

Федеральное агентство по образованию

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

И.А. КОНСТАНТИНОВ В.В. ЛАЛИН И.И. ЛАЛИНА

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

**Расчет плоских элементов сооружений
с использованием программы SCAD**

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007**

Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

И.А. Константинов В.В. Лалин И.И. Лалина

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Расчет плоских элементов сооружений
с использованием программы SCAD

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007

УДК 624.04 (075.8)

Константинов И. А., Лалин В. В., Лалина И. И. **Теория упругости. Расчет плоских элементов сооружений с использованием программы SCAD.:** Учеб. пособие. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 87 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту инженерной подготовки по направлению «Строительство».

На примере программы SCAD реализуется идея использования современных проектно-вычислительных комплексов, применяемых в инженерной практике для расчетов и проектирования сооружений и их элементов, напряженно-деформированное состояние которых описывается уравнениями теории упругости.

Пособие состоит из четырех разделов. В первом дается представление о задачах теории упругости и методах их решения. Второй и третий разделы посвящены получению системы уравнений плоской задачи и примеру ее решения методом конечных элементов. В четвертом разделе рассмотрена методика и примеры расчета тонких плит методом конечных элементов. Все примеры выполнены с использованием программы SCAD.

Предназначено для студентов всех форм обучения направления «Строительство», изучающих применение методов теории упругости к расчету сооружений и их элементов.

Табл. 3 . Ил. 53 . Библиогр.: 11 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
1. Представление о задачах и методах теории упругости	5
1.1. Основная задача теории упругости.....	5
1.2. Основные допущения и гипотезы, используемые в теории упругости.....	9
1.3. Предварительные сведения о постановке и методах решения основной задачи теории упругости.....	11
1.4. Обозначения искомых величин	12
1.5. Два варианта плоской задачи теории упругости.....	15
2. Плоская задача теории упругости	17
2.1. Статические уравнения.....	17
2.2. Геометрические уравнения.....	20
2.3. Физические уравнения (уравнения закона Гука)	22
2.4. Полная система уравнений теории упругости для плоской задачи.....	24
2.5. Идея и последовательность решения плоской задачи теории упругости МКЭ в форме метода перемещений.....	26
2.6. Конечные элементы, используемые в программе SCAD.....	33
3. Пример расчета НДС балки-стенки МКЭ с использованием программы SCAD	37
3.1. Постановка задачи.....	37
3.2. Инструкция по работе с программой SCAD	38
4. Расчет тонких плит	43
4.1. Пространственное тело, рассматриваемое как тонкая плита.....	43
4.2. Рабочие гипотезы, принимаемые при расчете пространственного тела в виде тонкой плиты.....	46
4.3. Неизвестные величины НДС тонкой плиты и формулы для их определения.....	49
4.4. Основное уравнение для определения прогибов тонкой плиты. Последовательность решения задачи по получению НДС плиты.....	59
4.5. Типы конечных элементов, используемых в программе SCAD для расчета тонких плит.....	61
4.6. Пример расчета балочной плиты	67
4.7. Использование приближенного способа расчета плиты, учитывающего ее конструктивную симметрию и симметрию нагрузки.....	73
4.8. Использование для расчета балок-стенок и тонких плит конечных элементов оболочечного типа.....	78
Библиографический список	87

ПРЕДИСЛОВИЕ

Значительная часть расчетов при проектировании строительных конструкций выполняется на персональных компьютерах (ПК) с помощью специальных проектно-вычислительных комплексов (ПВК).

Применяемые ПВК отличаются друг от друга методическими и сервисными разработками, но все они включают в себя расчеты, выполняемые методами строительной механики, теории упругости и динамики сооружений. Алгоритмы численных расчетов в этих программах в основном строятся на методе конечных элементов (МКЭ).

В настоящее время наиболее доступным для применения в учебном процессе оказался ПВК SCAD [1, 2].

Кафедра строительной механики и теории упругости использует программу SCAD для выполнения студентами вычислительных работ по дисциплинам «Строительная механика», «Теория упругости» и «Динамика сооружений».

Авторами данного учебного пособия созданы и представлены на сайте кафедры <http://smitu.cef.spbstu.ru> учебно-методические комплексы (УМК) по использованию программы SCAD в учебном процессе по указанным дисциплинам. Часть этих материалов имеются в библиотеках университета [3-6].

Эти пособия облегчают учащимся использовать программу SCAD при выполнении самостоятельных расчетных работ.

Данное пособие также входит в УМК по использованию программы SCAD в учебном процессе по дисциплине «Теория упругости» и имеется на указанном сайте кафедры. Оно написано для студентов специальности «Промышленное и гражданское строительство» (ПГС), которым при выполнении проектов по зданиям и сооружениям из монолитного железобетона требуется определение напряженно-деформированного состояния (НДС) соответствующих сооружений с использованием методов теории упругости.

В пособии дается краткое представление о задачах теории упругости, показу их общности и отличия с задачами сопротивления материалов и строительной механики стержневых систем. Здесь же дается представление об уравнениях теории упругости для часто встречающихся в инженерных конструкциях элементах в виде балок-стенок и плит, и приводятся примеры их расчета методом конечных элементов с помощью программы SCAD.

Для более полного ознакомления с задачами теории упругости и методами их расчета, в том числе методом конечных элементов, студентам инженерно-строительного факультета СПбГПУ рекомендуются работы [7, 8, 9].

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ЗАДАЧАХ И МЕТОДАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1.1. Основная задача теории упругости

При проектировании гражданских или промышленных сооружений необходимо обеспечить их прочность, жесткость и устойчивость.

Для достижения этой цели требуется определить напряженно-деформированное состояние (НДС) сооружения от заданных воздействий (нагрузки, изменения температуры или в виде заданных перемещений каких-либо элементов сооружения).

Эта задача и является основной задачей механики твердого деформируемого тела. Изучению методов ее решения посвящены такие дисциплины как «Сопротивление материалов», «Строительная механика стержневых систем», «Теория упругости», «Динамика сооружений» и специальные дисциплины по строительным конструкциям (сооружениям).

Определение НДС сооружения обычно выполняется расчетным путем с помощью специально разработанных теоретических методов для некоторой расчетной модели. Затем результаты расчетов проверяются экспериментально либо в натуральных условиях строительства и эксплуатации уже построенного сооружения, либо в лабораторных условиях на его физической модели.

Теоретические методы расчета НДС сооружений (или их элементов) в виде отдельных стержней при растяжении – сжатии, изгибе, кручении, как в условиях каждого воздействия, так и в условиях сочетания указанных воздействий, изучаются в дисциплине «Сопротивление материалов» [11].

Методы расчета НДС сооружений в виде стержневых систем (ферм, балок, рам, арок) рассматриваются в дисциплине «Строительная механика стержневых систем» [3–6].

Однако, многие задачи по определению НДС сооружений или их элементов, встречающихся в инженерной практике проектирования, не могут быть решены методами, разработанными в сопротивлении материалов и строительной механике стержневых систем, или решаются этими методами с большой погрешностью. Для решения этих более сложных задач используются методы раздела механики, называемого «Теория упругости». Рассмотрим примеры таких задач [7, 10].

Определение НДС толстой балки (балки-стенки)

На рис. 1.1,*а* изображена тонкая по высоте h балка, когда отношение h/l

мало и при построении методики определения нормальных напряжений в поперечных сечениях балки можно использовать гипотезу плоских сечений, с помощью которой в курсе сопротивления материалов получена формула, дающая линейное распределение нормальных напряжений σ_x в сечении балки по его высоте h . Если принять направление оси Z вверх (см. рис. 1.1,а) эта формула будет иметь вид

$$\sigma_x = -\frac{M \cdot z}{J_y}. \quad (1.1)$$

Здесь M – изгибающий момент в сечении балки; J_y – момент инерции сечения относительно оси Y , лежащей в плоскости поперечного сечения балки; z – расстояние от оси Y сечения до точки сечения, в которой определяется нормальное напряжение σ_x .

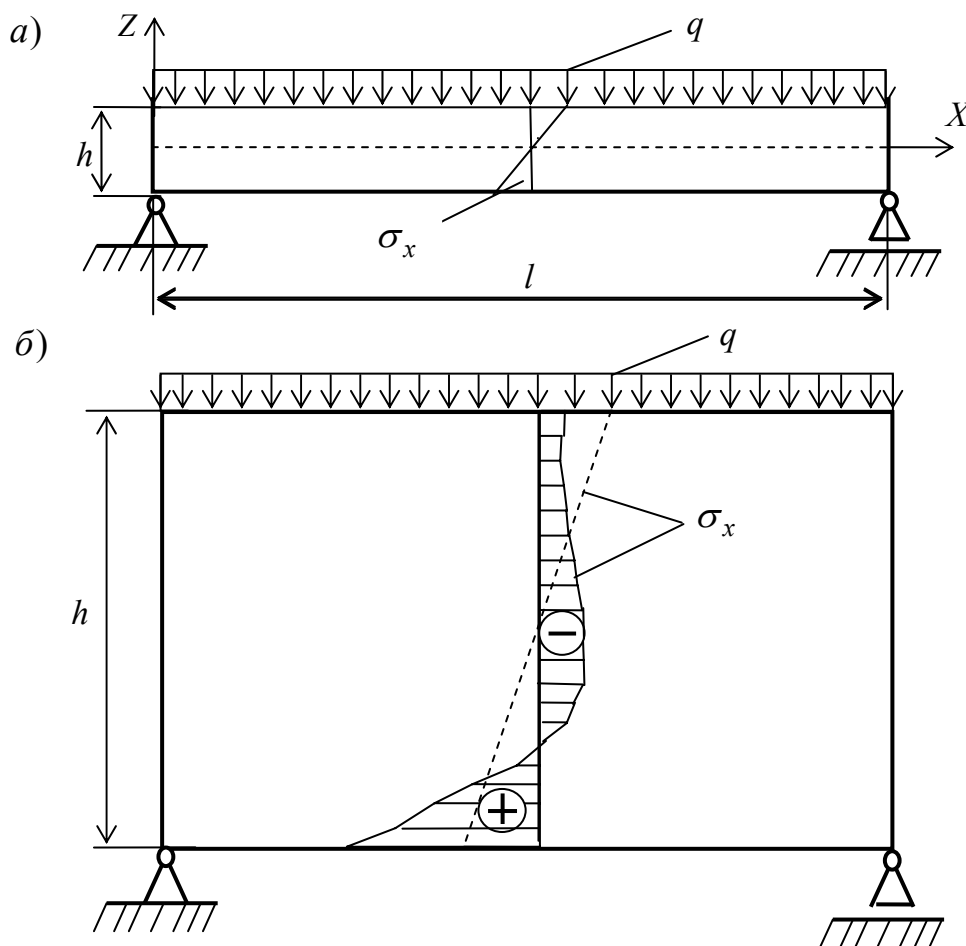


Рис. 1.1

С увеличением высоты h балки использование гипотезы плоских сечений и применение указанной формулы, полученной в курсе сопротивления материалов для тонких балок, будет приводить к увеличению погрешности в определении нормальных напряжений, так как их реальная эпюра в поперечном сечении балки все более будет отличаться от прямолинейной.

На рис. 1.1,б для балки с $l = 6$ м и соотношением $h/l = 1$ показана криволинейная эпюра σ_x , полученная далее в примере расчета балки методом теории упругости (см. подраздел 3 учебного пособия), и приближенная линейная эпюра (штриховая линия), полученная по приведенной выше формуле.

Рама с толстыми стержнями

В курсе строительной механики стержневых систем при расчете рам с целью построения эпюр усилий обычно предполагается, что стержни рамы являются достаточно тонкими (см., например, рис. 1.2, а).

В этом случае стержни в расчетной схеме рамы представляются в виде осей стержней (рис. 1.2,б).

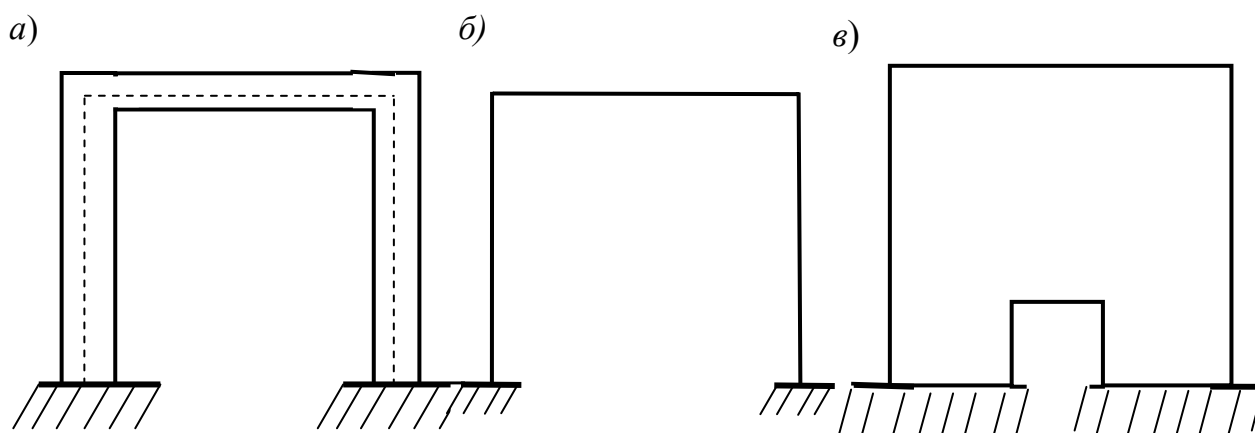


Рис.1.2

При увеличении толщины стержней рама превращается в некоторое массивное тело (см. рис. 1.2,в), НДС которого уже нельзя определять методами строительной механики и сопротивления материалов для стержневых систем, состоящих из тонких стержней.

В тоже время методы теории упругости позволяют получить НДС подобного рода массивных сооружений.

Задачи по изучению концентрации напряжений

В инженерной практике часто встречаются сооружения или их элементы, имеющие особенности конструкции, в результате которых возникает концентрация напряжений.

Таковыми особенностями, например, являются изломы геометрии границ сооружения, места соединения элементов друг с другом и с основанием сооружения (см. рис. 1.2,в), отверстия и полости в теле сооружения и т.д.

На рис. 1.3 показана пластинка с отверстием, растягиваемая

сосредоточенными силами P .

При приближенном расчете нормальных напряжений в сечении, ослабленном отверстием, используют формулу сопротивления материалов

$$\sigma_{x, \text{cp}} = \frac{P}{F_{\text{нетто}}}$$

которая позволяет найти только среднее значение нормальных напряжений в ослабленном сечении.

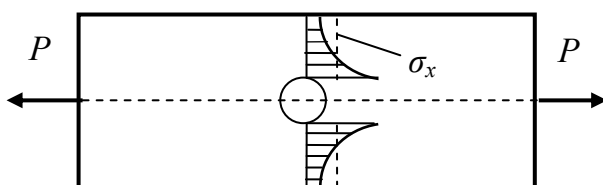


Рис.1.3

Расчетным путем концентрация нормальных напряжений около отверстия, показанная на рис. 1.3, а также в местах приложения сосредоточенных сил (на рис. 1.3 не показана) может быть получена только методами теории упругости.

Расчет плит и оболочек

Как уже отмечалось выше, в дисциплинах «Сопротивление материалов» и «Строительная механика стержневых систем» рассматриваются методы расчета отдельных тонких прямолинейных или криволинейных стержней и стержневых систем, составленных из них. Ширина этих стержней b имеет один порядок с их высотой h . При этом обе эти величины много меньше длины стержня l .

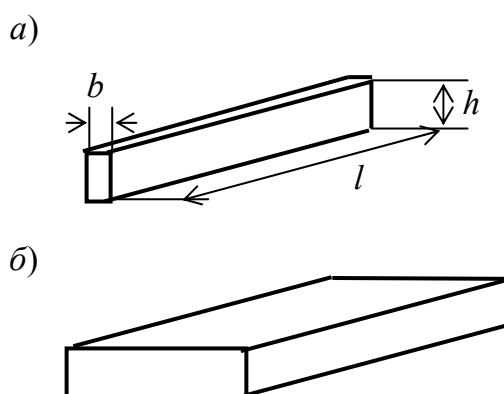


Рис. 1.4

На рис. 1.4,а изображен прямолинейный тонкий стержень. Однако в гражданских и промышленных сооружениях встречаются и элементы конструкции, ширина которых b много больше высоты h и имеет один порядок

с длиной l (рис. 1.4.б). В строительной практике такой плоский элемент при сохранении малого отношения h/l называют *тонкой плитой*.

Если тонкий стержень будет представлять собой арку, то при увеличении размера b получится элемент конструкции, который называется *тонкой оболочкой*.

В расчетной схеме подобного рода элементы конструкций в отличие от тонких стержней изображаются не осью, а срединной поверхностью (срединной плоскостью, если такой элемент плоский).

С увеличением толщины плиты или оболочки они из тонких превращаются в *относительно толстые* и *толстые*.

В строительных конструкциях (сооружениях) плиты и оболочки опираются на другие элементы и на основание самым различным образом (подвижное и неподвижное шарнирное опирание, защемление частичное и полное и т.д.). Эти вопросы рассматриваются в специальных курсах, посвященных проектированию строительных конструкций (сооружений).

Здесь отметим лишь то, что методы расчета таких важных элементов строительных сооружений как плиты и оболочки (тонких и толстых) строятся на основе теории упругости. Теории расчета плит и оболочек, по сути, являются разделами теории упругости.

Можно привести и другие примеры, когда для расчета НДС сооружения используются методы теории упругости.

В учебных планах строительных специальностей ИСФ «Теория упругости» рассматривается либо как отдельная дисциплина, либо как раздел дисциплины «Строительная механика» (см. схему 1 в подразделе 1.4 учебного пособия [1]).

1.2. Основные допущения и гипотезы, используемые в теории упругости

При разработке методов расчета стержней в курсе сопротивления материалов и при разработке методов расчета стержневых систем в строительной механике при составлении соответствующих расчетных схем в большинстве задач принимались следующие основные допущения.

1. *Материал, из которого выполнен каждый отдельный стержень, обладает свойством сплошности* (он непрерывен по всему объему рассматриваемого элемента сооружения). Молекулярное строение материала при построении методики расчета НДС не учитывается.

Это допущение позволяет представлять перемещения тела как непрерывные дифференцируемые функции координат и применять для

решения задач аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

2. *Материал является идеально упругим и подчиняющимся закону Гука, который, например, при растяжении (сжатии) стержня с площадью поперечного сечения F и продольной силой N представляется выражением*

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}, \text{ или } \sigma = E\varepsilon. \quad (1.2)$$

Здесь $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ – упругая деформация стержня длиной l , соответствующая его удлинению (укорочению) от силы N на величину Δl ; $\sigma = N/F$ – среднее нормальное напряжение в поперечном сечении стержня; E – модуль продольной упругости материала стержня (модуль Юнга).

Из первого выражения (1.2) следует, что продольная деформация стержня $\varepsilon = \Delta l/l$ прямо пропорциональна продольной силе N и обратно пропорциональна продольной жесткости стержня EF . Из второго выражения (1.2) видно, что нормальное напряжение $\sigma = N/F$ в стержне прямо пропорционально продольной деформации.

После удаления силы N все частицы стержня возвратятся в его первоначальное (до приложения силы) положение, т.е. деформация стержня и нормальные напряжения в нем полностью исчезнут.

3. *Предполагается, что материал обладает свойством однородности.* Это означает, что во всех точках тела под действием одинаковых напряжений происходят одинаковые деформации.

4. *Материал считается изотропным, т.е. упругие свойства материала предполагаются одинаковыми во всех направлениях.*

5. *Перемещения точек и деформации упругого стержня или стержневой системы малы по сравнению с размерами стержня или стержневой системы.* Это позволяет в расчетах использовать только расчетную схему недеформированного элемента сооружения или всего сооружения и использовать принцип суперпозиции (принцип наложения и принцип независимости действия сил).

В теории упругости в основном используются эти же допущения.

В курсах сопротивления материалов и строительной механики стержневых систем кроме указанных допущений использовались различного рода рабочие гипотезы, которые упрощают решение задачи, но заведомо практически не влияют на результаты расчета. Примерами таких гипотез являются: *гипотеза плоских сечений при определении нормальных напряжений в тонких стержнях при поперечном изгибе; пренебрежение перемещениями*

второго порядка малости узлов стержневых систем при построении классического метода перемещений в строительной механике стержневых систем и т.д.

В теории упругости подобного рода рабочие гипотезы также используются. *Например, при построении методики расчета тонких плит используется (по аналогии с гипотезой плоских сечений для тонких стержней) гипотеза прямых нормалей.*

При решении различных задач теории упругости широко используется принцип Сан-Венана, согласно которому в точках рассматриваемого тела, достаточно удаленных от места приложения внешней нагрузки, напряжения практически не зависят от способа приложения этой нагрузки. Это позволяет использовать в расчетах так называемые статически эквивалентные нагрузки.

Принцип Сан-Венана можно продемонстрировать на примере пластины, изображенной на рис.1.3. Согласно этому принципу картина распределения напряжений в среднем ослабленном сечении и значения напряжений практически не изменятся, если сосредоточенные растягивающие силы заменить любой нагрузкой (например, равномерно-распределенной), для которой сила P будет являться равнодействующей. В этом случае сосредоточенная сила и равномерно распределенная нагрузка являются статически эквивалентными.

1.3. Предварительные сведения о постановке и методах решения основной задачи теории упругости

Учащемуся из курсов сопротивления материалов и строительной механики стержневых систем уже известно, что исследование НДС сооружений или их элементов сводится к определению трех типов неизвестных величин: напряжений (или усилий, по которым затем определяются напряжения), перемещений и деформаций.

При этом методика расчетов обычно строится так, что сначала находятся составляющие искомым величин соответствующие некоторым координатным осям, по которым затем вычисляются другие искомые величины по любым направлениям.

Для получения неизвестных составляющих напряжений, перемещений и деформаций используются три группы уравнений:

1. *Уравнения равновесия (статики), отражающие равновесие любого бесконечно малого элемента тела;*

2. Геометрические уравнения, связывающие между собой перемещения и деформации;

3. Физические уравнения связи напряжений и деформаций (в линейно-деформируемом теле – уравнения закона Гука).

Кроме того, на границе тела должны быть выполнены заданные граничные условия.

На основе сделанных выше допущений о свойствах материала для расчетной схемы сооружения или его элемента все уравнения являются линейными, то есть неизвестные величины, и операции над ними входят только в первой степени. Это делает справедливым использование принципа суперпозиции при решении задач по определению НДС.

В данном учебном пособии получение полной системы уравнений для решения основной задачи теории упругости показано на примере плоской задачи.

Решение математически поставленных задач теории упругости выполняется аналитическими или численными методами, с которыми студенту ИСФ СПбГПУ проще всего можно познакомиться в упомянутом выше учебнике [7].

В нашем учебном пособии расчет НДС для конкретных сооружений или их элементов выполняется на ПК с использованием численного метода в форме МКЭ, который реализуется с помощью программы SCAD.

Перейдем к рассмотрению обозначений неизвестных величин – составляющих перемещений, напряжений и деформаций по координатным осям, используемых в теории упругости.

1.4. Обозначения искомых величин

В теории упругости существуют различные варианты обозначения искомых величин. Здесь приведем вариант обозначений, наиболее часто используемый в учебниках по сопротивлению материалов, теории упругости, специальных дисциплинах и в инженерных и научных работах.

Рассмотрим произвольное пространственное тело (Рис. 1.5), находящееся в равновесии под действием внешних и внутренних (например, собственный вес тела) сил и отнесенное к правой прямоугольной системе осей координат X, Y, Z . Компоненты перемещений какой-либо точки с координатами x, y, z по направлению координатных осей в этом варианте обозначаются соответственно в виде (см. рис. 1.5):

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z) \quad (1.3)$$

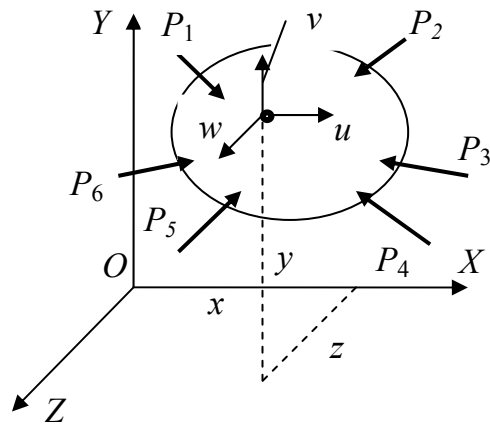


Рис.1.5

Положительными считаются перемещения, которые по направлению совпадают с положительным направлением соответствующих осей координат.

Обозначения положительных компонент напряжений в этой точке, соответствующих осям общей системы координат в рассматриваемом варианте, изображено на рис. 1.6, где для удобства показа плоскостей, проходящих через некоторую точку параллельно координатным плоскостям, около точки выделен бесконечно малый параллелепипед так, чтобы рассматриваемая точка оказалась в его центре тяжести.

