаков для продольных сил (см. подраздел 4.4 пособия) его значение обычно пишут со знаком минус, что и сделано на эпюре N (см. рис. 9.4, а).

Таким образом, усилие N_{13} , найденное при расчете по программе SCAD, удовлетворяет условиям равновесия узла 8.

Проверка равновесия вырезанного из фермы узла 1 (рис. 9.6, а)

Определенное усилие N_{13} действует и на узел 1. Кроме него на этот узел действуют усилия $N_1 = 2.46$ кН и $N_{14} = -3.5$ кН и усилия в двух опорных стержнях (опорные реакции). Равновесие узла можно проверить *аналитическим способом*, составив два уравнения равновесия, или – *графическим способом*, построив многоугольник действующих на узел сил (рис. 9.6, б).

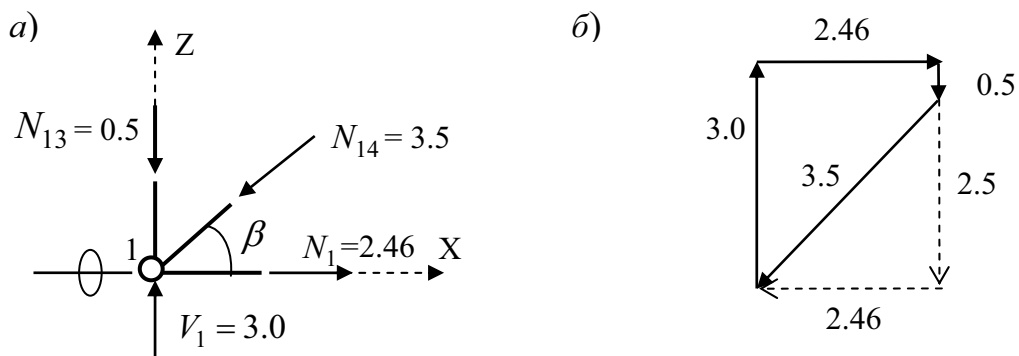


Рис. 9.6

При использовании аналитического способа уравнения при подстановке в них соответствующих проекций сил должны тождественно удовлетворяться, а при использовании графического способа построенный многоугольник действующих на узел сил должен быть замкнутым, так как при равновесии сил их равнодействующая должна быть равна нулю. Выполним оба способа проверки.

Аналитический способ

Должны тождественно удовлетворяться два уравнения (силы, кН):

$$\sum X_1 = -3.5 \cdot \cos \beta + 2.46 = 0;$$

$$\sum Z_1 = -0.5 - 3.5 \cdot \sin \beta + 3.0 = 0.$$

Значения $\cos \beta$ и $\sin \beta$ определим по

$$\operatorname{tg} \beta = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = (2.04 - 0) / (2.0 - 0) = 1.02.$$

Отсюда $\cos \beta = 0.7009$; $\sin \beta = 0.7133$ и оба уравнения равновесия с достаточной степенью точности превращаются в тождества.

Графический способ

Обходя узел (см. рис. 9.6, а) против часовой стрелки (начиная с вертикальной составляющей опорной реакции), последовательно будем откладывать встречающиеся векторы сил в удобном для расчета масштабе в том направлении, в котором они действуют на узел. Иными словами: будем

геометрически суммировать векторы сил (рис. 9.6, б). Многоугольник сил получился замкнутым, т.е. равнодействующая всех сил, действующих на узел, равна нулю и узел находится в равновесии.

Определение усилий N_3 , N_9 и N_{18} с помощью уравнений равновесия для части фермы, полученной в результате рассечения ее поперечным сечением (способ сечений)

Усилие N_3 . Для определения этого усилия более рациональным является использование не способа вырезания узлов, а способа рассечения фермы на две части. Последовательность этого расчета следующая:

1. Рассекаем ферму сечением 1-1 на две части и рассмотрим равновесие любой из них, например, левой (рис. 9.7). Неизвестные усилия в рассеченных стержнях обозначим как растягивающие.

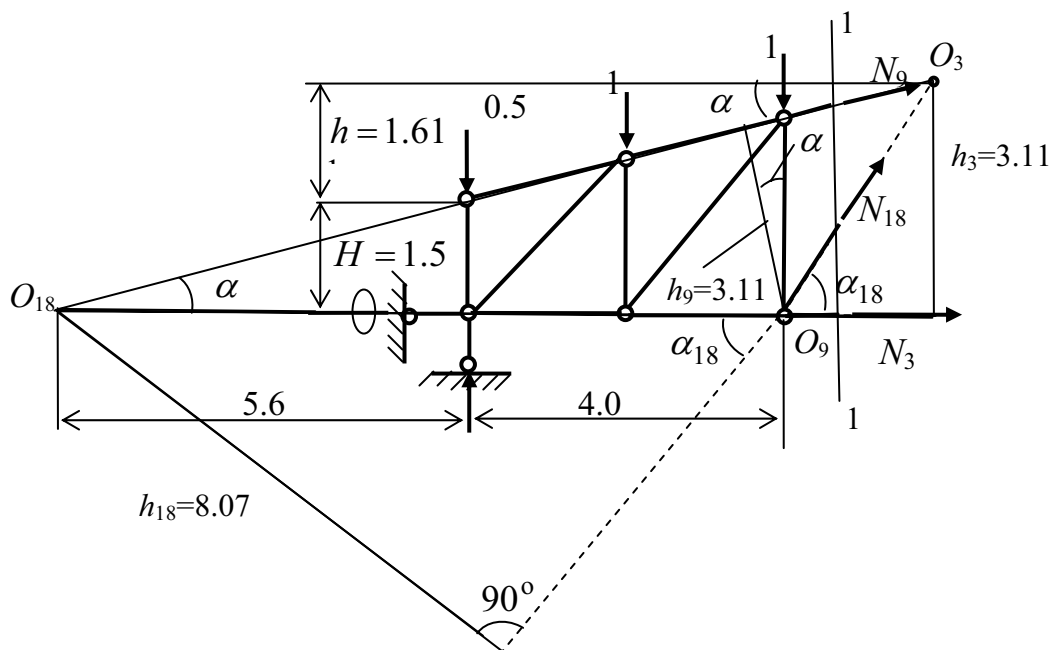


Рис. 9.7

2. Линии действия усилий N_9 и N_{18} пересечем в точке O_3 .

3. Применим для этой части фермы уравнение равновесия вида: $\sum M_{O_3}^{\text{лев}} = -3 \cdot 6 + 0.5 \cdot 6 + 1(4 + 2) + N_3 \cdot 3.11 = 0$. Это уравнение имеет только одно неизвестное N_3 . В соответствии с заданным углом наклона верхнего пояса фермы ($\alpha = 15^\circ$) получим $\text{tg} 15^\circ = 0.2679$ $h = 0.5L \cdot \text{tg} 15^\circ = 6 \cdot 0.2679 = 1.61$ м и $h_3 = H + h = 1.5 + 1.61 = 3.11$ м. Тогда получаем: $N_3 = 2.9$ кН.

Знак плюс показывает, что стержень 3 растянут. Такой же результат получился при расчете фермы МКЭ по программе SCAD.

Это расечение фермы применим и для определения усилия N_9 в стержне верхнего пояса и усилия N_{18} в раскосе. Для определения усилия N_9 уравнение равновесия составим относительно моментной точки O_9 :

$$\sum M_{O_9}^{\text{лев}} = -3 \cdot 4 + 0.5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 - N_9 \cdot h_9 = 0$$

Плечо $h_9 = y_{10} \cos 15^\circ = 2.57 \cdot 0.9659 = 2.48$ м. Тогда $N_9 = -3.23$ кН.

Для определения усилия $\sum Z_8 = 0$ уравнение равновесия составим относительно моментной точки O_{18} :

$$\sum M_{O_{18}}^{\text{лев}} = (3 - 0.5) \cdot 5.6 - 1(7.6 + 9.6) + N_{18} \cdot h_{18} = 0$$

Так как $(y_{11} - y_4)/(x_4 - x_3) = 3.11/2 = 1.555 = \operatorname{tg} \alpha_{18}$, то $\alpha_{18} = 57^\circ 15'$, $\sin \alpha_{18} = \sin 57^\circ 15' = 0.8410$, $h_{18} = (5.6 + 4) \cdot \sin \alpha_{18} = 9.6 \cdot 0.8410 = 8.07$ м. Тогда $N_{18} = 3.2/8.07 = 0.4$ кН.

Как видим, усилия $N_9 = -3.23$ кН и $N_{18} = 0.4$ кН практически точно совпадают с этими усилиями, определенными расчетом на ПК с использованием программы SCAD.

Аналогично, составляя необходимые уравнения равновесия, можно проверить и другие усилия в стержнях фермы.

Заключение

Выполненные проверки позволяют сделать вывод, что **расчет фермы по определению усилий в ее стержнях и в опорных связях выполнен правильно.**

Методическое указание учащимся по оформлению отчета по расчетной работе 4

Представленный здесь учебный материал по работе располагается на четырнадцати страницах. В отчете по работе учащимся рекомендуется добиться рационального его объема, излагая основную часть хода расчета и его результаты. Можно, например, опустить представление диалоговых окон программы SCAD, описание работы с таблицами результатов расчета.

Примерная схема оформления отчета по работе 4 приведена в пособии [4] и в УМК [21].

10. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР УСИЛИЙ M, Q, N В ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКЕ БЕЗ ЗАТЯЖКИ

Постановка задачи и анализ заданной расчетной схемы арки.

Рассмотрим пример выполнения расчетной работы 3 из сборника заданий (см. приложение 1 или [6]).

Предположим, что по шифру ABCD требуется выполнить расчет для трехшарнирной арки без затяжки (рис. 10.1, а).

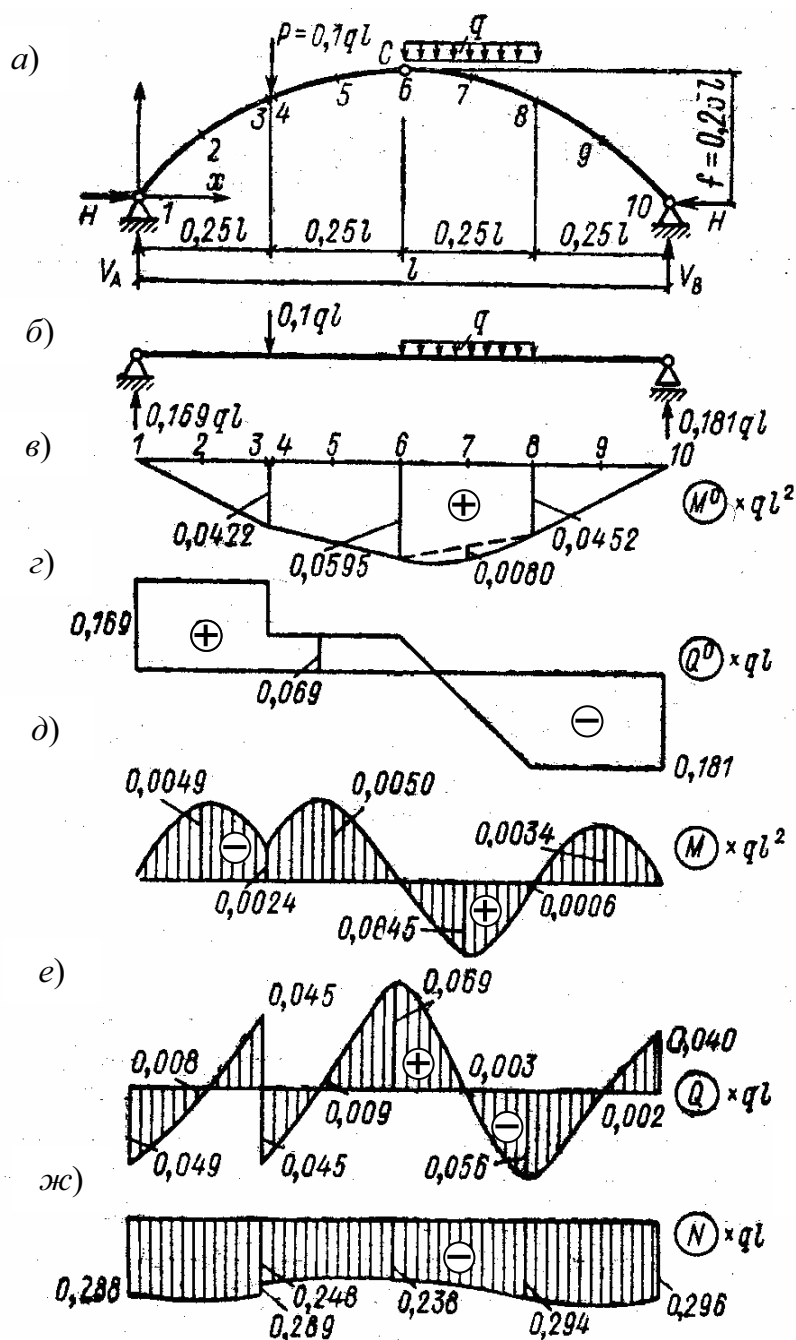


Рис. 10.1

При расчетах приняты следующие параметры размеров арки и нагрузок на нее: $l = 20$ м; $f = 5$ м; $P = 20$ кН; $q = 10$ кН/м.

В соответствии с заданием требуется *с помощью уравнений равновесия*, по методике, приведенной в подразделе 5.5 пособия:

10.1. Определить опорные реакции и построить эпюры усилий M, Q, N в арке с помощью программы ARKA [17], реализующей расчет трехшарпнирной арки с помощью уравнений равновесия.

10.2. Выполнить контроль построенных эпюр.

10.1. РАСЧЕТ АРКИ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ ARKA, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ РАСЧЕТ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Анализ арки для выяснения ее статической определимости

1. Подсчитываем степень статической неопределимости n арки. Для этого используем формулу (2.21):

$$n = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) - (3 + n_{\text{1ш}}).$$

В рассматриваемой арке без затяжки: $n_{\text{оп}} = 4$; $n_{\text{к}} = 0$; $n_{\text{1ш}} = 1$. Тогда $n = 0$. Выполняется необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости стержневой системы.

2. Исследуем геометрическую неизменяемость арки. Необходимое условие $n = 0$ показывает достаточность числа связей для того, чтобы образовать ГН систему. Однако необходимо еще проверить правильность размещения на схеме арки имеющихся связей. В данном случае из структурного анализа видно, что стержневая система правильно образована и представляет собой единый неподвижный диск (см. раздел 2 пособия).

Таким образом, можно сделать вывод, что *трехшарпнирная арка без затяжки* (рис. 10.1, а) является *статически определимой системой*.

Использование программы ARKA [17] для автоматизации расчетов с помощью уравнений равновесия

В подразделе 5.5 показано, что в трехшарпнирной арке без затяжки: вертикальные реакции определяются по формулам (5.3) и (5.4), распор арки – по формуле (5.6), усилия M, Q, N в сечениях арки – по формулам (5.7) – (5.9).

Для автоматизации вычислений по этим формулам воспользуемся программой ARKA [17], специально разработанной для выполнения расчета арок. Программу можно скопировать в учебных классах ПК кафедры СМ и ТУ и отделения Э и ПГС кафедры ГС и ПЭ, а также на сайте smitu@cef.spbstu.ru.

Расчет по этой программе выполнен дважды: для арки без затяжки (см.

рис. 10.1, а) и для соответствующей однопролетной балки (рис. 10.1, б).

Программа работает в диалоговом режиме, и дополнительные пояснения требуются только на этапе представления результатов расчета.

Представление результатов расчета по программе ARKA

В процессе решения задачи по указанной программе предусмотрена возможность составления протокола расчета, в котором приводятся введенные исходные данные, результаты расчета опорных реакций и таблица усилий в намеченных в программе сечениях арки и балки.

. Он приведен ниже как для арки, так и для соответствующей ей балки.

Методическое указание.

Если протокол не составлялся, то можно распечатать только результаты расчета в виде приведенной ниже таблицы. Для этого можно использовать разные варианты сохранения таблицы с результатами, появившейся на экране компьютера в процессе работы программы.

Один из них применен здесь: нажимаем кнопку «Print Screen» на клавиатуре ПК и, запустив программу графического редактора «Paint», вставляем изображение экрана. Затем обращаем цвета вставленного рисунка и, вырезав таблицу с результатами расчета и скопировав ее, вставляем в отчет:

Таблица 10.1

КООРДИНАТЫ		ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ	ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩЕЕ УСИЛИЕ	ПРОДОЛЬНОЕ УСИЛИЕ
X	Y			
0.00	0.00	+0.000e+00	-9.723e+00	-5.745e+01
1.67	1.53	-1.632e+01	-4.481e+00	-5.810e+01
3.33	2.78	-1.944e+01	+1.733e+00	-5.824e+01
4.98	3.74	-9.574e+00	+8.852e+00	-5.759e+01
5.02	3.76	-9.574e+00	-8.866e+00	-4.865e+01
6.67	4.44	-1.944e+01	-1.976e+00	-4.941e+01
8.33	4.86	-1.632e+01	+5.754e+00	-4.911e+01
10.00	5.00	+3.053e-15	+1.375e+01	-4.750e+01
11.67	4.86	+1.563e+01	+4.932e+00	-4.733e+01
13.33	4.44	+1.667e+01	-3.558e+00	-5.126e+01
15.00	3.75	+3.125e+00	-1.118e+01	-5.870e+01
16.67	2.78	-1.111e+01	-3.814e+00	-5.963e+01
18.33	1.53	-1.215e+01	+2.561e+00	-5.970e+01
20.00	0.00	+0.000e+00	+7.955e+00	-5.922e+01
Вертикальные реакции: в левой опоре $U_a=3.375e+01$, в правой опоре $U_b=3.625e+01$;				
Горизонтальный распор $H=4.750e+01$				

Далее по полученным ординатам усилий можно вручную построить эпюры усилий от горизонтальных осей, как это представлено на рис. 10.1, д, е, ж, или – от оси арки, как это показано ниже на рис. 10.2.

При расчете на ПК с операционной системой WINDOWS 95, 98, 2000 аналогичная процедура копирования изображения на экране выполняется и для копирования эпюр M, Q, N , которые в программе демонстрируются на экране.

Ниже приведен рис. 10.2, полученный на основе копирования трех рисунков соответственно с эпюрами M, Q, N .

*** ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В АРКЕ***
ПРОТОКОЛ РАСЧЕТА НА ЭВМ

Программа "Расчет арок" разработана для Вас кафедрой
Строительной механики и теории упругости СПбГТУ

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:

Конструкция: трехшарнирная арка параболического очертания без затяжки
Пролет: 20.000
Стрела арки: 5.000

Положение границ участков по нагрузке:

Участок 1: $0.000 < X < 5.000$
Участок 2: $5.000 < X < 10.000$
Участок 3: $10.000 < X < 15.000$
Участок 4: $15.000 < X < 20.000$

Сосредоточенные силы:

На границе участков 1 и 2 приложена сила 20.000
На границе участков 2 и 3 приложена сила 0.000
На границе участков 3 и 4 приложена сила 0.000

Распределенная нагрузка:

В пределах участка 1 приложена нагрузка 0.000
В пределах участка 2 приложена нагрузка 0.000
В пределах участка 3 приложена нагрузка 10.000
В пределах участка 4 приложена нагрузка 0.000

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

координаты X	Y	изгибающий момент	перерезывающее усилие	продольное усилие
0.00	0.00	+0.000e+00	-9.723e+00	-5.745e+01
1.67	1.53	-1.632e+01	-4.481e+00	-5.810e+01
3.33	2.78	-1.944e+01	+1.733e+00	-5.824e+01
4.98	3.74	-9.574e+00	+8.852e+00	-5.759e+01
5.02	3.76	-9.574e+00	-8.866e+00	-4.865e+01
6.67	4.44	-1.944e+01	-1.976e+00	-4.941e+01
8.33	4.86	-1.632e+01	+5.754e+00	-4.911e+01
10.00	5.00	+3.053e-15	+1.375e+01	-4.750e+01
11.67	4.86	+1.563e+01	+4.932e+00	-4.733e+01
13.33	4.44	+1.667e+01	-3.558e+00	-5.126e+01
15.00	3.75	+3.125e+00	-1.118e+01	-5.870e+01
16.67	2.78	-1.111e+01	-3.814e+00	-5.963e+01
18.33	1.53	-1.215e+01	+2.561e+00	-5.970e+01
20.00	0.00	+0.000e+00	+7.955e+00	-5.922e+01

Вертикальные реакции:

в левой опоре: 3.375e+01
в правой опоре: 3.625e+01
Горизонтальный распор: 4.750e+01

*** ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В АРКЕ***
ПРОТОКОЛ РАСЧЕТА НА ЭВМ

Программа "Расчет арок" разработана для Вас кафедрой
Строительной механики и теории упругости СПбГТУ

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:

Конструкция: балка на двух опорах
Пролет: 20.000
Положение границ участков по нагрузке:
Участок 1: $0.000 < X < 5.000$
Участок 2: $5.000 < X < 10.000$
Участок 3: $10.000 < X < 15.000$
Участок 4: $15.000 < X < 20.000$
Сосредоточенные силы:
На границе участков 1 и 2 приложена сила 20.000
На границе участков 2 и 3 приложена сила 0.000
На границе участков 3 и 4 приложена сила 0.000
Распределенная нагрузка:
В пределах участка 1 приложена нагрузка 0.000
В пределах участка 2 приложена нагрузка 0.000
В пределах участка 3 приложена нагрузка 10.000
В пределах участка 4 приложена нагрузка 0.000

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

координаты X	Y	изгибающий момент	перерезывающее усилие	продольное усилие
0.00	0.00	+0.000e+00	+3.375e+01	+0.000e+00
1.67	0.00	+5.625e+01	+3.375e+01	+0.000e+00
3.33	0.00	+1.125e+02	+3.375e+01	+0.000e+00
4.98	0.00	+1.681e+02	+3.375e+01	+0.000e+00
5.02	0.00	+1.690e+02	+1.375e+01	+0.000e+00
6.67	0.00	+1.917e+02	+1.375e+01	+0.000e+00
8.33	0.00	+2.146e+02	+1.375e+01	+0.000e+00
10.00	0.00	+2.375e+02	+1.375e+01	+0.000e+00
11.67	0.00	+2.465e+02	-2.917e+00	+0.000e+00
13.33	0.00	+2.278e+02	-1.958e+01	+0.000e+00
15.00	0.00	+1.812e+02	-3.625e+01	+0.000e+00
16.67	0.00	+1.208e+02	-3.625e+01	+0.000e+00
18.33	0.00	+6.042e+01	-3.625e+01	+0.000e+00
20.00	0.00	+0.000e+00	-3.625e+01	+0.000e+00

Вертикальные реакции:
в левой опоре: 3.375e+01
в правой опоре: 3.625e+01

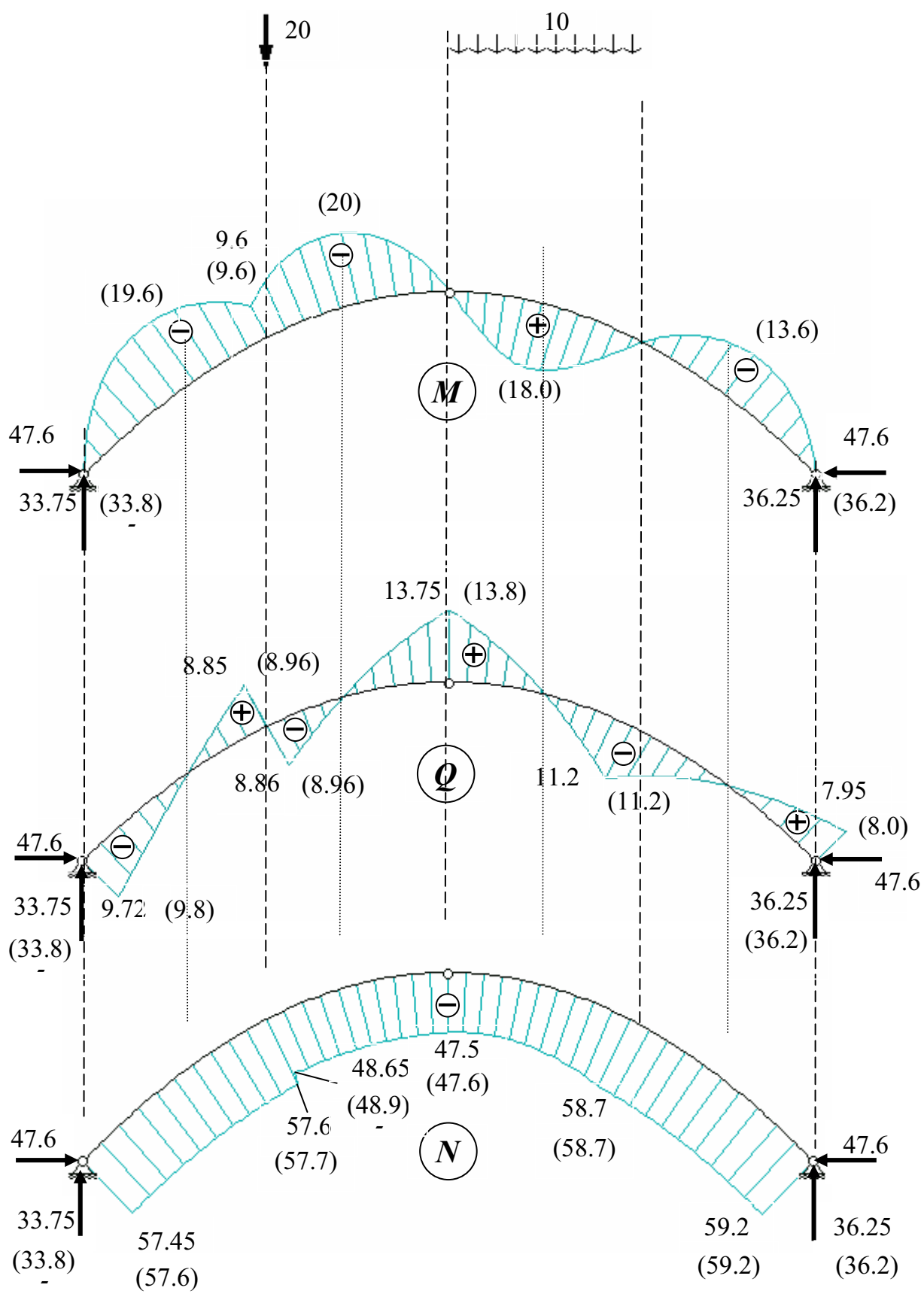


Рис. 10.2

10.2. КОНТРОЛЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Используем уравнения равновесия для определения опорных реакций трехшарнирной арки вручную

По формулам (5.3) и (5.4) подраздела 5.5 пособия находим:

1. Из уравнения $\sum M_B = 0$: $V_A = V_A^o = \sum M_B^P / l = 0.169 ql = 33.8$ кН.