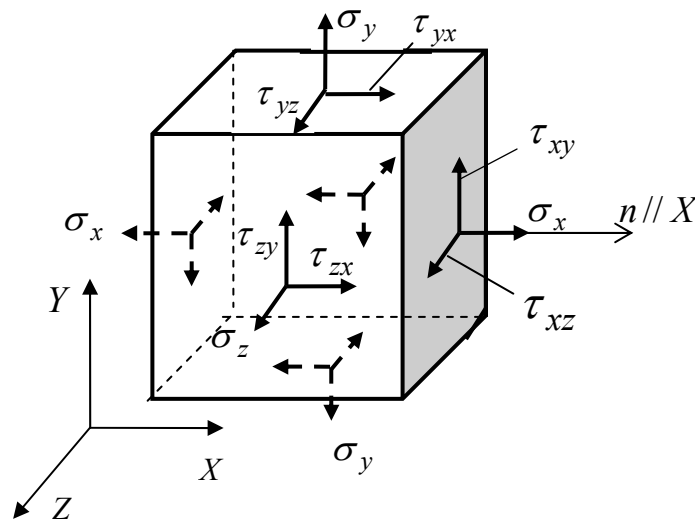


Рис.1.6

Положительные направления составляющих напряжений в рассматриваемой точке тела определяются направлением внешней нормали n к площадке, проведенной через эту точку (см. на рис. 1.6 нормаль $n // X$).

Если внешняя нормаль к площадке – границе выделенного элемента направлена в ту же сторону, что и положительное направление оси, которой перпендикулярна площадка, то и положительные направления составляющих напряжений совпадают с положительными направлениями соответствующих

осей координат. При обратном направлении внешней нормали к площадке положительные направления составляющих напряжений на площадке имеют также обратное направление по отношению к положительным направлениям осей координат.

Кроме указанных величин в рассматриваемой точке также определяются: три относительных продольных деформации

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y, z), \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y, z), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z(x, y, z) \quad (1.4)$$

выделенного параллелепипеда в направлениях параллельных осям координат и его три сдвиговых деформации

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y, z), \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}(x, y, z), \quad \gamma_{zx} = \gamma_{zx}(x, y, z). \quad (1.5)$$

Характер продольных и сдвиговых деформаций в соответствии с их обозначением пояснен на рис.1.7,а,б, где отражены соответственно положительная продольная деформация ε_x элемента в направлении X и положительная сдвиговая деформация $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$.

Сдвиговая деформация $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ показывает, что прямой угол между гранями элемента параллельными координатной плоскости YOZ и соответствующими (по направлению внешней нормали) гранями элемента параллельными координатной плоскости XOZ уменьшается на угол $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$.

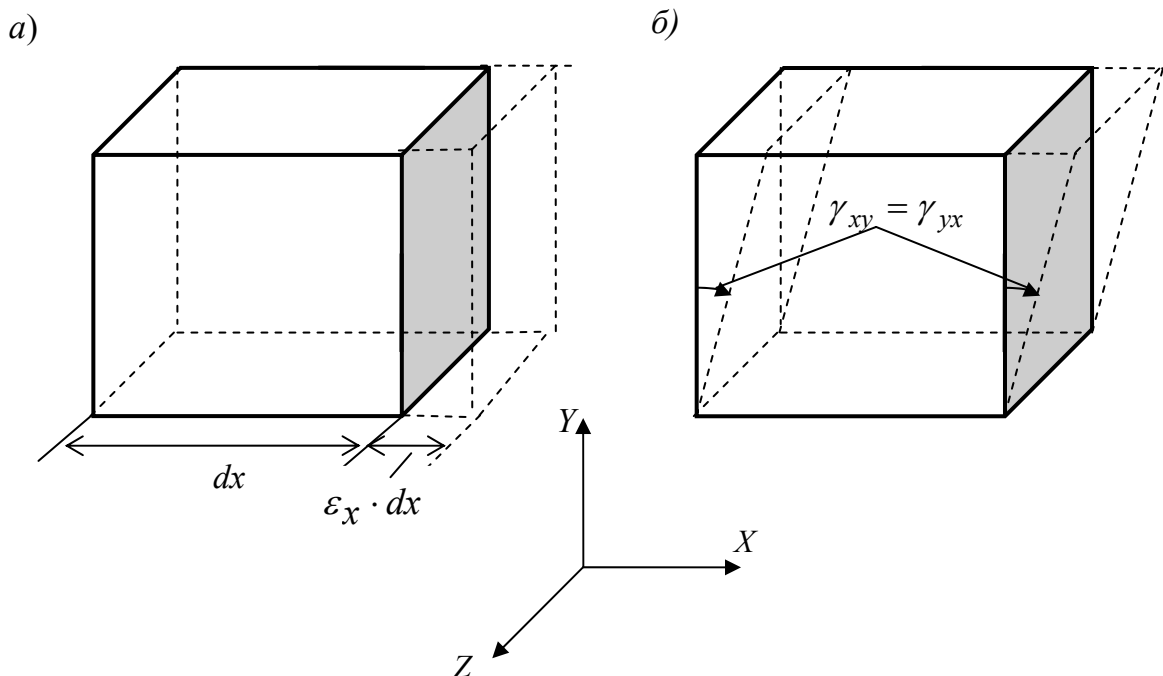


Рис. 1.7

В теории упругости используются и другие обозначения неизвестных величин. Однако какие бы обозначения не использовались, они не меняют суть постановок и методов решения задач.

1.5. Два варианта плоской задачи теории упругости

Все тела имеют три измерения и являются пространственными телами. Поэтому в общем случае их расчет с целью получения НДС является решением пространственной задачи. Однако есть два вида пространственных тел при определенном характере их загрузений, когда решение пространственной задачи теории упругости для этих тел можно заменить соответствующими решениями плоской задачи.

Плоское напряженное состояние тела

Примером пространственного тела, находящегося в условиях плоского напряженного состояния, является стена (пластина) длиной l по направлению оси X , высотой h по направлению оси Y (рис.1.8) и толщиной $b \ll l, b \ll h$ в направлении оси Z , загруженная по торцевым сторонам (стороны, которые имеют толщину пластины b) так, что нагрузку можно привести к нагрузке, лежащей в срединной плоскости пластины.

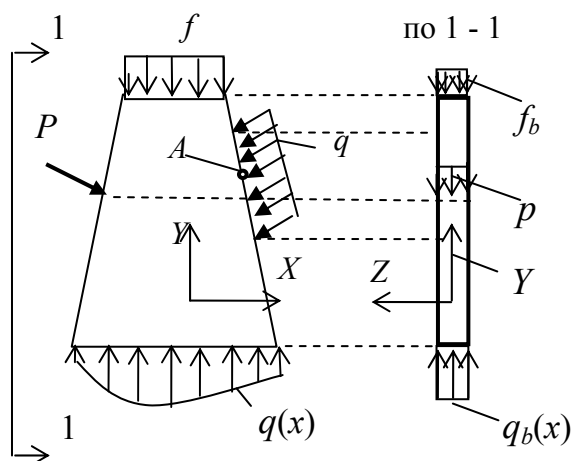


Рис. 1.8

При этом сосредоточенная нагрузка P считается равномерно распределенной по толщине b с интенсивностью $p = P/b$. При распределенной нагрузке интенсивность нагрузки, например на верхнюю грань пластины, составляет $f = f_b \cdot b$, где f_b — интенсивность распределенной нагрузки по толщине пластины. Боковые плоскости пластины (с размерами l и h) в рассматриваемом случае свободны от нагрузки.

Для тонкой пластины все искомые компоненты напряжений (см. рис. 1.8) можно считать равномерно распределенными по толщине пластины (в

выбранной системе координат не зависящими от координаты z).

При этом, так как на боковых гранях нет нагрузки, считается, что составляющие напряжений $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ равны нулю не только на боковых гранях пластины, но и по ее толщине.

С учетом известного еще из курса сопротивления материалов свойства взаимности (парности) касательных напряжений на взаимно перпендикулярных площадках (см. его доказательство также в подразделе 2.1) будут равны нулю и касательные напряжения $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ и $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ (см. рис. 1.6).

Таким образом, из-за особенности геометрии тела и характера его нагружения, задача расчета НДС в нем свелась к определению только трех компонентов напряжений, которые относятся к срединной плоскости тела. При выбранной на рис. 1.8 системе координат этими компонентами являются нормальные напряжения σ_x и σ_y и касательное напряжение $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Описанное напряженное состояние называется плоским напряженным состоянием.

Обратим внимание на то, что *при действии на пластину нагрузки, которая может быть сведена к нагрузке находящейся в срединной плоскости пластины (см. рис. 1.8), происходят поперечные (симметричные относительно срединной плоскости) деформации пластины.*

Следовательно, для плоского напряженного состояния характерно отсутствие составляющих напряжений в направлении оси, перпендикулярной к срединной плоскости, но наличие деформаций пластины в этом направлении.

Плоская деформация

Примером пространственного тела, которое можно рассматривать как находящееся в условиях плоской деформации, является бесконечно длинная подпорная стенка с одинаковым по всей длине поперечным сечением. Для определенности на рис. 1.9 изображено некоторое поперечное сечение такой стенки, параллельное координатной плоскости XOY .

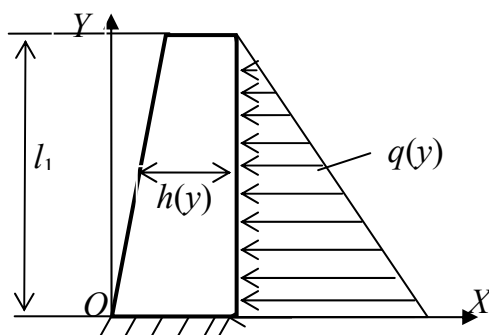


Рис.1.9

В направлении оси Z стенка является бесконечно длинной ($l_2 = \infty$).

Будем считать, что стенка опирается по нижней стороне («подошве») на некоторое совершенно одинаковое по всей длине $l_2 = \infty$ стенки основание (оно условно показано штриховкой).

Нагрузка на стенку такова, что ее вид одинаков для каждого поперечного сечения (нагрузка не изменяется по направлению оси, перпендикулярной поперечному сечению стенки).

Выделим из стенки слой двумя сечениями, отстоящими друг от друга на расстоянии один метр. Получим пластину единичной толщины.

В отличие от случая плоского напряженного состояния такая пластина не имеет возможности деформироваться в направлении оси Z , потому что соседние с ней слева и справа слои стенки такой же единичной толщины при $l_2 = \infty$ находятся точно в таких же условиях и не дадут деформироваться рассматриваемому слою в направлении оси Z . Иными словами, происходит только *плоская деформация* подпорной стенки.

Вследствие того, что при взаимодействии слоев получим $\varepsilon_z = 0$, по их боковым граням возникнут нормальные напряжения σ_z .

В реальных условиях подпорная стенка не является бесконечно длинной. Тогда условия, характерные для плоской деформации, при ее расчете могут быть использованы только для сечений, расположенных на достаточно большом расстоянии от концов стенки. Часто такой подход вполне допустим при решении практических задач.

2. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

2.1. Статические уравнения

На рис. 1.6 с помощью граней изображенного параллелепипеда были показаны площадки, проведенные через некоторую рассматриваемую точку пространственного тела (см. рис. 1.5).

Выделенный элемент имеет бесконечно малые размеры dx , dy , dz (см. рис. 1.6).

Однако при изображении векторов напряжений на гранях параллелепипеда предполагалось, что эти размеры стремятся к нулю, поскольку площадки с показанными на рис. 1.6 составляющими напряжений проходят непосредственно через рассматриваемую точку. Поэтому одноименные составляющие напряжений на левой и правой гранях параллелепипеда

(аналогично на нижней и верхней гранях) изображены соответственно равными друг другу.

Для параллелепипеда с указанными бесконечно малыми размерами dx , dy , dz составляющие напряжений на соответствующих площадках будут отличаться на бесконечно малую величину. Это показано на примере бесконечно малого элемента пластины, выделенного у произвольной точки A на срединной плоскости пластины (рис. 2.1).

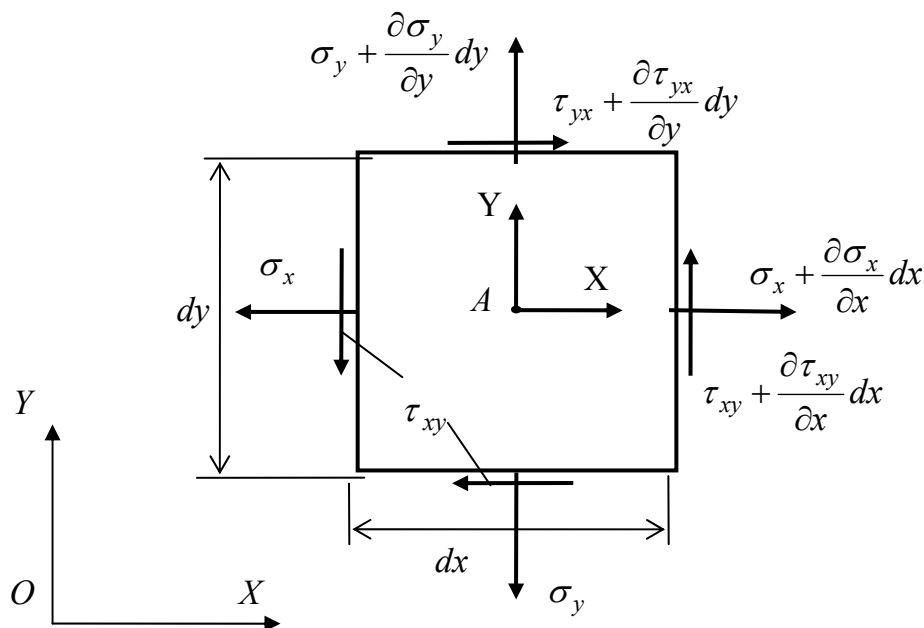


Рис. 2.1

Так как составляющие напряжений не изменяются по толщине пластины, бесконечно малый размер dz параллелепипеда в направлении оси Z заменим конечным размером b (толщина пластины).

Иными словами, для плоской задачи вместо бесконечно малого во всех направлениях параллелепипеда можно изобразить бесконечно малый прямоугольник, выделенный из срединной плоскости пластины так, чтобы точка A находилась в центре прямоугольника, а толщину выделенного параллелепипеда принять равной толщине пластины b . Для варианта плоской задачи «Плоская деформация» (см. рис. 1.9) $b = 1$.

Кроме составляющих напряжений, приходящихся на единицу площади граней элемента, на рис. 2.1 в точке A показаны составляющие X и Y объемных сил элемента, приходящиеся на единицу объема.

Рассмотрим равновесие выделенного элемента под действием статически приложенных на него внешних и внутренних сил.

Так как элемент находится в условиях плоской задачи, то действующие

силы должны удовлетворять трем уравнениям равновесия:

$$\sum M_A = 0; \sum X = 0; \sum Y = 0. \quad (2.1)$$

Сначала составим первое уравнение равновесия (сумма моментов всех сил относительно точки A равна нулю), так как это уравнение позволяет доказать свойство парности (взаимности) касательных напряжений на взаимно перпендикулярных площадках элемента:

$$\tau_{xy}(bdy) \cdot \frac{dx}{2} + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx)(bdy) \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{yx}(bdx) \cdot \frac{dy}{2} - (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy)(bdx) \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

Моменты от равнодействующих нормальных напряжений по граням элемента и от составляющих объемных сил элемента относительно точки A равны нулю, поэтому они не вошли в это уравнение равновесия.

После приведения подобных величин, сокращения бесконечно малых величин третьего порядка малости по сравнению с бесконечно малыми величинами второго порядка и деления на величину $bdxdy$ получим упомянутое свойство *взаимности касательных напряжений*:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (2.2)$$

Два других уравнения равновесия элемента после преобразований принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

При статическом нагружении тела часто единственной статической объемной силой является собственный вес тела. Тогда при указанной системе координат (см. рис. 2.1) $X = 0$, $Y = -\gamma$, где γ обозначает объемный вес материала.

Обратим внимание на то, что неизвестных составляющих напряжений в точке (с учетом доказанной парности касательных напряжений (2.2)) – три, а уравнений равновесия осталось только два (2.3), так как первое уравнение равновесия (2.1) было использовано для доказательства парности касательных напряжений. Из курса строительной механики учащемуся известно, что задача, в которой уравнений равновесия (статики) недостаточно для определения искомых усилий (в данном случае усилий, отнесенных к единице площади соответствующей площадки, проходящей через рассматриваемую точку) называется статически неопределимой.

Для составления недостающего уравнения для определения трех неизвестных напряжений необходимо рассмотреть деформацию элемента. Деформационная часть задачи в теории упругости называется геометрической. Ей посвящен следующий подраздел (2.2) учебного пособия.

Прежде чем перейти к геометрической стороне задачи теории упругости, рассмотрим вопрос о граничных условиях, отражающих соответствие компонентов напряжений в точках тела, расположенных на его границе, заданным на границе внешним нагрузкам.

На рис. 2.2 изображен бесконечно малый элемент, выделенный из пластины, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, около точки A (см. рис. 1.8), лежащей на границе пластины (наклонной к осям X и Y), где заданы компоненты q_x и q_y поверхностной нагрузки q (см. рис. 1.8).

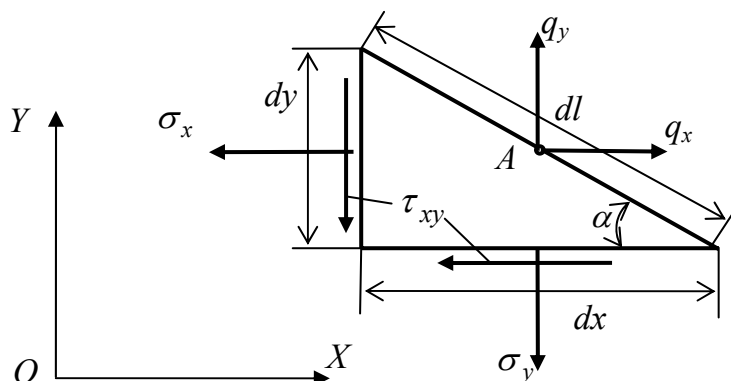


Рис. 2.2

Равновесие этого элемента отражают три уравнения (2.1). Первое отражает парность касательных напряжений (2.2), а два других будут иметь соответственно вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha &= q_x; \\ \tau_{xy} \sin \alpha + \sigma_y \cos \alpha &= q_y. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнения (2.4) называются *граничными условиями* на контуре тела.

2.2. Геометрические уравнения

Рассмотрим вопрос о перемещениях и деформациях в плоской задаче ТУ с помощью рис. 2.3, на котором изображен описанный в предыдущем подразделе бесконечно малый в направлениях осей X и Y элемент $abcd$ со сторонами равными dx и dy и толщиной b в направлении оси Z .

На этом же рисунке элемент показан после деформации тела (пластины) в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации (элемент $a_1 b_1 c_1 d_1$).

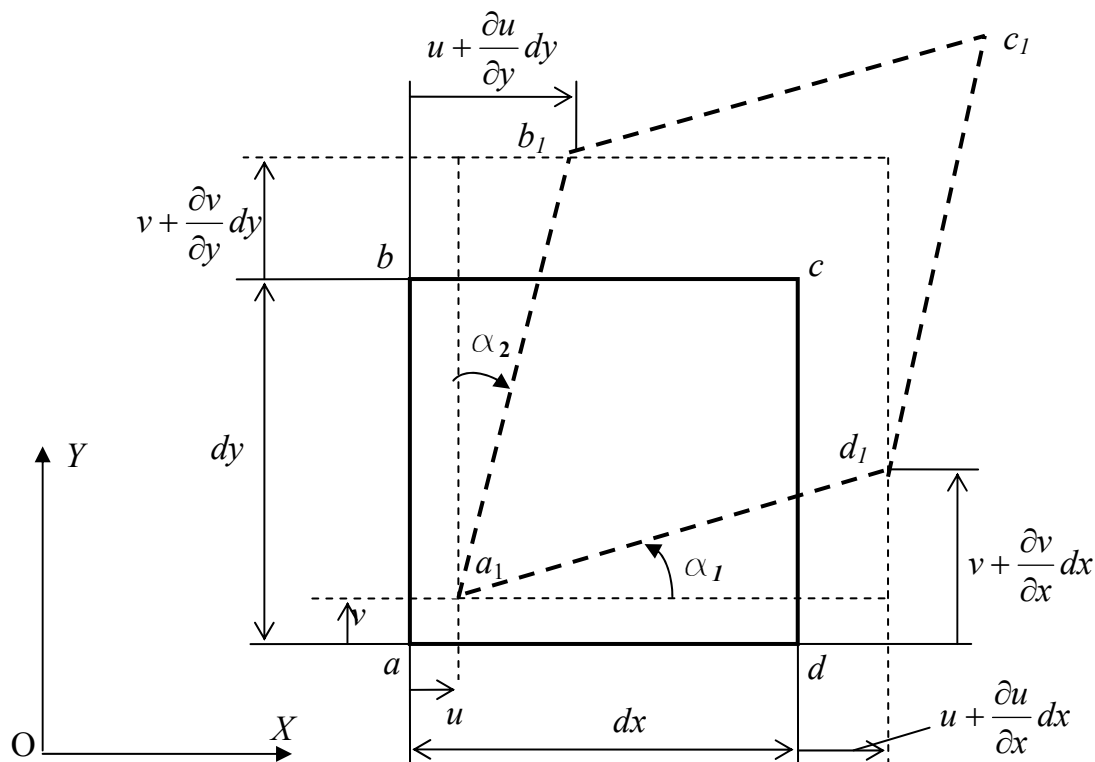


Рис. 2.3

Как видно из рисунка, абсолютное удлинение Δdx стороны ad элемента и относительная деформация ε_x этой стороны соответственно составляют

$$\Delta_{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Аналогично для вертикальной стороны ab :

$$\Delta_{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} dy; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.6)$$

Кроме того, происходит деформация сдвига сторон элемента

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2. \quad (2.7)$$

Так как деформации элемента малы, то

$$\alpha_1 \cong \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx) - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\alpha_2 \cong \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy) - u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Тогда из (2.7) получим

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.9)$$

Положительным является угол сдвига, который соответствует уменьшению прямого угла bad элемента.

Таким образом, в результате исследования деформации бесконечно малого элемента получаются следующие три дифференциальных уравнения, связывающие компоненты деформаций и перемещений:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.10)$$

Из этих уравнений следует, что, если считать три компоненты деформаций известными и поставить задачу определения двух перемещений, то такая задача будет переопределенной. Решение такой системы при любых компонентах деформаций не существует, отдельные решения могут оказаться противоречивыми, а вся система несовместной. Для получения совместного решения необходимо, чтобы три компонента деформаций были связаны между собой еще каким-то уравнением. Это уравнение получается преобразованием системы уравнений (2.10) и имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.11)$$

Эта связь компонентов деформаций называется *уравнением совместности деформаций*. Его соблюдение во всех точках тела обеспечивает *неразрывность деформаций* рассматриваемого упругого тела и позволяет по известным компонентам деформаций получить однозначное решение для перемещений путем интегрирования системы уравнений (2.10).

Кроме того, перемещения тела должны удовлетворять граничным условиям в виде заданных на границе тела перемещений.

2.3. Физические уравнения (закон Гука)

Предположим, что пространственный элемент, изображенный на рис.1.6, находится под действием только растягивающих (положительных) напряжений σ_x . Тогда, используя известный закон Гука для стержня, находящегося в условиях растяжения-сжатия (см. 1.2), можем записать выражение для относительной продольной деформации элемента в направлении оси X :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}. \quad (2.12)$$

При этом пространственный элемент (см. рис. 1.6) будет иметь поперечные деформации сжатия в направлениях осей Y и Z :

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (2.13)$$

Здесь E , ν – физические характеристики материала при продольных деформациях, называемые соответственно модулем продольной упругости и коэффициентом Пуассона материала тела [7, 10].

Аналогично, при раздельном действии напряжений σ_y и σ_z соответственно получим:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}. \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}. \quad (2.15)$$

При суммарном действии всех нормальных напряжений получим следующие выражения закона Гука для пространственной задачи ГУ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Для плоской задачи выражения закона Гука при действии нормальных напряжений упрощаются.

При плоском напряженном состоянии $\sigma_z = 0$. Тогда из (2.16) уравнения закона Гука при плоском напряженном состоянии запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Кроме того, как видно из третьего уравнения (2.16), в направлении поперек пластины возможна относительная продольная деформация

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [-\nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (2.18)$$

При плоской деформации $\sigma_z \neq 0$, но $\varepsilon_z = 0$. Тогда после преобразований уравнений (2.16) можно получить уравнения закона Гука при действии нормальных напряжений в виде [7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G(1+\nu')} [\sigma_x - \nu'\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G(1+\nu')} [\sigma_y - \nu'\sigma_x] \end{aligned} \quad (2.19)$$

где: $G = E / 2(1 + \nu)$ – характеристика упругости материала при сдвиговых деформациях, называемая модулем сдвига, известная учащемуся из курса сопротивления материалов [7]; $\nu' = \nu / (1 - \nu)$ – условная величина, принятая для компактности записи выражений (2.19).

Касательные напряжения, действующие на элемент, вызывают его сдвиговые деформации. Сдвиговая деформация бесконечно малого элемента в плоской задаче показана на рис. 2.3. Эта деформация соответствует действию группы касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. При этом закон Гука при сдвиговых деформациях для плоского напряженного состояния и плоской деформации можно записать в виде

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (2.20)$$

2.4. Полная система уравнений теории упругости для плоской задачи

Сведем все уравнения для плоской задачи в общую систему уравнений.