2. Из уравнения $\sum Z = 0$: $V_B = V_B^o = \sum Z^P - V_A = 0.181 ql = 36.2$ кН.

Распор арки без затяжки определяется по формуле (5.6) подраздела 5.5:

3. Из уравнения $\sum X = 0$ устанавливаем, что $H_A = H_B = H$.

4. Из уравнения $M_C = \sum M_C^{\text{слева}} = \sum M_C^{\text{справа}} = 0$ получаем:

$$H = \frac{M_C^o}{f} = \frac{0.0595ql^2}{0.25l} = 0.238 ql = 47.6 \text{ кН.}$$

Сопоставление опорных реакций, полученных для арки и для балки вручную и на ПК по программе ARKA, показывает достаточно близкое совпадение соответствующих величин.

Используем уравнения равновесия для определения усилий M, Q, N вручную

Для выполнения контроля усилий M, Q, N , полученных в результате расчета по программе ARKA, выполним расчет по формулам (5.7)-(5.9) подраздела 5.5 пособия вручную.

Методическое указание. В рассматриваемом здесь примере вычисления усилий продемонстрированы для сечений 2 и 7 соответственно на левой и на правой половинах арки (см. рис. 10.1, а). Вычисления величин, входящих в указанные выше формулы, для выбранных сечений проведены в табличной форме (табл. 10.2).

Таблица 10.2

№ сеч к	x	$y (z)$	$tg \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	M_k^o	Q_k^o
2	$0.25l$	$0.1675l$	0.5	0.4472	0.8944	$0.0422ql^2$	$0.169ql$
7	$0.625l$	$0.234l$	-0.25	-0.2425	0.9701	$0.0603ql^2$	$-0.056ql$

Тогда по формулам (5.7) – (5.9) при $l = 20$ м; $f = 5$ м; $P = 20$ кН; $q = 10$ получим:

$$M_2 = M_2^o - H \cdot z_2 = (0.0422 - 0.238 \cdot 0.1875) ql^2 = 0.0024 ql^2 = 9.6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_2 = Q_2^o \cos \alpha_2 - H \sin \alpha_2 = (0.169 \cdot 0.8944 - 0.238 \cdot 0.4472) ql = 0.0448 ql = 8.96 \text{ кН};$$

$$N_2 = -(Q_2^o \sin \alpha_2 + H \cos \alpha_2) = -(0.169 \cdot 0.4472 + 0.238 \cdot 0.8944) ql = \\ = -0.2885 ql = 57.7 \text{ кН.}$$

$$M_7 = M_7^o - H \cdot z_7 = (0.0603 - 0.238 \cdot 0.234) ql^2 = 0.0045 ql^2 = 18.0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_7 = Q_7^o \cos \alpha_7 - H \sin \alpha_7 = (-0.056 \cdot 0.9701 - 0.238 \cdot (-0.2425)) ql = \\ = 0.0034 ql = 0.68 \text{ кН};$$

$$N_7 = -(Q_7^o \sin \alpha_7 + H \cos \alpha_7) = -(-0.056 \cdot (-0.2425) + 0.238 \cdot 0.9701) ql = \\ = -0.245 ql = -49.0 \text{ кН.}$$

Для контроля результатов расчетов усилий по программе ARKA и вручную на эпюрах усилий (см. рис. 10.2) приведены значения усилий, полученные расчетом по программе и расчетом вручную (в скобках). Видим, что результаты близко совпадают.

Примечание.

В данном пособии использованы результаты расчетов для большего числа сечений (см. рис. 10.1, *д, е, ж*), полученные в учебном пособии [7].

Контроль эпюр M и Q в связи с имеющейся зависимостью в виде уравнении равновесия $dM/ds = Q$ показывает их полное соответствие.

Сопоставление эпюр M в арке и балке

Это сопоставление показывает:

- изгибающие моменты в арке ($|M_{\max}| \approx 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$) значительно (для рассматриваемой арки примерно на порядок) меньше, чем в балке ($|M_{\max}| \approx 240 \text{ кН}\cdot\text{м}$).
- при заданной нагрузке арка сжата (довольно равномерно: $\approx$ от 48 кН до 59 кН), а в балке продольные силы отсутствуют.

Значительное уменьшение изгибающих моментов в арке по сравнению с соответствующей балкой (см. рис. 10.1) и наличие сжимающих усилий в сечениях арки приводит к более благоприятному распределению нормальных напряжений в сечениях арки по сравнению с балкой (см. рис. 5.8, *в, г*) в подразделе 5.5 пособия.

Выполненные проверки позволяют сделать вывод, что **расчет арки по определению усилий в ее сечениях и в опорных связях выполнен правильно.**

11. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР УСИЛИЙ M, Q, N В ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКЕ С ЗАТЯЖКОЙ

Постановка задачи и анализ заданной расчетной схемы арки.

Рассмотрим пример выполнения расчетной работы 3 из сборника заданий (см. приложение 1 или [6]), когда по шифру ABCD требуется выполнить расчет для трехшарнирной арки с затяжкой (рис. 11.1, а).

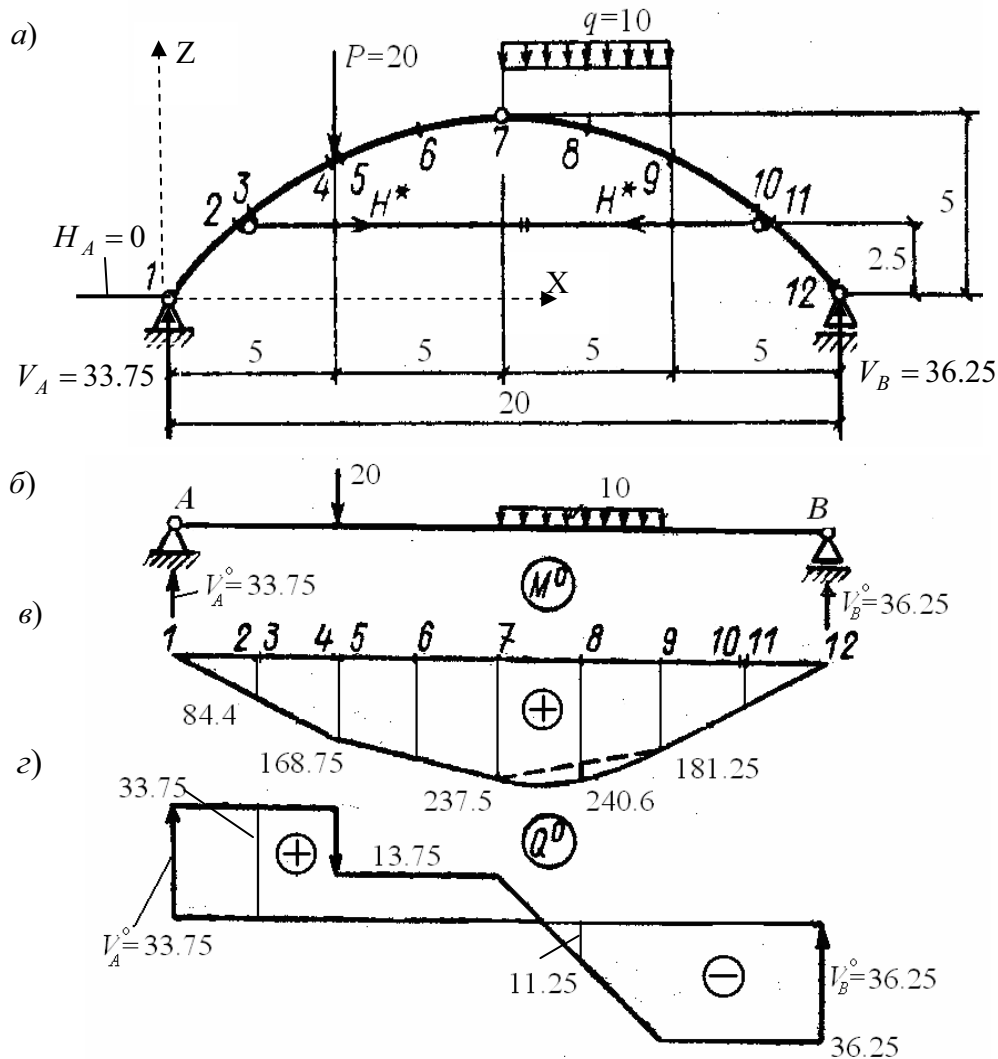


Рис. 11.1

При расчетах приняты следующие параметры размеров арки и нагрузок на нее: $l = 20$ м; $f = 0.25l = 5$ м; $a = 0.125l = 2.5$ м; $f^* = f - a = 2.5$ м; $q = 10$ кН/м; $P = 0.1ql = 20$ кН. Очертание арки задано круговым. Радиус круга, по которому очерчена арка, определяется по формуле (см. подраздел 5.5 пособия): $r = (l^2 / 8f) + 0.5f = [20^2 / (8 \cdot 5)] + 0.5 \cdot 5 = 12.5$ м.

В соответствии с заданием требуется *с помощью уравнений равновесия*, по методике, приведенной в подразделе 5.5 пособия:

11.1. Определить опорные реакции и построить эпюры усилий M, Q, N в арке с помощью программы ARKA [21], реализующей расчет трехшарпнирной арки с помощью уравнений равновесия.

11.2. Выполнить контроль построенных эпюр.

11.1. РАСЧЕТ АРКИ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ ARKA, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ РАСЧЕТ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Анализ арки для выяснения ее статической определимости

1. Подсчитываем степень статической неопределимости n арки. Для этого используем формулу (2.21):

$$n = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) - (3 + n_{\text{лш}}).$$

В рассматриваемой арке с затяжкой (см. рис. 11.1, а): $n_{\text{оп}} = 3$; $n_{\text{к}} = 1$; $n_{\text{лш}} = 3$. Тогда $n = 0$. Выполняется необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости стержневой системы.

2. Исследуем геометрическую неизменяемость арки. Необходимое условие $n = 0$ показывает *достаточность* числа связей для образования ГН системы. Однако необходимо еще проверить правильность размещения на схеме арки имеющихся связей. В данном случае из структурного анализа видно, что стержневая система правильно образована и представляет собой единый неподвижный диск (см. пример 10 в подразделе 2.5).

Таким образом, можно сделать вывод, что *трехшарпнирная арка с затяжкой* (рис. 11.1, а) является *статически определимой системой*.

Использование программы ARKA для автоматизации расчетов с помощью уравнений равновесия

В подразделе 5.5 пособия показано, что в трехшарпнирной арке с затяжкой: вертикальные реакции, как и для арки без затяжки, определяются по формулам (5.3) и (5.4). Распор арки в арке с затяжкой отсутствует. Вместо него по формуле (5.14) определяется усилие в затяжке. Усилия M, Q, N в сечениях арки ниже затяжки вычисляются по формулам (5.12), а выше нее – по формулам (5.15) – (5.17).

Для автоматизации вычислений по этим формулам воспользуемся программой ARKA [17] специально разработанной для выполнения расчета арок. Программу можно скопировать в учебном классе ПК кафедры СМ и ТУ и на сайте smitu@cef.spbstu.ru кафедры, а также в учебном классе ПК отделения Э и ПГС кафедры ГС и ПЭ.

Расчет по этой программе выполнен дважды: для арки с затяжкой и для соответствующей однопролетной балки (см. рис. 11.1). Программа работает в диалоговом режиме, и дополнительные пояснения требуются только на этапе представления результатов расчета.

Представление результатов расчета по программе ARKA

В процессе решения задачи по указанной программе могут быть составлены протоколы расчета (см. раздел 10).

Методическое указание.

Если протокол не составлялся, то можно в отчете по работе привести только таблицу 11.1 с результатами расчета, полученную с экрана компьютера способом, приведенным в разделе 10 в примере расчета арки без затяжки.

Таблица 11.1

КООРДИНАТЫ		ИЗГИБАЮЩИЙ	ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩЕЕ	ПРОДОЛЬНОЕ
X	Y	МОМЕНТ	УСИЛИЕ	УСИЛИЕ
0.00	-0.00	+8.882e-16	+2.025e+01	-2.700e+01
1.25	1.43	+4.219e+01	+2.410e+01	-2.362e+01
2.48	2.48	+8.370e+01	+2.696e+01	-2.030e+01
2.52	2.51	+8.363e+01	-2.981e+01	-9.631e+01
3.75	3.33	+4.816e+01	-1.827e+01	-9.915e+01
4.98	3.95	+3.054e+01	-7.243e+00	-1.006e+02
5.02	3.97	+2.984e+01	-2.524e+01	-9.261e+01
6.67	4.55	-2.833e+00	-1.208e+01	-9.523e+01
8.33	4.89	-1.231e+01	+9.606e-01	-9.599e+01
10.00	5.00	+3.053e-15	+1.375e+01	-9.500e+01
11.67	4.89	+1.963e+01	+9.776e+00	-9.454e+01
13.33	4.55	+3.328e+01	+6.459e+00	-9.678e+01
15.00	3.96	+4.289e+01	+4.776e+00	-1.016e+02
16.25	3.33	+5.753e+01	+1.611e+01	-1.004e+02
17.48	2.51	+8.993e+01	+2.780e+01	-9.781e+01
17.52	2.48	+8.990e+01	-2.896e+01	-2.181e+01
18.75	1.43	+4.531e+01	-2.589e+01	-2.537e+01
20.00	-0.00	+8.882e-16	-2.175e+01	-2.900e+01
Вертикальные реакции: в левой опоре $U_a=3.375e+01$, в правой опоре $U_b=3.625e+01$; Горизонтальный распор, воспринимаемый затяжкой, $H=9.500e+01$				

По полученным ординатам усилий можно вручную построить эпюры усилий от горизонтальных осей отсчета ординат, как это представлено ниже на рис. 11.2 (эпюры взяты из учебного пособия [7]), или – от оси арки, как это было показано на рис. 10.2 в отчете о выполнении расчета арки без затяжки (см. предыдущий отчет).

11.2. КОНТРОЛЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Используем уравнения равновесия для определения вручную реакций в опорных связях и усилия в затяжке арки

Вертикальные реакции опор в трехшарнирной арке с затяжкой

Вертикальные реакции трехшарнирной арки равны вертикальным реакциям балки (см. подраздел 5.5 пособия):

1. Из уравнения $\sum M_B = 0$ находим: $V_A = V_A^o = \sum M_B^P / l = 33.75$ кН.

2. Из уравнения $\sum Z = 0$ получаем: $V_B = V_B^o = \sum Z^P - V_A = 36.25$ кН.

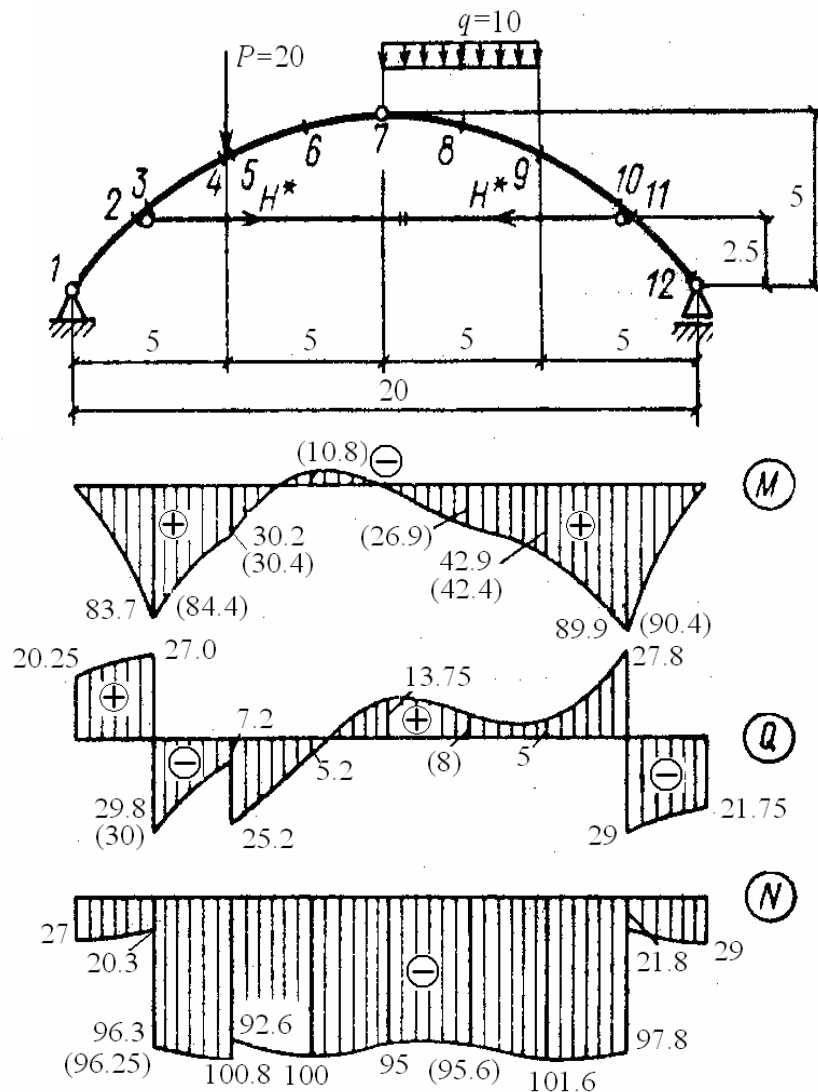


Рис. 11.2

Горизонтальная опорная реакция трехшарнирной арки с затяжкой будет только в неподвижной шарнирной опоре А (см. рис. 11.1, а).

3. Она определяется из уравнения $\sum X = 0$. При заданной вертикальной нагрузке на арку эта реакция будет иметь нулевое значение ($H_A = 0$).

4. Проведя сечение арки через шарнир С и затяжку, из уравнения $M_C = \sum M_C^{\text{слева}} = \sum M_C^{\text{справа}} = 0$ найдем усилие H^* , которое воспринимается затяжкой:

$$H^* = \frac{M_C^o}{f^*} = \frac{237.5}{2.5} = 95.0 \text{ кН.}$$

Обратим внимание, что если бы затяжка была расположена на уровне опор (величина a было бы равна нулю, см. рис. 11.1, а), то получили бы $f = f^* = 5$ м и $H^* = H = 47.5$ кН. Усилие, воспринимаемое затяжкой, стало бы

равно распору арки без затяжки (см. предыдущий отчет о выполнении задания 3-а для арки без затяжки).

Сопоставление опорных реакций, полученных для арки вручную и на ПК по программе ARKA, показывает совпадение соответствующих величин.

Используем уравнения равновесия для определения вручную усилий M, Q, N

Для выполнения контроля усилий M, Q, N , полученных в результате расчета по программе ARKA, выполним расчет по формулам (5.15)-(5.17) подраздела 5.5 вручную только для сечений 3 и 8 соответственно левой и на правой половине арки (см. рис. 11.1, a и рис. 11.2). Вычисления величин, входящих в указанные выше формулы, для выбранных сечений проведены в табличной форме (табл. 11.2).

Таблица 11.2

к	x , м	z , м	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	M_k^o кН·м	Q_k^o кН	M_k кН·м	Q_k кН	N_k кН
3	2.5	2.5	0.6	0.8	84.4	33.75	84.4	-30	-96.25
8	12.5	4.75	-0.2	0.9798	240.6	-11.25	26.9	8	-95.6

Сечение 3. Значение ординаты y_3 для сечения 3 известно: $z_3 = a = 2.5$ м.

Из выражения $z_3 = f - r(1 - \cos \alpha_3)$ (см. формулы (5.11)) получим:

$$\cos \alpha_3 = 0.8 \text{ и } \sin \alpha_3 = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_3} = 0.6.$$

Затем из выражения $\sin \alpha_3 = (0.5l - x)/r = (0.5 \cdot 20 - x)/12.5 = 0.6$ находим

$$x_3 = 0.5l - r \sin \alpha_3 = 0.5 \cdot 20 - 0.6 \cdot 12.5 = 2.5 \text{ м}$$

Для использования формулы (5.15) находим $z^* = z_3 - a = 2.5 - 2.5 = 0$.

Тогда по формулам (5.15) – (5.17) получим:

$$M_3 = M_3^o - H \cdot z_3^* = 33.75 \cdot 2.5 = 84.4 \text{ кН·м};$$

$$Q_3 = Q_3^o \cos \alpha_3 - H \cdot \sin \alpha_3 = 33.75 \cdot 0.8 - 95 \cdot 0.6 = -30 \text{ кН};$$

$$N_3 = -(Q_3^o \sin \alpha_3 + H \cos \alpha_3) = -(33.75 \cdot 0.6 + 95 \cdot 0.8) = -96.25 \text{ кН}.$$

Сечение 8. В этом сечении известна абсцисса $x_8 = 12.5$ м. Тогда из (5.11) находим:

$$\sin \alpha_8 = (0.5l - x_8)/r = (0.5 \cdot 20 - 12.5)/12.5 = -0.2;$$

$$\cos \alpha_8 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_8} = 0.9798;$$

$$z_8 = f - r(1 - \cos \alpha_8) = 5 - 12.5(1 - 0.9798) = 4.75 \text{ м}.$$

По формулам (5.15) – (5.17) определяем усилия в сечении 8 арки ($z^* = z_8 - a = 4.75 - 2.5 = 2.25$ м):

$$M_8 = M_8^o - H^* \cdot z_8^* = 240.6 - 95 \cdot 2.25 = 26.9 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_8 = Q_8^o \cos \alpha_8 - H^* \sin \alpha_8 = (-11.25 \cdot 0.9798 - 95 \cdot (-0.2)) = 8 \text{ кН};$$

$$N_8 = -(Q_8^o \sin \alpha_8 + H^* \cos \alpha_8) = -(-0.056 \cdot (-0.2) + 0.476 \cdot 0.9798) ql = -0.478 ql = -95.6 \text{ кН}.$$

Для контроля результатов расчетов усилий по программе ARKA на эпюрах усилий (см. рис. 11.2) в сечениях 3 и 8 приведены значения усилий, полученные расчетом по программе и расчетом вручную (в скобках). Видим, что результаты близко совпадают.

Контроль эпюр M и Q в связи с имеющейся зависимостью в виде уравнении равновесия $dM/ds = Q$ показывает их полное соответствие.

Сопоставление эпюр M в арке и балке

Это сопоставление показывает:

- изгибающие моменты в арке ($M_{\max} \approx 90 \text{ кН}\cdot\text{м}$) значительно (для рассматриваемой арки примерно в три раза) меньше, чем в балке ($M_{\max} \approx 240 \text{ кН}\cdot\text{м}$).
- при заданной нагрузке арка сжата (довольно равномерно: $\approx$ от 93 кН до 102 кН), а в балке продольные силы отсутствуют.

Значительное уменьшение изгибающих моментов в арке по сравнению с соответствующей балкой (см. рис. 11.1) и наличие сжимающих усилий в сечениях арки приводит к более благоприятному распределению нормальных напряжений в сечениях арки по сравнению с балкой (см. рис. 5.8, в, г).

Заключение

Выполненные проверки позволяют сделать вывод, что расчет арки по определению усилий в ее сечениях и в опорных связях выполнен правильно.