1. Статические уравнения

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)^*$$

2. Геометрические уравнения

Уравнения связи между перемещениями и деформациями

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.10)^*$$

3. Физические уравнения (закон Гука)

Плоское напряженное состояние

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x]. \end{aligned} \quad (2.17)^*$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.20)^*$$

Плоская деформация

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2G(1+\nu')} [\sigma_x - \nu'\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G(1+\nu')} [\sigma_y - \nu'\sigma_x]\end{aligned}\quad (2.19)^*$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.20)^*$$

Примечание. Звездочкой * отмечены номера формул, которые под этим номером уже встречались в пособии выше.

Таким образом, для определения восьми неизвестных функций $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}; u, v; \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ в плоской задаче в виде плоского напряженного состояния и в виде плоской деформации имеется по восемь уравнений.

Первые пять уравнений являются дифференциальными уравнениями первого порядка в частных производных. При интегрировании таких уравнений в общем интеграле появляются произвольные функции координат. Эти функции для конкретной задачи определяются из граничных условий.

Например, при заданных на границе распределенных нагрузках составляющие напряжений должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{aligned}\sigma_x \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha &= q_x; \\ \tau_{xy} \sin \alpha + \sigma_y \cos \alpha &= q_y.\end{aligned}\quad (2.4)^*$$

Следовательно, появившиеся при интегрировании двух уравнений равновесия (2.3*) две произвольные функции координат будут определены из этих двух уравнений граничных условий.

Вопрос о граничных условиях более многообразен, поскольку граничные условия задаются не только в напряжениях, но и в перемещениях. Более полно с ним можно познакомиться, например, в [7].

Напомним также, что при интегрировании трех дифференциальных уравнений, связывающих деформации и перемещения с целью определения двух неизвестных составляющих перемещений, должно выполняться уравнение неразрывности (совместности) деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.11)^*$$

Как отмечалось в подразделе 1.3, решение поставленных математически задач теории упругости (в данном случае – плоских) выполняется аналитическими и численными методами.

При аналитическом решении системы уравнений используют два методических подхода: *решение в перемещениях* и *решение в напряжениях*.

В первом варианте за основные неизвестные принимают компоненты перемещений (в плоской задаче их две: $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$). При этом из системы уравнений путем преобразований исключают остальные неизвестные.

В результате для плоской задачи получаются только два дифференциальных уравнения с двумя указанными неизвестными функциями (см., например, [7]). Их интегрирование с учетом граничных условий позволяет определить искомые функции перемещений. Затем из остальных уравнений полной системы находятся составляющие деформаций и напряжений.

Во втором варианте за основные неизвестные, которые определяются в первую очередь, принимаются напряжения. Затем по ним из уравнений закона Гука находятся деформации, а по ним из геометрических уравнений находятся перемещения. С различными способами решения плоской задачи в напряжениях учащемуся рекомендуется ознакомиться в работах [7, 10].

Из приведенных в списке литературы работ, а также их многочисленных других работ по решению задач теории упругости видно, что аналитическими методами решено большое число важных инженерных задач.

С внедрением в практику расчетов и проектирования сооружений персональных компьютеров стали превалировать численные методы решения задач теории упругости.

В настоящее время, лидирующее место в численных методах решения задач теории упругости занимает метод конечных элементов, используемый в многочисленных проектно-вычислительных комплексах (ПВК) для ПК, в том числе и в ПВК SCAD, который применяется в данном учебном пособии.

Расчетчику-пользователю ПК и ПВК для понимания постановки и результатов расчета задач теории упругости необходимы определенные представления о применении МКЭ для решения задач теории упругости.

Ознакомление с МКЭ в пособии начинается с рассмотрения его идеи и последовательности решения этим методом плоской задачи теории упругости.

2.5. Идея и последовательность решения плоской задачи теории упругости МКЭ в форме метода перемещений

Учащемуся ИСФ СПбГПУ уже известна идея МКЭ в форме метода перемещений и последовательность решения этим методом задач строительной механики стержневых систем [3–6].

Идея и последовательность решения плоской задачи теории упругости МКЭ в форме метода перемещений аналогична идее и последовательности, рассмотренной для стержневых систем:

1. Прежде всего, рассматриваемое плоское тело разбивается на конечные элементы (КЭ). В плоской задаче теории упругости для этого используются четырехугольные (в том числе прямоугольные) и треугольные элементы [7, 8, 9]. Вид этих элементов приведен в подразделе 2.6 учебного пособия.

Вопросы построения конечных элементов для различных задач, выбора типов элементов для расчета и рекомендации о разбивке области на КЭ и их нумерации столь обширны, что они не могут быть рассмотрены в данном небольшом по объему учебном пособии. Для изучения этих вопросов учащемуся рекомендуется обратиться к указанным работам [7, 8, 9].

Здесь для иллюстрации идеи МКЭ при решении плоской задачи ТУ рассматривается простой пример.

Пример 1. Пусть плоское треугольное тело, находящееся в условиях плоской деформации, разбито на четыре, шестнадцать и сто треугольных элемента (Рис. 2.4).

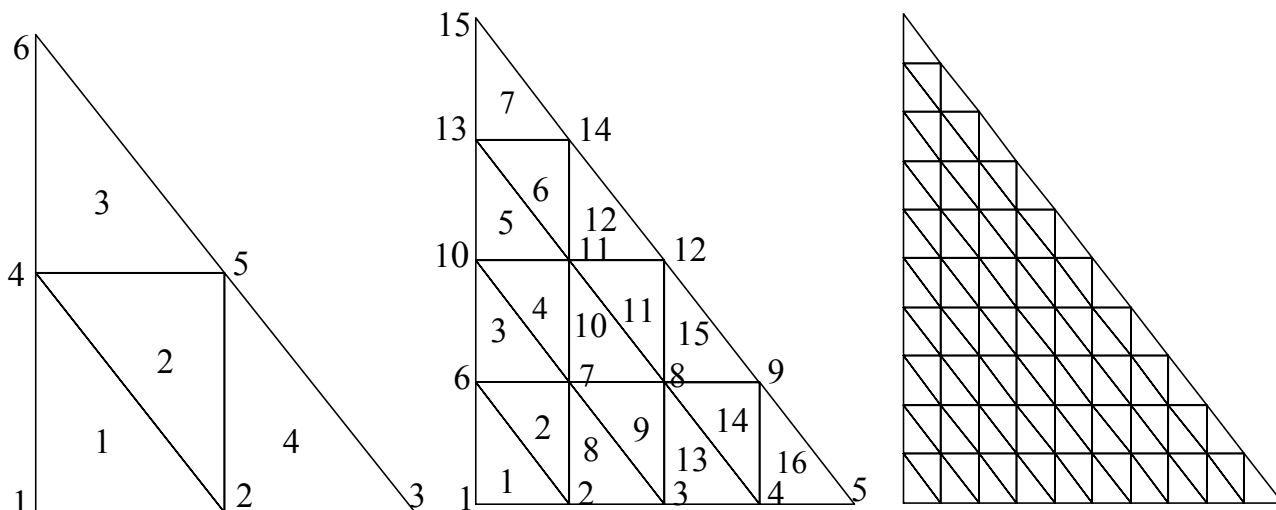


Рис. 2.4

Нумерация элементов и узлов может быть произвольной. Однако последовательность нумерации оказывает влияние на свойства разрешающей системы уравнений. На рис. 2.4 показана нумерация узлов и элементов для первых двух вариантов разбиения на элементы, выполненная программой SCAD.

Тело относится к общей системе осей координат. В данном случае это сделано так, что срединная плоскость пластины единичной толщины совмещена с координатной плоскостью XOY. В программе SCAD при нагрузке на пластину, находящейся в срединной плоскости, такая пластина рассматривается как плоская балка-стенка.

2. При решении задачи в форме метода перемещений делается допущение о приближенном представлении искомых перемещений внутри каждого

элемента в виде линейной, квадратичной или кубической функции, задаваемой в виде соответствующего интерполяционного полинома первой, второй или третьей степени, коэффициенты которого выражаются через координаты узлов элемента.

Пример 2. Для того чтобы пояснить сказанное, рассмотрим любой, выделенный из изображенной на рис. 2.4 пластины, треугольный элемент, узлы которого и номер элемента обозначим так, как показано на рис. 2.5.

Координаты узлов x_p, y_p этого элемента, где $p = i, j, m$ - номера узлов, известны.

Допустим, что искомые составляющие перемещений в виде непрерывных функций координат $u^r = u^r(x, y)$ и $v^r = v^r(x, y)$ внутри элемента r приближенно представляются как линейные функции в виде полинома первой степени [7, 8, 9].

Когда координаты точки совпадут с любым из трех узлов, перемещения становятся соответственно равными $u_p^r = u^r(x_p, y_p)$ и $v_p^r = v^r(x_p, y_p)$, где $p = i, j, m$ - номера узлов.

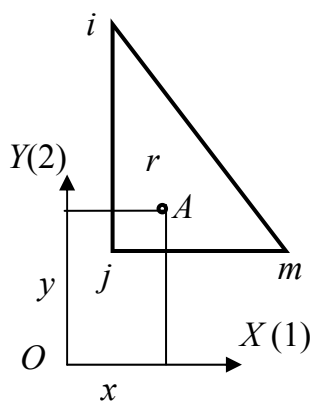


Рис. 2.5

При этом оказывается, что искомые приближенные значения искомых перемещений $u^r = u^r(x, y)$ и $v^r = v^r(x, y)$ могут быть вычислены, если известны составляющие перемещений узлов $u_p^r = u^r(x_p, y_p)$ и $v_p^r = v^r(x_p, y_p)$. Соответствующую зависимость представим в виде [7]

$$\mathbf{u}^r = \mathbf{U}^r \mathbf{q}^r, \quad (2.21)$$

где

$$\mathbf{u}^r = \begin{pmatrix} u^r \\ v^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^r \\ u_2^r \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

– вектор компонентов перемещений в любой точке внутри элемента r .

$$\text{Матрица } \mathbf{U}^r = \begin{bmatrix} U_i & 0 & U_j & 0 & U_m & 0 \\ 0 & U_i & 0 & U_j & 0 & U_m \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

представляет собой матрицу с элементами в виде аппроксимирующих полиномов

$$U_p^r = a_p + b_p x + c_p y, \quad (2.24)$$

коэффициенты которых

$$\begin{aligned}
 a_p &= \frac{1}{2\Delta}(x_t y_l - x_l y_t); \\
 b_p &= \frac{1}{2\Delta}(y_t - y_l); \\
 b_p &= \frac{1}{2\Delta}(x_l - x_t)
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

выражаются через известные координаты узлов элемента (при условии, что, если $p = i, j, m$, то $t = j, m, i$ и $l = m, i, j$ соответственно), Δ – площадь конечного элемента.

$$\text{Вектор } \mathbf{q}^r = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_i^r \\ \mathbf{q}_j^r \\ \mathbf{q}_m^r \end{pmatrix}
 \tag{2.26}$$

в выражении (2.21) является блочным вектором перемещений узлов элемента, в котором

$$\mathbf{q}_p^r = \begin{pmatrix} u_p^r \\ v_p^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1p}^r \\ u_{2p}^r \end{pmatrix}, \quad p = i, j, m.
 \tag{2.27}$$

Обратим внимание на то, что на рис. 2.5 система координат имеет двойное обозначение осей (буквенное и цифровое). При записи матриц часто используют цифровые индексы, соответствующие номерам осей координат. Поэтому в (2.27) и (2.22) выполнено изменение обозначений компонентов перемещений.

Если каким-то образом будут определены эти узловые перемещения сетки элементов, то затем с помощью интерполяционных полиномов могут быть найдены перемещения и в любой точке внутри каждого элемента. В связи с этим, вместо того чтобы сразу определять с помощью соответствующей полной системы уравнений теории упругости неизвестные компоненты перемещений в любой точке плоского тела как непрерывные функции координат, при использовании МКЭ сначала решают задачу приближенного определения компонентов перемещений *только в узлах конечных элементов*, на которые разбито рассматриваемое тело.

3. Решается задача определения узловых перемещений. Методика решения такой задачи уже известна учащемуся из курса строительной механики стержневых систем [3]. Она сводится к решению системы уравнений

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{p},
 \tag{2.28}$$

где

$$\mathbf{q} = (u_{11} \quad u_{21} \mid \dots \mid u_{1i} \quad u_{2i} \mid \dots \mid u_{1n} \quad u_{2n})^T
 \tag{2.29}$$

есть вектор неизвестных компонентов перемещений в узлах намеченной сетки конечных элементов по направлению общей системы координат, к которой отнесено рассматриваемое тело, (n - число узлов сетки элементов);

$$\mathbf{p} = (p_{11} \quad p_{21} \mid \dots \mid p_{1i} \quad p_{2i} \mid \dots \mid p_{1n} \quad p_{2n})^T
 \tag{2.30}$$

является вектором заданных компонентов внешних сил по направлению осей общей системы координат, к которой отнесено рассматриваемое тело, приложенных в узлах намеченной сетки конечных элементов.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sum_{r \in 11} \mathbf{K}_{11}^r & \dots & \sum_{r \in 1i} \mathbf{K}_{1i}^r & \dots & \sum_{r \in 1n} \mathbf{K}_{1n}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{r \in i1} \mathbf{K}_{i1}^r & \dots & \sum_{r \in ii} \mathbf{K}_{ii}^r & \dots & \sum_{r \in in} \mathbf{K}_{in}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{r \in n1} \mathbf{K}_{n1}^r & \dots & \sum_{r \in ni} \mathbf{K}_{ni}^r & \dots & \sum_{r \in nn} \mathbf{K}_{nn}^r \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

представляет собой матрицу жесткости всей системы конечных элементов, имеющей n узлов элементов.

Для решения задачи (2.28) определения перемещений узлов сначала необходимо сформировать вектор узловых нагрузок. Для этого нагрузка, действующая на каждый элемент, приводится к его узлам. Затем в общем узле для нескольких элементов их соответствующие узловые нагрузки суммируются.

Поскольку матрица жесткости (2.31) формируется с помощью блоков матриц жесткости элементов, необходимо сначала построить матрицы жесткости для рассматриваемых конечных элементов.

Пример 3. Продемонстрируем построение матрицы жесткости для треугольного элемента с линейной аппроксимацией перемещений внутри элемента, (см. рис. 2.5).

Прежде чем перейти к этой процедуре, обратим внимание на то, что, определив по перемещениям узлов элементов приближенные значения перемещений в любой точке элемента, из геометрических уравнений (2.10)* можно найти соответствующие относительные деформации, а затем из уравнений (2.19)* и (2.20)* закона Гука вычислить напряжения.

Представим геометрические уравнения для элемента r в матричном виде:

$$\mathbf{e}^r = \mathbf{A} \mathbf{u}^r. \quad (2.32)$$

Здесь \mathbf{e}^r является вектором искомых деформаций (2.33) в любой точке элемента r , определяемый с помощью геометрических уравнений (2.10*);

Величина \mathbf{A} представляет собой матрицу дифференцирования в геометрических уравнениях (2.34); вектор \mathbf{u}^r имеет вид (2.22).

$$\mathbf{e}^r = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^r \\ \varepsilon_y^r \\ \gamma_{xy}^r \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

С учетом (2.21) геометрические уравнения для элемента r можно записать в виде

$$\mathbf{e}^r = \mathbf{B}^r \mathbf{q}^r, \quad (2.35)$$

где

$$\mathbf{B}^r = \mathbf{A}\mathbf{U}^r = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Для элемента r уравнения закона Гука в матричной записи, записанные в форме определения напряжений по деформациям, будут иметь вид:

$$\mathbf{y}^r = \mathbf{D}\mathbf{e}^r = \mathbf{D}\mathbf{B}^r \mathbf{q}^r. \quad (2.37)$$

Здесь

$$\mathbf{y}^r = \begin{pmatrix} \sigma_x^r \\ \sigma_y^r \\ \tau_{xy}^r \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

является вектором компонент напряжений в любой точке элемента;

$$\mathbf{D} = 2G \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu'} & \frac{\nu'}{1-\nu'} & 0 \\ \frac{\nu'}{1-\nu'} & \frac{1}{1-\nu'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad (2.39)$$

$\nu' = \nu$ в случае плоского напряженного состояния и $\nu' = \nu/(1-\nu)$ в случае плоской деформации; $G = E/2(1+\nu)$ – модуль упругости при сдвиговых деформациях.

Теперь перейдем к формированию матрицы жесткости рассматриваемого элемента (см. рис. 2.5).

С этой целью запишем уравнения закона Гука, в которых компоненты узловых усилий элемента r выражаются через компоненты узловых перемещений. Запишем эту систему уравнений в матричном виде:

$$\mathbf{f}^r = \mathbf{K}^r \mathbf{q}^r, \quad (2.40)$$

где (рис. 2.6)

$$\mathbf{f}^r = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i^r \\ \mathbf{f}_j^r \\ \mathbf{f}_m^r \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

есть вектор узловых усилий элемента r с блоками

$$\mathbf{f}_p^r = \begin{pmatrix} F_{1p}^r \\ F_{2p}^r \end{pmatrix}, \quad (p = i, j, m); \quad (2.42)$$

$$\mathbf{K}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^r & \mathbf{K}_{ij}^r & \mathbf{K}_{im}^r \\ \mathbf{K}_{ji}^r & \mathbf{K}_{jj}^r & \mathbf{K}_{jm}^r \\ \mathbf{K}_{mi}^r & \mathbf{K}_{mj}^r & \mathbf{K}_{mm}^r \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

представляет собой блочную матрицу жесткости элемента r в общей системе осей координат с блоками вида

$$\mathbf{K}_{ij}^r = \begin{bmatrix} K_{11ij}^r & K_{12ij}^r \\ K_{21ij}^r & K_{22ij}^r \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Как видно из (2.40), здесь любой элемент вида K_{lsij}^r является усилием в узле i , действующим в направлении l , от единичного смещения узла j в направлении s ($l=1,2; s=1,2$), в то время как все остальные перемещения узлов элемента остаются равными нулю.

Пояснение этого выполним с помощью рис. 2.6, где показано, что узлу i элемента задано перемещение $u_{1i}^r = 1$ (рис. 2.6,а). Остальные пять компонентов в векторе \mathbf{q}^r узловых перемещений уравнения (2.40) равны нулю. Произведя умножение этого вектора на матрицу \mathbf{K}^r в (2.40), получим, что вектор узловых усилий элемента будет равен первому столбцу матрицы \mathbf{K}^r . Соответствующие узловые силы, представленные компонентами первого столбца матрицы \mathbf{K}^r , показаны на рис. 2.6,б.

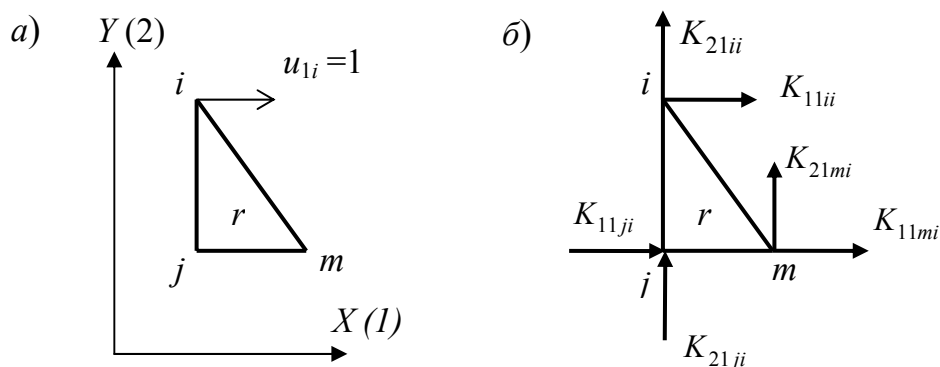


Рис. 2.6

Вычисление матрицы \mathbf{K}^r для треугольного элемента с линейной аппроксимацией перемещений внутри него выполняется по формуле

$$\mathbf{K}^r = (\mathbf{B}^r)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^r \Delta^r, \quad (2.45)$$

с получением которой учащийся может ознакомиться, например, в работе [7].

4. После формирования вектора \mathbf{p} узловых нагрузок и матрицы жесткости \mathbf{K} решается система алгебраических уравнений (2.28) и в общей системе координат определяются компоненты перемещений узлов сетки КЭ, которой аппроксимировано рассматриваемое тело.

5. Поскольку перемещения узлов каждого КЭ становятся известными, с помощью уравнения закона Гука (2.37) в точках рассматриваемого КЭ можно определить составляющие напряжений.

Во всех выполненных рассуждениях выделенный из расчетной схемы сооружения элемент (см. рис. 2.4) относился к общей для всей расчетной схемы

сооружения системе координат. Как было показано в учебных пособиях [3–6], конечный элемент рассматривается также в так называемой местной (локальной) системе координат. Там же показано как осуществляется переход от величин, найденных в одной системе координат к величинам в другой системе координат (см. [5]). Поэтому здесь этот вопрос рассматривать не будем.

Отметим только, что в программе SCAD, которую будем использовать при решении задач теории упругости, *компоненты перемещений узлов сетки элементов определяются* (в результате решения системы алгебраических уравнений (2.28)) *в общей системе координат*, а *компоненты напряжений представляются в местной для конечного элемента системе координат*.

2.6. Конечные элементы, используемые в программе SCAD

Для решения плоской задачи теории упругости, как в варианте *плоского напряженного состояния*, так и в варианте *плоской деформации*, используются конечные элементы треугольной и четырехугольной формы различного типа.

Их различие, в частности, связано с различной аппроксимацией перемещений в области конечного элемента. Обычно при аппроксимации перемещений для этих элементов используются полиномы первой (см. предыдущие примеры), второй и третьей степени. Разработке конечных элементов посвящено много работ. Учащимся рекомендуется познакомиться с этими вопросами, например в работах [7, 8, 9].

Данные об используемых в программе SCAD треугольных и четырехугольных элементах приведены в справке к этой программе, которой легко пользоваться при решении различных задач.

Для облегчения использования справки ниже в приложении к разделу 2 пособия сделана выборочная копия некоторых материалов раздела 4 «Библиотека конечных элементов» и подраздела 6.3.3 «Усилия в плоских конечных элементах», соответствующих вопросу решения плоской задачи ТУ. При этом используются обозначения величин, номера разделов справки, рисунков и литературных источников, принятые в справке разработчиками комплекса.

ПРИЛОЖЕНИЕ к разделу 2 пособия

Материалы из справки к программе SCAD

4.1. Состав библиотеки конечных элементов для линейного расчета

Библиотека конечных элементов (БКЭ) вычислительного комплекса позволяет рассчитывать самые сложные конструкции. В нее включены разнообразные конечные

элементы (КЭ). Для пользователей, знакомых с вычислительными комплексами ППП АПЖБК, ЛИРА и МИРАЖ, в ПВК SCAD обеспечена преемственность с ними по заполнению исходных данных и сохранены правила чтения результатов счета.

Каждому конечному элементу в библиотеке присвоен тип - порядковый номер. В таблице 4.1 дана классификация типов КЭ, возможные признаки расчетной схемы для их работы, идентификация вычисляемых усилий (напряжений).

Таблица 4.1. **Классификация КЭ**

Тип КЭ	Содержание	признаки схемы	Вычисляемые усилия
1-10	Стержни 1 - плоской фермы 2 - плоской рамы 3-балочного ростверка 4 - пространственной фермы 5 – пространственный 6 - пространственный с учетом сдвига 7-балочного ростверка на упругом основании 10 - универсальный	1, 2, 4, 5 2, 5 3, 5 4, 5 5 5 3, 5 1-5	N $N, M(My), (Qz)$ $Mk(Mx), My, Qz$ N N, Mk, My, Qz, Mz, Qy N, Mk, My, Qz, Mz, Qy $Mk (Mx), My, Qz$ в зависимости от типа схемы
11-20	Пластины	3, 5	Mx, My, Mxy, Qx, Qy
21-30	Элементы для решения плоско-напряженной задачи теории упругости (балка-стенка) и расчет плоского деформированного состояния 21, 22, 29, 30, 23, 24, 27	1, 2, 4, 5 4, 5	Для плоско-напряженной задачи: Nx, Ny, Txz ; Для плоской формации: Nx, Ny, Nz, Txz
31-40	Элементы для решения объемной задачи теории упругости	4, 5	$Nx, Ny, Nz, Txy, Txz, Tyz$
41-50	Оболочки	5	$Nx, Ny, Txy, Mx, My, Mxy, Qx, Qy$
51-60	Упруго-податливые связи		
61-70	Элементы для решения осесимметричной задачи теории упругости	11	$Nx(r), Ny(), Nz(z), Txz(Trz)$
71-80	Элементы для расчета многослойных пологих пластин и оболочек, учитывающие поперечный сдвиг, обжатие слоев и кривизну	8	$Nx, Ny, Nz, Txy, Txz, Tyz$, вертикальное перемещение на границах слоев

81-90	Элементы для расчета многослойных пологих пластин и оболочек, учитывающие межслоевые сдвиги и кривизну	9	
150-160	Нуль-элементы для расчета на заданные перемещения	1-5	
200	Пустой элемент	любой	

Усилия и напряжения по умолчанию вычисляются в начале и в конце стержня, а для других типов КЭ - в центре тяжести, можно заказать вычисление усилий для стержней в промежуточных сечениях, а для других типов КЭ - в узлах.

Обычно усилия и напряжения в КЭ вычисляются в местной системе координат. Для стержней, например, это главные оси поперечных сечений гибкой части. Если на рисунке элемента в таблице не указана местная система координат $X_1Y_1Z_1$, то усилия и напряжения вычисляются в общей системе координат. Для всех плоских и объемных КЭ возможно задание системы координат вычисления усилий.

Подраздел 4.3.3. Универсальные конечные элементы плоской задачи теории упругости

Универсальные конечные элементы для решения плоской задачи теории упругости позволяют рассчитывать как плоско-напряженные, так и плоско-деформируемые системы.

В самом общем случае каждый узел конечных элементов имеет по три степени свободы:

U - линейное перемещение по оси X;

V - линейное перемещение по оси Y;

W - линейное перемещение по оси Z.

Степень свободы V отсутствует во всех элементах, которые могут лежать только в плоскости XOZ: (элементы типа 21, 22, 29, 30).

В элементах типа 23, 24, 27, которые могут лежать произвольно в пространстве, она вводится для стыковки пространственных элементов конструкции.

В комплекс SCAD включены следующие КЭ для решения плоской задачи:

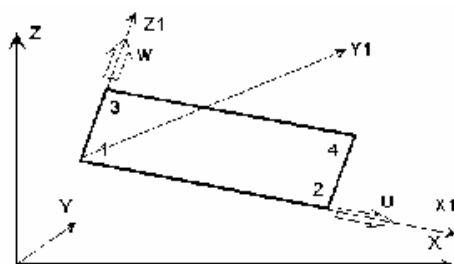


Рис. 4.14

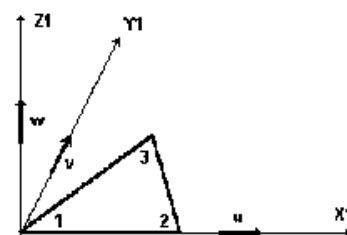


Рис. 4.15

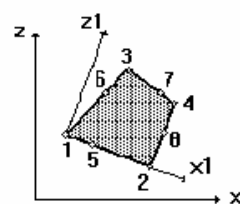


Рис. 4.16

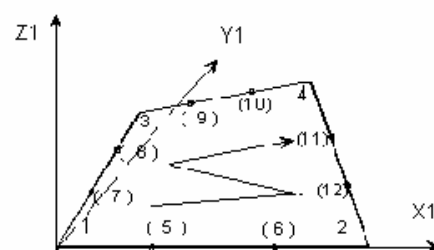


Рис. 4.17

прямоугольные элементы типа 21 (**лежит в плоскости XOZ**) и типа 23 (**произвольного положения в пространстве**), рис. 4.14;

треугольные элементы типа 22 (**лежит в пл. XOZ**) и типа 24 (**произвольного положения в пространстве**), рис. 4.15;

четырёхугольные элементы с числом узлов от 4 до 8 типа 30 (**лежит в пл. XOZ**) и типа 27 (**произвольного положения в пространстве**), рис. 4.16. Кроме вершин четырёхугольника на каждой из сторон может находиться еще по одному узлу. Нумерация узлов с 5-го по 8-й - произвольная;

четырёхугольный элемент с числом узлов от 4-х до 12, **лежащий в плоскости XOZ** типа 29, рис. 4.17. Кроме вершин четырёхугольника на каждой из сторон может находиться еще до двух узлов. Нумерация узлов с 5-го по 12-й произвольная.

Из таблицы 6.7

Тип КЭ	Краткое название вида элемента по его форме	Плоскость расположения балки-стенки	Перемещения узлов элемента	Усилия (напряжения) (Т/м ²)
21	Прямоугольный	XOZ (или параллельная ей)	X, Z (в общей системе координат)	NX, NZ, TXZ (NY в ПД) (по умолчанию в местной системе координат)
22	Треугольный			
29	Четырёхугольный			
30	Четырёхугольный			
23	Прямоугольный	Произвольное положение плоскости балки-стенки в пространстве	X, Y, Z,	NX, NZ, TXZ (NY в ПД) (по умолчанию в местной системе координат)
24	Треугольный			
27	Четырёхугольный			

Подраздел 6.3.3. «Усилия в плоских конечных элементах»

Элементы балок-стенок чаще всего располагаются в плоскости XOZ общей системы координат (и плоскостях, параллельных ей). В этом случае для элементов принимается такая местная система осей координат для элементов, когда в плоскости элемента лежат оси X1 и Z1, а ось Y1 перпендикулярна его плоскости (рис. 6.14)

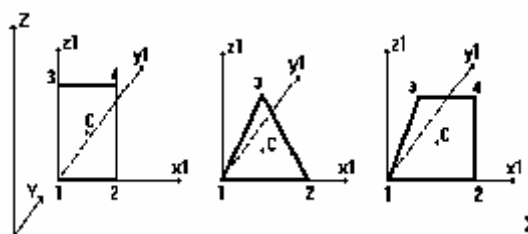


Рис.6.14

На рис. 6.14. приведен вид таких элементов, используемых для решения плоской задачи ТУ, а в части таблицы 6.7 указан их тип и даны некоторые другие сведения.

Если балка-стенка расположена не в плоскости XOZ (или в плоскости параллельной ей), а

в произвольно расположенной плоскости (как часть некоторого пространственного сооружения), то используются элементы того же по форме вида (прямоугольный, треугольный, четырехугольный), но они будут относиться к другим типам по сравнению с рассмотренными выше.

Усилия (напряжения) в плоской задаче вычисляются либо только в центре тяжести элементов (точка С на рис.6.14) или еще (по указанию расчетчика) и в узлах элементов.

На рис. 6.18 подраздела 6.3.3.3 «Правила знаков для усилий и напряжений в плоских конечных элементах» показаны положительные напряжения в прямоугольном и треугольном элементах плоской задачи при их вычислении в местной системе координат для точки в центре тяжести этих элементов.

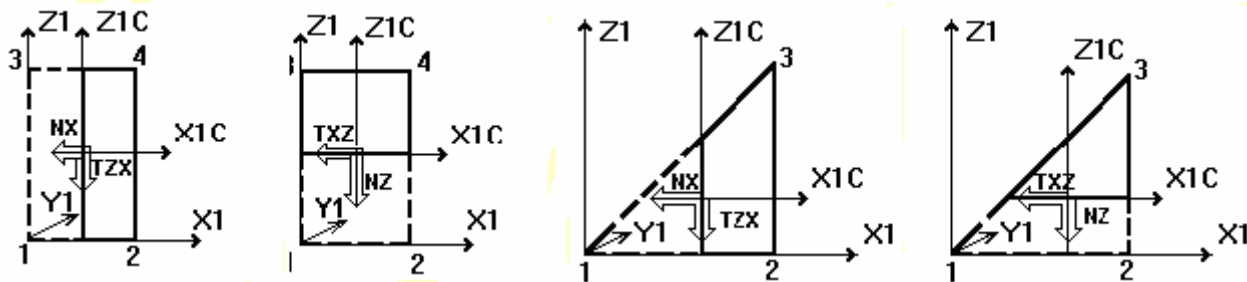


Рис.6.18

Изображенные вектора напряжений относятся к части элемента, показанные сплошными линиями (часть элемента, отмеченная штриховой линией отбрасывается).

Указанное правило знаков для напряжений в элементах плоской задачи ТУ продемонстрировано также на рис. 6.19 справки.

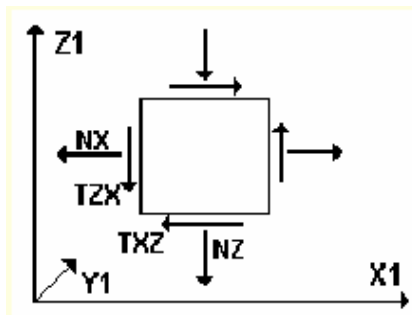


Рис.6.19

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА НДС БАЛКИ-СТЕНКИ МКЭ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

3.1. Постановка задачи.

Продемонстрируем ход расчета МКЭ с использованием программы SCAD балки-стенки, схема которой показана на рис. 1.1, б.

Для определенности расчетов заданы следующие исходные данные: материалом стенки является железобетон класса В25; размеры стенки составляют $h = l = 6$ м, $b = 1$ м; интенсивность нагрузки $q = 1$ т/м.

Предполагается, что стенка находится в условиях плоской деформации.

Требуется выполнить расчет балки-стенки от заданной равномерно распределенной нагрузки и сопоставить эпюру нормальных напряжений σ_x в среднем сечении балки-стенки с соответствующей эпюрой, полученной для этих напряжений по формуле (1.1) для тонких балок.

Расчет выполним с разбивкой стенки прямоугольными КЭ с линейной аппроксимацией перемещений (тип 21). Сетку элементов назначим равномерную по длине и высоте стенки с числом элементов 10×10 . Тогда каждый элемент будет иметь вид квадрата со стороной 0.6 м.

Ход расчета с использованием программы SCAD составим в соответствии с рекомендациями разработчиков ПК SCAD [1. 2] и с учетом инструкции, данной в пособии [4] применительно к расчету стержневых систем.

Применим инструкцию из [4] и дополним ее в тех местах, где она при решении плоской задачи имеется специфика.

3.2. Инструкция по работе с программой SCAD

Открытие нового проекта. Открывается диалоговое окно для создания нового проекта. Ниже приведен вариант его заполнения:

При использовании окна необходимо открыть дополнительное окно для выбора единиц измерения.

Обратим внимание на выбор типа схемы при расчете балки-стенки. Можно оставить тип схемы, который по умолчанию открывается вместе с окном «Новый проект»: 5 – Система общего вида.

Сохранение нового проекта. Для сохранения введенных данных о новом проекте нажатием кнопки «ОК» первое диалоговое окно закрывается и на экран будет выведено окно «Создание нового проекта SCAD» с открытой папкой SDATA (здесь оно не приводится).

Примечания.

1. При выполнении расчетной работы в компьютерном классе кафедры СМ и ТУ в открывшемся окне SDATA будут папки с номерами групп. Надо выбрать папку с номером своей группы и открыть ее (открываем папку 40151). В папке этой группы и задается имя файла проекта.

2. Для того чтобы студенты не выбирали произвольно вымышленных названий своих проектов, в


компьютерном классе кафедры СМ и ТУ принят вид имени файла, состоящий из двух частей, соединенных тире (без пробела):

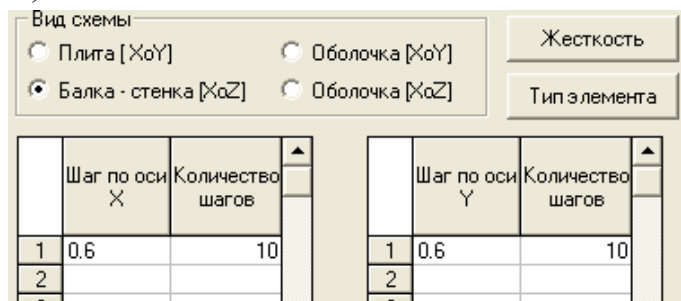
– часть, состоящая из четырехзначного цифрового шифра ABCD, выданного студенту на все время изучения дисциплины «Строительная механика» для выбора расчетных схем из сборника задач.

– часть, состоящая из наименования рассчитываемой системы

Пусть студенту группы 40151 выдан шифр ABCD = 0203. Тогда для задания имени файла он должен последовательно открыть в папке SDATA папку «40151» и в ней задать имя файла: 0203-балка-стенка.

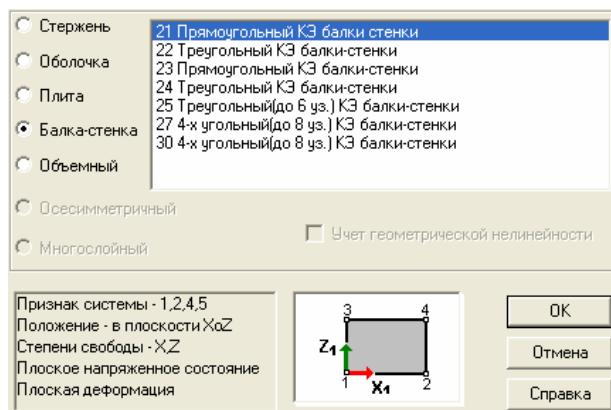
Команда «Сохранить» открывает окно со схемой, которая называется **Дерево проекта**.

Создание расчетной схемы балки-стенки для МКЭ. На дереве проекта выбираем «Расчетная схема», затем выбираем «Схема». На открывшейся инструментальной панели нажимаем кнопку  «Генерация прямоугольной сетки элементов на плоскости» в результате чего появится диалоговое окно «Генерация пластинчатой схемы» (приведена только часть этого окна):



На поле «Вид схемы» этого окна выполняем следующие действия:

1. Выбираем схему «Балка-стенка [XOZ]». В скобках отмечено, что срединная плоскость стенки располагается в вертикальной координатной плоскости с горизонтальной осью X и вертикальной осью Z.
2. В столбце «Шаг по оси X» заносим размер 0.6 элемента в горизонтальном направлении (все размеры в м);
3. В столбце «Количество шагов» указываем, сколько последовательно идущих элементов (слева направо) будут иметь указанный размер (в нашем случае – 10);
4. Аналогичные операции выполняем для вертикального направления Y;
5. С помощью кнопки «Тип элемента» открыть окно «Назначение типа элемента», в котором для балки-стенки выбрать: «21 Прямоугольный КЭ балки стенки» и, нажав кнопку «ОК», закрыть окно.



6. В окне «Генерация пластинчатой схемы» нажать кнопку «Жесткость» и открыть окно «Жесткость пластин» (приведена только его часть), в котором: в поле «Материал» (в соответствии с заданием) выбрать:

«Бетон тяжелый В25»; в поле «Параметры» занести значение толщины пластины: 1 м; отметить точкой тип плоской задачи (в соответствии с заданием): «Плоская деформация».

Подтвердить сделанный выбор параметров нажатием в окне «Жесткость пластин» кнопки «ОК». При этом снова выходим в окно «Генерация пластинчатой системы».

7. После нажатия в этом окне кнопки «ОК» в основном рабочем окне программы появится сгенерированная схема стенки с разбивкой ее на выбранные КЭ.

С помощью кнопок панели «Фильтры отображения» можно получить соответствующую информацию об элементах и узлах сетки элементов (рекомендуется это сделать).

Назначение опорных связей. В схеме балки-стенки, изображенной на рис. 1.1,б показано, что она опирается на две шарнирные опоры, которые при выбранной сетке относятся к крайним нижним узлам намеченной сетки КЭ.

Процедура постановки жестких связей и все процедуры на этапах 2 и 3. известны из учебного пособия [2], поэтому эти вопросы здесь не рассматриваются.

Построенная схема балки-стенки с указанием номеров элементов и их узлов приведена соответственно на рис. 3.1,а,б.

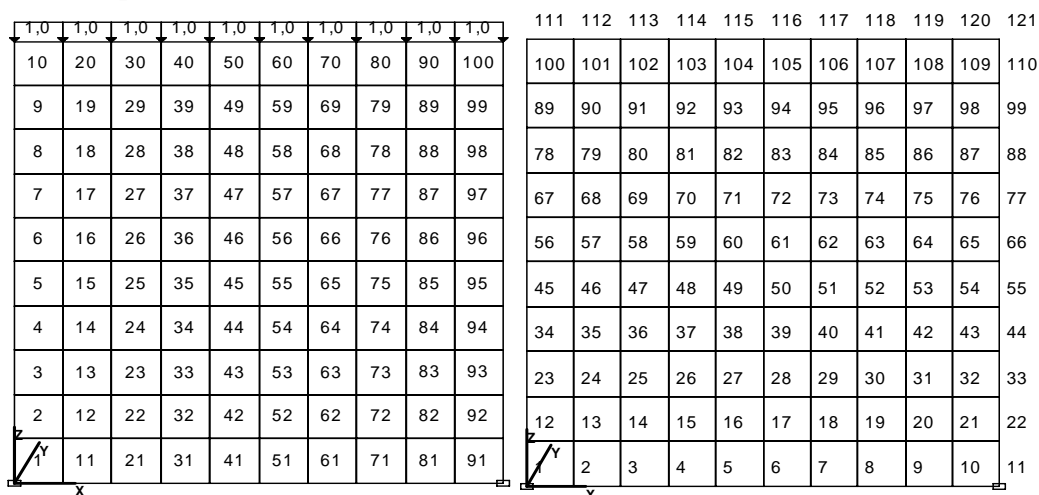


Рис. 3.1

Далее остановимся только на подразделах 4.2 и 4.3 этапа 4 работы [2], т.е. на анализе результатов расчета.

Графический анализ результатов расчета. После линейного расчета открываем на дереве проекта раздел «Результаты», а в нем подраздел «Графический анализ».

При необходимости изучения перемещений деформаций стенки в открывшемся окне открываем инструментальную панель **Деформации..** С этим вопросом учащийся уже знаком из курса «Строительная механика стержневых систем» [3-6].

Для изучения напряженного состояния стенки открываем раздел «Поля напряжений» и на инструментальной панели этого раздела выбираем любой вариант изображения картины напряженного состояния балки-стенки.

На рис. 3.2 приведен вариант, когда напряженное состояние показано линиями равных усилий NX с указанием значений и знаков усилий в центральных точках элементов.

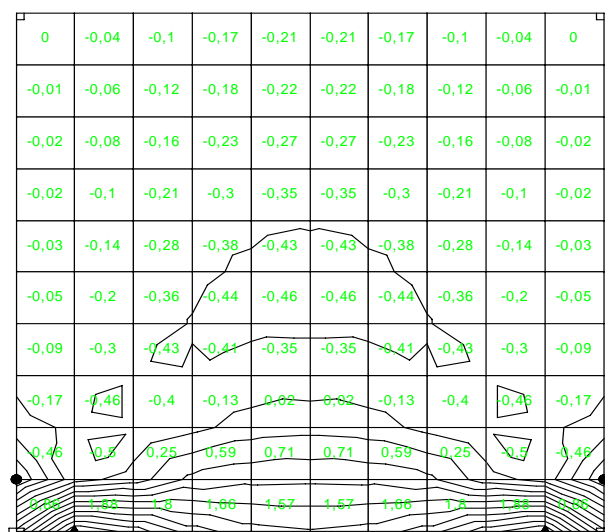


Рис.3.2

При использовании функций панели «Визуализация» можно получить более наглядную картину, например, более напряженной нижней части стенки с указанием усилий в узлах элементов (рис. 3.3).

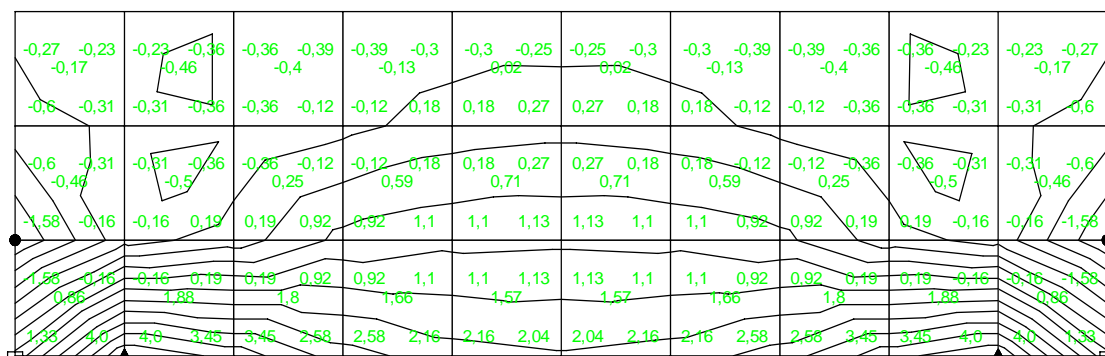


Рис.3.3

Аналогично получают и картины полей усилий NZ и TXZ (они здесь не приводятся).

На рис. 3.4 сплошной линией изображена эпюра нормальных усилий NX

(напряжений σ_x) в среднем сечении стенки. Там же штриховой линией показана эпюра этих напряжений, если бы нормальные напряжения в нижней точке (точка 1) и верхней точке сечения (точка 2) вычислялась по формуле

$$\sigma_{x,1,2} = \pm \frac{M}{W},$$

полученной в курсе сопротивления материалов для тонких балок.

Действительно, в рассматриваемом примере, изгибающий момент M в среднем сечении балки от равномерно распределенной нагрузки $q = 1$ Т/м равен $ql^2/8 = 1 \cdot (6)^2/8 = 4.5$ Т·м.

Момент сопротивления сечения равен $W = bh^2/6 = 1 \cdot (6)^2/6 = 6$ м³. Отсюда $\sigma_{x,1,2} = \pm 4.5/6 = \pm 0.75$ Т/м².

Как видно, от действующей балку-стенку равномерно распределенной нагрузки (см. рис. 1.1,б) наиболее опасные растягивающие напряжения в точке 1, вычисленные по формуле сопротивления материалов для тонких балок, будут более чем в два раза меньше, чем полученные расчетом методом теории упругости МКЭ с выбранной сеткой элементов.

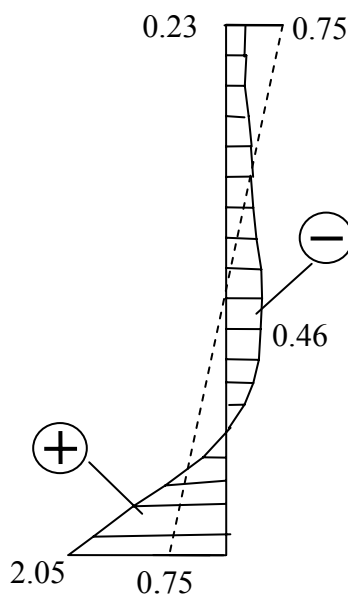


Рис.3.4

Анализ всей картины напряжений $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ и их значений в различных точках балки-стенки, полученных в ТУ, показывает ее большое отличие от картины и значений соответствующих напряжений, получающихся при использовании методики сопротивления материалов, применяемой для расчета тонких балок.

4. РАСЧЕТ ТОНКИХ ПЛИТ

4.1 Пространственное тело, рассматриваемое как тонкая плита

В энергетических, промышленных и гражданских сооружениях часто встречаются железобетонные элементы призматической или цилиндрической формы, высота (толщина) которых мала по сравнению с другими размерами. Такие элементы называют пластинами или плитами. В строительстве обычно используют второе название.

Плиты чаще всего являются горизонтально расположенными и могут иметь различную конфигурацию, например, вид прямоугольника, треугольника, трапеции, круга, и т.д. (рис. 4.1).

Но они могут располагаться и вертикально (тогда плита имеет вид стены, воспринимающей поперечную к ней нагрузку) и наклонно.

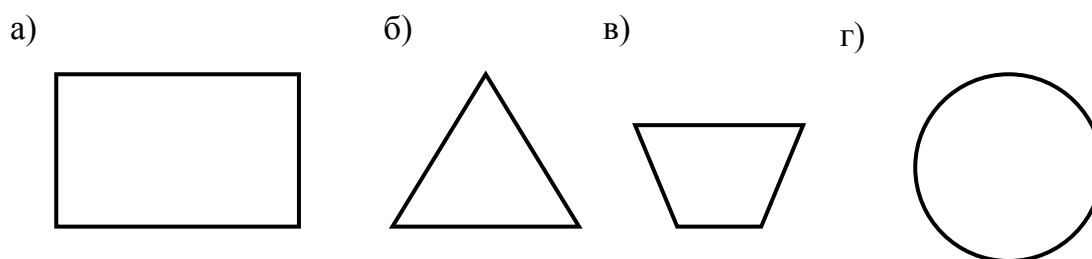


Рис. 4.1

Плита может иметь различные варианты опирания на другие элементы сооружения (стены, колонны), на грунтовое основание и на основания из других материалов.

Нагрузки на плиту могут быть *статическими* и *динамическими*. В этом пособии предполагается, что нагрузки являются статическими.

Вначале будем рассматривать статические нагрузки, вызывающие только изгиб плиты. Затем учтем и вариант одновременного действия нагрузок, вызывающих в плите НДС растяжения-сжатия.

Характер НДС плиты зависит не только от вида нагрузки, характера ее опирания, но и от соотношения толщины плиты к размерам ее плоскостей.

С точки зрения методов расчета НДС плит их различают как *тонкие*, *средней толщины* и *относительно толстые*.

В строительных объектах обычно плиту рассчитывают по методике тонких плит, если (примерно) значение соотношения $h/l_{\min} \leq 1/5$, где h – толщина плиты; l_{\min} – наименьший размер плиты в плане (по аналогии с тонкими балками).

В строительстве чаще используются тонкие плиты постоянной толщины. Тогда верхняя и нижняя стороны плиты (стороны с наибольшими размерами) представляют собой параллельные друг другу плоскости (см. рис. 1.4). Плоскость параллельную им и делящую плиту по толщине пополам называют *срединной плоскостью*.

Расчетную схему тонкой балки (см. рис. 1.4,а) представляют в виде ее оси. Аналогично расчетную схему тонкой плиты представляют в виде ее срединной плоскости. Опорные связи и нагрузку на тонкую плиту относят к срединной плоскости.