12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

12.1. Введение

При решении задачи определения НДС плоской стержневой системы от статически приложенной внешней нагрузки для каждого сечения имеем 9 неизвестных величин (см. рис. 1.5):

M, Q, N – внутренние усилия в сечении;

$\kappa, \gamma, \varepsilon$ – соответствующие деформации в сечении;

u, w, θ – перемещения сечения.

До сих пор при решении задачи об определении НДС стержневых систем ставилась только часть этой задачи, а именно: задача определения внутренних усилий M, Q, N в сечениях статически определимых стержневых систем.

После определения указанных усилий можно из уравнений, отражающих закон Гука (1.5), определить соответствующие величины, отражающие деформации изгиба κ , поперечные деформации (деформации сдвига) γ и продольные деформации ε .

Три перемещения сечения можно определить затем интегрированием дифференциальных уравнений (1.4) при заданных граничных условиях.

В курсе сопротивления материалов такой способ определения перемещений был проиллюстрирован на примерах рассмотрения НДС прямых стержней при продольных и изгибных деформациях.

Кроме того, в курсе сопротивления материалов рассматривался также метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации стержневой системы. Он был реализован в виде формулы Кастильяно, из которой затем для определения перемещений сечений стержней получается формула Максвелла – Мора.

В строительной механике для определения перемещений сечений стержневых систем обычно используется формула Максвелла – Мора. Вопрос о ее получения базируется на законе сохранения энергии при деформации линейно деформированной стержневой системы, реализуемого в форме принципа (начала) возможных перемещений (ПВП).

Здесь вопрос о получении этой формулы рассмотрен в сокращенной форме. Более подробно с ним можно познакомиться в учебниках по строительной механике, например, [7, 8, 10, 11].

12.2. Формула Максвелла-Мора для определения действительных перемещений линейно деформируемых стержневых систем

Действительные перемещения и деформации

Рассмотрим некоторое *грузовое состояние* линейно деформируемой стержневой системы в виде рамы (рис. 12.1, а).

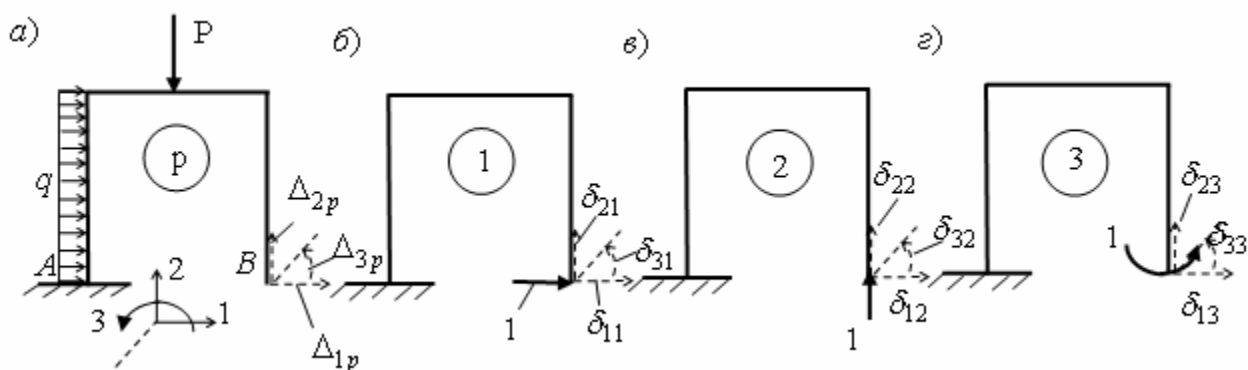


Рис. 12.1

Под действием приложенной внешней статической нагрузки в любом сечении стержневой системы возникают внутренние усилия M_p, Q_p, N_p , деформации $\kappa_p, \gamma_p, \varepsilon_p$ и перемещения u_p, w_p, θ_p . Индекс p у обозначений величин усилий, деформаций и перемещений показывает их принадлежность грузовому состоянию. Само грузовое состояние на рис. 12.1, а также отмечено как состояние « p ».

Все указанные величины в раме являются *действительными* или *истинными*.

Заданная рама статически определима, поэтому *действительные* усилия M_p, Q_p, N_p в любых ее сечениях от заданной нагрузки легко определяются. По формулам (1.5) закона Гука легко определяются и соответствующие *действительные* деформации:

$$\kappa_p = \frac{M_p}{EI}; \quad \gamma_p = \mu \frac{Q_p}{GS}; \quad \varepsilon_p = \frac{N_p}{ES}. \quad (12.1)$$

Рассмотрим методику определения *действительных* перемещений любого сечения рассматриваемого грузового состояния рамы сначала на примере определения горизонтального перемещения Δ_{1p} сечения B рамы (см. рис. 12.1, а).

Возможные перемещения и деформации

Изобразим некоторое *вспомогательное состояние* 1 рассматриваемой рамы (рис. 12.1, б), в котором внешней нагрузкой будем полагать единичную силу, действующую в сечении B в направлении искомого перемещения Δ_{1p} в *грузовом состоянии* рамы. От этой единичной силы в сечениях стержней рамы возникнут внутренние усилия M_1, Q_1, N_1 .

Введем для вспомогательного состояния рамы понятия «возможные перемещения» и соответствующие им «возможные деформации». Под ними будем понимать *любые малые* перемещения u^*, w^*, θ^* и соответствующие им *малые* деформации

$$\kappa^* = \frac{d\theta^*}{dx}; \quad \gamma^* = \theta^* - \frac{dw^*}{dx}; \quad \varepsilon^* = \frac{du^*}{dx}, \quad (12.2)$$

допускаемые наложенными на раму связями.

Например, такими возможными перемещениями и деформациями во вспомогательном состоянии рамы можно считать действительные упругие перемещения и деформации рамы, вызванные заданными в грузовом состоянии рамы нагрузками (см. рис. 12.1, а).

Предположим, что во вспомогательном состоянии рамы заданы возможные перемещения u^*, w^*, θ^* и возможные деформации (12.2) соответственно равные действительным перемещениям u_p, w_p, θ_p и действительным деформациям в грузовом состоянии, т.е. заданы возможные перемещения и деформации в виде:

$$u^* = u_p; \quad w^* = w_p; \quad \theta^* = \theta_p; \quad (12.3)$$

$$\kappa^* = \kappa_p; \quad \gamma^* = \gamma_p; \quad \varepsilon^* = \varepsilon_p. \quad (12.4)$$

Принцип возможных перемещений для линейно деформируемой стержневой системы

Для линейно деформируемой стержневой системы в соответствии с законом сохранения энергии можно записать так называемый «Принцип (Начало) возможных перемещений» (ПВП или НВП) в следующей формулировке.

Для линейно деформируемой стержневой системы, находящейся в равновесии, сумма работы A , совершаемой приложенными к системе внешними силами на соответствующих этим силам возможных перемещениях, и работы B , совершаемой внутренними усилиями системы на соответствующих возможных деформациях, равна нулю:

$$A + B = 0. \quad (12.5)$$

Применив ПВП к бесконечно малому элементу длиной dx (см. рис. 1.5), и используя уравнения (1.3) – (1.5), после пренебрежения слагаемыми второго порядка малости (см. [7, 10]), получим выражение для работы A_{dx} внешних сил, к которым относятся и нагрузки по длине элемента (см. рис. 1.5,а) и внутренние усилия по его концам (см. рис. 1.5, б), в виде

$$A_{dx} = (M \cdot \kappa^* + Q \cdot \gamma^* + N \cdot \varepsilon^*) dx. \quad (12.6)$$

Для всей стержневой системы, после интегрирования по длине L всех стержней, получим:

$$A = \int_L (M \cdot \kappa^* + Q \cdot \gamma^* + N \cdot \varepsilon^*) dx = \int_L M \cdot \kappa^* dx + \int_L Q \cdot \gamma^* dx + \int_L N \cdot \varepsilon^* dx. \quad (12.7)$$

Здесь: A – работа внешних сил, приложенных к стержневой системе, на соответствующих им возможных перемещениях; M, Q, N – внутренние усилия в стержневой системе, для которой применен ПВП; $\kappa^*, \gamma^*, \varepsilon^*$ – возможные деформации, соответствующие возможным перемещениям (12.2).

Формула Максвелла – Мора для определения перемещений

Уравнение (12.7) отражает принцип возможных перемещений применительно к любой линейно деформируемой системе. Значит оно применимо и к раме во вспомогательном состоянии I (см. рис. 12.1, б).

Тогда в формуле (12.7) $M = M_1$; $Q = Q_1$; $N = N_1$. При этом за возможные перемещения и деформации рамы можно принять соответственно действительные перемещения и деформации рамы в грузовом состоянии, т.е. использовать при записи уравнения (12.7) равенства (12.3), (12.4), а также равенство $A = A_{1p} = 1 \cdot \Delta_{1p} + \sum_m R_{m1} \cdot c_{mp}$.

В этом равенстве слагаемое в виде суммы отражает работу всех m составляющих R_{m1} реакций во вспомогательном состоянии I на соответствующих им перемещениях c_{mp} в грузовом состоянии p . Тогда получим формулу (12.7) в виде:

$$1 \cdot \Delta_{1p} = \int_L M_1 \cdot \kappa_p dx + \int_L Q_1 \cdot \gamma_p dx + \int_L N_1 \cdot \varepsilon_p dx - \sum_m R_{m1} \cdot c_{mp}. \quad (12.8)$$

Формула (12.8) представляет собой формулу Максвелла – Мора для определения перемещения Δ_{1p} в грузовом состоянии рамы (см. рис. 12.1).

Поскольку в грузовом состоянии рамы деформации связаны с внутренними усилиями формулами закона Гука (12.1), то формула Максвелла – Мора может быть записана и в следующем виде:

$$1 \cdot \Delta_{1p} = \int_L \frac{M_1 M_p}{EI} dx + \mu \int_L \frac{Q_1 Q_p}{GI} dx + \int_L \frac{N_1 N_p}{EA} dx - \sum_m R_{m1} \cdot c_{mp}. \quad (12.9)$$

Соответствие единичной силы во вспомогательном состоянии стержневой системы искомому перемещению в ее грузовом состоянии

Из формулы Максвелла – Мора в виде (12.8) или (12.9) видно, что в левой ее части отражается работа единичной внешней силы, приложенной во вспомогательном состоянии, на соответствующем этой силе действительных перемещениях в грузовом состоянии.

Если во вспомогательном состоянии стержневой системы (в данном случае рамы) всегда прикладывать единичную силу, *соответствующую искомому перемещению*, то левая часть формулы всегда будет иметь такой же вид, как и в формулах (12.8) и (12.9). Сумма работ остальных внешних сил вспомогательного состояния, представляющих опорные реакции, вызванные единичной силой, перенесена с обратным знаком в правую часть формулы Максвелла – Мора.

Следовательно, выражения (12.8) и (12.9) формулы Максвелла – Мора является общими и для определения других перемещений сечений стержней. Необходимо только во вспомогательном состоянии стержневой системы приложить единичную силу, соответствующую искомому перемещению в грузовом состоянии.

На рис. 12.1, *в* и рис. 12.1, *г* изображены соответственно вспомогательные состояния 2 и 3 рассматриваемой рамы для определения вертикального перемещения Δ_{2p} и угла поворота Δ_{3p} сечения *В* рамы в состоянии *p* рамы.

Все перемещения сечений рамы будем относить к некоторой общей системе координат, изображенной на рис. 12.1, *а*. Горизонтальную и вертикальную ось отметим цифрами 1 и 2, а угол поворота сечений стержней будем отмечать цифрой 3 как поворот относительно оси (штриховая линия на рис. 12.1, *а*), перпендикулярной плоскости, в которой лежат оси 1 и 2..

Очевидно, что для определения всех трех искомым действительных перемещений Δ_{1p} , Δ_{2p} , Δ_{3p} в грузовом состоянии рамы можно использовать одну общую формулы Максвеллу – Мора в виде:

$$1 \cdot \Delta_{ip} = \int_L \frac{M_i M_p}{EI} dx + \mu \int_L \frac{Q_i Q_p}{GI} dx + \int_L \frac{N_i N_p}{EA} dx - \sum_m R_{mi} \cdot c_{mp}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.10)$$

В грузовом состоянии, изображенном на (рис. 12.1, *а*), действует только заданная внешняя нагрузка. Составляющие c_{mp} перемещений опор в грузовом состоянии, соответствующие составляющим R_{m1} реакций отсутствуют.

Поэтому последнее слагаемое в формуле (12.10) при отсутствии заданных перемещений опор стержневой системы в ее грузовом состоянии равно нулю.

12.3. Упрощение формулы Максвелла – Мора для конкретного вида стержневых систем

Формула Максвелла – Мора содержит три интеграла, отражающих соответственно влияние на искомое перемещение изгибных, сдвиговых и продольных деформаций стержней в ее грузовом состоянии, где и определяется перемещение.

Чаще всего в стержневых системах используются тонкие стержни, у которых мало отношение h/l , где h – высота балки, а l ее длина. В таких стержневых системах влияние работы поперечных сил вспомогательного состояния на соответствующих сдвиговых деформациях грузового состояния на искомые перемещения оказывается незначительным, поэтому вторым интегралом в формуле (12.10) обычно пренебрегают.

Кроме того, например, при поперечной нагрузке на балку в грузовом состоянии, продольные силы в балке, а значит и продольные деформации (12.1) равны нулю. Значит при изгибе балок от поперечных нагрузок в формуле (12.10) третий интеграл равен нулю и прогибы балок и углы поворота их сечений определяются только с помощью первого интеграла.

В фермах, при действии на них статической узловой нагрузки, в стержнях возникают только продольные силы. Поэтому в формуле (12.10) остается только третий интеграл. Так как для каждого стержня продольное усилие и жесткость стержня постоянны по его длине, то для ферм третий интеграл заменяется суммой:

$$1 \cdot \Delta_{ip} = \int_L \frac{N_i N_p}{EA} dx = \sum_k \frac{N_{ki} N_{kp}}{(EA)_k} l_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n_c. \quad (12.11)$$

Здесь i – номер искомого перемещения и номер соответствующего вспомогательного состояния, k – номер стержня, n_c – число стержней в ферме.

12.4. Способы вычисления интегралов в формуле Максвелла – Мора

В строительной механике стержневых систем для вычисления интегралов, входящих в формулу Максвелла – Мора (12.10), используют следующие три способа:

1. Аналитический способ.
2. Графо-аналитический способ (способ А.Н. Верещагина).
3. Численный способ Симпсона.

Рассмотрим их на примере вычисления первого интеграла формулы.

Прежде всего, заменим интеграл по длине L всех стержней суммой интегралов для отдельных участков интегрирования.

Участком интегрирования длиной l_r будем считать часть стержня, на котором эпюры внутренних усилий, входящих под интеграл, не имеют скачков и резкого изменения (в виде углов излома) ординат и жесткости.

Так как скачки ординат и изломы в эпюрах изгибающих моментов происходят соответственно в месте приложения к стержню внешних сосредоточенных моментов и поперечных к оси стержней сил, то границами участков интегрирования для первого интеграла будем считать: опоры стержней; узлы соединения стержней; места приложения сосредоточенных моментов и поперечных к оси стержня сосредоточенных сил; места изменения изгибной жесткости стержней.

Таким образом, первый интеграл в (12.10) можно представить в виде:

$$1 \cdot \Delta_{ip} = \int_L \frac{M_i M_p}{EI} dx = \sum_{r=1}^{r=n_y} \int_{l_r} \frac{M_{ri} M_{rp}}{(EI)_r} dx, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.11)$$

где r – номер участка интегрирования, а n_y – их число.

Теперь перейдем к рассмотрению способов вычисления интегралов Максвелла – Мора, рассмотрев интеграл только на одном участке интегрирования.

Чаще всего жесткость стержня на изгиб на одном участке интегрирования постоянна, поэтому представим интеграл на одном участке в виде:

$$\int_{l_r} \frac{M_{ri} M_{rp}}{(EI)_r} dx = \frac{1}{(EI)_r} \int_{l_r} M_{ri} M_{rp} dx. \quad (12.12)$$

Напомним, что i – номер искомого перемещения и соответствующего ему вспомогательного состояния (см., например, рис. 6.1).

Для вычисления интеграла (12.12) аналитическим способом под знак интеграла должны быть подставлены функции $M_{ri} = M_{ri}(x)$, $M_{rp} = M_{rp}(x)$, а затем произведено аналитическое интегрирование.

Графо-аналитический способ был предложен А.Н. Верещагиным для вариантов, когда $M_{ri} = M_{ri}(x)$ является линейной функцией, а функции $M_{rp} = M_{rp}(x)$ на участке интегрирования соответствует график, для которого просто вычисляется площадь ω_{rp} и ее центр тяжести C (рис. 12.2).

Тогда интеграл (12.12) на участке интегрирования r вычисляется по формуле (12.13) [7, 10]:

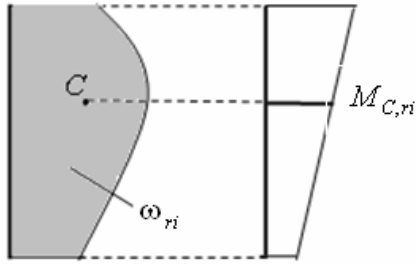


Рис. 12.2

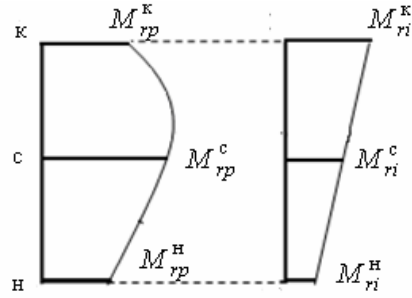


Рис. 12.3

$$\frac{1}{(EI)_r} \int_{l_r} M_{ri} M_{rp} dx = \frac{\omega_{rp} \cdot M_{C,ri}}{(EI)_r}. \quad (12.13)$$

При вычислении интеграла (12.12) с использованием формулы численного интегрирования Симпсона необходимо на эпюрах $M_{rp} = M_{rp}(x)$ и $M_{ri} = M_{ri}(x)$ в грузовом и вспомогательном состояниях иметь значения ординат в начале (н), середине (с) и конце (к) участка интегрирования и его длину l_r . Тогда

$$\frac{1}{(EI)_r} \int_{l_r} M_{ri} M_{rp} dx = \frac{l_r}{6(EI)_r} [M_{ri}^H M_{rp}^H + 4M_{ri}^C M_{rp}^C + M_{ri}^K M_{rp}^K]. \quad (12.14)$$

Как известно, в общем виде формула численного интегрирования является приближенной. Но для участков интегрирования с линейной эпюрой $M_{rp} = M_{rp}(x)$ и эпюрой $M_{ri} = M_{ri}(x)$ в виде линейной функции или квадратичной параболы интеграл Максвелла – Мора вычисляется по формуле Симпсона точно.

12.5. Матричный вид вычислений интеграла Максвелла – Мора по формуле Симпсона

Вычисления интеграла для одного участка интегрирования

Формулу Симпсона (12.14) для дальнейшего использования удобно представить в матричном виде. С этой целью из ординат эпюр изгибающих моментов в начале, середине и конце участка интегрирования с номером r во вспомогательном состоянии с номером i и грузовом состоянии p составим следующие матрицы:

$$\mathbf{m}_{ri} = \begin{bmatrix} M_{ri}^H \\ M_{ri}^C \\ M_{ri}^K \end{bmatrix}; \quad \mathbf{m}_{rp} = \begin{bmatrix} M_{rp}^H \\ M_{rp}^C \\ M_{rp}^K \end{bmatrix}. \quad (12.15)$$

Тогда вычисления интеграла по формуле Симпсона (12.14) можно представить в следующей матричной записи:

$$\frac{1}{(EI)_r l_r} \int M_{ri} M_{rp} dx = (\mathbf{m}_{ri})^T \cdot \mathbf{L}_r \cdot \mathbf{m}_{rp}, \quad (12.16)$$

где $(\mathbf{m}_{ri})^T$ – транспонированная матрица $\mathbf{m}_{ri}$, т.е. – матрица строка; $\mathbf{L}_r$ – диагональная матрица коэффициентов формулы Симпсона на участке интегрирования с номером r :

$$\cdot \mathbf{L}_r = \frac{l_r}{6(EI)_r} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.17)$$

Вычисления интеграла на всех участках интегрирования формулы Максвелла – Мора

Если применить формулу Симпсона для всех участков интегрирования в формуле Максвелла – Мора (12.11), то вычисления интеграла можно представить в следующем виде:

$$1 \cdot \Delta_{ip} = \int_L \frac{M_i M_p}{EI} dx = \sum_{r=1}^{r=n_y} \int_{l_r} \frac{M_{ri} M_{rp}}{(EI)_r} dx = (\mathbf{m}_i)^T \mathbf{L} \mathbf{m}_p. \quad (12.18)$$

Здесь $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{m}_p$ – матрицы столбцы ординат эпюр изгибающих моментов в начале (н), середине (с) и конце (к) всех участков интегрирования соответственно во вспомогательном состоянии i и грузовом состоянии p ; $\mathbf{L}$ – соответствующая предыдущим матрицам блочно-диагональная матрица коэффициентов формулы Симпсона для всех участков интегрирования. Более подробно со структурой указанных матриц можно ознакомиться в учебных пособиях [7, 8, 10, 11].

Вычисление сразу нескольких перемещений в грузовом состоянии

Матричная форма записи вычислений по формуле Симпсона в предыдущем случае позволяет компактно записать вычисления в случае, когда требуется подсчитать в грузовом состоянии сразу несколько перемещений.

Например, для получения трех перемещений сечения B рамы (см. рис. 12.1), можем записать формулу (12.19) с учетом (12.20):

$$\mathbf{d}_p = (\mathbf{M})^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_p; \quad (12.19)$$

$$\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix}. \quad (12.20)$$

Здесь $\mathbf{d}_p$ представляет собой вектор искомых перемещений.

Матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{m}_p$ при одинаковом числе участков интегрирования имеют такой же вид, как и в предыдущей формуле (12.18); матрица $\mathbf{M}$ соответствует матрицам $\mathbf{L}$ и $\mathbf{m}_p$ и состоит из трех столбцов $\mathbf{m}_i$ ($i = 1, 2, 3$), каждый из которых представляет собой вектор с ординатами эпюры M_i на всех участках интегрирования в начале, середине и конце каждого участка.

С примерами расчетов в матричной форме можно познакомиться в учебных пособиях [7, 8, 10, 11].

12.6. Понятие о матрице податливости стержневой системы. Матричная форма ее вычисления при использовании формулы Симпсона

До сих пор в рассматриваемой раме (см. рис. 12.1) ставилась задача определения перемещений только в грузовом состоянии (см. рис. 12.1, а) от какой-то заданной в этом состоянии нагрузки. Для того чтобы определить три перемещения в сечении В были составлены три вспомогательных состояния (см. рис. 12.1, б, в, г).

Предположим, что в этой же системе поставлена задача определения вектора (12.20) тех же трех перемещений, но от группы сосредоточенных усилий P_1, P_2, P_3 (рис. 12.4, а), действующих в направлении искомых перемещений и образующих вектор

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}, \quad (12.21)$$

где P_3 представляет собой сосредоточенный момент.

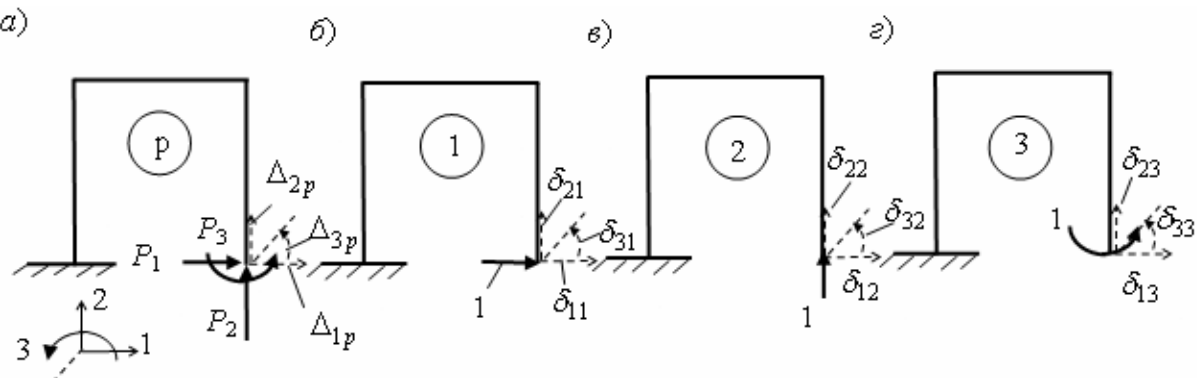


Рис. 12.4

Так как требуется определить такие же перемещения, как и в задаче, изображенной на рис. 12.1, *а*, то вспомогательные состояния для использования формулы Максвелла – Мора (12.10) останутся такими же (см. рис. 12.1, *б*, *в*, *г* и рис. 12.4, *б*, *в*, *г*).