На рис. 4.2 изображена срединная плоскость прямоугольной в плане тонкой плиты, отнесенная к правой прямоугольной системе координат. При этом срединная плоскость находится в координатной плоскости XOY , а ось Z направлена перпендикулярно к ней.

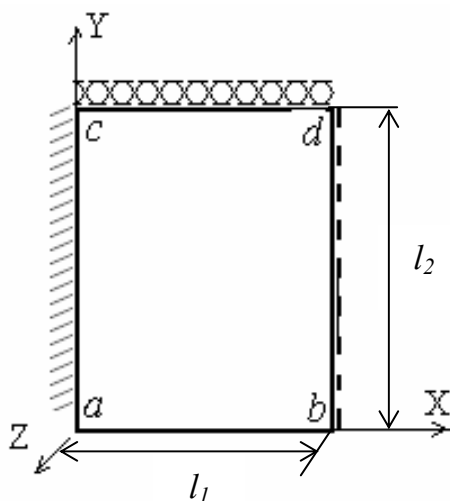


Рис. 4.2

На четырех границах срединной плоскости плиты условно показано, принятое в данном пособии, обозначение способов опирания плиты по ее контуру:

Сторона ab не имеет опирания (свободна);

Сторона bd имеет шарнирно - подвижное опирание;

Сторона ac имеет шарнирно - неподвижное опирание;

Сторона cd закреплена.

На рис. 4.2 изображена правая система прямоугольных координат. В различных учебниках, научных и инженерных работах плита с этой системой координат может быть изображена в разных ракурсах. На рис. 4.3 приведены различные положения схемы срединной плоскости горизонтальной плиты с осью Z направленной вверх. Во всех этих вариантах точки плиты,

расположенные выше срединной плоскости, будут иметь положительные координаты z .

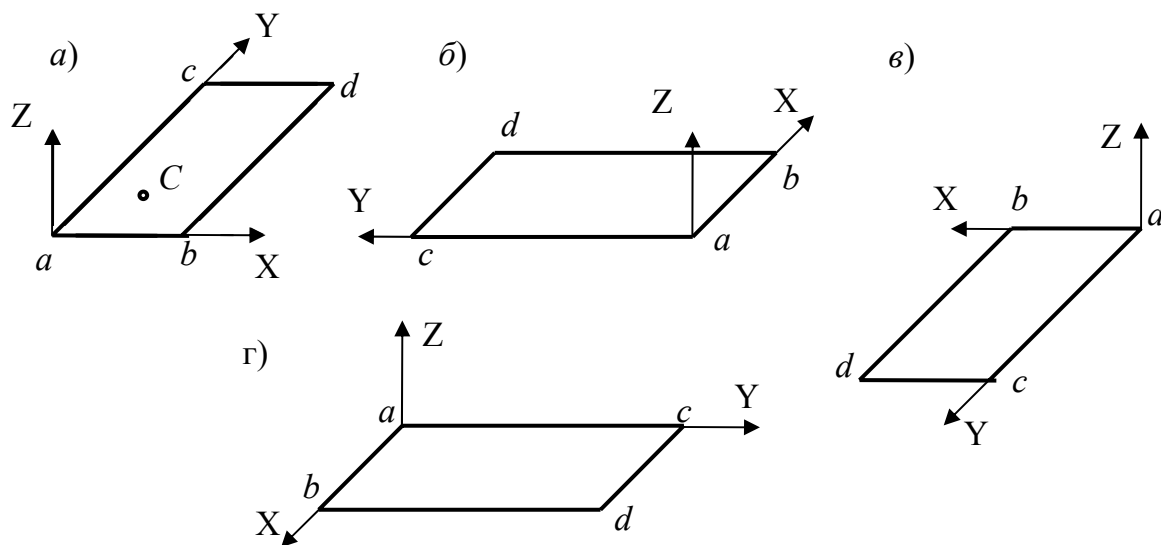


Рис.4.3

Если срединную плоскость тонкой плиты повернуть вокруг оси X (или Y) на угол 180° , то получим горизонтальную плиту в положении, когда ось Z правой системы координат будет направлена вниз (Рис. 4.4). При этом часть плиты, расположенная выше срединной плоскости оказывается со стороны обратной положительному направлению оси Z и все точки плиты, расположенные выше срединной плоскости, будут иметь отрицательные координаты z .

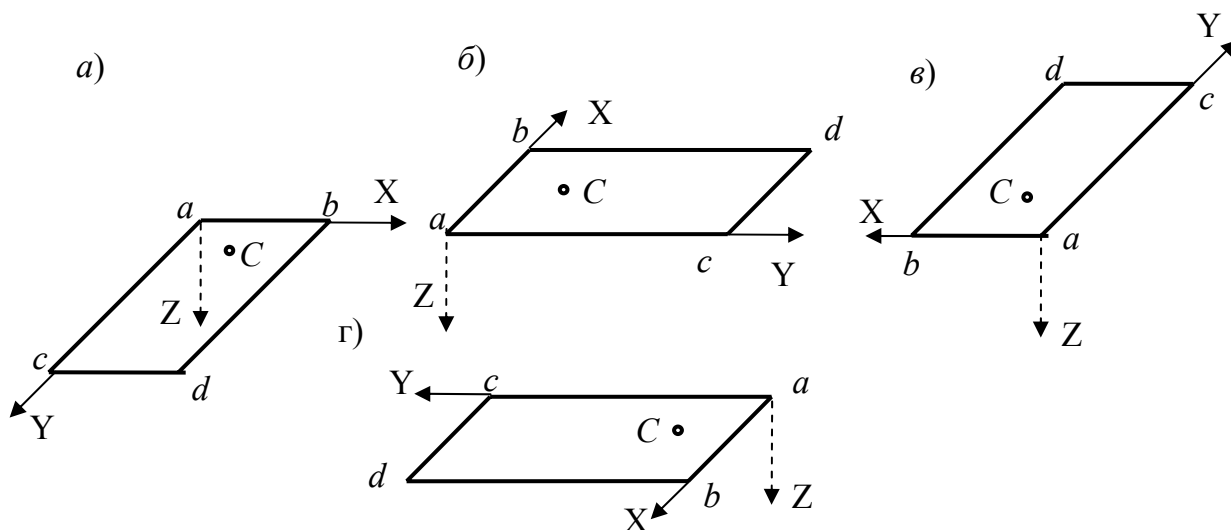


Рис.4.4

Как уже отмечалось, плита может располагаться в сооружении не только горизонтально, но и в других положениях. Например, в подземном сооружении

в виде монолитной железобетонной конструкции из тонких стен и плит его вертикальная стена (без учета ее работы от вертикальной нагрузки как балки-стенки, что допускается принципом независимости действия сил), от горизонтального давления на нее грунтовой засыпки работает как тонкая плита.

Если стену рассматривать как плиту, то ее расчетную схему можно получить, например, повернув, изображенную на рис. 4.3,*a* горизонтальную срединную плоскость плиты, вокруг оси X вместе с правой системой координат. Тогда срединная плоскость станет вертикальной и будет иметь вид, изображенный на рис. 4.2.

При этом срединная плоскость стены будет по-прежнему располагаться в координатной плоскости XOY .

Методика расчета тонких плит и определяемое в них НДС не зависят от выбранной системы координат. Но надо обращать внимание на знаки тех величин, которые берутся в соответствии с выбранной системой координат. Это будет пояснено в дальнейшем при рассмотрении теории расчета тонких плит.

4.2. Рабочие гипотезы, принимаемые при расчете пространственного тела в виде тонкой плиты

При разработке теории расчета тонких плит используются допущения, перечисленные в подразделе 1.2 пособия.

Кроме них для тонких плит используются рабочие гипотезы аналогичные рабочим гипотезам, применяемым для расчета тонких балок.

Сформулируем эти гипотезы и изучим их влияние на систему уравнений теории упругости и определяемые неизвестные величины.

Рассмотрим тонкую плиту толщиной h , изображенную на рис. 4.2. Пусть она вместе с системой координат представляется в виде, изображенном на рис. 4.4,*a* [7].

Предположим, что она загружена поперечной к срединной плоскости равномерно распределенной нагрузкой и собственным весом, совпадающими по направлению с положительным направлением оси Z . При такой нагрузке плита будет работать только на изгиб. Требуется рассчитать ее для получения НДС.

С целью упрощения решения задачи по расчету НДС тонкой плиты, испытывающей только изгиб (без растяжения и сжатия), дополнительно к общепринятым в ТУ допущениям применяют следующие рабочие гипотезы, [7, 10].

1. Напряжения σ_z не оказывают существенного влияния на величину

деформаций ε_x и ε_y в уравнениях упругости (закон Гука) для пространственной задачи и ими можно пренебречь.

2. Соотношения упругости относительно $\varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ могут быть приближенно заменены равенствами: $\varepsilon_z = 0; \gamma_{yz} = 0; \gamma_{zx} = 0$.

В результате физические уравнения, отражающие линейную связь деформаций и напряжений для пространственной задачи, примут вид (4.1).

Как видно из геометрического уравнения $\varepsilon_z = \partial w / \partial z = 0$, условие 3) показывает, что любой прямолинейный вертикальный отрезок в теле тонкой плиты не изменяет своей длины при деформации плиты. Поэтому точки, лежащие на этом отрезке, имеют равные вертикальные перемещения $w = w(x, y) = w_0(x, y)$, не зависящие от координаты z . Здесь $w_0(x, y)$ является вертикальным перемещением точки пересечения указанного отрезка со срединной плоскостью.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \\
 2) \quad \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \\
 3) \quad \varepsilon_z &= 0; \\
 4) \quad \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\
 5) \quad \gamma_{yz} &= 0; \\
 6) \quad \gamma_{zx} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Пятое и шестое условия в (4.1) означают, что рассматриваемый отрезок остается прямым и перпендикулярным срединной плоскости и после деформации тонкой плиты.

Для пояснения этого через произвольную точку C на расстоянии y от координатной плоскости XOZ (см. рис. 4.4,а) проведем сечение плиты плоскостью параллельной плоскости XOZ и рассмотрим часть сечения (рис. 4.5).

На рис. 4.5 показано, что в результате действия нагрузки на плиту она деформировалась и некоторая точка C (с координатами x, y) на срединной плоскости плиты получила положительный прогиб w_0 . Точка D , расположенная в сечении плиты на срединной плоскости на расстоянии dx от точки C , получила прогиб $w_0 + \frac{\partial w_0}{\partial x} dx$.

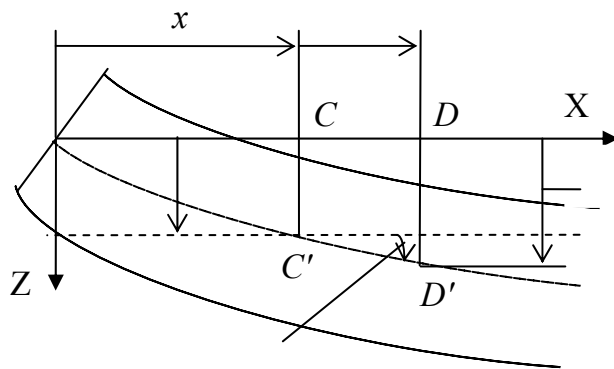


Рис.4.5

На рисунке показан соответствующий угол поворота α касательной к срединной плоскости вокруг оси Y .

Как видно, этот угол может быть выражен через функцию $w = w(x, y) = w_0(x, y)$ в виде $\alpha \cong \text{tg} \alpha = \partial w / \partial x = \partial w_0 / \partial x$.

Запишем шестое геометрическое уравнение в полной системе уравнений ТУ [7, 10] с учетом рабочей гипотезы б) в уравнениях (4.1):

$$б) \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} = -\alpha. \quad \text{Отсюда} \quad u = -z\alpha + u_0(x, y) \quad (4.2)$$

3. Сделаем дополнительное допущение, что вследствие малости перемещений, *горизонтальными составляющими перемещений точек, лежащих на срединной плоскости, при изгибе срединной плоскости можно пренебречь*. Это означает, что при $z=0$ $u(x, y, z) = u_0(x, y) = 0$ и

$$u = -z\alpha. \quad (4.3)$$

Примечание к вопросу о знаках искомых перемещений

Обратим внимание на то, что знаки искомых перемещений w , u , v точек плиты зависят от знака координат z точек, т.е. зависят от направления оси Z .

Для приведенного варианта ось Z направлена вниз (см. рис. 4.5). При этом прогиб w и производная $\alpha = \partial w / \partial x$ для изображенной части плиты имеют положительный знак. Поэтому для точек плиты, расположенных ниже срединной плоскости ($z > 0$) из формулы (4.3) для горизонтального перемещения u получим отрицательный знак.

Если плиту соотнести с системой координат, изображенной на рис. 4.3, то на рис. 4.5 ось Z будет направлена вверх. В этом варианте функция прогиба и ее производная применительно к показанной на рис. 4.3 части плиты будут отрицательными. Но одновременно для точек нижней части плиты станут отрицательными и координаты z . Поэтому перемещения u для этих точек по-прежнему можно вычислять по формуле (4.3).

По аналогии, из пятого геометрического уравнения для

пространственного тела с учетом пятого условия в (4.1) получаем

$$5) \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_o}{\partial y} = -\beta. \quad \text{Отсюда} \quad v = -z\beta + v_o(x, y). \quad (4.4)$$

При условии, что при $z=0$ $v_o(x, y) = 0$,

$$v = -z\beta. \quad (4.5)$$

Таким образом, точка C , лежащая на срединной плоскости, имеет только вертикальное перемещение $w_o(x, y)$ и не имеет горизонтальных перемещений ($u_o(x, y) = v_o(x, y) = 0$). Соответствующие деформации в срединной плоскости также равны нулю ($\varepsilon_{x,o}(x, y) = \varepsilon_{y,o}(x, y) = 0; \gamma_{xy,o} = 0$).

Выражения (4.3) и (4.5) показывают, что прямой вертикальный отрезок ab , проведенный через точку C (рис. 4.6), после деформации плиты останется прямым, будет иметь вертикальное смещение $w_o(x, y)$ и углы поворота α и β по отношению, соответственно, к осям Y и X общей системы координат.

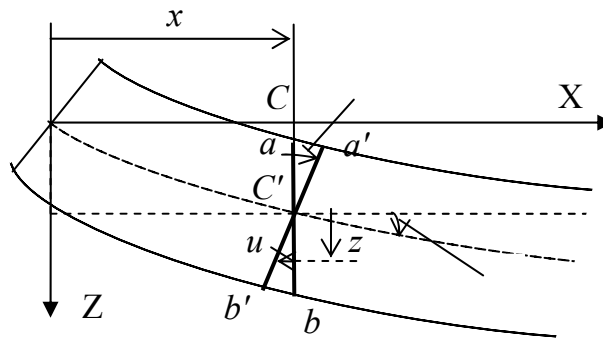


Рис. 4.6

На рис. 4.6 показано, что прямой отрезок ab повернулся вокруг оси Y на угол α и занял положение $a'b'$ перпендикулярное в точке C' к деформировавшейся срединной плоскости.

Как видим, дополнительные рабочие гипотезы для тонких плит аналогичны допущениям, принятым при построении теории расчета тонких балок. Поэтому, построенная с помощью этих дополнительных гипотез теория расчета тонких плит, будет приводить к приближенным результатам и (по аналогии с тем, как это было показано при расчете балок-стенок) погрешность расчетов будет возрастать с увеличением высоты (толщины) плиты.

4.3. Неизвестные величины НДС тонкой плиты и формулы для их определения

Принятые рабочие гипотезы, учитывающие специфику геометрии тонкой

плиты, позволили выразить перемещений любой ее точки через прогиб срединной плоскости плиты:

$$w = w_0; u = -z \frac{\partial w_0}{\partial x}; v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (4.6)$$

Из шести неизвестных составляющих напряжений для пространственного тела в тонкой плите после первого дополнительного допущения остаются пять неизвестных, которые представим в виде следующей таблицы (вследствие закона парности касательных напряжений заполнена только ее половина)

σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
	σ_y	τ_{yz}
		0

(4.7)

Из шести неизвестных деформаций остаются три:

ε_x	γ_{xy}
	ε_y

(4.8)

Обратим внимание на то, что в результате сделанных допущений касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} не связаны с деформациями и по аналогии с тонкой балкой определяются только из условий равновесия.

Покажем, что остальные деформации и напряжения в таблице (4.7), связанные уравнениями упругости (законом Гука), также могут быть выражены через прогиб срединной плоскости тонкой плиты.

С этой целью два первых уравнения системы уравнений (4.1), отражающие закон Гука, путем простых преобразований представим в виде

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (4.9)$$

Из четвертого уравнения получаем

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}. \quad (4.10)$$

Представим геометрические уравнения с учетом (4.6) в виде (4.11).

Тогда составляющие напряжений вместо формул (4.9) и (4.10) могут быть представлены в виде (4.12).

Таким образом, если будет определена непрерывная функция прогиба плиты $w = w_0(x, y)$, то с помощью приведенных формул могут быть определены и все остальные, указанные выше неизвестные перемещения,

деформации и напряжения НДС плиты.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \\ \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Примечание к вопросу о знаках в формулах (4.12) при вычислении напряжений

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в связи с направлением оси Z для расчетной схемы плиты

Все указанные формулы были получены для варианта плиты, отнесенной к координатной системе с осью Z направленной вниз (см. рис. 4.4,а).

Поскольку на приведенных выше рис. 4.5 и рис. 4.6 выпуклость плиты направлена вниз, то снизу от срединной плоскости при расчете НДС должны получиться растягивающие нормальные напряжения σ_x , которые обычно считаются положительными.

Однако, если принять в формулах (4.12) $z > 0$, то на первый взгляд, вместо положительных нормальных напряжений σ_x и σ_y , которые соответствуют физическому состоянию плиты, имеющей выпуклость вниз получим отрицательные напряжения.

Но это не так, поскольку в формулах (4.12) необходимо еще учесть знак вторых производных. Поскольку *выпуклость плиты направлена в сторону положительной оси Z – вниз, то $\partial w^2 / \partial x^2 < 0$* . Поэтому при $z > 0$, напряжения σ_x при их вычислении по формуле (4.12) получатся положительными.

Аналогичные рассуждения необходимо провести и для напряжений σ_y, τ_{xy}

Полученные формулы (4.12) могут быть использованы и для варианта рассматриваемой плиты с осью Z направленной вверх.

Действительно, если ось Z будет направлена вверх, то *положительному ее направлению соответствует вогнутость плиты*, поэтому в формулах следует принять $\partial w^2 / \partial x^2 > 0$, а для нижних точек плиты необходимо подставить отрицательные значения z ($z < 0$). Поэтому, нормальные напряжения, подсчитанные по соответствующим формулам (4.12) получатся положительными и для варианта плиты с осью Z направленной

вверх.

Формулы (4.12) показывают, что составляющие напряжений в тонкой плите линейно изменяются по толщине. Соответствующее графическое представление линейной эпюры напряжений σ_x показано на рис. 4.7 для сечения плиты, проходящего через точку C (см. рис. 4.4, а) параллельно плоскости YOZ .

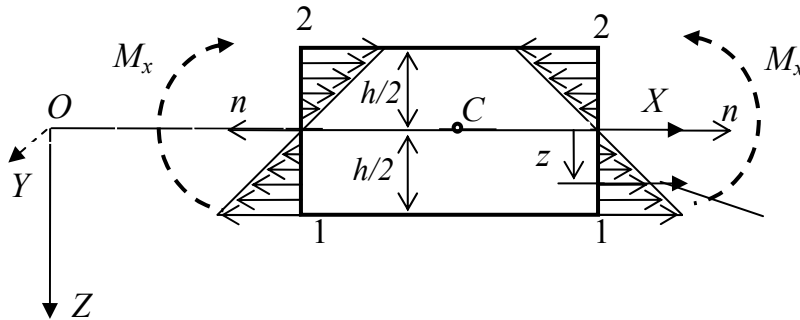


Рис. 4.7

Если внешняя нормаль n к сечению совпадает по направлению с положительным направлением оси X , изображенная в сечении эпюра σ_x относится к части плиты слева от сечения. При отрицательном направлении нормали сечение относится к части плиты, расположенной справа от сечения.

При деформации плиты, изображенной на рис. 4.5 и 4.6, в точках сечения плиты, находящихся ниже срединной плоскости, напряжения σ_x являются растягивающими и считаются положительными. Наоборот, в точках расположенных выше срединной плоскости эти напряжения являются сжимающими и считаются отрицательными.

Видно, что напряжения σ_x создают изгибающий момент плиты M_x , который можно отнести к точке C на срединной плоскости плиты (на рис. 4.7 моменты изображены штриховыми линиями для сечений слева и справа от точки C). Их направления соответствуют направлению нормальных напряжений в сечениях, а величина определится интегрированием напряжений σ_x в сечении. Обычно изгибающий момент M_x в точке C сечения плиты относят к единице длины по направлению оси Y . Тогда с учетом (4.12)

$$M_x = \int_{\Omega} (\sigma_x d\Omega) \cdot z = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz. \quad (4.13)$$

Здесь $\Omega = h \cdot 1$ и $d\Omega = dz \cdot 1$.

Последний интеграл представляет собой момент инерции выделенной

части сечения, т.е.: $I = 1 \cdot h^3 / 12$. Поэтому

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad (4.14)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4.15)$$

Величина D является обозначением так называемой *цилиндрической жесткости* плиты.

Обратим внимание на то, что $D > EI$, т.е. цилиндрическая жесткость плиты больше жесткости на изгиб $EI = Eh^3 / 12$ балки единичной ширины и высоты h .

Аналогично получается выражение для изгибающего момента M_y

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (4.16)$$

Таким образом, если в плите будет получена функция прогиба $w = w_o(x, y)$, то из выражений (4.14) и (4.16) могут быть определены и указанные изгибающие моменты.

Сопоставление этих выражений с соответствующими формулами (4.12) приводит к следующим формулам для определения нормальных напряжений в тонкой плите *при оси Z, направленной вниз*.

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z. \quad (4.17)$$

Изгибающий момент в этих формулах считается положительным, если он направлен так, как показано на рис. 4.7, т.е. растягивает нижние «волокна» плиты

Если поставить цель определения максимальных численных значений для этих напряжений в точках 1 и 2 сечения (см. рис. 4.7), то следует соответственно принять $z = \pm h/2$. Тогда

$$\sigma_{x,1,2} = \pm \frac{M_x}{W}; \quad \sigma_{y,1,2} = \pm \frac{M_y}{W}, \quad (4.18)$$

где $W = I : h/2 = 1 \cdot h^2 / 6$ – момент сопротивления сечения плиты высотой h и шириной равной единице длины.

Как видим, сделанные в теории расчета тонких плит дополнительные допущения привели к формулам для определения нормальных напряжений при изгибе плиты, аналогичным формулам для тонких балок.

В сечениях плиты кроме указанных нормальных напряжений действуют и касательные напряжения. Причем, как видно из третьего уравнения уравнений (4.12), отражающих закон Гука, касательные напряжения τ_{xy} имеют такой же закон изменения касательных напряжений по высоте плиты, как и нормальные напряжения (линейная функция от координаты z).

На рис. 4.8 показана эпюра этих напряжений на части сечения плиты, проходящего через точку C перпендикулярно оси X . Ширина сечения принята равной единице длины, поэтому площадь выделенного сечения равна $\Omega = h \cdot 1$. Сечение спроектировано на плоскость YOZ .

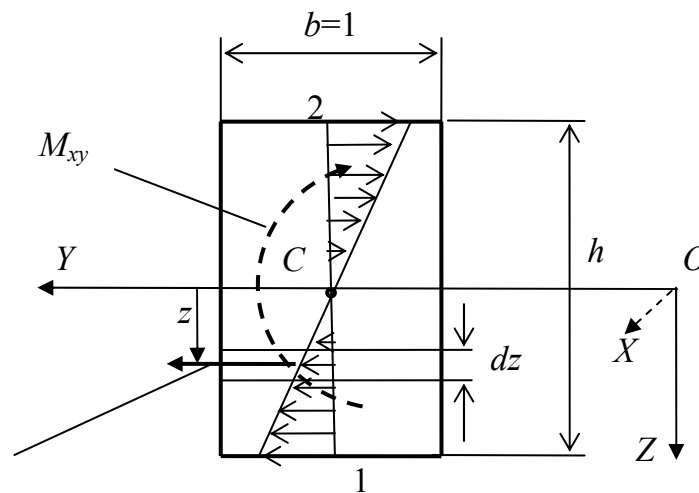


Рис. 4.8

Как видно, касательные напряжения создают крутящий момент M_{xy} , который может быть определен аналогично изгибающему моменту M_x (4.13):

$$M_{xy} = \int_{\Omega} (\tau_{xy} d\Omega) \cdot z = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = -\frac{Ez}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz. \quad (4.19)$$

Отсюда

$$M_{xy} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.20)$$

и с учетом третьего уравнения в (4.12)

$$\tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z. \quad (4.21)$$

Крутящий момент M_{xy} в сечении считается положительным, если он направлен так, как показано на рис. 4.8 (момент показан штриховой линией).

Для получения максимальных по значению касательных напряжений на нижней и верхней границах 1 и 2 сечения (см. рис. 4.8) в эту формулу надо подставить $z = \pm h/2$. Тогда

$$\tau_{xy,1,2} = \pm \frac{M_{xy}}{W}. \quad (4.22)$$

При выбранной системе координат касательные напряжения ниже срединной плоскости плиты будут положительными, а выше – отрицательными.

Если через точку C на срединной плоскости плиты (см. рис. 4.4) провести плоскость перпендикулярную оси Y , то горизонтальные касательные напряжения τ_{yx} на ней по закону парности будут равны только что рассмотренным горизонтальным напряжениям τ_{xy} в точках с одинаковыми z .

Поэтому и крутящие моменты в точке C на площадках перпендикулярных осям X и Y будут равны. При этом положительное направление крутящих моментов определяется положительным направлением касательных напряжений τ_{xy} и τ_{yx} в соответствующих сечениях.

На рис. 4.9 показано положительное направление касательных напряжений τ_{yz} для зоны плиты с положительными координатами z и отрицательное направление этих напряжений в зоне с отрицательными z . Здесь же показано соответствующее положительное направление крутящего момента M_{yx} . Так как $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, то $M_{xy} = M_{yx}$.

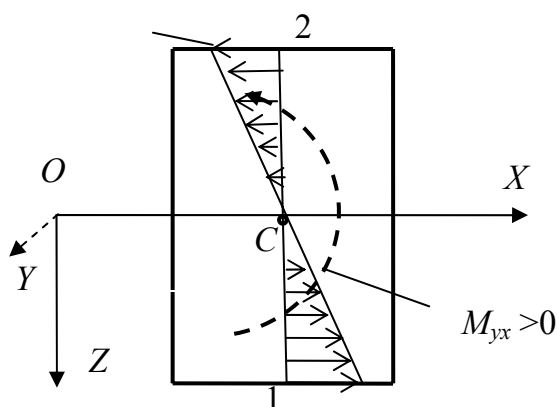


Рис. 4.9

Примечание к вопросу о знаках в формулах (4.14), (4.16), (4.20) соответственно для вычисления моментов

Из предыдущих примечаний видно, что принятое правило знаков для указанных моментов не зависит от направления оси Z : *моменты, растягивающие нижнюю сторону плиты считаются положительными*

Однако из анализа формул с приведенными номерами видно, что смена направления координатной оси Z изменяет знак вторых производных в указанных формулах.

Поэтому полученные формулы справедливы только для варианта, когда ось Z направлена вниз. В этом случае для рассмотренной на рис. 4.7 и рис. 4.6 деформации плиты вторые производные являются отрицательными. Поэтому вычисленные по указанным формулам моменты получатся положительными и соответствующими по правилу знаков нормальным напряжениям.

При направлении оси Z вверх в формулах (4.14), (4.16) и (4.20) следует принять знак «плюс», поскольку вторые производные для этого варианта направления координатной оси станут положительными.

Примечание к вопросу о знаках в формулах (4.17), (4.21) при вычислении соответственно напряжений σ_x , σ_y и касательных напряжений τ_{xy}

В формулах (4.17) и (4.18) предполагается, что *изгибающие моменты M_x , M_y положительны, когда они растягивают нижнюю сторону плиты*. При выпуклости рассматриваемой плиты направленной вниз эти моменты таковыми и являются (см. рис.4.7).

Поскольку ось Z в рассматриваемом варианте расчетной схемы плиты направлена вниз (см. рис.4.4,а), то для точек плиты, расположенных ниже ее срединной плоскости, в формулы (4.17) подставляем $z > 0$. Тогда, при положительных изгибающих моментах, получаем в зоне плиты ниже срединной плоскости соответственно положительные по знаку (растягивающие) нормальные напряжения.

Если в координатной системе, к которой отнесена плита, ось Z направлена вверх, то от этого напряженное состояние плиты не изменится. По-прежнему растянутыми будут нижние «волокна» плиты. И изгибающие моменты, растягивающие нижние волокна, по-прежнему считаются положительными.

Но теперь в формулы (4.17) для точек плиты ниже срединной плоскости необходимо подставлять $z < 0$. Это приведет к тому, что при вычислении явно растягивающих нормальных напряжений получим их со знаком «минус». Чтобы получить знак плюс, необходимо для расчетной схемы плиты с осью Z , направленной вверх, в формулах (4.17) поставить знак «минус»:

$$\sigma_x = -\frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_y = -\frac{M_y}{I} z. \quad (4.17^*)$$

Аналогично для касательных напряжений в формуле (4.21) также необходимо поставить знак «минус»:

$$\tau_{xy} = -\frac{M_{xy}}{I} z. \quad (4.21^*)$$

Осталось определить на рассматриваемых сечениях касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} . Они действуют на площадках перпендикулярных соответственно осям X и Y в направлении перпендикулярном срединной

плоскости, т.е. параллельном оси Z (см. рис. 1.6).

Как уже отмечалось в начале раздела, указанные напряжения в связи со сделанным дополнительным допущением об отсутствии в тонких плитах сдвиговых деформаций γ_{yz} и γ_{zx} (см. выше допущение 2) не связаны с ними соответствующими уравнениями закона Гука, а определяются из условий равновесия.

При этом принимается следующая последовательность их определения.

Сначала при расчете плиты находятся соответствующие поперечные силы, представляющие собой интегралы вида:

$$Q_x = \int_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz; \quad Q_x = \int_{\Omega} \tau_{zx} d\Omega = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{zx} dz. \quad (4.23)$$

Эти силы определяются из уравнений равновесия бесконечно малого элемента срединной плоскости в виде суммы моментов соответственно относительно осей Y и X или осей параллельных им. Положительные направления поперечных сил совпадают с положительным направлением соответствующих касательных напряжений и соответствуют выбранному направлению оси Z .

На рис. 4.10 показаны усилия, действующие по сторонам элемента, которые входят в уравнение в виде суммы моментов всех усилий относительно стороны элемента, параллельной оси Y и проходящей через точку D . Нагрузка на элемент представлена равнодействующей, равной $q(dx \cdot dy)$.

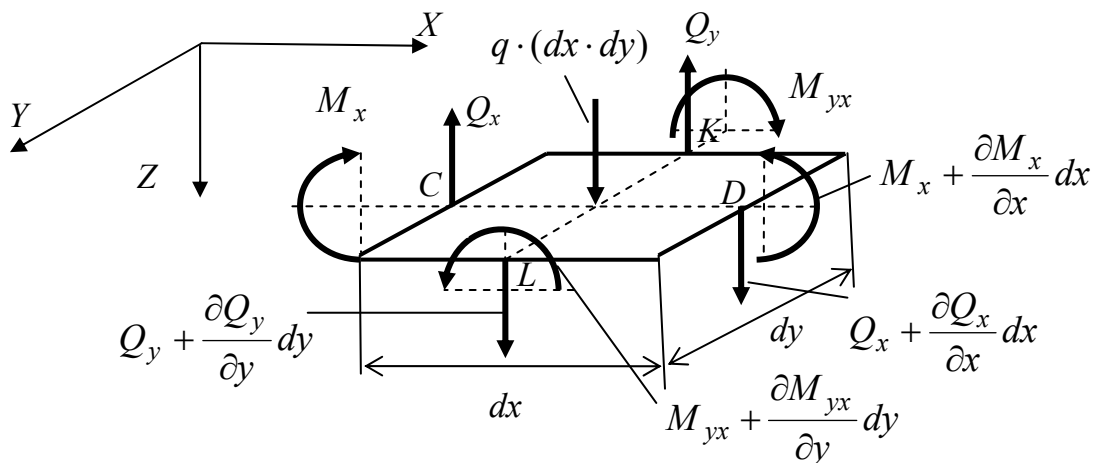


Рис. 4.10

Для упрощения рисунка на нем не показано действие на стороны элемента параллельные оси X изгибающих моментов M_y и $M_y + \frac{\partial M_y}{\partial x} dx$ и

действие на стороны элемента параллельные оси Y крутящих моментов соответственно M_{xy} и $M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$.

Указанное уравнение моментов будет иметь вид:

$$-M_x dy + \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_{yx} dx + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - Q_x dy dx - \\ - Q_y dx \frac{dx}{2} + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + q(dx dy) \frac{dx}{2} = 0.$$

Отсюда после алгебраических преобразований и исключения бесконечно малых величин высшего порядка малости получаем

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}. \quad (4.24)$$

Аналогично из равенства нулю суммы моментов всех сил относительно оси, проходящей через точку L (не забыть учесть не указанные на рисунке усилия), получим

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (4.25)$$

При подстановке в (4.24) и (4.25) выражений (4.14) и (4.16) получатся следующие формулы для представления поперечных сил как функций прогиба:

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \quad (4.26) \\ Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right).$$

После определения указанных поперечных сил, касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} определяются по формулам:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x S(z)}{I \cdot b}; \quad \tau_{yz} = \frac{Q_y S(z)}{I \cdot b}. \quad (4.27)$$

где $S(z) = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)$ – статический момент для части плиты шириной b

(в нашем случае $b=1$) выше или ниже точки, для которой вычисляется касательное напряжение.

Таким образом, эпюра рассматриваемых касательных напряжений по высоте плиты имеет параболический вид с максимальной ординатой на отметке срединной плоскости (при $z=0$ $S(z) = h^2/8$) равной соответственно:

$$\tau_{zx} = \frac{3Q_x}{2h}; \quad \tau_{zy} = \frac{3Q_y}{2h}. \quad (4.28)$$

4.4. Основное уравнение для определения прогибов тонкой плиты.

Последовательность решения задачи по получению НДС плиты

Третье уравнение равновесия бесконечно малого элемента срединной плоскости плиты (см. рис. 4.10) в виде равенства нулю проекций всех сил на ось Z после преобразований будет иметь вид

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \quad (4.29)$$

Подстановка (4.24) и (4.25) в (4.26) приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \quad (4.30)$$

Это уравнение при подстановке в него выражений для изгибающих и крутящего моментов через функцию прогиба w примет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q}{D}. \quad (4.31)$$

Дифференциальное уравнение (4.31) является основным уравнением для определения прогибов плиты при заданной на нее поперечной нагрузке интенсивности q и заданной цилиндрической жесткости D плиты.

Его решение выполняется с учетом заданных граничных условий плиты.

Рассмотрим некоторые из вариантов таких условий на примере плиты, изображенной на рис. 4.2 [7, 10].

Шарнирно опертый край. Рассмотрим срединную плоскость плиты, изображенную на рис. 4.2. Сторона ac срединной плоскости имеет шарнирно неподвижное опирание. Тогда по линии ac прогиб

$$(w)_{x=0} = 0 \quad (4.32)$$

и изгибающий момент

$$(M_x)_{x=0} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (4.33)$$

Поскольку кривизна $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ плиты по линии опирания ac , совпадающей с осью Y равна нулю, то условие (4.33) запишется в виде

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0. \quad (4.34)$$

Граничные условия в виде $(u_o)_{x=0} = 0$ и $(v_o)_{x=0} = 0$ при расчете тонкой плиты автоматически удовлетворяются, так как было принято допущение о том, что указанные перемещения равны нулю во всех точках срединной плоскости. Поэтому при расчете прогиба плиты их записывать не нужно.

На шарнирно подвижной стороне опирания bd граничные условия, необходимые для решения основного уравнения для определения прогибов, записываются аналогично (4.32) – (4.34), но при $x = l_1$.

Защемленный край плиты (полная заделка). Таким краем для рассматриваемой на рис. 4.2 срединной плоскости плиты является сторона cd .

Здесь при $y = l_2$ по всей стороне будут отсутствовать прогибы и углы поворота касательных к деформированной срединной плоскости:

$$(w)_{y=l_2} = 0 \quad (4.35)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=l_2} = 0. \quad (4.36)$$

Край плиты не оперт (свободен). Для срединной плоскости плиты, изображенной на рис. 4.2 таким краем является сторона ab . При незагруженном и не опертом крае, как в рассматриваемом примере, должны быть поставлены три условия:

$$(M_y)_{y=0} = 0; \quad (4.37)$$

$$(Q_y)_{y=0} = 0; \quad (4.38)$$

$$(M_{yx})_{y=0} = 0. \quad (4.39)$$

Однако, как показывает анализ, который в нашем кратком пособии опускаем, на боковых гранях плиты можно ставить только два условия: условие равенства искомого изгибающего момента заданному внешнему моменту, являющемуся нагрузкой на плиту и условие на комбинацию соответствующих поперечной силы и крутящего момента [7, 10].

В рассматриваемом примере для границы ab плиты первое условие остается в виде (4.37), а второе условие представляется в виде

$$\left(Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}\right)_{y=0} = 0. \quad (4.40)$$

На основе полученных в разделе 4 уравнений и формул можно построить следующую последовательность аналитического расчета НДС тонкой плиты.

1. При заданной нагрузке на плиту, заданной цилиндрической жесткости и заданных граничных условиях решается основное уравнение (4.31) определяется функция $w = w(x, y)$ прогиба плиты.

2. По формулам (4.14) и (4.16) определяются соответствующие функции изгибающих моментов $M_x = M_x(x, y)$ и $M_y = M_y(x, y)$ с помощью которых по формулам (4.17), (4.18) можно найти соответствующие нормальные напряжения $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z); \sigma_y = \sigma_y(x, y, z)$ или (при $z = \pm h/2$) их максимальные численные значения $\sigma_{x,1,2} = \pm \sigma_{x,1,2}(x, y);$
 $\sigma_{y,1,2} = \pm \sigma_{y,1,2}(x, y);$

3. С помощью формулы (4.20) определяется функция крутящего момента $M_{xy} = M_{xy}(x, y)$, а по ней соответствующие касательные напряжения τ_{xy} (4.22) или их максимальные значения (при $z = \pm h/2$).

4. По формулам (4.26) определяются поперечные силы $Q_x = Q_x(x, y)$ и $Q_y = Q_y(x, y)$, а по ним с помощью формул (4.28) находятся максимальные значения соответствующих касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} .

Однако аналитическое решение возможно только в некоторых простых вариантах плиты и нагрузки [7]. Обычно задача расчета плит решается численно на основе применения метода сеток или МКЭ [7 – 9].

В программном комплексе SCAD расчет плит построен на основе МКЭ. Соответствующие КЭ приведены в справке, которая легко доступна для пользователя.

Ниже для облегчения работы студентов с программой SCAD при выполнении практических расчетов в курсовых работах и проектах из этой справки приводятся некоторые сведения.

4.5.. Типы конечных элементов, используемых в программе SCAD для расчета тонких плит

С вопросом о получении конечных элементов для тонких плит при различной аппроксимации перемещений внутри области элементов учащимся можно познакомиться, например, в работах [8, 9].

В данном разделе приведен только материал из справки, имеющейся в программе SCAD. Как уже отмечалось в разделе по решению плоской задачи теории упругости, это делается авторами для помощи учащимся в расчетах

4.6. Пример расчета балочной плиты

Для пояснения понятия «балочная плита» обратимся к задаче о плоском напряженном состоянии пространственных тел (см. рис. 1.9 и к нему соответствующий текст). На рис. 1.9 показано поперечное сечение бесконечно длинной подпорной стенки и поперечное сечение пространственной эпюры нагрузки на нее, не изменяющей своих параметров по всей длине стенки.

НДС такого пространственного сооружения называется *плоским деформированным состоянием*. При его определении из стенки двумя поперечными сечениями, проведенными на расстоянии один метр, выделяется элемент (вместе с действующей на него нагрузкой).

Расчетную схему выделенной стенки единичной толщины представляют в виде срединной плоскости стены, имеющей конфигурацию поперечного сечения стенки (см. рис. 1.9). Поскольку толщина b выделенной стенки (см. рис. 1.8) равна единице длины, то интенсивность нагрузки, отнесенная к срединной плоскости выделенного слоя стенки остается такой же, как и интенсивность нагрузки на стенку (в плоском напряженном состоянии при $b \neq 1$ эти интенсивности были разными, см. рис 1.8).

Если на рис. 1.9 принять толщину $h(y)$ подпорной стенки постоянной и выполнить условие для тонкой плиты $h/l_1 \leq 1/5$ (см. подраздел 4.1), то подпорная стенка бесконечной длины l_2 в направлении оси Z (см. рис. 1.9) примет вид бесконечно длинной тонкой плиты. Выделенный слой этой плиты единичной толщины примет вид тонкой балки – консоли.

Плита, задачу определения НДС в которой можно заменить задачей определения НДС в балке единичной ширины, называется балочной.

В реальных сооружениях длина l_2 плиты (см. рис. 1.9) имеет конечные размеры. Но в практике расчетов на достаточном удалении от концов плиты ее рассматривают как балочную. Допустимость такого приближенного подхода должна оцениваться в каждом конкретном случае.

Пример 1.

Рассмотрим расчетную схему расположенной горизонтально тонкой плиты, имеющей прямоугольную форму (рис. 4.11). Срединная плоскость плиты располагается в плоскости XU . В направлении осей X и Y плита имеет соответственно размеры $l_2 = 60$ м и $l_1 = 10$ м. По длинным сторонам плита жестко закреплена (на рис. 4.11 закрепление условно показано затемнением).

Будем полагать, что материалом плиты является железобетон класса В25. В первом приближении ее толщина считается равной 25 см.

Предположим, что плита загружена равномерно распределенной нагрузкой

интенсивностью $q_z = 1 \text{ кН/м}^2$, направленной перпендикулярно к ее срединной плоскости.

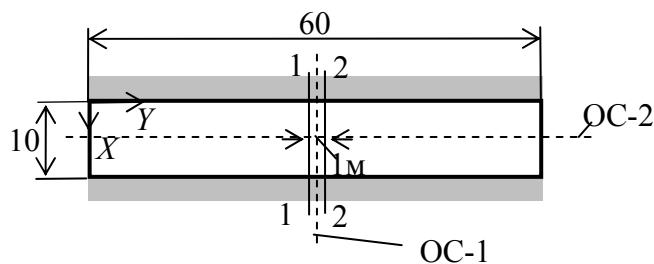


Рис. 4.11

Заданная плита имеет соотношение длин ее сторон равное шести: $l_2 / l_1 = 6$.

Рассмотрим возможность использования для определения изгибающих моментов M_x в такой плите ее приближенного расчета как балочной плиты в направлении ее короткой стороны. С этой целью построим эпюру изгибающих моментов M_x двумя способами:

1. Как в балке, вырезанной из плиты поперечными сечениями 1-1 и 2-2, расположенными на расстоянии 1 м друг от друга (см. рис. 4.11).
2. Как в плите, рассчитанной МКЭ с использованием программы SCAD.

Построение эпюры M_x плиты как эпюры M в вырезанной из плиты балке

Расчетная схема вырезанной из плиты балки приведена на рис. 4.12,а.

Поскольку балка является табличной (см. табл. 2.1 в [5]), то эпюра изгибающих моментов M для нее известна (рис. 4.12,б). Изгибающие моменты в сечениях балки, совпадающих с защемляющими опорами, и в сечении по середине пролета балки известны. Они соответственно равны $q_z l^2 / 12$ и $q_z l^2 / 24$. Их значения и знаки по правилу знаков, принятых в строительной механике [3], указаны для заданной балки на рис. 4.12,б.

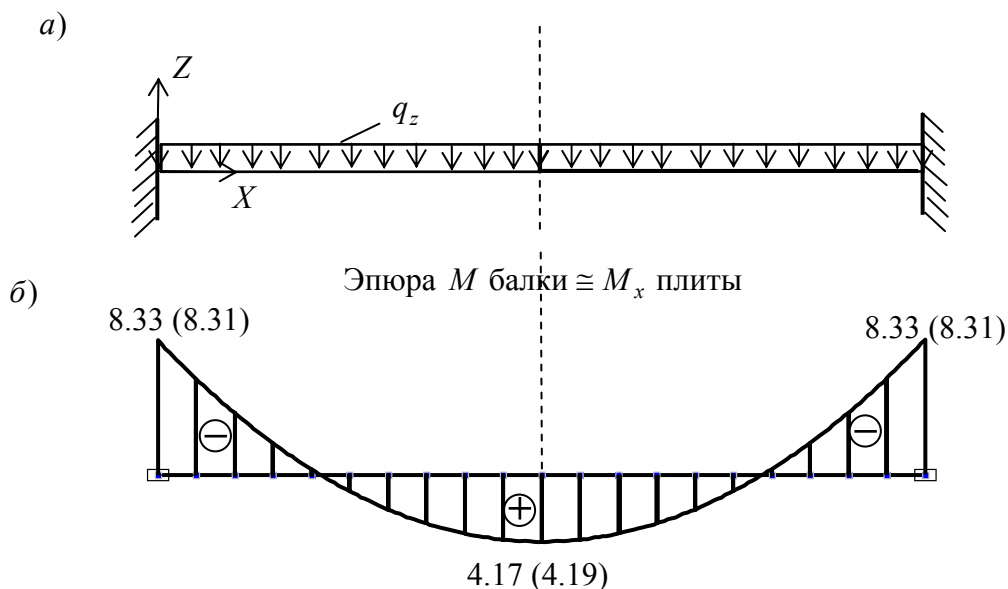


Рис. 4.12

При использовании приближенного способа предполагается, что изгибающие моменты M_y в балочной плите отсутствуют ($M_y = 0$).

Расчет плиты МКЭ с использованием программы SCAD

Для сопоставления изгибающих моментов M_x и M_y плиты со значениями, полученными приближенным расчетом плиты как балочной, выполним расчет тонкой плиты МКЭ с использованием программы SCAD.

С этой целью запускаем на ПК программу SCAD. Открываем диалоговое окно «Новый проект». Здесь приведена его часть с введенными данными:

Наименование:

Организация:

Объект:

Вариация моделей

Тип схемы:

Выходим из окна. В результате откроется папка SDATA, в которой сохраняем файл с назначенным именем «плита-1». После сохранения имени файла попадаем на «Дерево проекта» [2,]. Для построения расчетной схемы плиты последовательно открываем: «Расчетная схема» и «Схема». На открывшейся инструментальной панели выбираем кнопку



«Генерация прямоугольной сетки элементов на плоскости». Появится диалоговое окно «Генерация пластинчатой системы», часть которого показана ниже:

Вид схемы

Плита [XoY] Оболочка [XoY]

Балка - стенка [XoZ] Оболочка [XoZ]

Шаг по оси X	Количество шагов	Шаг по оси Y	Количество шагов
0.5	10	0.5	60

При выбранном в предыдущем окне типе схемы (плита) в появившемся окне уже будет отмечен точкой вид строящейся схемы: «Плита». XOY обозначает плоскость, в которой будет расположена срединная плоскость плиты.

В диалоговом окне выполняем следующие действия:

1. Нажатием кнопки «Тип элемента» открываем вспомогательное окно «Назначение типа элемента» (его вид не приводится). Здесь также уже будет отмечен вид схемы «Плита». В окне указаны все типы КЭ, которые были рассмотрены в справочном материале, приведенном в подразделе 4.5 данного учебного пособия из программы SCAD. Показано, что в рассматриваемом примере выбран КЭ типа 11. Схема выбранного КЭ изображена в нижней

части окна с указанием: номеров узлов; местной системы осей координат, в которой выдаются определенные усилия; других характеристик КЭ.

2. Возвратившись в основную часть диалогового окна, нажмем кнопку «Жесткость» и откроем вспомогательное окно «Жесткости пластин» (его вид не приводится). Здесь вводятся другие заданные данные рассчитываемой плиты: класс бетона (В25); толщина плиты (25 см); указывается, что плита рассматривается как изотропное тело.

Так как плита при своей деформации от равномерно распределенной нагрузки, действующей в направлении обратном направлению оси Z , не опирается ни на какое основание, никакие данные в поле «Коэффициенты постели» не указываются.

3. Возвратившись в основное окно «Генерация пластинчатой системы», задаем размеры и число выбранных КЭ типа 11.

Примечание об учете симметрии плиты и нагрузки при выборе расчетной схемы.

Прежде чем начать назначение размеров КЭ и их числа, обратим внимание на то, что плита в плоскости XOY симметрична относительно осей, которые обозначим ОС-1 и ОС-2 (см. рис. 4.11). Симметрична относительно указанных осей и нагрузка на плиту.

Это показывает, что и величины, характеризующие НДС плиты, также симметричны относительно этих осей. Поэтому при составлении расчетной схемы плиты для определения ее НДС от заданной нагрузки можно рассмотреть только ее любую четвертую часть, например верхнюю левую (см. рис. 4.11).

Именно эту часть и будем разбивать сеткой КЭ выбранного типа 11.

Примечание. Вопрос о выборе числа конечных элементов связан с вопросом о числе неизвестных в разрешающей системе уравнений МКЭ и, следовательно, с проблемой численного решения задачи теории упругости МКЭ. В данном пособии эти вопросы не рассматриваются. Учащемуся рекомендуется ознакомиться с ними в монографии [5] и других работах по теории МКЭ.

Здесь для решения поставленной задачи примем разбивку плиты равномерной сеткой КЭ. Сначала размеры КЭ в направлении осей X и Y примем равными 1 м, а их число назначаем в соответствии с размерами (5 м и 30 м) выбранной четверти плиты. Затем число КЭ удвоим, приняв их размеры в два раза меньшими.