Если во вспомогательных состояниях от действия единичных сил определять перемещения δ_{ik} по тем же направлениям, что и в грузовом состоянии, то, используя закон Гука и принцип независимости действия сил, можно записать уравнения:

$$\begin{aligned}\Delta_{1p} &= \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \delta_{13}P_3; \\ \Delta_{2p} &= \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + \delta_{23}P_3; \\ \Delta_{3p} &= \delta_{31}P_1 + \delta_{32}P_2 + \delta_{33}P_3.\end{aligned}\quad (12.22)$$

В матричной записи эти уравнения можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}, \quad (12.23)$$

или при компактной записи матриц – столбцов (12.20) и (12.21) – в виде:

$$\mathbf{d}_p = \mathbf{D} \cdot \mathbf{p}, \quad (12.24)$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \quad (12.25)$$

представляет собой матрицу влияния сил, образующих вектор $\mathbf{p}$ (12.21) на перемещения, образующих вектор $\mathbf{d}_p$ (12.20). Такую матрицу в строительной механике называют *матрицей податливости* стержневой системы (в данном случае рамы) в направлениях действующих сил.

Коэффициенты этой матрицы представляют собой перемещения во вспомогательных состояниях (см. рис. 12.4, *б*, *в*, *г*), которые определяются по формуле Максвелла - Мора (для любых $i = 1, 2, 3$ и $k = 1, 2, 3$):

$$1_k \cdot \delta_{ik} = 1_i \cdot \delta_{ki} = \int_L \frac{M_i M_k}{EI} dx + \mu \int_L \frac{Q_i Q_k}{GI} dx + \int_L \frac{N_i N_k}{EA} dx. \quad (12.26)$$

При этом доказываются сразу две теоремы строительной механики:

1. Теорема о взаимности работ для любых двух состояний рамы, нагруженных какой-то нагрузкой (в данном случае при единичных усилиях

соблюдается равенство работ $1_k \cdot \delta_{ik} = 1_i \cdot \delta_{ki}$).

2. Теорема о взаимности перемещений (в данном случае $\delta_{ik} = \delta_{ki}$).

Первый индекс в выражении $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ показывает номер направления, по которому определяется перемещение. Вторым индексом показывает номер вспомогательного состояния, в котором приложена единичная сила (поэтому при записи работы сил единичная сила отмечена индексом равным второму индексу в обозначении перемещения).

Обратим внимание на следующие свойства матрицы податливости:

1. Она квадратная и имеет порядок $(n \cdot n)$, где n – число строк соответственно в векторах $\mathbf{d}_p$ и $\mathbf{p}$.
2. На ее главной диагонали, отмеченной в (12.25) штриховой линией, располагаются элементы, которые всегда положительны, так как при равенстве $i = k$ под любым из трех интегралов (12.26) подынтегральная функция внутреннего усилия имеет вторую степень.
3. Так как элементы матрицы равны $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ при любых i и k , то матрица симметрична.

Для вычисления вектора $\mathbf{d}_p$ (12.20) в грузовом состоянии (см. рис. 12.4, а) можно использовать выражение (12.19) или (12.24).

При использовании закона Гука и принципа независимости действия сил вектор $\mathbf{m}_p$ в грузовом состоянии можно представить в виде

$$\mathbf{m}_p = \mathbf{M} \cdot \mathbf{p}. \quad (12.27)$$

Подставим это выражение в (6.19) и сопоставим его с (6.24). Тогда для вычисления матрицы податливости получим выражение:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{M})^T \mathbf{L} \mathbf{M}. \quad (12.28)$$

С примерами расчетов матрицы $\mathbf{D}$ можно познакомиться в учебных пособиях [7, 10].

12.7. Определение перемещений в статически определимых стержневых системах от заданной осадки опор

Для определения перемещений стержневых систем от внешнего воздействия в подразделе 12.2 была получена формула Максвелла – Мора (12.10).

Эта формула отражает работу внешних сил и внутренних усилий во вспомогательном состоянии заданной стержневой системы на соответствующих внешним силам и внутренним усилиям возможных перемещениях и деформациях.

Возможные перемещения и возможные деформации во вспомогательном состоянии заданной стержневой системы приняты равными соответственно действительным перемещениям и действительным деформациям «грузового» состояния заданной рамы

Под «грузовым» состоянием понимается состояние стержневой системы от любого внешнего воздействия (силового воздействия в виде заданной нагрузки, заданной осадки опор и заданного температурного воздействия).

В соответствии со свойствами статически определимых систем (см. табл. 5.1 в подразделе 5.7) от заданной осадки опор в «грузовом» состоянии рамы при отсутствии внешней нагрузки не возникают внутренние усилия M_p, Q_p, N_p , а значит (см. уравнения (1.5) закона Гука) не возникают и деформации стержней $\kappa_p, \gamma_p, \epsilon_p$. Поэтому все интегралы в правой части формулы (12.10) будут равны нулю.

В результате из формулы (12.10) получим следующую формулу для определения перемещений в статически определимых стержневых системах только от ее заданных перемещений («осадок») опор:

$$1 \cdot \Delta_{ip} = - \sum_m R_{mi} \cdot c_{mp}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.29)$$

Для применения этой формулы к определению тех же перемещений, которые указаны на рис. 12.1, а, но только не от нагрузки, а от заданных смещений опор (рис. 12.5), необходимо составить те же вспомогательные состояния (см. рис. 12.5, б, в, г), что и при определении перемещений от заданной нагрузки (см. рис. 12.1, б, в, г).

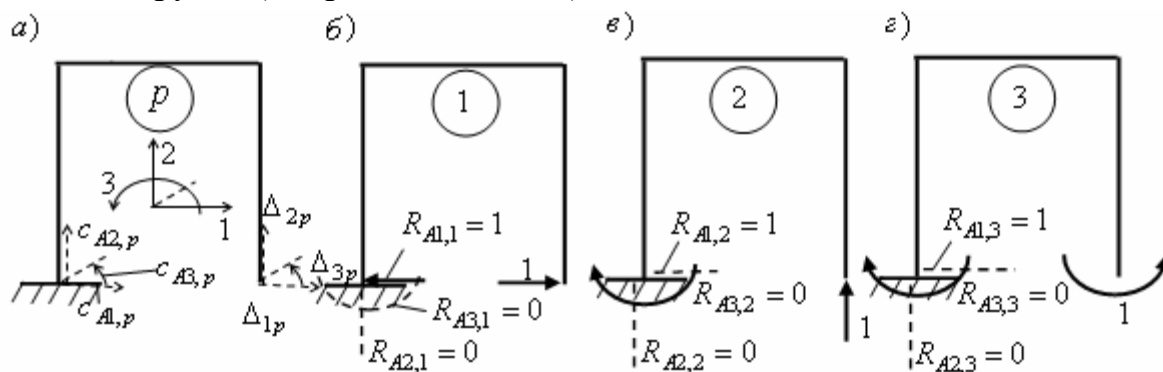


Рис. 12.5

Но теперь, для использования формулы (12.29) необходимо в грузовом состоянии рамы указать заданные перемещения опоры А (см. рис. 12.5, а), а во вспомогательных состояниях вычислить и указать направления реакций всех опор стержневой системы (в данном примере только одной)

(см. рис. 12.5, б, в, з).

Все необходимые для вычисления по формуле (12.29) величины указаны на рис. 12.5.

Вычисленные по формуле (12.29) перемещения будут свободными (не стесненными), так как при этих перемещениях в стержневой системе не будет возникать никаких усилий. Ее элементы переместятся как жесткие диски в некоторое новое ненапряженное положение как части механизма (рис. 12.6).

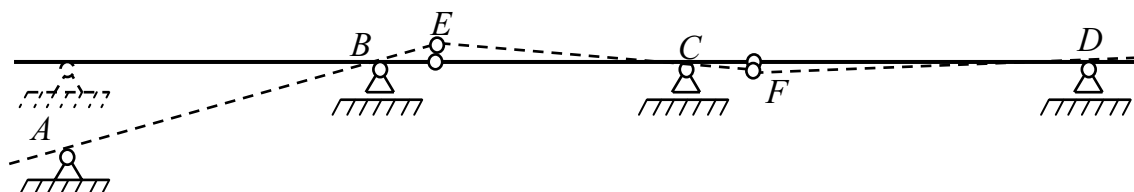


Рис. 12.6

Вопрос определения перемещений по формуле Максвелла – Мора в статически неопределимых стержневых системах будет рассмотрен в разделе 7 после ознакомления с методом сил расчета статически неопределимых стержневых систем.

12.8. Определение перемещений в статически определимых стержневых системах от изменения температуры их стержней

Полученная общая формула Максвелла – Мора (12.10) применима и при температурных воздействиях на стержневые системы.

Температурное воздействие не вызывает усилий в статически определимых стержневых системах (см. табл. 5.1 в подразделе 5.7 пособия). В t_b тоже время от температурного воздействия происходят деформации стержней. Это означает, что происходящие деформации и связанные с ними перемещения являются свободными (не стесненными).

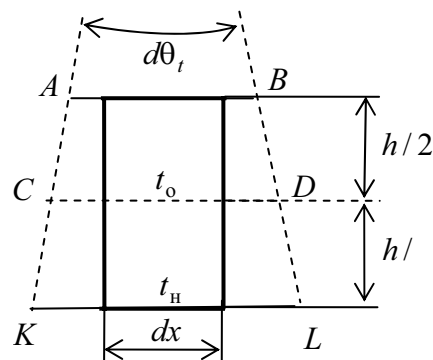


Рис. 12.7

Рассмотрим вопрос об определении этих свободных (не вызывающих усилий) температурных деформациях стержней.

Изобразим на рис. 12.7 бесконечно малый элемент стержня длиной dx .

Будем считать, что произошло изменение температуры верхнего и нижнего волокон стержня соответственно на t_b и t_n градусов, где $t_n > t_b > 0$.

Будем полагать стержень тонким и изменение температуры по его высоте линейным. Тогда $t_o = 0.5(t_n + t_b)$.

Удлинения нижнего, среднего и верхнего волокон элемента dx соответственно составляют $\Delta_{dx,н} = \alpha t_н dx$, $\Delta_{dx,о} = \alpha t_о dx$, $\Delta_{dx,в} = \alpha t_в dx$, где α является коэффициентом линейного расширения материала стержня.

Отсюда следует выражение для продольной деформации стержня от средней температуры $t_о = 0.5 (t_н + t_в)$

$$\varepsilon_{t_о} = \alpha t_о. \quad (12.30)$$

Кроме того, происходит деформация искривления стержня, при которой сечения элемента dx поворачиваются на угол $d\theta_t$ (см. рис. 12.7).

Условно деформированный от изменения температуры волокон элемент показан в виде трапеции $ABKL$. Центр кривизны стержня (обозначим его точкой O) расположен далеко от его оси: на расстоянии радиуса кривизны R . Поэтому искривление волокон стержня на рис. 12.7 не показано. Приближенно $KL = (1 + \alpha t_н)dx$, $CD = (1 + \alpha t_о)dx$, $AB = (1 + \alpha t_в)dx$. Тогда

$$d\theta_t \approx \operatorname{tg} d\theta_t = \frac{KL - AB}{h} = \frac{\alpha(t_н - t_в)dx}{h} \quad (12.31)$$

Отсюда получаем деформацию искривления стержня:

$$\kappa_t = \frac{d\theta_t}{dx} = \frac{\alpha(t_н - t_в)}{h} = \alpha\tau \quad (12.32)$$

Здесь величина

$$\tau = \frac{(t_н - t_в)}{h} \quad (12.33)$$

представляет собой градиент температур по толщине h стержня, равный тангенсу угла наклона линейной эпюры температур к вертикали.

Запишем теперь формулу Максвелла – Мора для определения тех же перемещений в раме, изображенной на рис. 12.1, a и на рис. 12.5, но только от указанного здесь воздействия температуры.

Формулу представим в виде (12.8). При этом запишем ее для любого перемещения с номером i , учтем, что на раму не воздействуют ни нагрузки, ни осадки опор. Деформации в «грузовом» состоянии заменим указанными температурными деформациями. Тогда для тонких стержней получим:

$$1 \cdot \Delta_{it} = \int_L M_i \cdot \kappa_t dx + \int_L N_i \cdot \varepsilon_o dx. \quad (12.34)$$

Вопрос определения перемещений в статически неопределимых стержневых системах будет рассмотрен во второй части учебного пособия после изучения метода сил расчета статически неопределимых стержневых систем.

13. ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

13.1. Введение

Перемещения сечений стержней можно определить, например, с помощью формулы Максвелла-Мора (см. предыдущий раздел) а также при расчете стержневой системы МКЭ.

Формула Максвелла-Мора (12.10) для плоских стержневых систем при определении перемещений от заданной нагрузки представляет собой сумму трех интегралов, отражающих влияние на искомое перемещение соответственно изгибных (влияние изгибающих моментов), сдвиговых (влияние поперечных сил) и продольных (влияние продольных сил) деформаций стержней стержневой системы.

Обычно в строительных конструкциях стержни являются тонкими. В них влиянием сдвиговых деформаций на перемещения сечений стержней пренебрегают. Тогда при определении перемещений сечений стержней плоской стержневой системы, как видно из оставшихся в формуле двух интегралов, потребуется задание жесткостей стержней стержневой системы на изгиб (EI_{yi}) и на растяжение-сжатие (EF_i), где i – номер стержня.

До сих пор в данном учебном пособии программа SCAD применялась только для определения усилий в статически определимых стержневых системах.

При такой постановке задачи и использовании программы SCAD жесткость плоских стержневых элементов типа 2 на изгиб EI_{yi} и продольная жесткость EF_i для элементов типа 1 и 2 могли быть заданы в виде произвольных значений, в том числе и равными единице (см. подраздел 3.6),

Если одновременно с задачей определения усилий в статически определимой системе поставить задачу определения реальных перемещений сечений ее стержней, то при задании исходных данных для расчета должны приниматься реальные жесткости стержней.

При этом должен быть взят реальный модуль упругости E материала стержней и реальные значения моментов инерции I_{yi} и площадей F_i стержней с номером i .

Для задания реальных жесткостей стержней в программе SCAD имеется несколько способов (см. соответствующее поле диалогового окна на с. 135

данного учебного пособия).

При численном способе задания реальных жесткостей возможен и второй подход, когда задаются не сами жесткости, а их относительные значения, например при изгибе: $k_{i,изг} = EI_{yi} / EI$, где EI – принятая произвольная «эталонная» жесткость на изгиб, с которой соотносятся жесткости всех стержней рассматриваемой стержневой системы.

Иногда при определении перемещений в рамах, стержни которых в основном работают на изгиб, учитываются только изгибные деформации стержней (без учета влияния на перемещения продольных деформаций стержней).

Программа SCAD позволяет решать задачу, как с учетом продольных деформаций стержней, так и исключить их влияние путем специальной процедуры «Объединение перемещений». Это будет продемонстрировано в рассматриваемом далее примере.

При постановке задачи по определению перемещений в статически определимых системах необходимо обратить внимание на то, что в МКЭ, а значит и в программе SCAD, перемещения определяются только в узлах элементов. В плоских балках и рамах, состоящих из элементов типа 2, в жестких узлах определяются линейные составляющие X и Z перемещений узлов в общей системе координат и углы поворота UY (U_y) жестких узлов относительно оси Y .

Чтобы получить перемещения в промежуточных сечениях стержня (в балке или в раме) на стержне надо наметить дополнительные узлы, т.е. разбить стержень на большее число элементов, чем это требовалось при решении задачи по построению эпюр усилий. Иными словами, для получения перемещений в каком-то сечении стержня в этом сечении надо назначить узел. Так будет сделано в рассмотренной ниже задаче.

13.2. Постановка задачи по определению перемещений в раме

Рассмотрим статически определимую раму, изображенную на рис. 13.1.

Для этой рамы в учебном пособии [7] приведено решение с помощью формулы Максвелла – Мора по определению сразу трех перемещений.

Искомые перемещения составляют вектор

$$d_p = \begin{bmatrix} u_A \\ \Delta_{BC} \\ \varphi_D \end{bmatrix}, \quad (13.1)$$

где u_A – горизонтальное перемещение точки A рамы; Δ_{BC} – взаимное изменение расстояния между шарниром B и точкой C (на схеме рамы она отмечена крестиком); $\varphi_D = \varphi_D^{\text{л}} + \varphi_D^{\text{пр}}$ – взаимный угол поворота сечений стержней, подходящих к шарниру D слева и справа.

Рис. 13.1

Влияние продольных деформаций на искомые перемещения не учитывалось, поэтому жесткости стержней на продольные деформации в учебном пособии [7] не рассматривалась.

Результат решения для этих загрузок представлен в [7] в виде матрицы

Элементы u_{A1} и u_{A2} матрицы $\mathbf{D}_p$ равны перемещению узла A соответственно при первом и втором загрузениях. Перемещение узла положительно, если оно по направлению совпадает с положительным направлением оси X общей системы координат (см. рис. 13.1).

(см. рис. 13.1). Взаимное изменение расстояния считается положительным, если расстояние между точками уменьшается, что соответствует положительному направлению единичных сил в соответствующем вспомогательном состоянии рамы (см. [7], рис. 82, в).

Элементы $\varphi_{D,1}$ и $\varphi_{D,2}$ представляют собой угол «раскрытия шарнира» соответственно при первом и втором нагружениях рамы. Если направление угла «раскрытия шарнира» совпадает с направлениями соответствующих единичных моментов в шарнире в соответствующем вспомогательном состоянии рамы (см. [7], рис. 82, г), то угол считается положительным.

Выполним расчет этой рамы с помощью программы SCAD при тех же нагружениях.

13.3. Инструкция по выполнению расчета рамы с помощью программы SCAD

Поскольку процедура расчета рамы была рассмотрена в разделе 8 данного пособия, то в приведенной ниже инструкции расчета обратим основное внимание только на те операции, которые еще не встречались при использовании программы SCAD.

Запуск программы SCAD и выход в окно **Новый проект** остаются без изменения.

В окне **Новый проект** выполним следующие уже известные действия.

- Последовательно введем наименования: проекта (работа 6); организации; объекта расчета (рама 2).
- В соответствии с выбранной системой (СИ или технической) назначим единицы измерения основных величин.
- Назначаем тип схемы: 2. Плоская рама.
- Выходим из окна **Новый проект** и задаем имя файла (см. раздел 6 пособия, этап 1, пункт 1.3).

Выполним команду «Сохранить» для сохранения имени файла в папке SDATA. При этом откроется окно со схемой **Дерево проекта**.

Открываем окно **Расчетная схема** и начинаем формирование расчетной схемы для заданной рамы (см. рис. 13.1). С этой целью войдем в раздел **Схема** и вначале создадим вспомогательную раму, изображенную на рис. 13.2:

- Откроем окно **Генерация прототипа рамы** и отметим схему регулярной рамы. Откроется окно **Задание параметров регулярной рамы** (здесь приведена только его часть),

	Длины пролетов	Количество пролетов			Высоты этажей	Количество этажей
1	3	2		1	2	3
2	2	1		2		

в котором зададим параметры вспомогательной рамы (см. рис. 13.2).

После этого можно выйти из окна, нажав кнопку «ОК» (тип элементов был уже назначен в окне создания проекта, а их жесткость зададим позже).

С помощью вспомогательной рамы построим схему заданной рамы (см. рис. 13.1).

С этой целью удалим во вспомогательной раме на рис. 13.2 стержни 1, 4, 10, 5, 6, 11, 12, 16, 17, 18, 21.

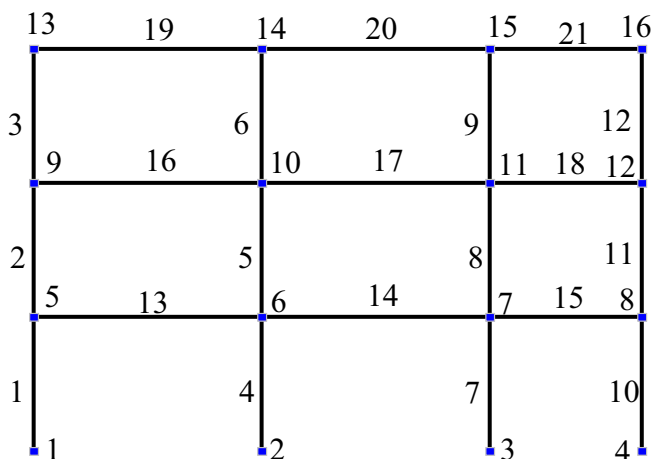


Рис. 13.2

После удаления этих элементов нажмем кнопку  и выполним упаковку данных. Получим схему рамы, изображенную на рис. 13.3.

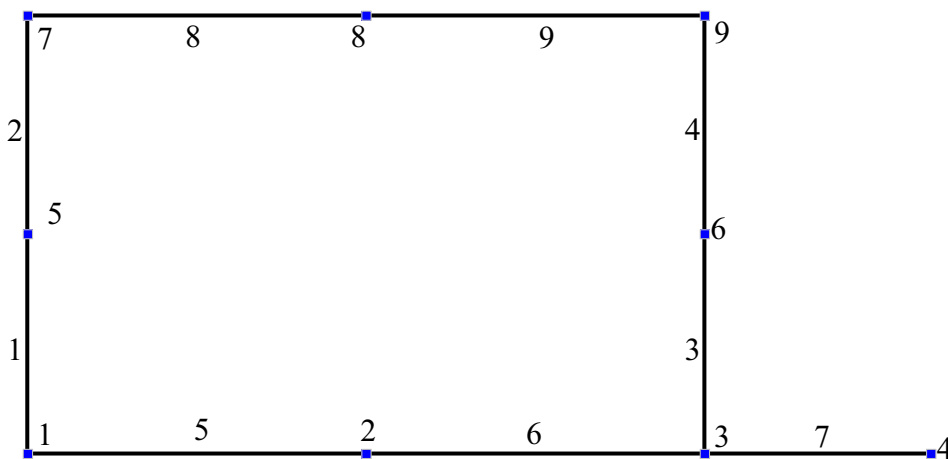


Рис. 13.3

В соответствии с направлением осей общей системы координат (см. рис. 13.1) установим опорные связи X и Z в узле 1 и Z – в узле 4 (см. рис. 13.3). Затем перейдем к установке шарниров и назначению жесткостей элементов. При этом обратим внимание на следующее

Установка шарниров. В пункте 2.5 этапа 2 раздела 6 было показано, что шарнир в узле, соединяющем два элемента, можно поставить либо слева, либо справа от узла.

При любом варианте установки шарнира усилия в стержневой системе получатся одинаковыми. Поэтому при установке шарниров в узлах 5 и 8

шарнир можно поставить на любом элементе, подходящих к этим узлам.

Однако при постановке шарнира в узле 2, в котором требуется определить взаимный угол поворота сечений, подходящих к этому узлу, придется рассмотреть оба варианта постановки шарнира: как на элементе 6, так и на элементе 5.

Это связано с тем, что в программе SCAD в таблице «Перемещения» угол поворота жесткого узла 2 будет приведен только для одного элемента, к которому относится жесткий узел в рассматриваемом варианте установки шарнира.

При решении поставленной задачи определения в узле D взаимного угла поворота, подходящих к нему сечений, как левого, так и правого элементов.

Придется для каждого нагружения рамы рассмотреть следующие два варианта установки шарнира в узле 2 схемы рамы (рис. 13.4 и рис. 13.5).

Вариант 1, когда шарнир в узле 2 установлен на элементе 6 (в местной системе осей координат этот узел рамы будет иметь номер 1 (см. рис. 3.10).

При таком варианте установки шарнира в узле 2 (см. рис. 13.4) искомым будет только угол поворота φ_2^5 жесткого узла 2, расположенного на правом конце элемента 5.

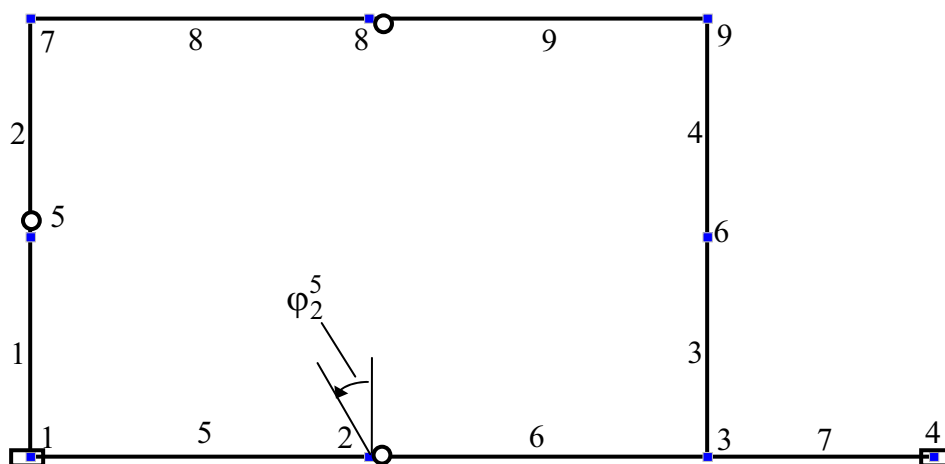


Рис. 13.4

Вариант 2, когда шарнир в узле 2 установлен на элементе 5 (в местной системе координат этот узел будет иметь номер 2 (см. рис. 3.10 в разделе 3).