После сделанных назначений нажатием кнопки «ОК» выходим из диалогового окна «Генерация пластинчатой системы». В результате на экране монитора, соответствующего разделу «Схема» появится расчетная схема рассматриваемой части плиты, разбитая сеткой КЭ. Используя панели «Визуализация» и «Фильтры отображения», представим схему с указанием номеров КЭ (рис. 4.13).

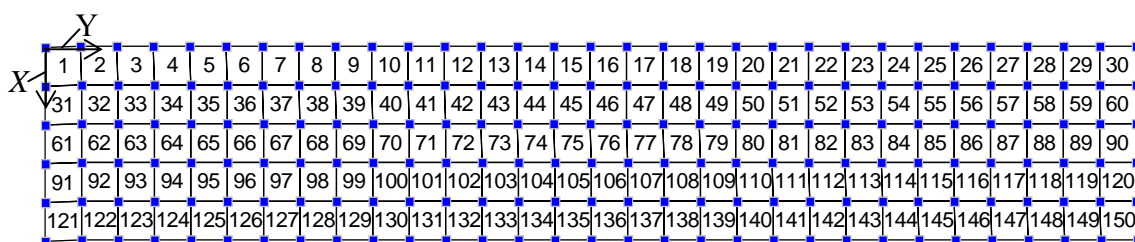



Рис. 4.13

Открываем раздел «Назначения» для назначения опорных связей в узлах сетки КЭ,

находящихся линии жесткой заделки плиты, и нажимаем кнопку . Откроется диалоговое окно «Связи». Поскольку в первом диалоговом окне (см. выше) был указан тип схемы (3-

плита), для которой каждый узел сетки МКЭ имеет только три степени свободы узлов в направлениях Z, UX, UY , то в открывшемся окне будет намечена возможность постановки связей именно в этих направлениях. Для защемляющей опоры задаем все три связи (см. рис. 4.14).

Кроме того, в узлах плиты, находящихся на линиях контакта рассматриваемой части плиты с отброшенными частями должны быть поставлены связи, препятствующие только тем из указанных трех перемещений узлов тонкой плиты, которые отсутствуют в целой плите вследствие того, что эти узлы расположены на осях симметрии плиты.

Действительно, в целой плите узлы, совпадающие с осью симметрии ОС-1, при симметричной нагрузке на плиту могут смещаться в направлении оси Z и поворачиваться вокруг оси Y , но не могут поворачиваться вокруг оси X . Поэтому во всех этих узлах устанавливаем связь UX против поворота вокруг оси X (см. рис. 4.14).

Аналогично в узлах, расположенных на оси симметрии ОС-2 устанавливаем связь UY против поворота узлов вокруг оси Y . Полученная схема с установленными в указанных узлах связями приведена на рис. 4.14.

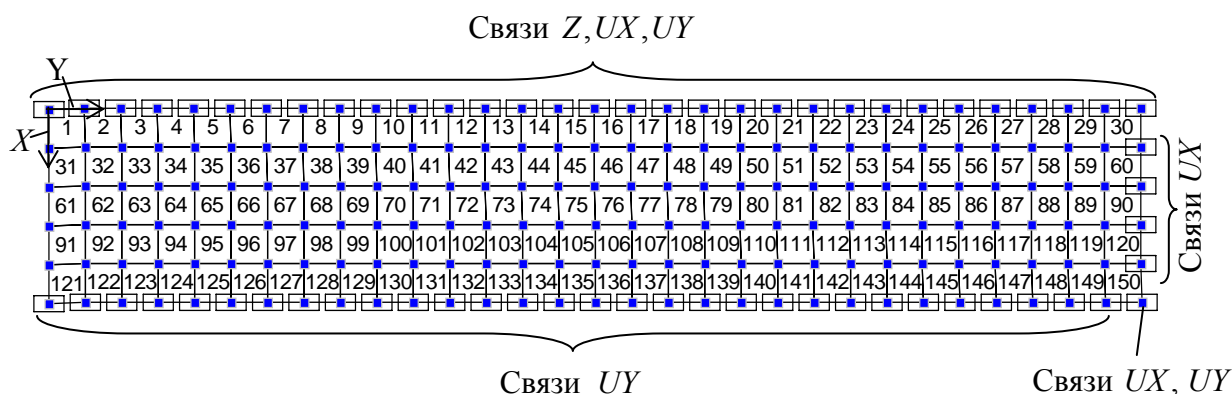





Рис. 4.14


Расчетчику рекомендуется с помощью кнопки  «Информация об узле» панели «Фильтры отображения» проверить правильность выполненной установки связей. Обратим внимание, что правый нижний угловой узел в расчетной схеме плиты может свободно перемещаться в вертикальном направлении, но не может поворачиваться вокруг обеих осей.

После создания указанной расчетной схемы плиты выполняем ее загрузку.

Открываем раздел «Загрузки», на инструментальной панели нажимаем кнопку  «Нагрузки на пластины» и в открывшемся окне (здесь его вид не приводится) задаем параметры нагрузки. Сохраняем загрузку под номером 1 с наименованием « $q_z = 1$ ».

Выполняем расчет и проанализируем его результаты в связи с поставленной задачей. Ограничимся сопоставлением эпюры M_x в сечении плиты параллельном оси X , с эпюрой M в вырезанной из плиты балке (см. рис. 4.12,б). С этой целью откроем окно с «Деревом проекта» и выберем на нем «Графический анализ». С открывшейся на экране монитора расчетной схемой плиты для ее расчета МКЭ выполним следующие операции:

1. С помощью кнопки  на панели «Фильтры отображения» отметим на расчетной схеме положение общей системы осей координат.

2. С помощью кнопки  на панели «Визуализация» представляем вид схемы в плоскости XOY .

3. С помощью кнопки  повернем расчетную схему вокруг оси Z .

4. Выбираем раздел «Поля напряжений» с помощью открывшейся инструментальной панели этого раздела



Изучаем картину поля усилий в плите (как видно, в данном случае изучается картина распределения в плите изгибающего момента M_x для нагружения 1 ($L1(q_z = 1)$).

Примечание. Учащемуся рекомендуется самостоятельно проанализировать соответствующие возможности программы SCAD.

Здесь ограничимся изучением эпюры M_x , которую получим в сечении плиты, проведенном по картине усилий параллельно оси X , полученной с помощью кнопки «Отражение изолиний напряжений с постоянным шагом» и кнопки «Построение эпюр напряжений вдоль секущей».

Построив эпюры M_x в ряде сечений, параллельных оси X , обнаружим, что в сечениях плиты достаточно удаленных от свободного края приближенный расчет плиты с использованием расчетной схемы балки дает изгибающие моменты M хорошо совпадающие с моментами M_x , полученными при расчете плиты. При этом, конечно, на результаты расчета плиты оказывает влияние и размеры выбранных КЭ. На рис. 4.12,б в скобках приведены значения моментов M_x , полученных в плите при разбивке ее на квадратные КЭ со стороной, равной 0.5 м.

В сечениях, примыкающих к свободному краю плиты, наблюдается влияние этого края на НДС плиты. В результате чего наблюдается некоторое увеличение максимальных численных значений M_x , растягивающих как верхнюю сторону плиты в некоторых точках ее защемления, так и растягивающих нижнюю сторону плиты в ее пролете. Эти значения также изменяются в плите с изменением размеров КЭ.

Пример 2. Влияние защемления торца плиты на возможность ее расчета как балочной плиты. В предыдущем примере предполагалось, что торцы плиты по ее короткой стороне свободны от опирания. Рассмотрим, как повлияет на НДС плиты, рассмотренной в предыдущем примере, защемление этих торцов. Использование программы SCAD позволяет быстро выполнить это исследование.

На рис. 4.15 указаны связи, введенные в узлах, расположенных на границах срединной плоскости расчетной схемы плиты, когда она разбита на квадратные КЭ со стороной равной 0.5 м.

На рис. 4.16 изображена картина изолиний изгибающего момента M_x , по которой можно судить о глубине влияния (по длине l_2 плиты) на это усилие защемления левого торца плиты. В рассматриваемом примере можно считать, что это влияние распространяется от торца

плиты в направлении длинной стороны плиты примерно на длину l_1 .

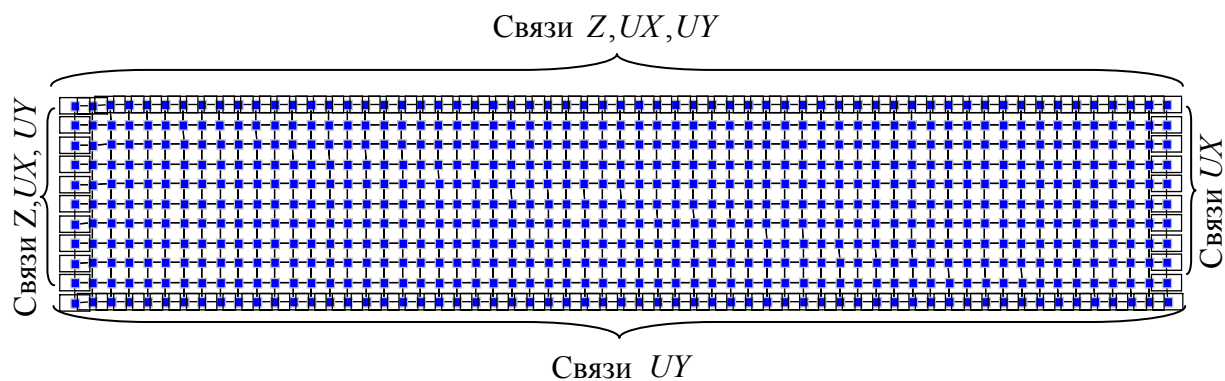


Рис. 4.15.

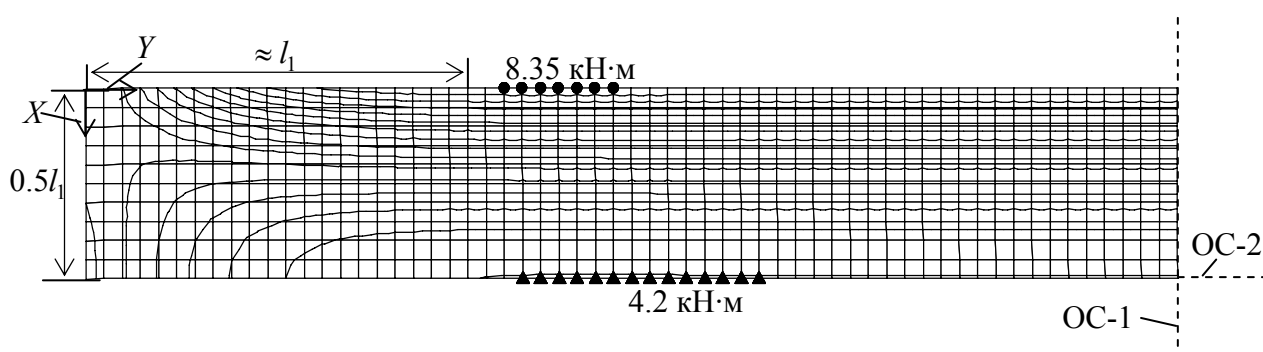


Рис. 4.16.

В сечениях плиты, параллельных оси X и расположенных на расстоянии примерно $(l_2 - l_1) > y > l_1$ эпюра моментов M_x практически совпадает с эпюрой моментов M в балке (см. рис. 4.12,б). На рис. 4.16 затемненными треугольниками отмечены узлы плиты с положительными моментами $M_x = 4.2$ кН·м, растягивающими нижние волокна плиты в середине пролета плиты в направлении оси X . Здесь же затемненными кружками отмечены узлы плиты с отрицательными моментами $M_x = -8.35$ кН·м, растягивающими верхние волокна плиты в направлении оси X у ее жесткой заделки.

4. 7. Использование приближенного способа расчета плиты, учитывающего ее конструктивную симметрию и симметрию нагрузки

Программа SCAD достаточно просто используется для расчета НДС весьма сложных конструкций и сооружений. Однако иногда возникает необходимость упростить расчетную схему рассчитываемой конструкции. Иногда это удается сделать при учете ее различных особенностей. Это демонстрируется ниже следующим примером.

Пример 1. Рассмотрим плиту, схема которой представлена на рис. 4.17. В плане она образует квадрат со сторонами 60 м. Толщина плиты равна 25 см. Бетон имеет характеристики тяжелого бетона класса В25.

Предполагается, что по контуру плита жестко защемлена. Кроме того, плита опирается на колонны, оси которых пересекаются в узлах показанной в плане плиты сетки с шагом 10 м.

Предполагается также, что на колонны плита опирается шарнирно (схема опирания

плиты на колонны представляется в виде одной жесткой вертикальной связи).

Будем полагать, что на плиту действуют только симметричные относительно осей 1-1 и 2-2 нагрузки, например,: собственный вес плиты; собственный вес засыпки плиты грунтом; собственный вес снега и т. д.

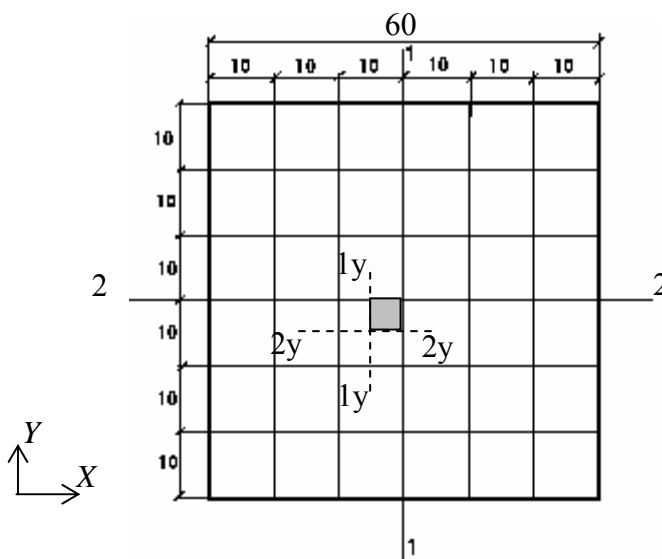


Рис. 4.17

Учитывая симметрию плиты, симметрию схемы ее опирания на стены и колонны и симметрию нагрузок относительно осей 1-1 и 2-2, расчет можно выполнить только для ее четверти (например, для нижней левой четверти на рис. 4.17).

Разбиение четвертой части плиты размером 30·30 м, например, на прямоугольные конечные элементы типа 11 размером 0.5·0.5 м, как это было сделано в предыдущем примере, приведет к расчетной схеме плиты с числом КЭ, равным 3600.

Расчет такой плиты МКЭ с использованием программы SCAD затруднений не представляет.

Поскольку все нагрузки предполагаются равномерно распределенными по плоскости плиты, рассмотрим вначале ее расчет от нагрузки с единичной интенсивностью.

При составлении расчетной схемы для выделенной четверти плиты необходимо учесть ограничения на перемещения узлов, лежащих на осях симметрии ОС-1 и ОС-2. Как это делается, было показано в предыдущем примере.

После выполнения расчета выделенной четверти плиты проведем графический анализ результатов расчета. При анализе результатов, прежде всего, обратим внимание на картину вертикальных смещений узлов плиты (рис. 4.18) и на картину изолиний изгибающих моментов M_x (рис. 4.19), которая получается от действия на нее равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q_z = 1 \text{ тс/м}^2$.

Видим, что наблюдается равномерная цикличность картины перемещений и изгибных деформаций плиты около колонн. Это подтверждается и картиной изолиний изгибающих моментов.

Иногда в курсовых работах студентов основными вопросами, которые решаются в работе, являются вопросы связанные с подбором арматуры в железобетонной плите и ее

конструированием. Тогда бывает желательно уменьшить расчетную часть по вычислению усилий. В этом случае допускается упрощенный подход к выбору расчетной схемы плиты.

Выполненный анализ цикличности НДС рассматриваемой плиты в зоне около колонн показывает, что для приближенного определения НДС плиты в зоне колонн достаточно удаленных от заземленных стен можно построить следующую упрощенную расчетную схему.

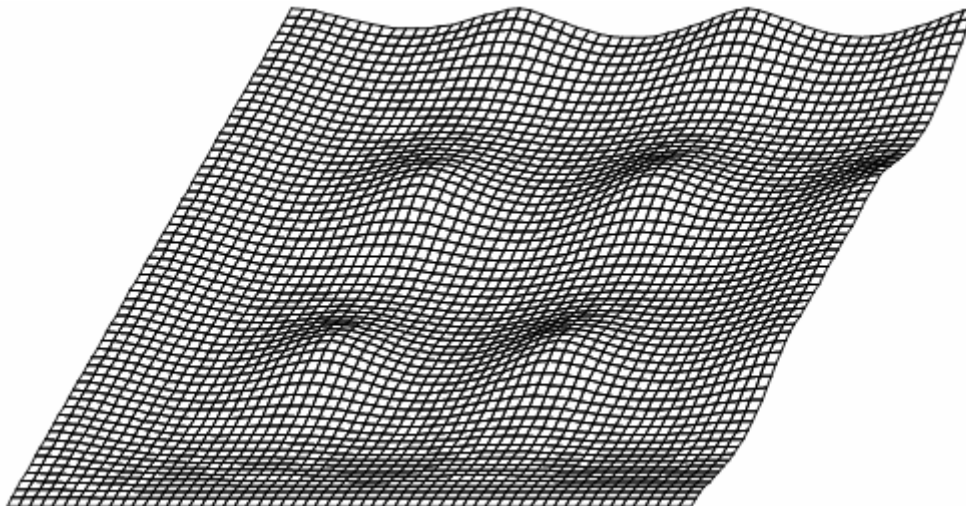


Рис. 4.18

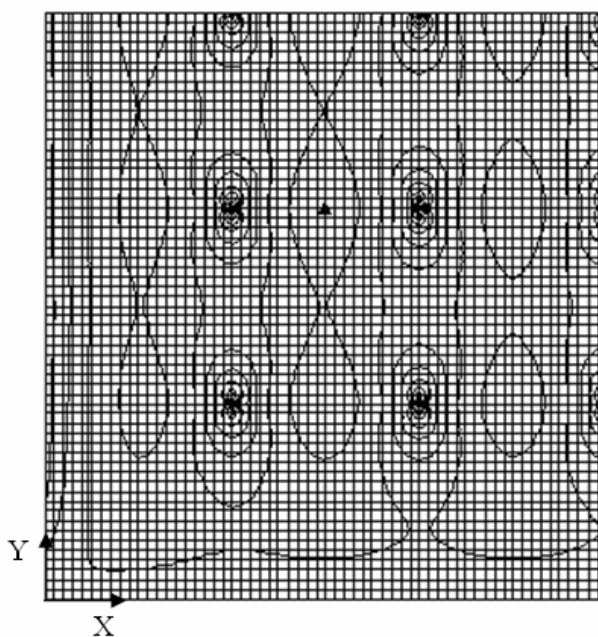


Рис. 4.19

В рассматриваемой четверти плиты (см. рис. 4.17) выделим угловую колонну, находящуюся на пересечении осей симметрии 1-1 и 2-2 плиты, вместе с частью плиты еще двумя сечениями, проходящими параллельно указанным осям симметрии и делящими шаг между колоннами пополам.

При достаточном удалении сечений 1у-1у и 2у-2у плиты от ее заземленных сторон эти сечения можно приближенно рассматривать как условные оси симметрии плиты, аналогичные реальным осям симметрии 1-1 и 2-2.

Тогда, поставив граничные условия по новым сечениям как для симметричного сечения, возможно уменьшение расчетной схемы плиты и представление ее в виде

выделенного фрагмента (см. рис. 4.17).

Выполним расчет этого фрагмента с постановкой соответствующих связей, показанных на рис. 4.20. В результате для фрагмента плиты около колонны получим приближенное НДС, которое достаточно близко совпадает с НДС, полученным при расчете целой плиты.

На рис. 4.21 изображена эпюра M_x в сечении, проведенном в фрагменте плиты через колонну параллельно оси X с указанием наибольших моментов, растягивающих соответственно верхние волокна плиты над колонной и нижние волокна плиты в пролете между колоннами.

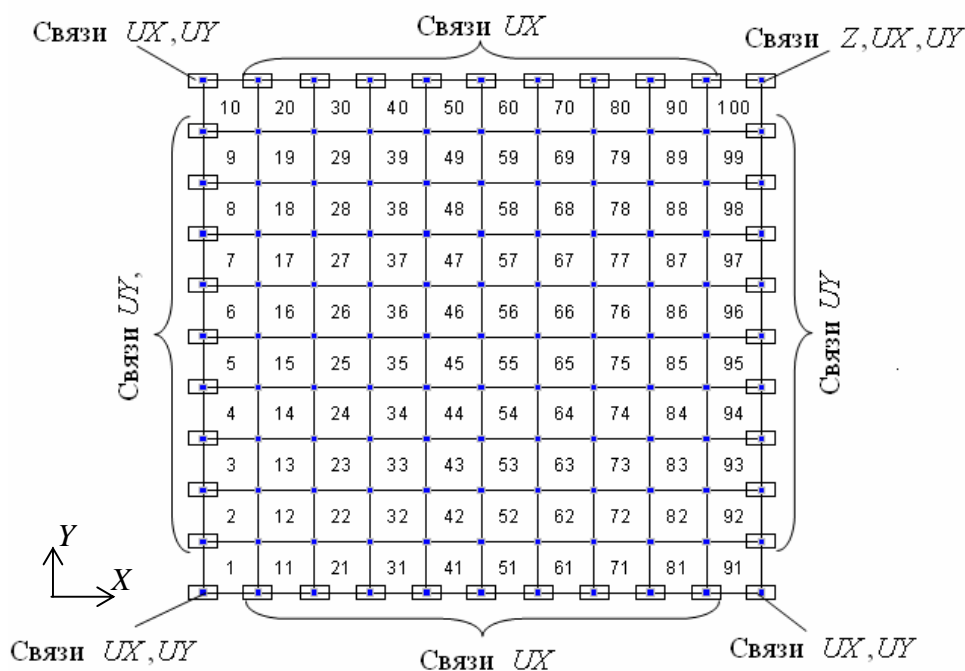


Рис. 4.20

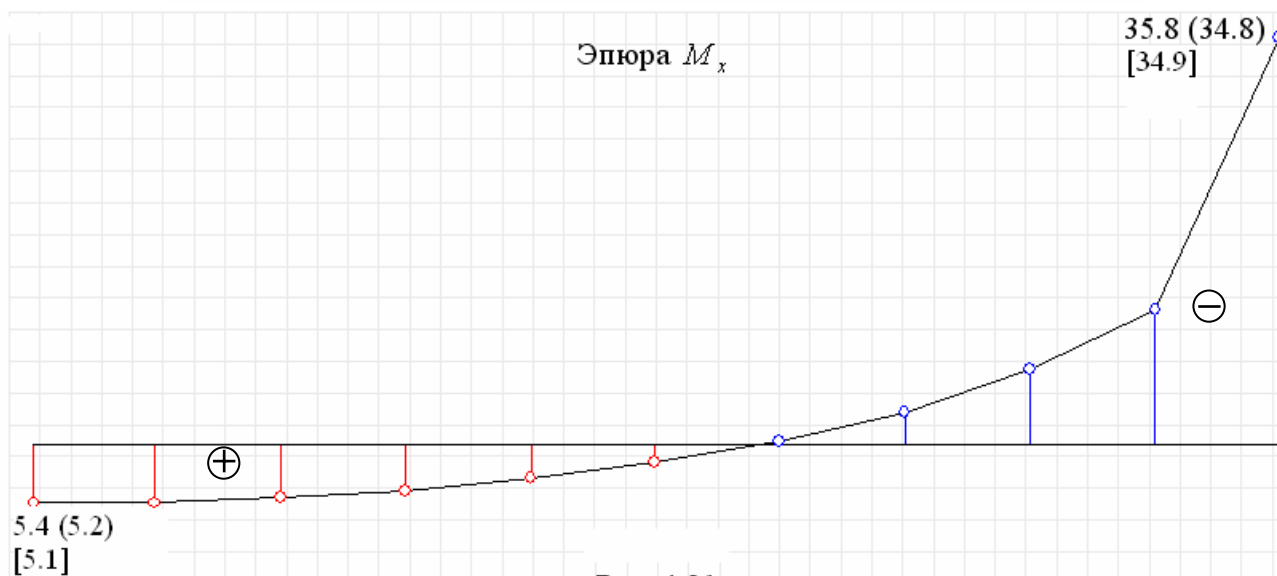


Рис. 4.21


Значения изгибающих моментов M_x , приведенные не в скобках, получены в целой плите, а указанные в скобках, соответствуют приближенному решению для выделенного фрагмента плиты (см. рис. 4.17, рис. 4.20). Как видим, с практической точки зрения, результаты приближенного расчета достаточно хорошо совпадают с результатами, полученными для

целой плиты. Максимальные прогибы в середине расстояния между колоннами в целой плите и ее фрагменте от действия нагрузки 1 тс/м^2 соответственно составляют 15.4 (14.0) мм.

Представляет интерес и сопоставление давлений на колонны, получающихся при рассмотрении целой плиты и в результате расчета фрагмента, выделенного из плиты около колонны (см рис. 4.17 и рис. 4.20).