При таком варианте установки шарнира в узле 2 (см. рис. 13.5) искомым будет только угол поворота φ_2^6 жесткого узла 2, расположенного на левом конце элемента 6.

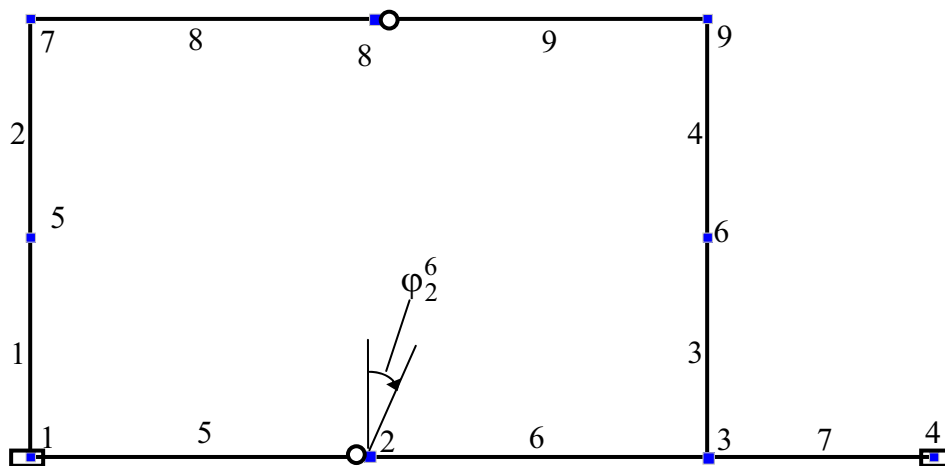


Рис. 13.5

Задание жесткостей стержней. При задании жесткостей стержней обратим внимание на следующее. Результаты (13.2) определения перемещений рамы (см. рис. 13.1) получены по формуле Максвелла – Мора при учете только изгибных деформаций стержней рамы. Поэтому для сопоставления полученных перемещений с соответственными перемещениями, полученными при использовании программы SCAD, реализующей алгоритм МКЭ, также необходимо учесть только изгибные деформации стержней.

Однако при использовании программы SCAD для реализации МКЭ предусмотрен учет как изгибных, так и продольных деформаций стержней.

Чтобы исключить влияние продольных деформаций стержней в МКЭ в программе SCAD применяют специальную процедуру.

Для ее иллюстрации и одновременно для изучения влияния продольных деформаций стержней на указанные в (13.2) перемещения рассмотрим вначале следующий вариант задания жесткостей стержней в рассматриваемой раме (см. рис. 13.1).

Будем предполагать, что поперечные сечения всех стержней имеют прямоугольное сечение одинаковой ширины b и высотой $h_i = l_i/10$, где i – номер стержня. Тогда каждый стержень будет иметь площадь поперечного сечения $F_i = b \cdot h_i$ и момент инерции $I_{yi} = b \cdot h_i^3 / 12$. Полагая, что все стержни рамы сделаны из одного материала с модулем упругости E , жесткость стержней на изгиб и растяжение – сжатие представим в виде:

$$EI_{yi} = k_{i,\text{изг}} EI ; EF_i = k_{i,\text{пр}} EI \quad (13.3)$$

где

$$k_{i,\text{пр}} = 1200 k_{i,\text{изг}} / l_i^2 . \quad (13.4)$$

Поскольку как изгибная, так и продольная жесткость любого конечного элемента типа 2 с номером i выражена через эталонную жесткость EI стержня на изгиб (13.3), то при численном способе задания жесткостей можно задать изгибные и продольные жесткости КЭ только их соответственными относительными значениями $k_{i,\text{изг}}$ (см. рис. 13.1) и $k_{i,\text{пр}} = 1200 k_{i,\text{изг}} / l_i^2$.

Для заданной рамы (см. рис. 13.1) при сделанных допущениях относительные жесткости имеют следующие значения.

1. КЭ 1 и 2 левой стойки, соединенные шарниром:

$$k_{i,\text{изг}}=1; k_{i,\text{пр}} = 1200 k_{i,\text{изг}} / l_i^2 = 1200 \cdot 1 / 2^2 = 300.$$

2. КЭ 3 и 4 правой стойки: $k_{i,\text{изг}} = 1; k_{i,\text{пр}} = 1200 k_{i,\text{изг}} / l_i^2 = 1200 \cdot 1 / 4^2 = 75$.

3. КЭ верхнего ригеля, соединенные шарниром:

$$k_{i,\text{изг}} = 1.5; k_{i,\text{пр}} = 1200 k_{i,\text{изг}} / l_i^2 = 1200 \cdot 1.5 / 3^2 = 200.$$

4. КЭ нижнего ригеля, соединенные шарниром:

$$k_{i,\text{изг}} = 3; k_{i,\text{пр}} = 1200 k_{i,\text{изг}} / l_i^2 = 1200 \cdot 3 / 3^2 = 400.$$

5. КЭ—консоль с опорой:

$$k_{i,\text{изг}}=3; k_{i,\text{пр}} = 1200 k_{i,\text{изг}} / l_i^2 = 1200 \cdot 3 / 2^2 = 900.$$

Процедура численного задания жесткостей уже рассматривалась. Поэтому описание ее опускаем.

Результаты расчетов. Прежде всего, для сопоставления с результатами расчетов в пособии [7], представим их в виде эпюр изгибающих моментов для нагрузок 1 (рис. 13.6) и 2 (рис. 13.7).

Эти эпюры будут одинаковыми для обоих вариантов расположения шарнира в узле 2. Они совпадают с соответствующими эпюрами, полученными при ручном расчете в пособии [7].

Представим также результаты расчетов по программе SCAD при этих двух нагрузках в виде графических и цифровых картин перемещений сечений рамы.

С этой целью в разделах рабочего окна по графическому анализу открываем раздел **Деформации** и для первого нагружения на инструментальной панели нажмем кнопку .

В результате появится картина перемещений элементов рамы при первом нагружении (рис. 13.8).

Аналогично получается картина перемещений элементов рамы при втором нагружении (рис. 13.9).

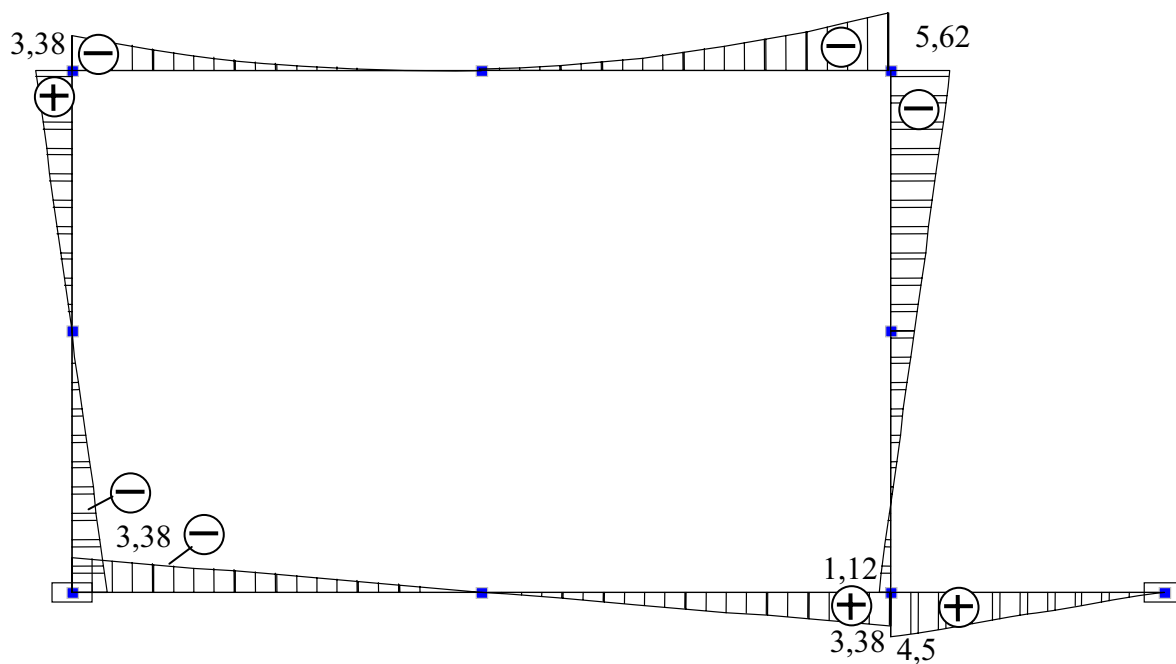


Рис. 13.6

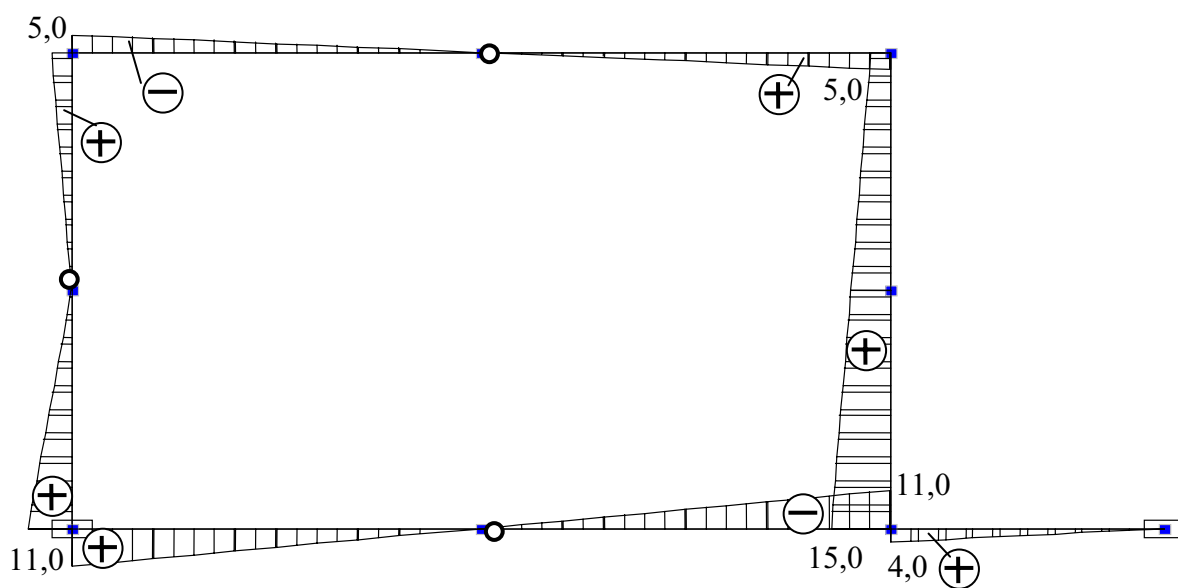
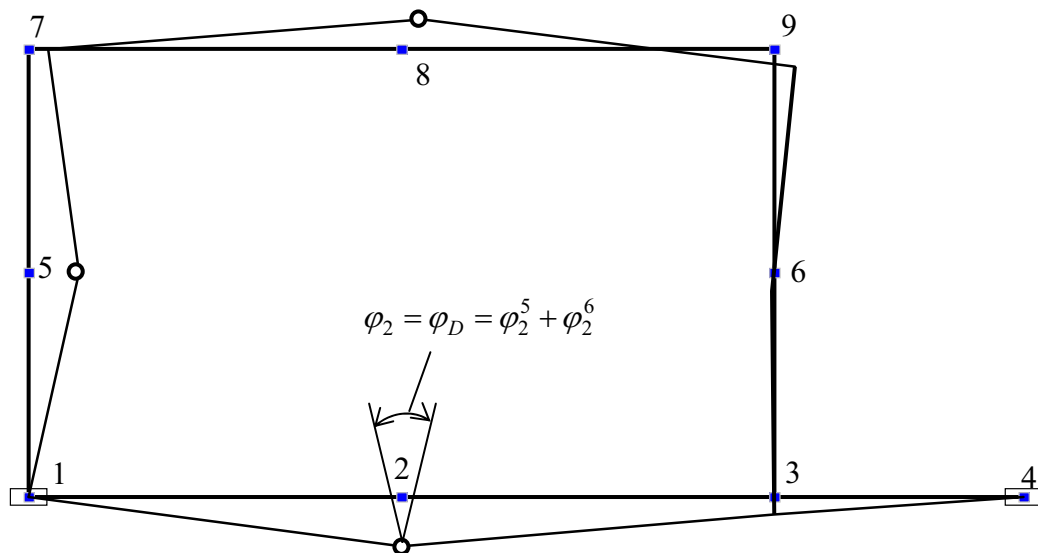
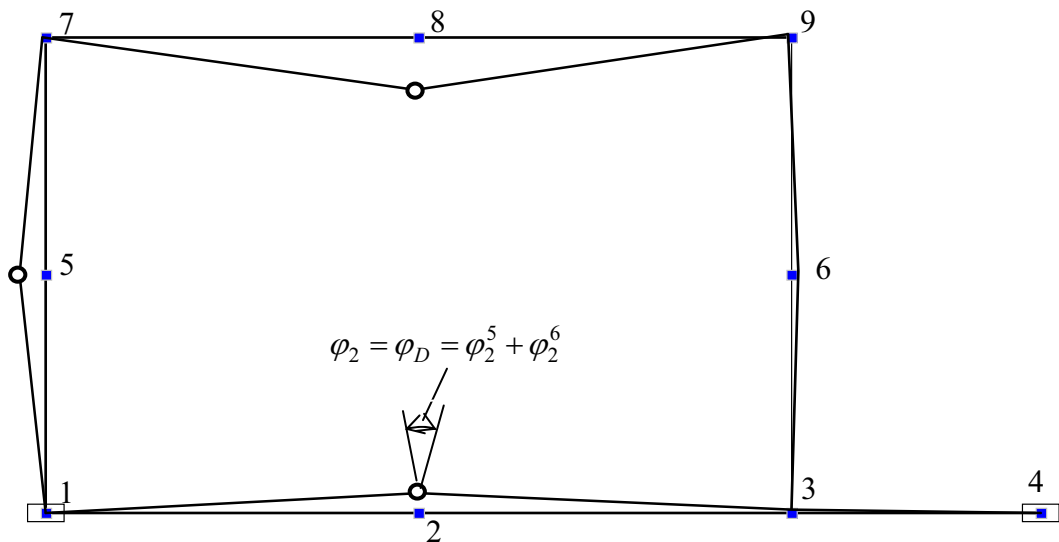


Рис. 13.7

Для получения величин перемещений узлов конкретного нагружения необходимо в разделе **Деформации** ввести соответствующие данные.

Здесь приведена часть панели , показывающая, что отображаются перемещения X (в направлении оси X общей системы координат) для нагружения 1).



При нажатии на кнопку  «Ввод значений перемещений в узлах» рядом с узлами расчетной схемы рамы отобразятся значения и знаки линейных перемещений X узлов. На рис. 13.10, *a* для варианта 2 установки шарнира в узле 2 и загрузке 1 рамы приведены численные значения (м) горизонтальных линейных перемещений узлов системы КЭ, которые затем (см. выражение (13.2)) должны быть еще умножены на коэффициент q/EI . Знаки приведенных горизонтальных перемещений соответствуют направлению осей ОСК (см. рис. 13.1).

Изменение расстояния $\Delta_{BC,1}$ между точками B и C при загрузке 1 рамы

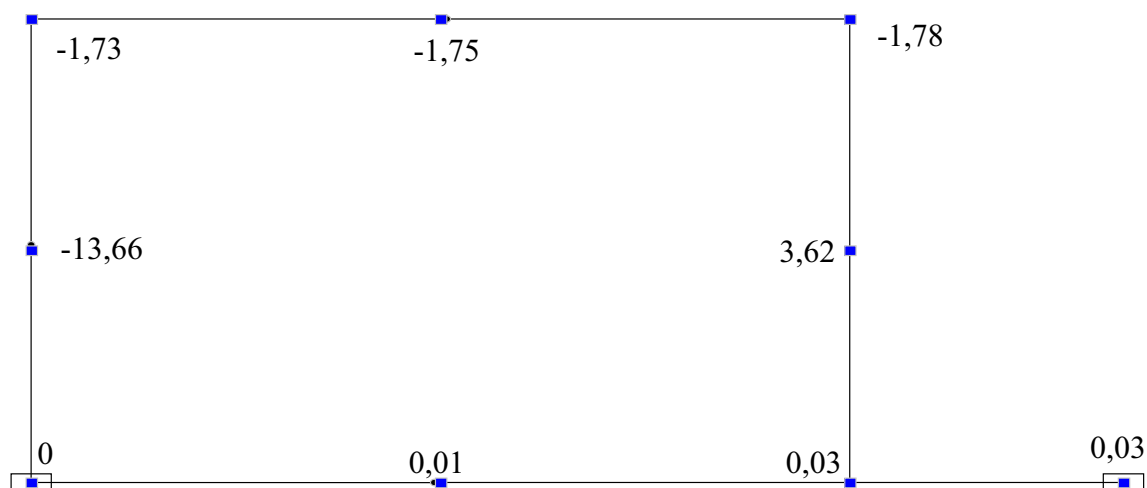
получится суммированием численных значений горизонтальных перемещений узлов 5 и 6 системы КЭ (см. рис. 13.8 и рис. 13.10, *a*):

$$|13.66 + 3.62| = |17.28| \quad (13.5)$$

Знак суммарного значения может быть принят из разных соображений. Например, можно отметить увеличение расстояния между точками *B* и *C* знаком «плюс». При использовании формулы Максвелла – Мора в учебном пособии [7] из соображений, отмеченных выше, был принят знак «минус».

Если на приведенной части панели вместо *X* будет указано *UY*, то будут выведены углы поворота жестких узлов элементов. На рис. 13.10, *б* приведены значения (rad·) и знаки углов поворота узлов для варианта 2 установки шарнира.

a)



б)

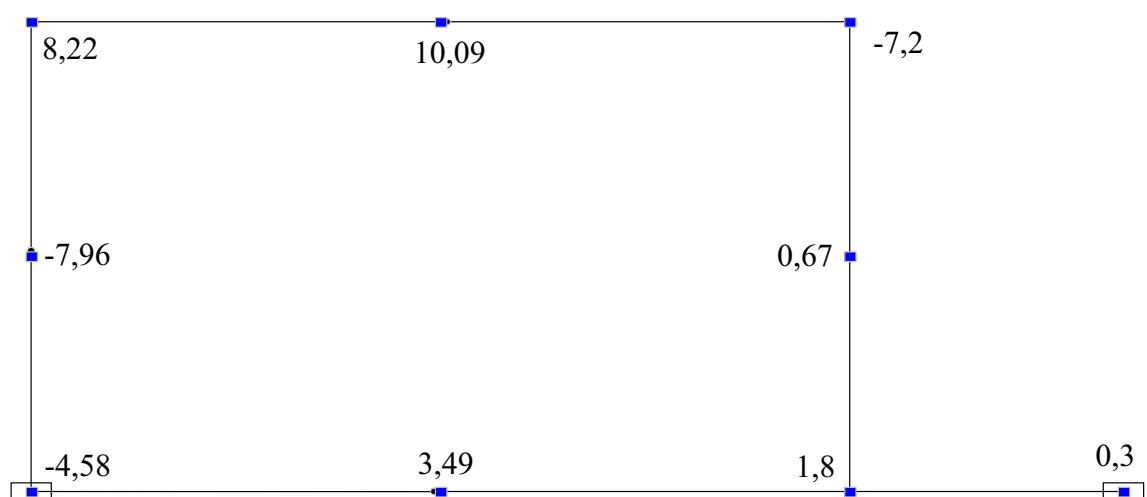


Рис. 13.10

Результаты определения углов поворота сечений, подходящих к шарниру *D* слева и справа, с учетом влияния на них как изгибных, так и продольных

деформаций стержней приведены в табл. 13.1 для каждого нагружения. В столбцах таблицы отражены варианты установки шарнира в узле и взаимный угол поворота φ_D сечений рамы в узле D.

Таблица 13.1

Загружение	Учет продольных деформаций	Вариант 1 (угол φ_2^5)	Вариант 2 (угол φ_2^6)	Угол $\varphi_D = \varphi_2$
1	да	-2.893	3.486	6.379
	нет	-2.890	3.484	6.374
2	да	27.710	-20.670	-48.380
	нет	27.681	-20.652	-48.333

В программе SCAD знаки углов поворота узлов элементов в вариантах 1 и 2 считаются положительными, когда при взгляде со стороны стрелки оси Y угол поворота направлен против направления движения часовой стрелки (см. рис. 13.1).

Значение взаимного угла раскрытия шарнира φ_D получается суммированием значений положительного и отрицательного углов поворота сечений по обе стороны от шарнира, потому что эти углы направлены в разные стороны.

Знак суммарного угла взят по правилу знаков, принятому при использовании формулы Максвелла – Мора в учебном пособии [7]:

если направление «раскрытия шарнира» совпадает с направлением единичных моментов в шарнире во вспомогательном состоянии рамы, то угол φ_D считается положительным (см. [7], рис. 82, з).

Для сопоставления перемещений, полученных методом конечных элементов по программе SCAD, с перемещениями, определенными в учебном пособии [7] по формуле Максвелла – Мора, необходимо численные значения, полученные в программе SCAD при сделанных допущениях о жесткости стержней, умножить на коэффициент q/EI (см. выражение (13.2))

Все искомые перемещения при первом и втором нагружениях, найденные по программе SCAD с учетом продольных деформаций стержней, составляют матрицу (13.6), элементы которой достаточно близко совпадают с соответствующими элементами матрицы (13.2), полученной в учебном пособии [7].

Еще раз обратим внимание на то, что в учебном пособии [7] при определении искомых перемещений (см. матрицу 13.2) учитывались только

изгибные деформации стержней рамы, а при решении задачи по программе SCAD (см. матрицу 6.6) были учтены и продольные деформации стержней.

$$\mathbf{D}_p = \frac{q}{EI} \begin{bmatrix} -1.78 & 32.69 \\ -17.29 & 84.72 \\ 6.38 & -48.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{м} \\ \text{м} \\ \text{рад} \end{matrix}, \quad (13.6)$$

Как видно из сопоставления соответствующих перемещений, учет продольных деформаций для рассматриваемой рамы при заданной на нее нагрузке практически не влияет на искомые перемещения.

Если все же возникает необходимость выполнения расчета по программе SCAD без учета продольных деформаций стержней, это можно сделать, воспользовавшись операцией «Объединение перемещений в узлах».

Откроем раздел **Назначения** и на инструментальной панели этого

раздела нажмем кнопку  «Определение объединений перемещений в узлах». Откроется локальное окно «Объединение перемещений».

Отметим направление X, для объединения горизонтальных перемещений на нижних ригелях. Назовем имя новой группы «низ» и нажмем «ОК».

На схеме рамы (при любом варианте постановки шарнира в узле 2) выделим узлы, лежащие на нижних горизонтальных стержнях и нажмем кнопку «ОК» на инструментальной панели раздела **Назначения**.

Точно также объединим горизонтальные перемещения верхних горизонтальных стержней (назовем группу «верх»). Затем отдельно для каждой стойки объединим вертикальные перемещения Z (создадим группы «левая» и «правая»).

Объединение продольных перемещений стержня эквивалентно тому, что стержень становится не деформируемым в продольном направлении. Этим самым влияние продольных деформаций на искомые перемещения исключается. При таком подходе нет необходимости задавать реальные продольные жесткости EF стержней. Это упрощает подготовку исходных данных для расчета без учета продольных деформаций стержней.

Искомые перемещения, подсчитанные без учета продольных деформаций стержней (для сопоставления с соответствующими перемещениями, приведенными в виде матрицы, взятой из [7]), представлены в матрице (13.7).

Как видим, имеется полное совпадение результатов расчета по формуле Максвелла – Мора и методом конечных элементов с помощью программы SCAD.

$$\mathbf{D}_p = \frac{q}{EI} \begin{bmatrix} -1.81 & 32.72 \\ -17.25 & 84.67 \\ 6.37 & -48.33 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{м} \\ \text{м} \\ \text{рад} \end{matrix} \quad (13.7)$$

Примечание. Продемонстрируем приближенный способ вычисления взаимного угла раскрытия шарнира φ_D , в котором этот угол может быть вычислен одним расчетом. Он состоит в следующем.

Рассмотрим вариант 2 установки шарнира в узле 2 (шарнир расположен на правом конце элемента 5). Элемент 5 разобьем на два элемента так, чтобы узел между

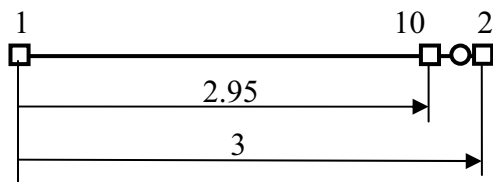


Рис. 13.11

ними был расположен максимально близко к шарниру, т.е. к узлу 2 (рис. 13.11).

Численные исследования показали, что этот узел может быть назначен на расстоянии 2.95 м от узла 1 элемента 5 (при нумерации в местной системе координат).

После разбиения элемента 5 на два элемента произойдет перенумерация элементов и узлов в расчетной схеме рамы. Появившийся новый узел стал десятым (по очереди ввода узлов). Элементы с узлами 1 и 10, 10 и 2, 2 и 3, 3 и 4 получили соответственно номера 9, 10, 5, 6.

Матрица искомых перемещений при таком разбиении рамы на элементы при учете только изгибных деформаций стержней рамы будет иметь вид

$$\mathbf{D}_p = \frac{q}{EI} \begin{bmatrix} -1.81 & 32.72 \\ -17.25 & 84.67 \\ 6.38 & -48.33 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{м} \\ \text{м} \\ \text{рад} \end{matrix}, \quad (13.8)$$

Результат практически совпадает с результатом в виде (13.2) и в виде (13.7).

СБОРНИК ЗАДАНИЙ
к расчетным работам на тему:
«Определение усилий и построение эпюр M, Q, N
в статически определимых стержневых системах»
с использованием программы SCAD

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	226
Расчетные работы по построению эпюр усилий в статически определимых стержневых системах.....	227
1. Построение эпюр M и Q в многопролетной шарнирной балке.....	227
2. Построение эпюр M, Q, N в раме.....	227
3. Построение эпюр M, Q, N в арке.....	235
4. Определение продольных усилий N в стержнях фермы.....	236

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первый сборник учебных заданий по дисциплине «Строительная механика» на кафедре «Строительная механика и теория упругости» был издан в 1981 г. [18]. Он используется в учебном процессе до настоящего времени.

Однако в связи с внедрением в учебный процесс персональных компьютеров (ПК) и использованием для решения учебных задач по строительной механике программы SCAD [1-5] постановка и методика выполнения приведенных в сборнике заданий [18] изменилась.

Эти изменения для студентов специальности ПГС отражены в новом сборнике заданий [6]. При этом в приводимом здесь его разделе, посвященном статически определимым стержневым системам, расчетные схемы шарнирных балок, рам и арок взяты из первого сборника [18]. Изменения сделаны в постановке заданий и в методических указаниях по их выполнению.

Задания по расчету ферм и все задания в разделе, посвященном статически неопределимым стержневым системам, составлены заново.

Кроме заданий по расчетным работам, в приводимой здесь части сборника приведены также расчетные схемы простейших стержневых систем, предназначенные для контрольных работ и быстрой контрольной проверки знаний и умений студента по дисциплине «Строительная механика».

Приведены также вопросы для подготовки учащихся к зачетам и экзаменам по разделу «Расчет статически определимых стержневых систем».

Сборник заданий и задач [6] имеется также в УМК [21] и в электронном виде в локальных сетях учебных классов ПК кафедры «Строительная механика и теория упругости» и ТУ) и отделения «Энергетические, промышленные и гражданские сооружения» (Э и ПГС) кафедры «Гражданское строительство и прикладная экология» (ГС и ПЭ) а также на сайте <http://smitu,cef.spbstu.ru> кафедры СМ и ТУ.

На сайте он находится в учебно-методическом комплексе (УМК) по применению программы SCAD в учебном процессе по дисциплине «Строительная механика».

Примеры оформления отчетов по указанным выше в оглавлении расчетным работам для статически определимых стержневых систем в соответствии с требованиями, указанными в заданиях к работам, приведены в учебном пособии [4], в УМК [21] и на указанном выше сайте кафедры СМ и ТУ.

Краткие методические указания по оформлению отчетов по расчетным работам даны также в разделах 7 – 11 пособия.

РАСЧЕТНЫЕ РАБОТЫ ПО ПОСТРОЕНИЮ ЭПЮР УСИЛИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M , Q В МНОГОПРОЛЕТНОЙ ШАРНИРНОЙ БАЛКЕ

Для расчета задана балка, схема которой выбирается (табл. 1) в соответствии с двумя первыми цифрам шифра $ABCD$, выданного студенту преподавателем. Размеры балки, схема ее загрузки и значения нагрузок определяются по данным табл. 2 и 3.

Требуется:

1. Построить эпюры усилий M и Q в балке расчетом МКЭ на ПК с использованием программы SCAD и по эпюрам усилий определить опорные реакции балки.

2. Выполнить контроль результатов расчета на ПК по признакам правильных эпюр и использованием вручную уравнений равновесия.

Методические указания по выполнению работы и оформлению отчета по работе.

- Расчет выполнить в соответствии с приведенным в разделе 7 примером.
- Для оформления отчета по работе использовать методические рекомендации, приведенные в конце примера.
- Титульную страницу отчета представить с использованием образца, приведенного в конце данного приложения 1 (с. 240).

2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M , Q , N В РАМЕ

Для расчета задана рама, схема которой выбирается (табл. 4) в соответствии с двумя первыми цифрам шифра $ABCD$, выданного студенту преподавателем. Размеры рамы (табл.5) выбираются по последней цифре C шифра. Схема загрузки рамы (табл. 4) изображается в соответствии с нагрузками, значения которых определяются по цифре D шифра (табл. 5).

Требуется:

1. Построить эпюры усилий M , Q , N в раме расчетом МКЭ на ПК с использованием программы SCAD и по эпюрам усилий определить опорные реакции рамы.

2. Выполнить контроль результатов расчета на ПК по признакам правильных эпюр и с использованием вручную уравнений равновесия.

Методические указания по выполнению работы и оформлению отчета по работе.

- Они аналогичны указаниям, данным в задании 1, но относятся к разделу 8.

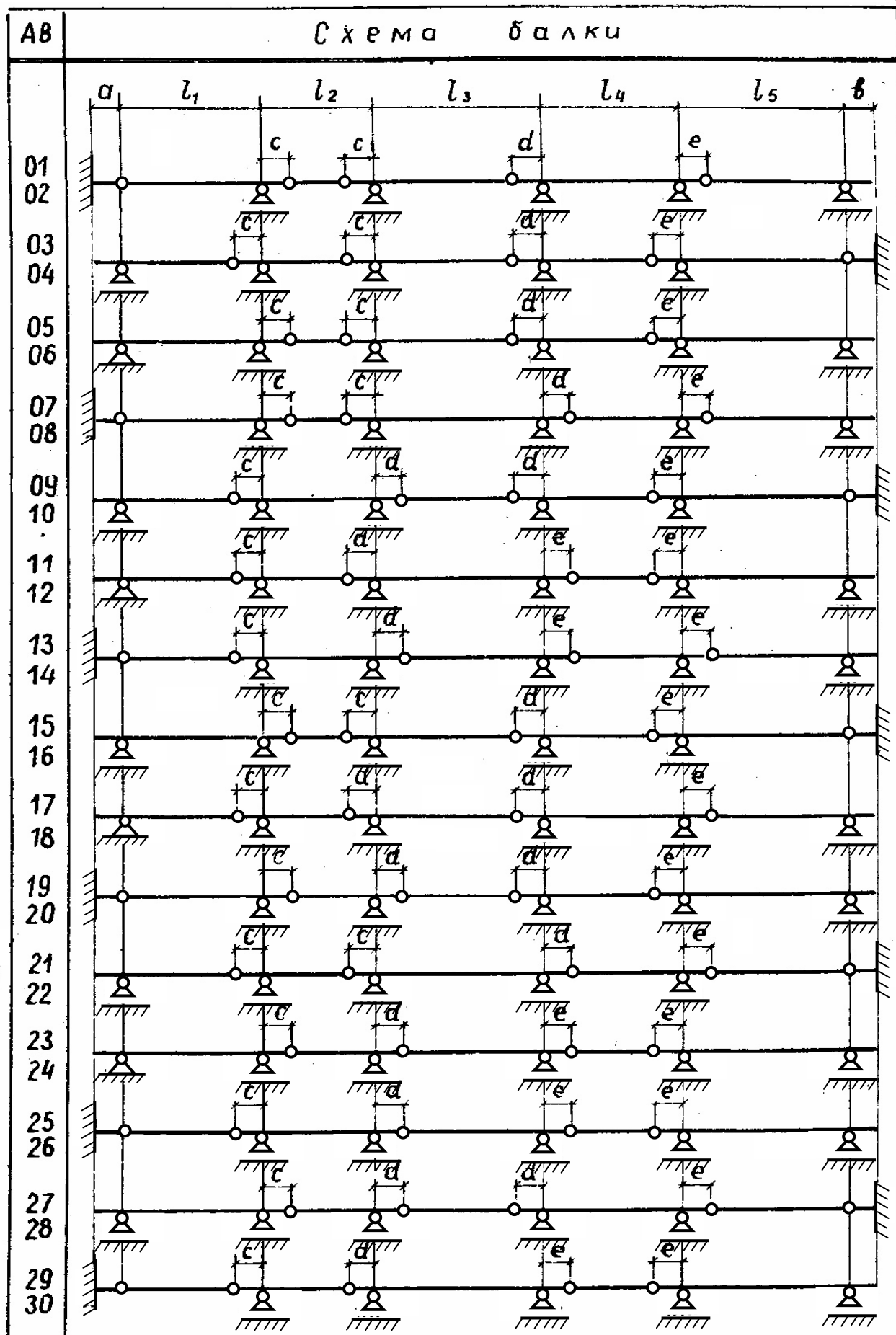


Таблица 2

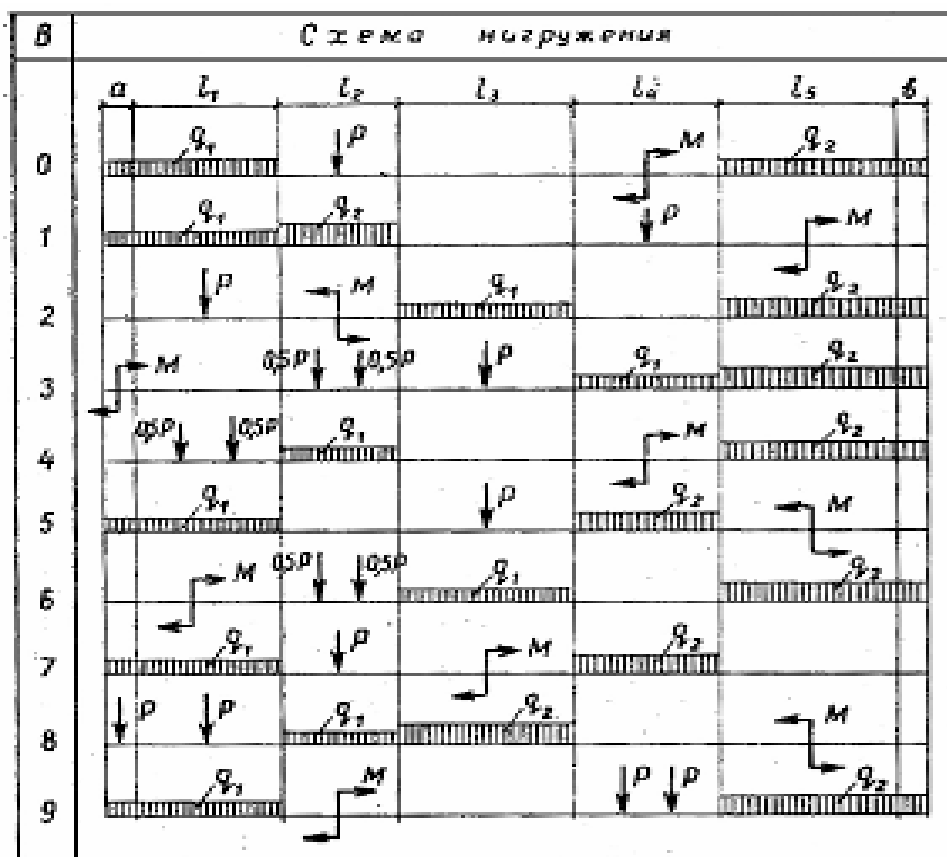


Таблица 3

C	Размеры, м										D	Нагрузки			
	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	a	b	c	d	e		q_1 кН/м	q_2 кН/м	P кН	M кН·м
0	10	8	8	6	6	2	1.5	1	1.2	1.2	0	20	40	80	100
1	8	8	10	8	8	1.5	1.2	1.2	0.8	0.8	1	25	36	100	120
2	10	6	8	6	10	1.6	1.2	0.9	0.8	0.9	2	30	44	120	110
3	9	8	7	8	9	1.5	1.5	0.8	1	0.8	3	15	32	90	90
4	8	9	6	6	10	1.2	2	0.8	0.8	1.2	4	20	50	100	80
5	10	10	8	6	7	1.2	0.8	0.8	1.2	1.2	5	28	46	70	100
6	8	9	8	10	8	1.5	1.6	0.9	1.2	1	6	32	60	90	130
7	6	8	10	9	6	1.2	1.2	0.6	1.2	0.6	7	18	34	120	70
8	9	9	8	10	9	2	1.6	1	0.6	1.2	8	22	48	130	120
9	6	9	8	10	9	1.5	1.8	1.1	0.9	0.9	9	26	42	80	100

AB	Схема рамы	AB	Схема рамы
01		04	
02		05	
03		06	

AB	Схема рамы	AB	Схема рамы
07		10	
08		11	
09		12	

AB	Схема рамы	AB	Схема рамы
13		16	
14		17	
15		18	

AB	Схема рамы	AB	Схема рамы
19		22	
20		23	
21		24	

AB	Схема рамы	AB	Схема рамы
25		28	
26		29	
27		30	

Таблица 5

С	Размеры				D	Нагрузки					
	l_1 м	l_2 м	h м	φ град		q_1 кН/м	q_2 кН/м	q_3 кН/м	P_1 кН	P_2 кН	P_3 кН
0	3	2	2	45	0	20	0	0	80	0	0
1	3	2	2,5	60	1	0	30	0	0	160	0
2	5	4	3	45	2	0	0	20	0	0	120
3	5	4	4	60	3	30	0	0	0	90	0
4	3	2,5	2,5	45	4	0	20	0	0	0	100
5	4	3	2	60	5	0	0	30	110	0	0
6	4	4	3	45	6	20	0	0	0	0	130
7	5	3	3	60	7	0	30	0	150	0	0
8	4	3	2,5	45	8	0	0	20	0	140	0
9	4	3	3	60	9	0	40	0	0	120	0

3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M, Q, N В ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКЕ

Для расчета задана арка, схема (рис. П1.1) и размеры которой выбираются (табл. 6) в соответствии с цифрам А, В и С шифра ABCD, выданного студенту преподавателем. Вид загрузки арки выбирается из табл. 7 по цифрам В и D шифра ABCD.

Требуется:

1. Определить опорные реакции и построить эпюры усилий M, Q, N в арке с помощью программы ARKA [17], реализующей расчет трехшарнирной арки с помощью уравнений равновесия.
2. Выполнить контроль построенных эпюр.

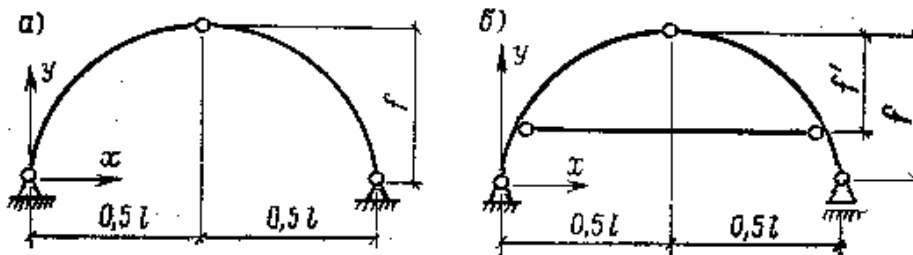


Рис. П1.1

Таблица 6

А	Очертание арки	С	Размеры, м		
			l	f	f'
0;2	Круговое, $y = f - R(1 - \cos \alpha_x)$, $R = \frac{l^2}{8f} + 0,5f$, $\alpha_x = \arcsin\left(\frac{l}{2R} - \frac{x}{R}\right)$	0	40	10	6
		1	38	8	5
		2	36	9	7
		3	34	7	5
1;3	Параболическое, $y = 4f(lx - x^2)/l^2$	4	32	6	4
		5	30	10	7
В	Схема арки	6	28	9	6
0;2;4; 6;8	Рис.П1.1,а	7	26	7	4
1;3;5; 7;9	Рис.П1.1,б	8	24	8	6
		9	22	6	5

Таблица 7

В	Схема нагружения	D	Значения нагрузок	
			q, кН/м	P, кН
0		0	16	100
1		1	20	80
2		2	24	110
3		3	28	90
4		4	32	120
5		5	36	160
6		6	40	140
7		7	42	150
8		8	46	130
9		9	50	180

Методические указания по выполнению работы и оформлению отчета по работе.

- Результаты расчетов выполняются и представляются в соответствии с примерами расчета трехшарнирных арок без затяжки (раздел 10) и с затяжкой (раздел 11) пособия.
- Титульную страницу отчета представить с использованием шаблона, приведенного в конце данного приложения 1 (с. 240).

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ

Для расчета задана ферма, схема которой выбирается (табл. 8) в соответствии с двумя первыми цифрам шифра ABCD, выданного студенту преподавателем.

Таблица 8

AB	Типовая схема фермы
01	
02	
03	

	Продолжение таблицы 8
AB	Типовая схема фермы
04	
05	
06	

Размеры фермы выбираются из табл. 9 по цифре С шифра ABCD. Нагрузка на ферму задана в виде единичных вертикальных сосредоточенных в узлах верхнего пояса (крайние силы равны 0.5). Размерность сил принята в кН.

Требуется:

1. Расчетом МКЭ на ПК с использованием программы SCAD определить усилия N в стержнях фермы и построить их эпюры. По определенным усилиям в стержнях фермы из уравнений равновесия опорных узлов фермы подсчитать опорные реакции фермы.

2. Выполнить контроль определенных нулевых усилий и усилий в отмеченных стержнях фермы, используя рациональные способы применения уравнений равновесия с учетом конструктивных особенностей фермы.

Таблица 9

Цифры шифра: AB	01, 11, 21, 31,	02, 12, 22, 32,	03, 13, 23, 33,	04, 14, 24, 34,	05, 15, 25, 35,	06, 16, 26, 36,	07, 17, 27, 37,	08, 18, 28, 38,	09, 19, 29, 39,	10, 20, 30, 40.
№ схемы	01	02	03	04	05	06	01	02	03	04
Цифра шифра: С	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L , м	12	18	24	12	18	24	24	18	12	12
H , м	1	1.5	1	1.2	1	1.4	1.2	1.3	1.4	1.5
Число панелей у фермы, шт	8	6	6	6	6	8	6	8	8	8
α , град	15	15	15	15	15	15	10	10	10	30

Методические указания по выполнению работы 4 и оформлению отчета по работе.

- При построении расчетной схемы фермы рекомендуется использовать схемы типовых ферм, приведенных в разделе «Схема» программы SCAD. При необходимости структуру решетки типовой фермы можно изменить, удаляя какие-то стержни и заменяя их новыми.
- Расчет выполнить в соответствии с приведенным в разделе 9 примером.
- Для оформления отчета по работе 4 использовать методические рекомендации, приведенные в конце примера.
- Титульную страницу отчета представить с использованием шаблона, приведенного в конце данного приложения 1 (с. 240).

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики и теории упругости

ОТЧЕТ
о выполнении расчетной работы (вставить номер работы)

Наименование работы (указано в задании)

(шифр задания)

Выполнил :
студент гр. (указать номер группы)
(указать фамилию и инициалы).
... (поставить подпись)...

Принял :
преподаватель
...

С.-Петербург
(указать год)

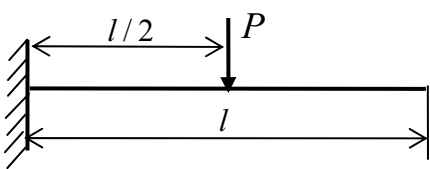
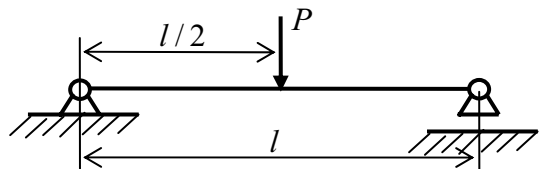
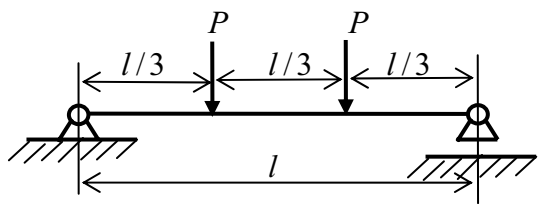
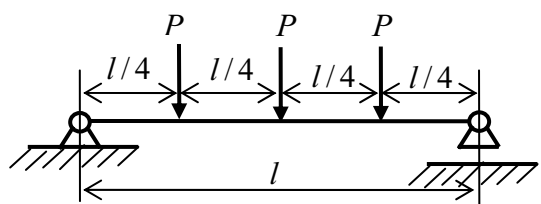
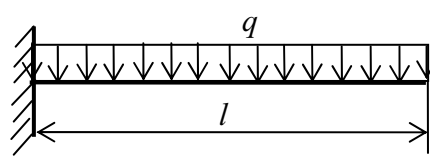
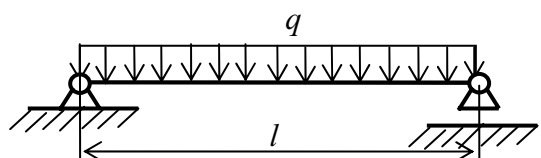
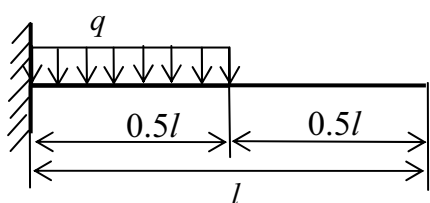
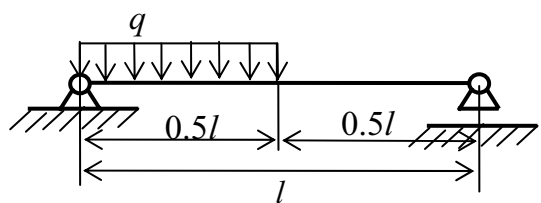
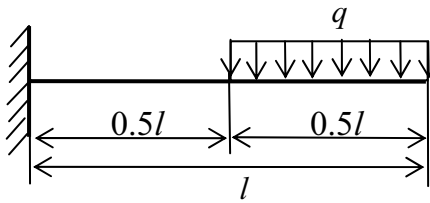
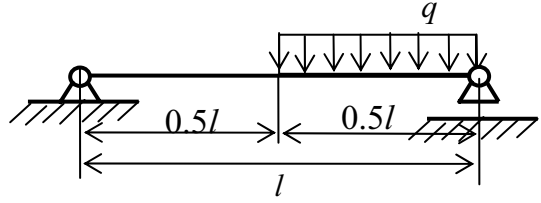
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Построение эпюр усилий в плоских СО балках и рамах

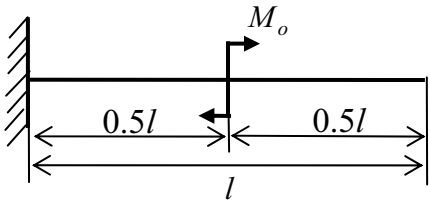
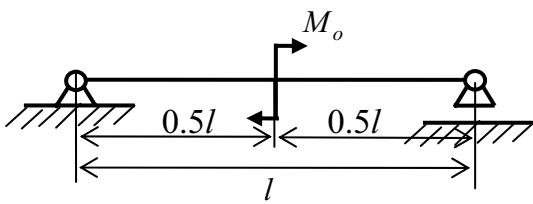
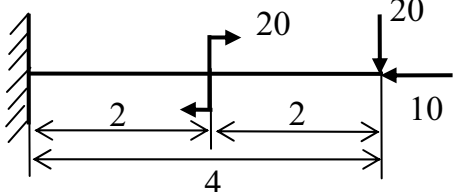
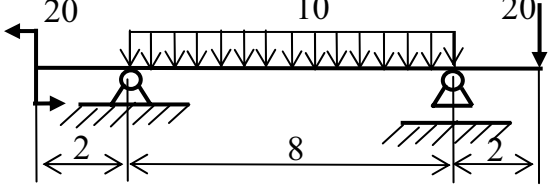
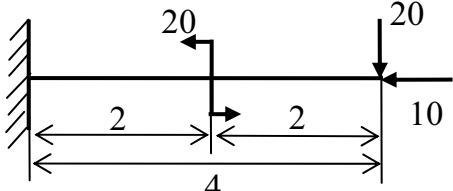
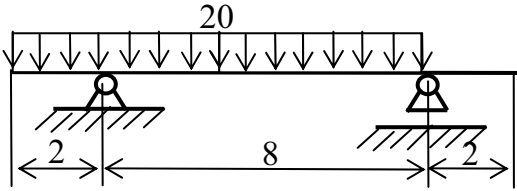
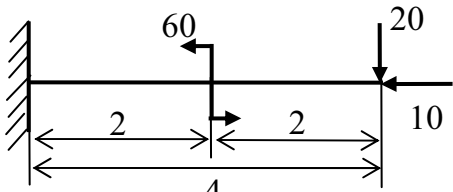
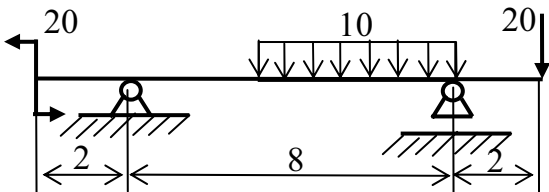
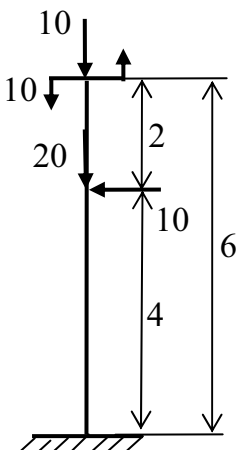
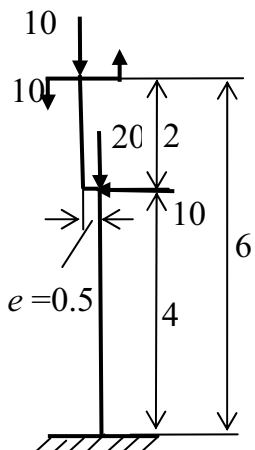
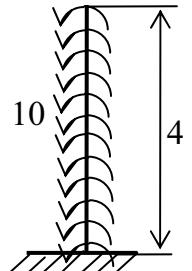
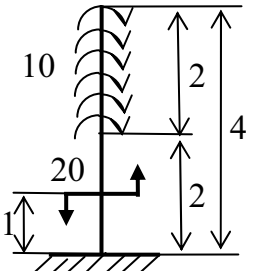
Построить вручную (без использования ПК) эпюры усилий M, Q, N в простейших плоских СО СС, приведенных в табл. 1, используя правила построения эпюр усилий, изложенные в разделе 4 УМК и в учебном пособии [1].

Примечание. При численном задании параметров СС в задачах 13-46 (табл. 1) приняты следующие размерности: длины в м, сосредоточенные силы и моменты соответственно в кН и кН·м, распределенные нагрузки и моменты соответственно в кН/м и в кН·м/м.

Таблица 1

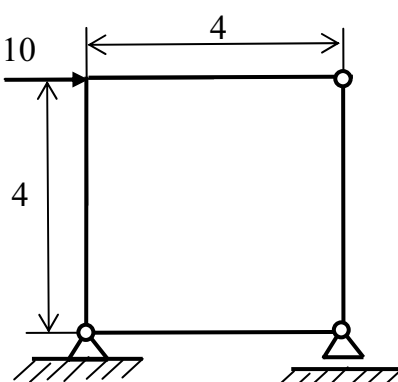
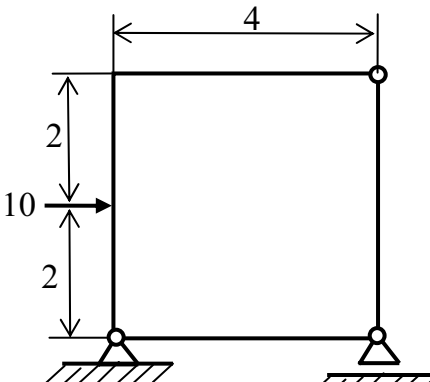
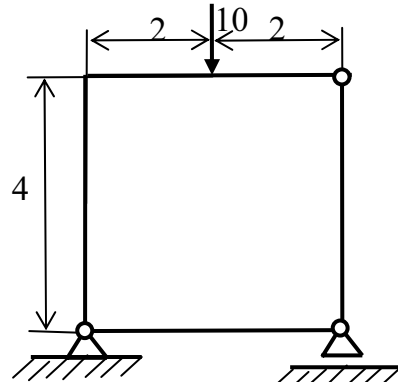
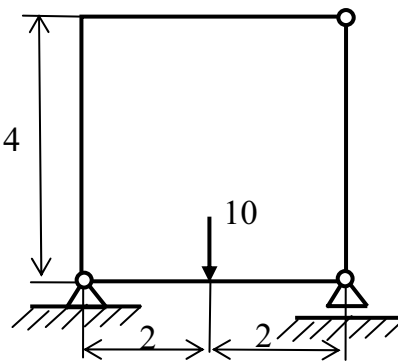
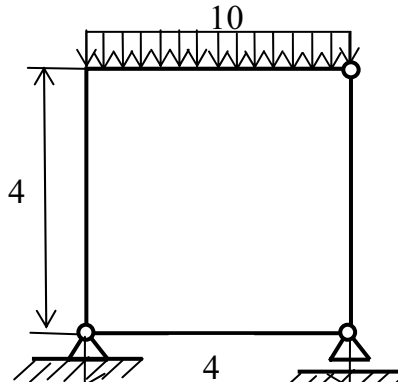
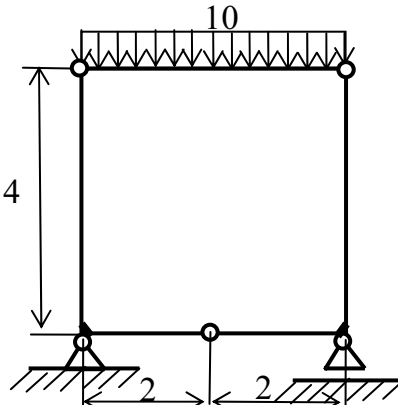
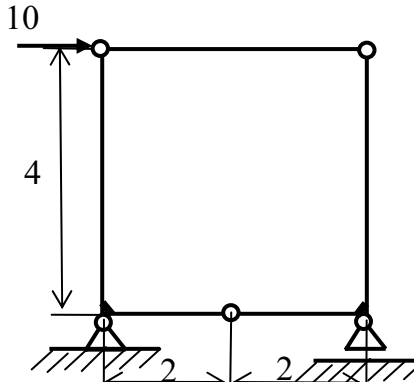
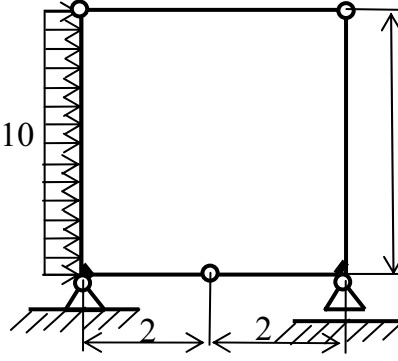
01		02	
03		04	
05		06	
07		08	
09		10	

(продолжение табл. 1)

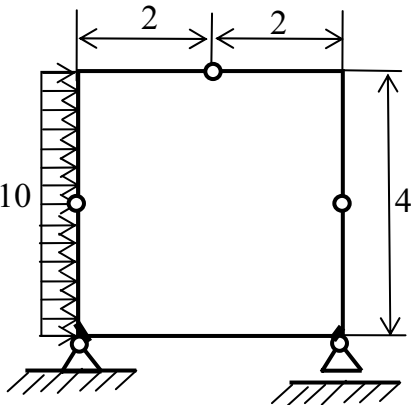
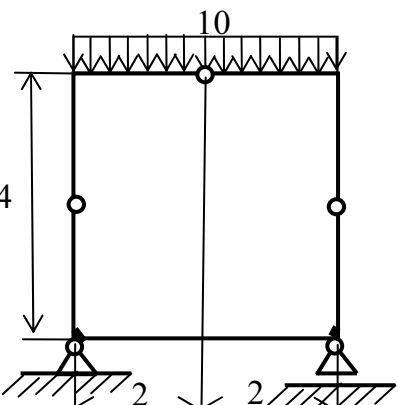
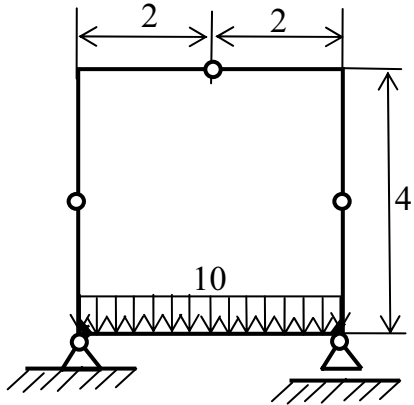
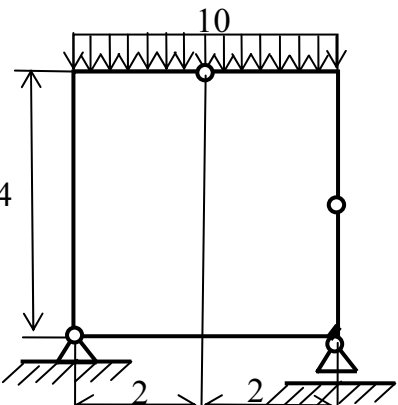
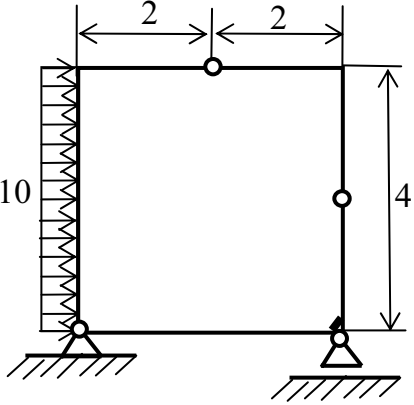
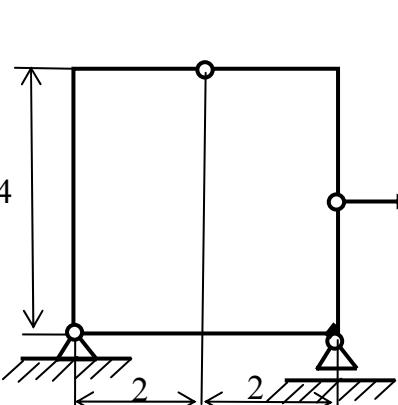
11		12	
13		14	
15		16	
17		18	
19		20	
21		22	

23		24	
25		26	
27		28	
29		30	
31		32	

(продолжение табл. 1)

33		34	
35		36	
37		38	
39		40	

(продолжение табл. 1)

41		42	
43		44	
45		46	

2. Определение опорных реакций, усилий в затяжке и усилий в сечениях СО арок

Используя известные графические условия равновесия плоского диска под действием двух (рис. 1.П1, а) и трех (рис. 1.П1, б) сил определить опорные реакции, усилия в затяжке (при ее наличии в конструкции арки) и усилия в сечениях арок, расчетные схемы которых приведены в табл. 2.П1.

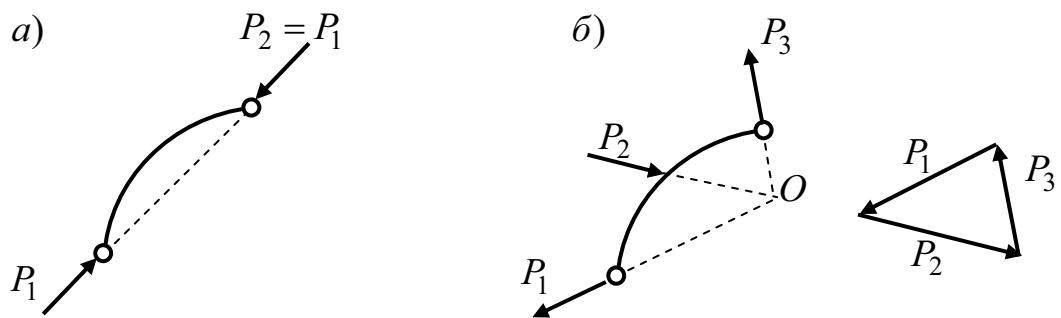
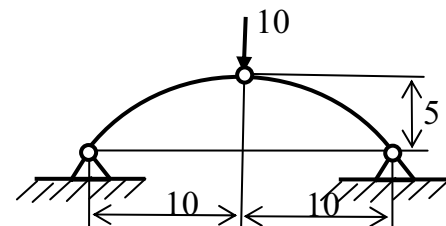
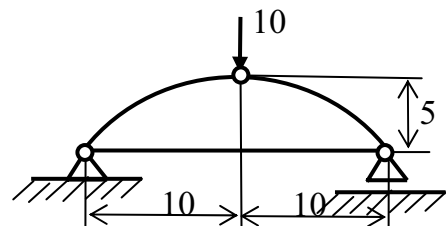
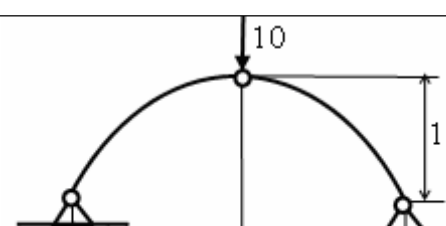
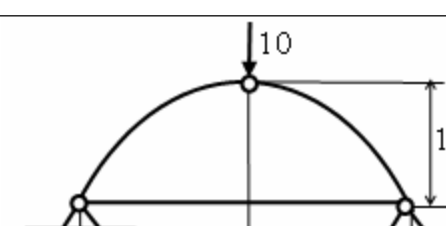
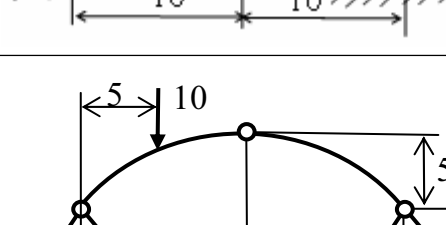
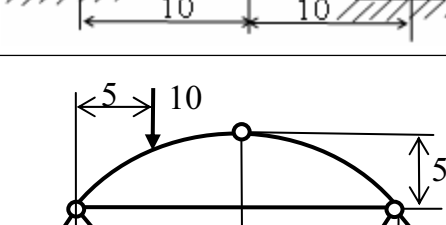
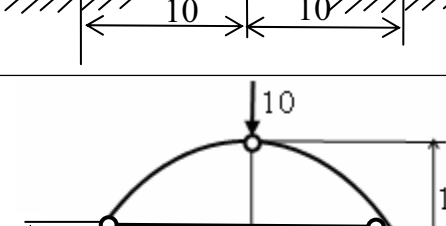
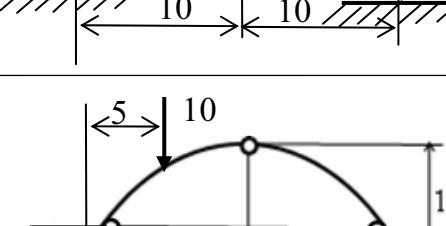
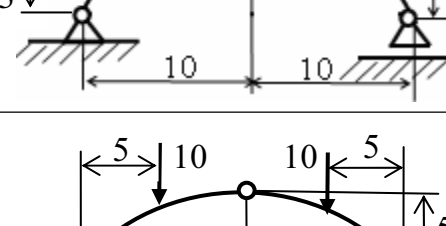
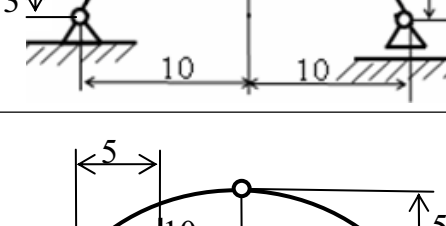


Рис. 1

Таблица 2

01		02	
03		04	
05		06	
07		08	
09		10	

11		12	
13		14	

3. Определение усилий в стержнях СО ферм

Используя уравнения равновесия, определить вручную усилия в опорных связях фермы, схема которой выбирается (табл. 3) по первым двум цифрам шифра. Нагрузкой на ферму являются направленные вниз вертикальные силы P , приложенные во всех узлах левой половины грузового пояса фермы (указан стрелкой), включая средний узел на оси симметрии (если таковой есть).

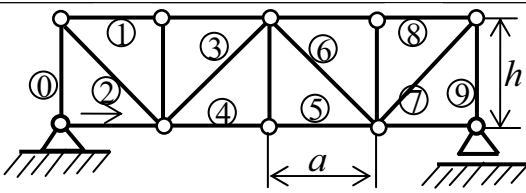
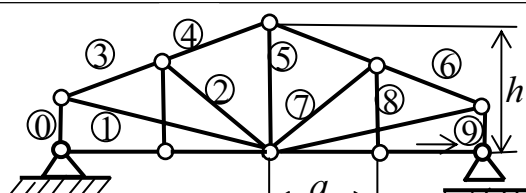
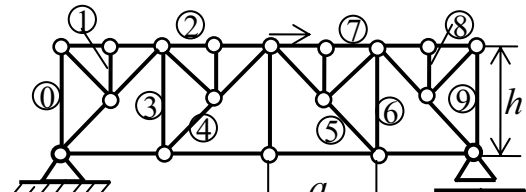
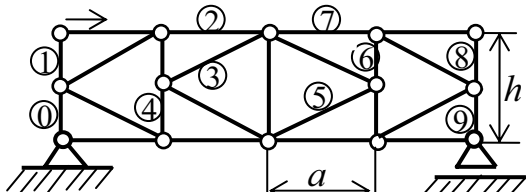
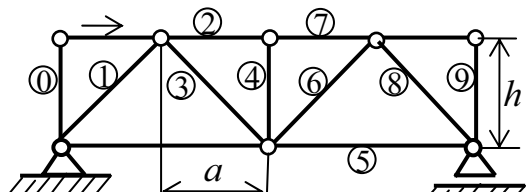
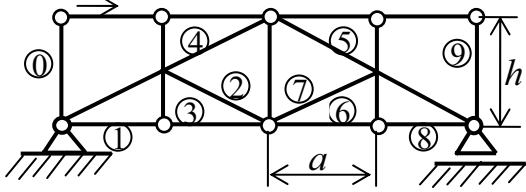
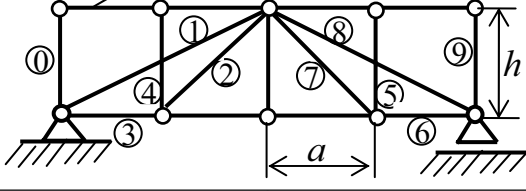
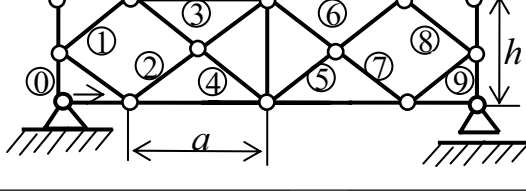
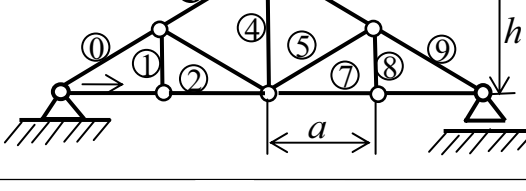
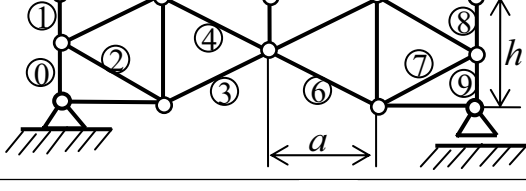
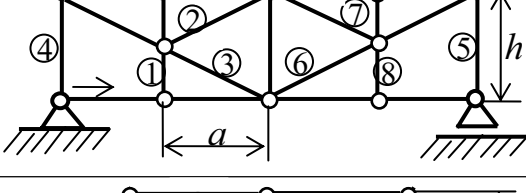
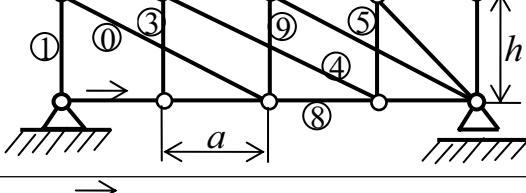
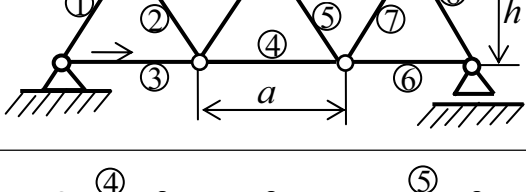
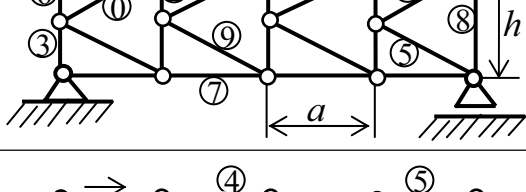
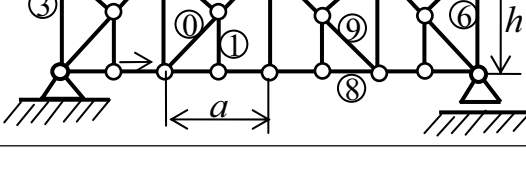
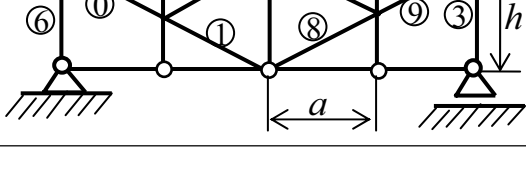
Затем, в соответствии с заданной нагрузкой и определенными опорными реакциями, выявить все явно нулевые стержни фермы и, применяя рациональные статические способы, определить продольные усилия в стержнях фермы, которые по номеру на схеме фермы (табл. 3) совпадают с четвертой цифрой шифра.

Численное значение длины a панели, высоты h фермы, и сосредоточенных сил P , назначается в соответствии с третьей цифрой шифра (табл. 4).

Примечание. Если учащийся захочет сверить результат расчета, полученный вручную, с расчетом по программе SCAD, то необходимо помнить, что при использовании для решения задачи программы SCAD нумерация стержней (КЭ) фермы будет иная.

Таблица 3

01		02	
03		04	

05		06	
07		08	
09		10	
11		12	
13		14	
15		16	
17		18	
19		20	

(продолжение табл. 3)

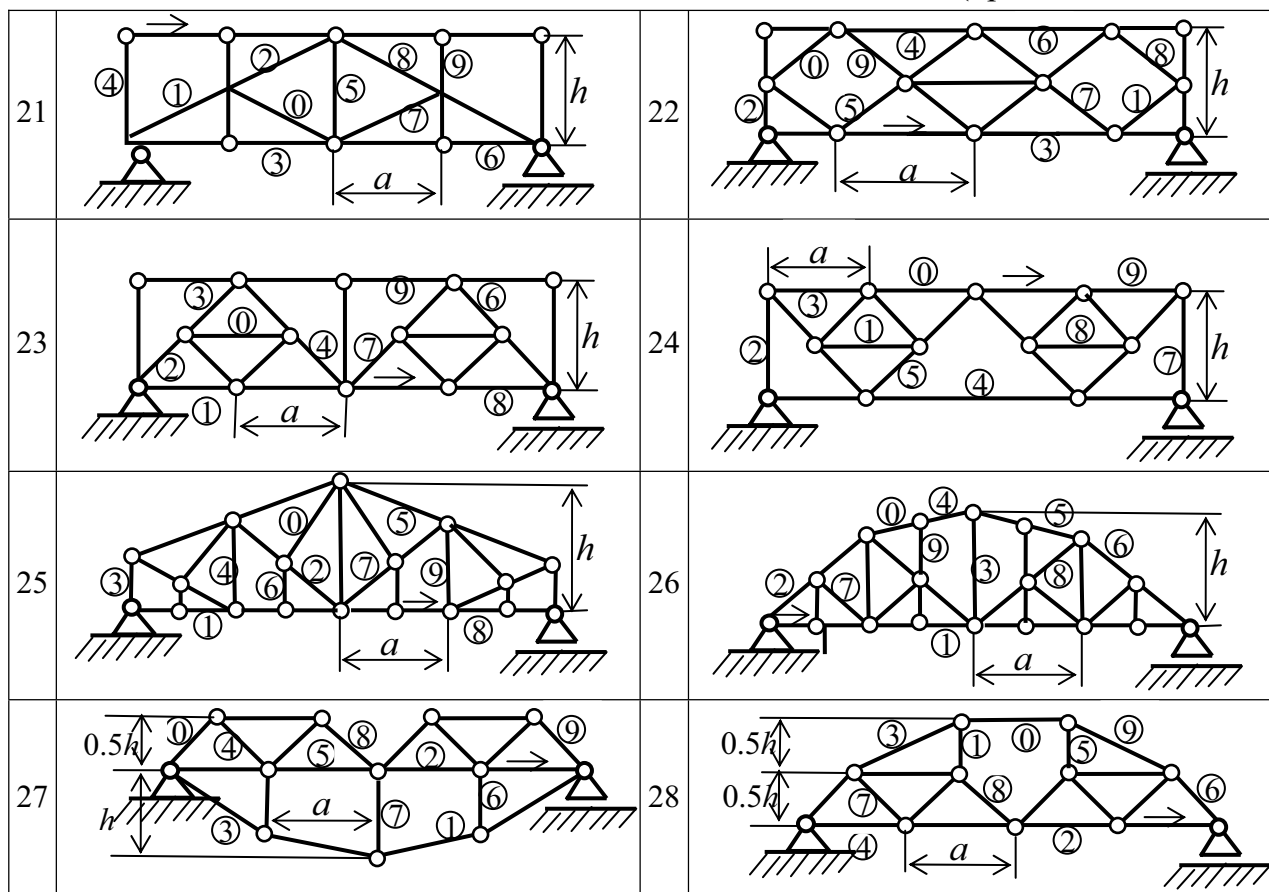


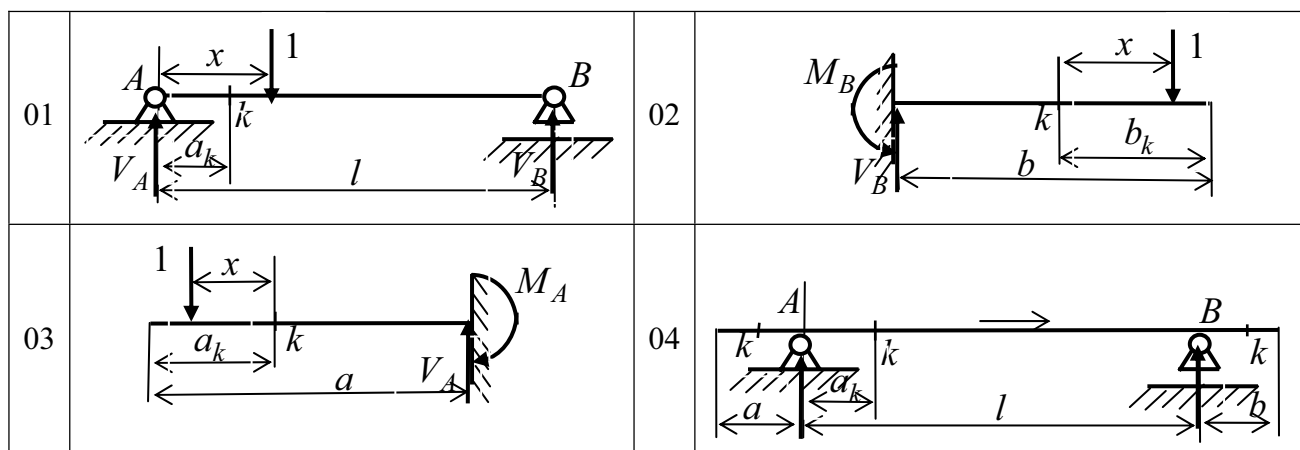
Таблица 4

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	2	3	4	1	3	2	3	4	1	3
h	2	3	4	2	4	3	4	4	2	2
P	10	20	30	16	18	20	22	24	26	20

4. Определение усилий по линиям влияния

1. Построить линии влияния (л.в) для опорных реакций и усилий M и Q в отмеченных сечениях СО балок (табл. 5).

Таблица 5



2. Вычислить с помощью л.в. максимальные по значению усилия в предположении действия на балку постоянной равномерно распределенной по всей длине балки нагрузки интенсивностью p , кН/м, равномерно распределенной временной нагрузки интенсивностью g , кН/м (с произвольным числом участков произвольной длины), и временной нагрузки в виде связанной системы сосредоточенных сил G , тс, заданной схемы (рис. 3).

Произвольное число участков произвольной длины

Одна группа сосредоточенных сил по заданной схеме

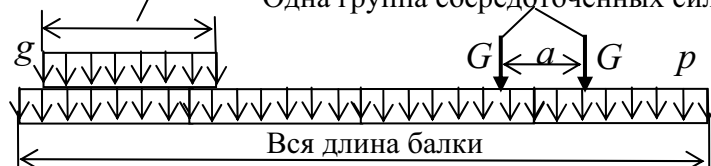


Рис. 3

3. Построить л.в. для усилий в отмеченных цифрами стержнях фермы (табл. 3.П1) при совпадении номера стержня с четвертой цифрой заданного шифра и вычислить соответствующее усилие при расположении сосредоточенных сил P в узлах левой половины грузового пояса фермы.

Контрольные работы

1. Построение эпюр усилий M , Q , N в СО раме в виде замкнутого контура

Рама для контрольной работы выбирается из табл. 6 по двум первым цифрам шифра **ABCD**. При четном номере **AB** шарнирно неподвижная и шарнирно подвижная опоры рамы, изображенной в табл. 6, меняются местами.

Таблица 6

AB	Схема рамы	AB	Схема рамы	AB	Схема рамы
01 02		03 04		05 06	
07 08		09 10		11 12	
13 14		15 16		17 18	
19 20		21 22		23 24	
25 26		27 28		29 30	

Размеры рамы и значения нагрузок берутся из табл. 7.

Таблица 7

А	Размеры рамы, м		В	Нагрузка, кН/м		
	l	h		q_1	q_2	q_3
0	3	4	0	20	40	0
1	4	3.5	1	0	40	25
2	4.5	5	2	30	40	0
3	5	4.5	3	0	40	25
4	2	3	4	20	50	0
5	3.5	2.5	5	0	50	25
6	2.5	3	6	30	25	0
7	2	2.5	7	0	20	30
8	2.5	4	8	40	30	0
9	3	3.5	9	0	30	45

Методические указания по изображению расчетной схемы рамы

1. Рисовать схему рамы в масштабе в соответствии с заданными размерами и обозначать на рисунке сразу числовые значения размеров.
2. Прежде чем рисовать нагрузку на схеме рамы ознакомьтесь с ее значениями в табл. 7. На расчетной схеме рамы не следует изображать нулевые нагрузки с нулевыми значениями..
3. В табл. 6 на схемах рамы крестиком отмечены точки W . **При изображении заданной рамы для контрольной работы 1 этого обозначения делать не нужно** (табл. 6 будет использована в дальнейшем для контрольной работы 2, где это обозначение понадобится).

Требуется:

1. Вручную построить эпюры усилий M, Q, N .
2. Выполнить контроль построенных эпюр.

Методические указания по выполнению контрольной работы

1. При выполнении работы четко указывать последовательность выполняемых действий.
 2. Даже при ручном счете (без использования программы SCAD) заданную схему рамы разбить на конечные элементы (КЭ) типа 2 (по классификации в программе SCAD).
 3. Показать оси общей системы координат (ОСК), к которой отнесена рама. При этом использовать ОСК, которая используется в программе SCAD.
 4. На каждом конечном элементе с помощью пунктира показать оси местной системы координат (МСК). Пунктир, отмечающий МСК, ставится в соответствии с правилом, данным в подразделе 4.1 пособия.
 5. На схеме рамы, разбитой на КЭ, обозначить номера КЭ и номера узлов КЭ в ОСК. При этом использовать нумерацию, принятую в программе SCAD (.см. методические указания в разделах 3 и 6 пособия).
 6. Сначала построить эпюру M , определяя значения и знаки ординат M в намеченных узлах КЭ, а для стержней, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой, и в средних сечениях КЭ.
 7. Выполнить проверку эпюры M по признакам правильной эпюры M и по равновесию узлов рамы. Узлы рамы на рисунке должны располагаться в той же последовательности, как и в схеме рамы (см. примеры в приложении 8 учебного пособия).
 8. По эпюре M на раме вручную построить соответствующую ей эпюру Q .
 9. По эпюрам M и Q способом вырезания узлов построить эпюру N (см. подраздел 5.3 учебного пособия и пособия [1, 2, 4]).
- Картина расположения узлов рамы, из которых будут определяться продольные силы в стержнях рамы, должна повторять картину расположения узлов в схеме рамы (см. раздел 8 пособия).

2. Определение перемещений в СО раме в виде замкнутого контура.

В раме с построенной в предыдущей контрольной работе эпюрой M требуется определить: 1) изменение расстояния между точкой W рамы и шарниром S ; 2) Угол φ_R «раскрытия» шарнира R (возможно задание других вариантов углов поворота сечений рамы).

В О П Р О С Ы

для подготовки к экзамену по дисциплине «Строительная механика»
в осеннем семестре учебного года

1. Общие вопросы

1. Основная задача строительной механики. Понятие о расчетной схеме сооружения. Основные допущения, принимаемые при ее построении. Стержневые системы и их детали. Уточнение основной задачи при расчете стержневых систем. Понятие о геометрически неизменяемых стержневых системах (СС). Понятие о статически определимых и статически неопределимых стержневых системах. Методы расчета стержневых систем по расчету их напряженно-деформированного состояния (НДС).

2. Понятие о жестких дисках. Способы их образования. Формулы для подсчета степени статической неопределимости шарнирных балок, рам, арок и ферм. Необходимое условие статической определимости стержневых систем. Дополнительное условие о геометрической неизменяемости СС. Структурный анализ СС.

3. Правила построения эпюр усилий в плоских стержневых системах. Эпюра изгибающего момента. Процедура построения эпюры M вручную. Признаки правильных эпюр M . Правило знаков для эпюры M на горизонтальном и вертикальном элементах типа 2 при использовании программы SCAD.

Способ построения эпюры M вручную на участке прямого стержня с равномерно распределенной нагрузкой. Эпюра поперечных сил. Процедура построения эпюры Q вручную.

Правило «тупого угла» для определения направления вектора поперечной силы в любом сечении балки по эпюре M .

Два способа определения значения усилия Q и ее знака. Использование правила знаков для горизонтального и вертикального конечных элементов типа 2 в программе SCAD.

Признаки правильного вида эпюры Q . Способ построения эпюры Q вручную на участке прямого стержня с равномерно распределенной нагрузкой.

Два способа определения значения и знака N в сечениях рам. Использование многоугольника сил для графического определения продольных сил в узлах рамы по поперечным силам.

2. Применение программы SCAD для статического расчета стержневых систем

(Умение демонстрировать на ПК с использованием программы SCAD)

2.1. Основные этапы выполнения расчетных заданий с помощью программы SCAD.

2.2. Типы конечных элементов, принимаемые в программе SCAD для расчета плоских стержневых систем. Правила знаков для усилий в узлах горизонтального и вертикального элементов на примере плоских стержневых элементов типов 1 и 2.

2.3. Построение геометрической расчетной схемы плоской стержневой системы. Продемонстрировать на примерах многопролетных балок, рам и ферм с жесткими опорами. Использование различных способов печати расчетных схем, построенных в рабочем окне дисплея компьютера при решении с помощью программы SCAD.

2.4. Последовательность операций по заданию типа и жесткости элементов в статически

определимых системах. Задание нагрузок на конечные элементы. Создание загруженной стержневой системы.

2.5. Представление результатов расчета в программе SCAD и работа с графическими и табличными результатами. Продемонстрировать умение использовать возможности программы SCAD. Продемонстрировать способы сохранения и печати графических и расчетных результатов расчета на примере.

3. Расчет статически определимых балок

3.1. Проверка статической определимости многопролетной балки с шарнирами в пролетах.

3.2. Последовательность ручного расчета балки с шарнирами в пролетах с использованием этажной схемы взаимного опирания звеньев балки между шарнирами друг на друга и на основание.

3.3. Последовательность решения задачи по построению эпюры M на звене этажной схемы шарнирной балки. Правила построения эпюры M , правило знаков для ее ординат.

3.4. Графо-аналитический прием построения эпюры M на участке балки с равномерно распределенной нагрузкой по трем ординатам (в начале, конце и середине участка).

3.5. Последовательность построения эпюры Q на звене этажной схемы шарнирной балки. Два способа определения ординат эпюры Q и ее знаков.

3.6. Продемонстрировать последовательность решения задачи по расчету шарнирной балки на ПК с помощью программы SCAD.

3.7. Изобразить плоский стержневой конечный элемент, используемый для расчета балок методом конечных элементов (МКЭ) и показать правила знаков для усилий в его сечениях.

4. Расчет статически определимых рам

4.1. Продемонстрировать проверку статической определимости рам.

4.2. Продемонстрировать на примерах аналитический, графический и графо-аналитический способы определения опорных реакций рам вручную.

4.3. Продемонстрировать два способа составления и решения системы уравнений равновесия для определения опорных реакций рам: формального и рационального с точки зрения последовательности составления и решения уравнений равновесия системы.

4.4. Продемонстрировать рациональную последовательность построения эпюры M в раме вручную с использованием: минимального числа сечений, в которых необходимо вычислить ординаты эпюры M для ее построения; свойств эпюры M ; равновесия узлов и отсеченных частей.

4.5. Два способа вычисления ординат эпюры Q на стержнях рамы.

4.6. Два способа вычисления ординат эпюры N на стержнях рамы.

4.7. Продемонстрировать приемы контроля эпюр усилий в рамах.

4.8. Последовательность расчета рам на ПК с использованием программы SCAD.

4.9. Где и в какой системе координат представляются результаты определения перемещений в раме при ее расчете на ПК с помощью метода перемещений в форме МКЭ, реализуемого в программе SCAD.

4.10. Где и в какой системе координат представляются результаты определения усилий в стержнях рамы при ее расчете на ПК с помощью метода перемещений в форме МКЭ, реализуемого в программе SCAD.

4.11. Покажите горизонтальный, наклонный и вертикальный конечные элементы, применяемые в программе SCAD для расчета плоских рам, отнесите их к осям местной системы координат (МСК) и покажите положительные направления усилий в сечениях этих элементов.

4.12. Как изменятся положительные направления усилий при смене направления оси X_1 местной системы координат.

5. Расчет статически определимых арок

5.1 Трехшарнирная арка без затяжки как пример статически определимой арки. Сопоставление опорных реакций и усилий в сечениях трехшарнирной арки без затяжки с соответствующими величинами в статически определимой однопролетной балке, имеющей такой же пролет и несущей такую же вертикальную нагрузку как арка.

Влияние распора арки на усилия в ее сечениях и на конструкцию, на которую опирается арка.

5.2 Трехшарнирная арка с затяжкой. Причина введения в конструкцию трехшарнирной арки затяжки. Формулы для определения реакций и усилий в сечениях арки для арки с затяжкой соединяющей опоры и для арки с повышенным расположением затяжки по сравнению с отметкой опор.

5.3. Безмоментная трехшарнирная арка. Как при заданных параметрах пролета, стрелы арки и нагрузки не арку получить ось безмоментной трехшарнирной арки.

6. Расчет статически определимых ферм

6.1. Продемонстрировать рациональные способы применения уравнений равновесия для определения усилий в стержнях ферм.

6.2. Продемонстрировать правила определения нулевых стержней в фермах.

6.3. Последовательность решения задачи по определению усилий в стержнях ферм.

6.4. Продемонстрировать решение задачи по определению усилий в стержнях ферм на ПК с использованием программы SCAD.

Учебные пособия

Все необходимые учебно-методические материалы для подготовки по заданным вопросам приведены в данном учебном пособии.

Имеются они и в Учебно-Методическом Комплексе (УМК) по строительной механике [21] и в его электронной копии на сайте <http://smitu.cef.spbstu.ru> кафедры СМ и ТУ.

Чтобы выйти на сайте в раздел УМК по строительной механике, необходимо, начиная с главной страницы сайта последовательно открыть: **Студентам / Строительная механика / Учебно-методический комплекс по использованию программы SCAD в строительной механике.**

Все материалы УМК [21] можно «скачать» также непосредственно в учебных компьютерных классах кафедры СМ и ТУ (ауд. 514-ПГК) и кафедры ГС и ПЭ (ауд. 404-ПГК).

Можно также использовать учебные пособия, указанные в библиографическом списке в конце данного пособия.

Библиографический список

1. Константинов И.А., Лалина И.И. Строительная механика. Расчет стержневых систем. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2005. 155с. (Сайт <http://smitu.cef.spbstu.ru> – 176 с).
2. Константинов И.А. Строительная механика. Использование программы SCAD для расчета стержневых систем. Ч.1: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2003 и 2004. 81с.
3. Константинов И.А., Лалина И.И. Строительная механика. Использование программы SCAD для расчета стержневых систем. Ч.2.: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2005. 82с. и 2007. 91с.
4. Константинов И.А., Лалина И.И. Строительная механика. Примеры расчетных работ с использованием программы SCAD: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. 72 с.
5. Каркасные здания и сооружения. Расчет усилий с помощью программы SCAD. Метод. указания. / Сост. И.А. Константинов, В.А. Соколов. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. 39 с.
6. Строительная механика. Учебные задания и задачи по расчету стержневых систем. / Сост. И.А. Константинов, В.В. Лалин, И.И.Лалина. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2007. 47 с.
7. Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А. Расчет статически определимых стержневых систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.
8. Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А. Расчет статически неопределимых стержневых систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
9. Колосова Г.С. Механика деформируемого тела. Расчет статически определимых балок и рам: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1996.
10. Колосова Г.С., Смелов В.А., Смирнов М.С. Строительная механика. Ч.1. Электронный учебник., СПб., Изд-во СПбГТУ, 2001.
11. Колосова Г.С., Смирнов М.С. Строительная механика. Ч. 2. Электронный учебник, СПб., Изд-во СПбГТУ, 2002.
12. Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
13. Смелов В.А. Метод перемещений в строительной механике: Учеб. пособие. Л.: Изд-во ЛПИ, 1976.
14. Смелов В.А. Расчет балок и балочных плит на упругом основании. Учеб. пособие. Л.: Изд-во ЛПИ, 1973.
15. Колосова Г.С. Решение одномерных задач строительной механики численными методами: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПб ГТУ, 1993.
16. Головин А.Я., Константинов И.А., Кунина Л.И., Николаева М.В. Строительная механика ч.1. Статически определимые системы. Л.: Изд-во ЛПИ, 1968. 178с.
17. Строительная механика. Программы для ЭВМ.: Метод. указания. Сост.: М.С.Смирнов. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. 36 с.
18. Учебные задания по строительной механике. Составители И.А. Константинов, В.А. Рукавишников, В.А. Смелов. Л.: Изд-во ЛПИ, 1981. 47с..
19. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. Вычислительный комплекс SCAD: – М.:Изд-во АСВ, 2004. – 592 с.
20. А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа – Киев: ВПП «Компас», 2001. – 448 с.: ил.
21. Константинов И.А., Лалин В.В., Лалина И.И. Строительная механика. Расчет стержневых систем с использованием программы SCAD. Учебно-методический комплекс. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2008. 451с. (Сайт <http://smitu.cef.spbstu.ru>).

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
1. Общие сведения о стержневых системах.....	5
1.1. Основная задача строительной механики и цели ее изучения.....	5
1.2. Расчетные схемы сооружений.....	6
1.3. Воздействия на сооружения.....	8
1.4. Структура курса «Строительная механика» в учебном плане.....	9
1.5. Типы плоских стержневых систем и детали их расчетных схем.....	10
1.6. Понятие о геометрически изменяемых и неизменяемых системах.....	14
1.7. Понятие о статически определимых и неопределимых системах.....	15
1.8. Методы расчета стержневых систем по определению их НДС.....	18
2. Условия геометрической неизменяемости и статической определимости плоских стержневых систем.....	22
2.1. Понятие о жестких дисках. Способы их образования.....	22
2.2. Условия закрепления диска на основании и условие статической определимости опорных реакций.....	25
2.3. Условия геометрической неизменяемости и статической определимости диска в виде одного замкнутого контура.....	27
2.4. Условия геометрической неизменяемости и статической определимости стержневой системы как системы дисков, соединенных шарнирами.....	30
2.5. Выяснение принадлежности стержневой системы к статически определимым или статически неопределимым системам.....	34
2.6. Подсчет степени статической неопределимости ферм.....	39
3. Предварительные сведения о расчете стержневых систем методом конечных элементов с использованием программы SCAD.....	42
3.1. Представление расчетных схем стержневых систем как систем конечных стержневых элементов.....	42
3.2. Построение расчетной схемы МКЭ на этапах постановки опорных связей и одиночных шарниров на конечных элементах.....	45
3.3. Представление на расчетной схеме МКЭ стержневой системы шарнирных узлов.....	48
3.4. Особенность учета на расчетной схеме МКЭ консольных стержней.....	51
3.5. Внутренние усилия в концевых сечениях КЭ типа 2 и правило знаков для них.....	52
3.6. Назначение жесткостей конечных элементов в расчетной схеме МКЭ стержневой системы.....	57
3.7. Загружение расчетной схемы МКЭ.....	58
4. Правила построения эпюр внутренних усилий M, Q, N на стержнях плоской стержневой системы.....	60
4.1. Эпюры внутренних усилий M, Q, N	
4.2. Эпюра изгибающих моментов M	60
4.3. Эпюра поперечных сил Q	69
4.4. Эпюра продольных сил N	75
4.5. Используемые способы контроля построенных эпюр M, Q, N	78

5. Использование конструктивных особенностей статически определимых стержневых систем для выбора рационального способа определения усилий с помощью уравнений равновесия.....	80
5.1. Последовательность определения усилий вручную.....	80
5.2. Использование этажной схемы шарнирной балки	81
5.3. Использование конструктивных особенностей статически определимых рам без замкнутых контуров.....	83
5.4. Использование конструктивных особенностей статически определимых рам, имеющих замкнутые контуры.....	90
5.5. Использование конструктивных особенностей трехшарнирных арок	92
5.6. Использование конструктивных особенностей ферм.....	98
5.7. Основные свойства статически определимых и статически неопределимых стержневых систем в сравнении.....	106
5.8. Исследование геометрической неизменяемости стержневых систем статическим способом «нулевых нагрузок» при соблюдении необходимого условия $n = 0$	107
5.9. Понятие о линиях влияния и их использовании при расчете стержневых систем.....	112
5.10. Информация о сборнике заданий для самостоятельных расчетных работ студентов на тему «Определение усилий и построение эпюр M, Q, N в статически определимых стержневых системах».....	114
6. Общие вопросы применения программы SCAD для расчета плоских стержневых систем при статической нагрузке.....	116
Введение.....	116
1. Запуск программы и подготовка к созданию расчетной схемы.....	117
2. Создание расчетной схемы стержневой системы для МКЭ.....	121
3. Загружение расчетной схемы МКЭ.....	128
4. Выполнение линейного расчета и анализ результатов.....	130
7. Построение эпюр M, Q в многопролетной шарнирной балке.....	131
7.1. Расчет балки методом конечных элементов на ПК с использованием программы SCAD.....	132
7.2. Контроль результатов расчета балки.....	142
8. Построение эпюр M, Q, N в рамах.....	147
8.1. Расчет рамы методом конечных элементов на ПК с использованием программы SCAD.....	147
8.2. Контроль результатов расчета рамы.....	154
8.3. Пример расчета рамы с наклонным стержнем МКЭ на ПК с использованием программы SCAD.....	157
8.4. Контроль расчета рамы с наклонным стержнем.....	163
9. определение усилий в стержнях фермы.....	167
9.1. Расчет фермы методом конечных элементов на ПК с использованием программы SCAD.....	168
9.2. Использование уравнений равновесия для контроля результатов расчета фермы.....	177
10. Построение эпюр усилий M, Q, N в трехшарнирной арке без затяжки	182

10.1. Расчет арки с помощью программы ARKA, реализующей расчет с помощью уравнений равновесия.....	183
10.2. Контроль результатов расчета.....	188
11. Построение эпюр усилий M, Q, N в трехшарнитной арке с затяжкой.	190
11.1. Расчет арки с помощью программы ARKA, реализующей расчет с помощью уравнений равновесия.....	191
11.2. Контроль результатов расчета.....	192
12. Определение перемещений сечений стержней линейно деформируемых стержневых систем.....	196
12.1. Введение.....	196
12.2. Формула Максвелла-Мора для определения действительных перемещений линейно деформируемых стержневых систем.....	197
12.3. Упрощение формулы Максвелла-Мора для конкретного вида стержневых систем.....	201
12.4. Способы вычисления интегралов в формуле Максвелла-Мора.....	201
12.5. Матричный вид вычислений интеграла Максвелла-Мора по формуле Симпсона.....	203
12.6. Понятие о матрице податливости стержневой системы. Матричная форма ее вычисления при использовании формулы Симпсона.....	205
12.7. Определение перемещений в статически определимых стержневых системах от заданной осадки опор.....	207
12.8. Определение перемещений в статически определимых стержневых системах от изменения температуры их стержней.....	209
13. Пример определения перемещений в статически определимой раме с использованием программы SCAD.....	211
13.1. Введение.....	211
13.2. Постановка задачи по определению перемещений в раме.....	212
13.3. Инструкция по выполнению расчета рамы с помощью программы SCAD	214
Приложение 1. Сборник учебных заданий к расчетным работам на тему: «Определение усилий и построение эпюр M, Q, N в статически определимых стержневых системах с использованием программы SCAD».....	225
Приложение 2. Контрольные задачи.....	241
Приложение 3. Вопросы для подготовки к зачетам и экзаменам.....	253
Библиографический список.....	256

КОНСТАНТИНОВ Игорь Алексеевич
ЛАЛИН Владимир Владимирович
ЛАЛИНА Ирина Игоревна

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Часть 1

Расчет статически определимых стержневых систем
с использованием программы SCAD

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005 – 93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать . . . 200 . Формат 60×84/16
Усл. печ. л. . Уч.- изд. л. . Тираж . Заказ .

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,
в типографии Издательства Политехнического университета,
195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.