Сначала найдем давления плиты на колонны в расчетной схеме выделенной из условий симметрии четверти плиты. С этой целью для КЭ этой четверти плиты создадим группу КЭ:

– откроем раздел «Группы» и на инструментальной панели этого раздела

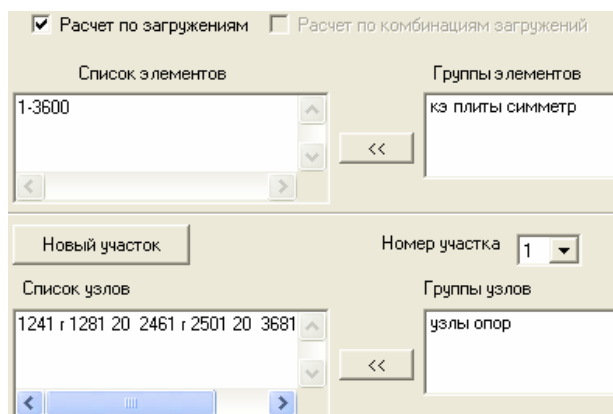
 нажмем кнопку «Отметка группы элементов».

– отмечаем все КЭ выделенной четверти плиты и сохраняем эту группу КЭ с помощью кнопки «Сохранение/модификация группы».

Аналогично создадим группу узлов плиты, в которых она имеет опорную связь Z. При этом сначала отмечаем указанные узлы, используя информацию об их известных координатах, Затем проверяем правильность выбора отмеченных узлов с помощью кнопки «Информация об узле» фильтра отображения.

После создания указанных групп КЭ и узлов, для определения давлений плиты на колонны выполним следующие процедуры:

– на дереве проекта выберем раздел «Специальные исходные данные», а в нем – «Нагрузки от фрагмента схемы». Откроется одноименное окно с указанием созданных групп КЭ и узлов:



– в открывшемся окне выбираем группу «кэ плиты симметр» и, нажав кнопку с обозначением <<, получим список номеров КЭ, входящих в эту группу.


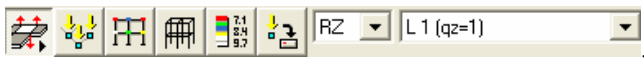
– нажатием кнопки «Новый участок» назначаем номер участка (1).

– выбираем группу узлов «узлы опор» и нажатием кнопки с обозначением << получим список узлов, входящих в эту группу. В этих узлах и ставится задача вычисления усилий, передающихся на колонны.

– нажатием кнопки «ОК» подтверждается сделанный ввод и открывается «Дерево проекта».

– выполняется расчет «Нагрузки от фрагмента схемы».

– на дереве проекта выбирается «Графический анализ». В открывшемся окне последовательно выбираем раздел «Постпроцессоры», затем на инструментальной панели этого раздела – кнопку

 «Анализ нагрузок от фрагмента схемы». Откроется инструментальная панель: 

– нажимаем кнопку «Отображение нагрузок от фрагмента схемы». После этого появляется возможность анализировать нагрузки на колонны. Ниже приведены только вертикальные давления Rz (рис. 4.22).

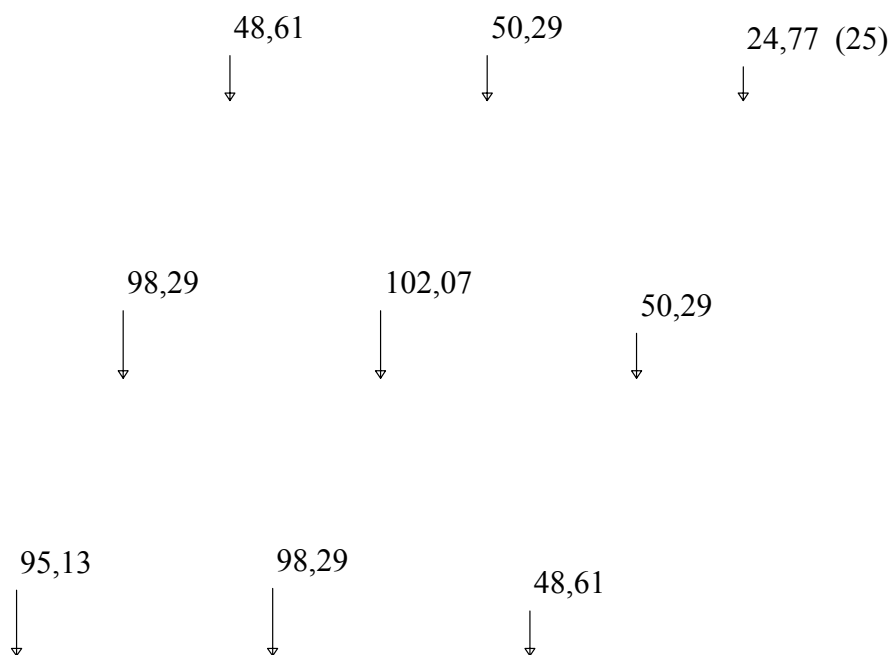


Рис. 4.22

При приближенном расчете плиты с помощью фрагмента плиты, выделенного у колонны (см. рис. 4.17 и рис. 4.20), в расчетной схеме фрагмента имеем только одну колонну. Давление Rz на нее определим такой же процедурой. В результате получим: $Rz = 25$ тс. Это значение на рис. 4.22 показано для правой верхней колонны в скобках. Как видим, результат приближенного способа и здесь практически совпадает с результатом, полученным для расчетной схемы в виде четверти плиты.

4.8. Использование для расчета балок-стенок и тонких плит конечных элементов оболочечного типа

В некоторых конструкциях балка-стенка может работать не только в условиях плоской задачи теории упругости, но и на изгиб как плита от нагрузки, действующей в направлении перпендикулярном к срединной плоскости стенки. Аналогично тонкая плита может испытывать не только изгиб, но испытывать и продольные нагрузки как балка-стенка. В этих случаях определение их НДС при расчете методом конечных элементов может быть выполнен с использованием конечных элементов оболочечного типа. В разделе 4 пособия были приведены справочные материалы из программы SCAD. Эти материалы приведены также в книге [1] разработчиков ПК SCAD.

Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 1.

Схема сооружения. Будем рассматривать подземное сооружение в виде пространственной тонкостенной коробки из монолитного железобетона (рис. 4.23).

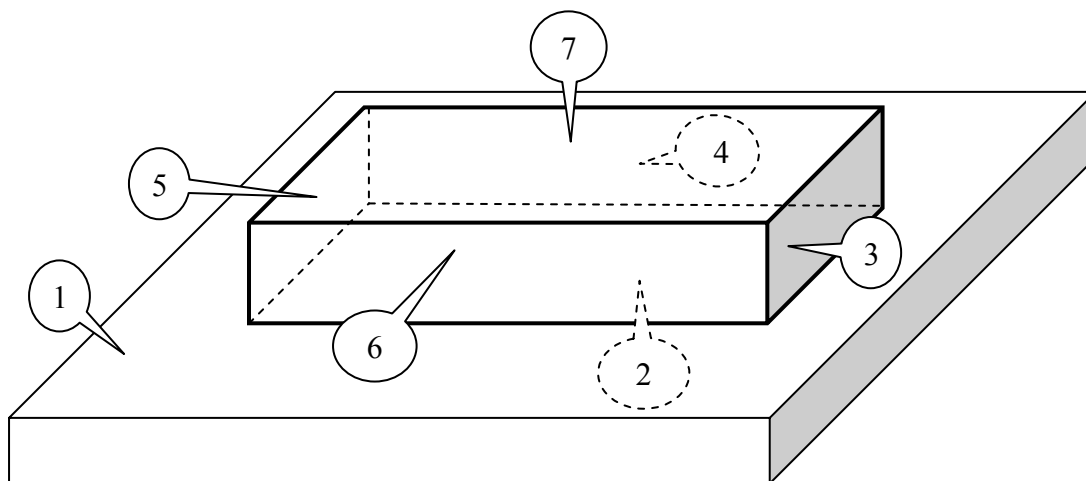


Рис. 4.23

Не вдаваясь в рассмотрение деталей конструкции, связанных с функциональным назначением коробки (например, с наличием в складе и гараже ворот), отметим, что сооружение состоит из 6 основных частей.

Его нижняя сторона представляет собой горизонтальную монолитную железобетонную фундаментную плиту, лежащую на грунтовом основании (на схеме, изображенной на рис.4.23, грунтовое основание отмечено цифрой 1, а плита (она не видна)– цифрой 2).

На эту плиту (по контуру) опираются четыре вертикальные монолитные железобетонные стены (3, 4, 5, 6 на рис.4.23), монолитно соединенные между собой и (по низу стен) с фундаментной плитой 2.

Верхняя сторона коробки – горизонтальное монолитное железобетонное перекрытие (7 на рис.4.23), также как и нижняя плита, монолитно соединено со стенами.

Нагрузки на отдельные части сооружения с учетом его функционального назначения.

На подземное сооружение с указанной схемой (см. рис. 4.23) действуют следующие нагрузки.

На верхнее перекрытие:

- Собственный вес элементов перекрытия;
- Вес засыпки плиты грунтом;
- Снеговая нагрузка.

На стены:

- Усилия, передающиеся на стену от элементов верхнего перекрытия;
- Собственный вес стены;
- Боковое давление грунта и грунтовой воды, действующие на наружную грань стены;
- Боковое давление жидкости (для резервуаров) или какого либо сыпучего материала (для складов сыпучих материалов) на внутреннюю грань стены.

На нижнюю плиту, лежащую на грунтовом основании:

- Собственный вес плиты;
- Усилия, передающиеся на плиту от колонн;
- Усилия, передающиеся от стен;
- Вертикальное давление жидкости (для резервуаров) или сыпучего материала (для складов) или автомашин (для гаражей) на верхнюю поверхность плиты.

Выбор расчетных схем сооружения. Рассматриваемый тип сооружения представляет собой систему тонких плит, соединенных в единую пространственную систему. Такая система не является сложной с точки зрения построения расчетной схемы, ориентированной на использование современного метода строительной механики – метода конечных элементов (МКЭ). Однако, учитывая направленность учебного пособия, упростим задачу следующим образом:

1. Будем полагать, что схема верхней и нижней плит имеют вид и размеры, показанные на рис. 4.17. Верхняя плита по контуру монолитно опирается на стены высотой 5 м и толщиной 30 см. и на колонны, защемленные в верхней и нижней плитах. Шаг колонн указан на рис. 4.17.

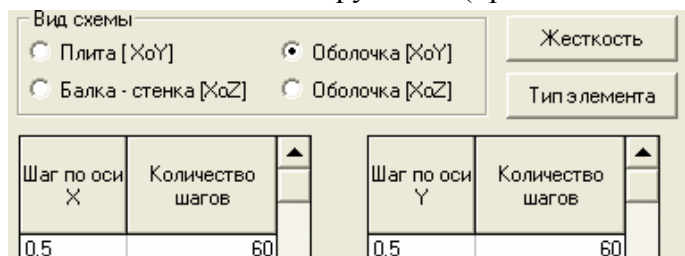
2. Сооружение имеет плоскости симметрии пространственной конструкции, проходящие через оси симметрии 1-1 и 2-2 плит.

3. Будем рассматривать только варианты симметричного воздействия заданных нагрузок, например, симметричной вертикальной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q_z = 1 \text{ тс/м}^2$ на верхнюю плиту.

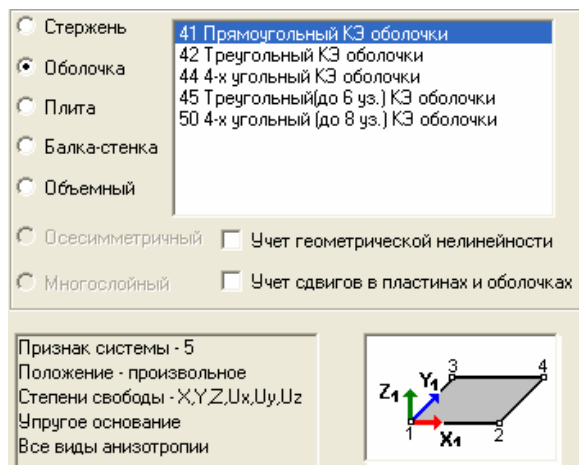
Таким образом, при решении симметричной задачи, для определения НДС сооружения можно рассматривать только ее одну четвертую часть, например, нижнюю левую, вырезав ее из всей системы вертикальными плоскостями, проходящими через оси 1-1 и 2-2 (см. рис. 4.17).

Для построения расчетной схемы МКЭ выбранной части сооружения, выполним в разделе «Схема» программы SCAD следующие действия.

1. Откроем диалоговое окно «Генерация пластинчатой схемы» для формирования расчетной схемы МКЭ для нижней плиты сооружения (приведена только его часть).

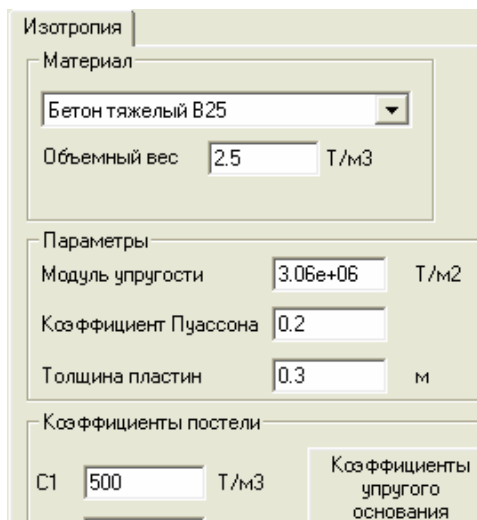


2. Выбираем вид схемы не «Плита», а «Оболочка (ХОУ)». Это связано с тем, что все плиты и стены в рассматриваемом пространственном сооружении работают не только на изгиб, но и на растяжение-сжатие. Для выбора типа оболочечного элемента нажимаем кнопку «Тип элемента».



В открывшемся диалоговом окне, часть которого приведена выше, выбираем для расчета плиты прямоугольный КЭ оболочки типа 41. Вид этого элемента и его характеристики приведены в этом окне.

После этого открываем диалоговое окно «Жесткость пластины»:



в котором: на поле «Материал» вводим «Бетон тяжелый В25»; на поле «Параметры» вводим предварительно задаваемую толщину 0.3 м нижней пластины.

Кроме того, в связи с тем, что нижняя плита опирается на грунтовое основание, задаем его характеристики.

Примечание. В теории упругости изучаются методы расчета оснований по различным расчетным схемам. С ними можно ознакомиться в учебниках по теории упругости, например в [7, 10], а также в учебниках по механике грунтов, например в [12].

Существенное внимание методам учета опирания сооружений на грунтовое основание уделено и в ПВК SCAD. Эта проблема в данном пособии не рассматривается. Также как и при расчете балок упругое основание будем учитывать по методике Винклера, задавая жесткостную характеристику основания в виде так называемого «Коэффициента постели» [3]. В данном примере, как показано в приведенном выше окне, принято, что все КЭ нижней плиты опираются на грунтовое основание с коэффициентом постели $C1=500 \text{ тс/м}^3$.

После завершения всех операций по вводу указанных данных получим расчетную схему нижней плиты, разбитой сеткой КЭ типа 41:

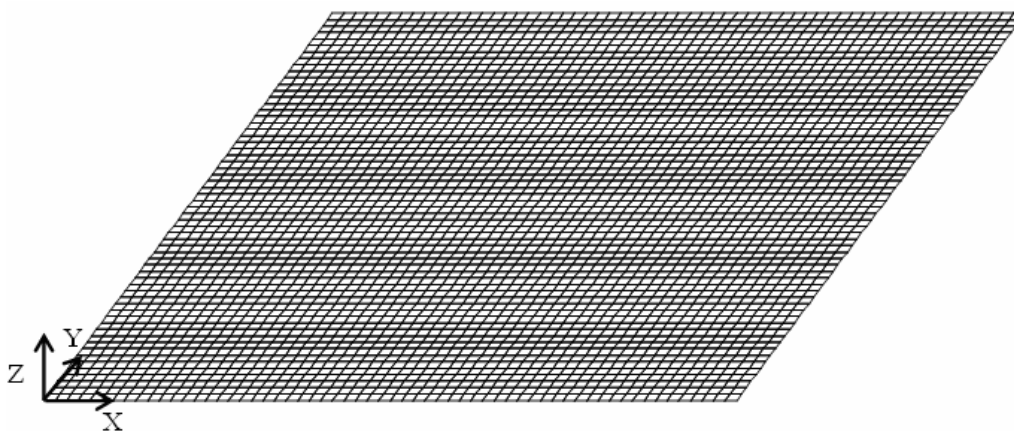



Рис. 4.24

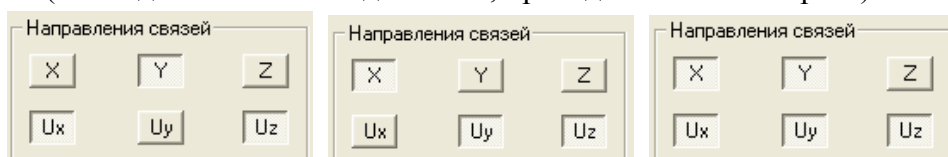
С этой плитой выполним следующие процедуры:

1.1. Используем фильтры визуализации и отображения для контроля сделанного ввода исходных данных для плиты: тип КЭ; жесткость КЭ, номера КЭ и номера узлов.

1.2. Создадим группу КЭ нижней плиты. Для этого заходим в раздел «Группы». На инструментальной панели  нажимаем кнопку «Отметка группы элементов». Отмечаем КЭ горизонтальной плиты (ХОУ) и нажимаем кнопку «Сохранение/модификация группы» и в открывшемся окне: вводим имя группы, например, «кэ нижн. пл»; нажимаем кнопки «Добавить группу» и «ОК».

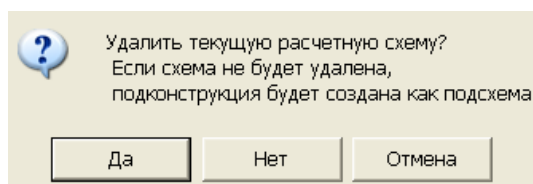
1.3. Создадим три группы узлов этой плиты: группы 1 и 2 узлов плиты, лежащих соответственно на осях симметрии ОС-1 и ОС-2, и группу 3 узлов, которые контактируют с нижними узлами стержневых КЭ типа 5 «Пространственный стержень».

1.4. В разделе «Назначения» задаем опорные связи в узлах КЭ для группы 1 (Y, Ux, Uz) и для группы 2 (X,Uy,Uz), чтобы обеспечить эквивалентность перемещений этих групп узлов в отрезанной четвертой части плиты с перемещениями, которые эти узлы имеют в целой плите. В группы 1 и 2 узлов плиты не входит угловой верхний узел. Для него вводим все связи кроме Z (см. вид части окна ввода связей, приведенной ниже справа):

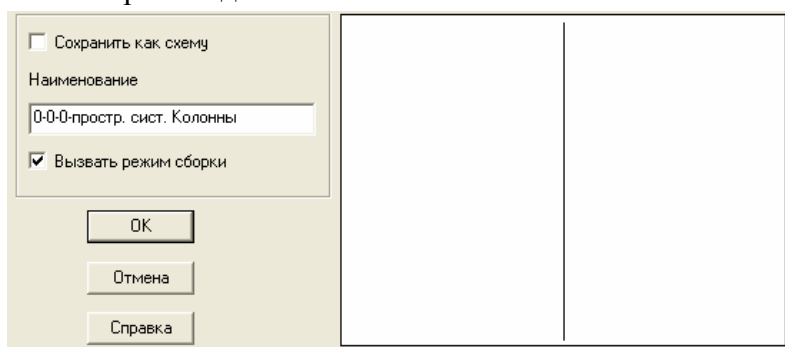



1.5. Установим колонны в узлах сетки КЭ нижней плиты с известными координатами (см. рис. 4.17). Для этого выполним следующие действия.

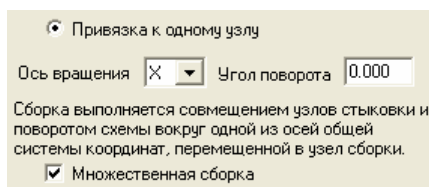
В разделе «Схема» на инструментальной панели нажмем кнопку «Генерация прототипа рамы». Появится запрос:



Выбираем ответ «Нет» и с помощью появившейся схемы типовой рамы назначим все необходимые параметры колонны: высоту 5 м; тип КЭ «5-Пространственный стержень»; параметрическую жесткость колонны (тяжелый бетон В25, поперечное сечение колонны 40 см 40 см). После этого откроется диалоговое окно



В окне со схемой нижней плиты появится окно с подсхемой в виде колонны с назначенными параметрами и появится инструментальная панель для режима сборки . Нажимаем кнопку «Выбор способа сборки» и в открывшемся окне выбираем способ установки колонн на нижнюю плиту:



Для установки колонн необходимо вызвать группу 3 узлов плиты «низ колонн» и отметить их. На подсхеме необходимо отметить нижний узел колонны и нажать на инструментальной панели сборки кнопку с зеленой галочкой «ОК». Появится картина расчетной схемы с установленными колоннами, которую (при правильности установки колонн) надо утвердить. Получится промежуточная расчетная схема в виде:

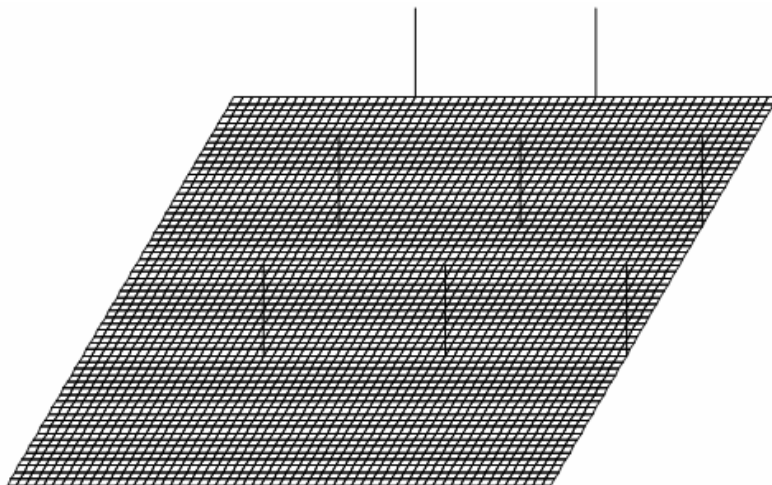
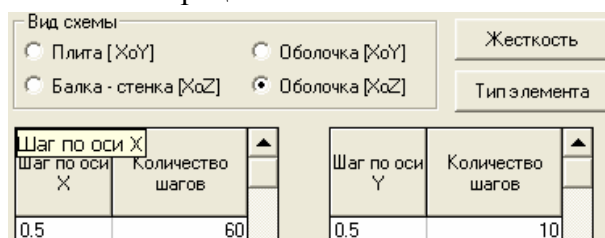


Рис. 4.25

После установки колонн создадим группу «Колонны» и группу верхних узлов колонн «Верх колонн».

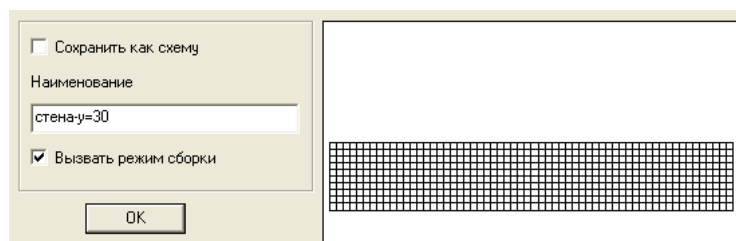
2. Начинаем процедуру создания расчетной схемы стены сооружения, совпадающей с координатной плоскостью XOZ (в узлах сетки элементов этой стены $y = 0$). С этой целью снова выбираем раздел «Схема» и на появившейся инструментальной панели этого раздела нажимаем кнопку «Генерация прямоугольной сетки элементов на плоскости». На появившийся запрос (см. его вид, показанный выше при установке колонн), отвечаем «Нет».

Откроется диалоговое окно «Генерация пластинчатой схемы»:

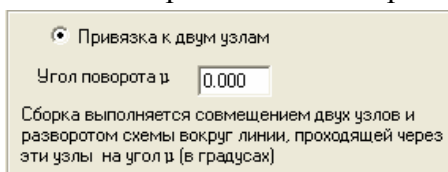


Работа с этим окном аналогична работе при генерации нижней плиты сооружения. После подтверждения сделанного назначения параметров стены появится диалоговое окно «Результат генерации схемы». Ниже приведена его заполненная часть. После подтверждения сделанного выбора откроется окно с полученной ранее расчетной схемой (рис. 4.25) и окно с построенной подсхемой стены.

Для объединения стены с нижней плитой на показанной выше инструментальной панели нажимаем кнопку «Выбор способа сборки».



В появившемся диалоговом окне выбираем способ сборки «Привязка к двум узлам»:



Затем на схеме и подсхеме отмечаем соответствующие объединяемые узлы и нажимаем кнопку «Подтверждение». Появляется картина объединенной схемы и запрос о подтверждении этого объединения.

Точно также происходит процесс установки второй стены с координатами $x = 0$ всех ее узлов сетки КЭ. В результате получим построенную часть расчетной схемы в виде, изображенном на рис. 4.26.

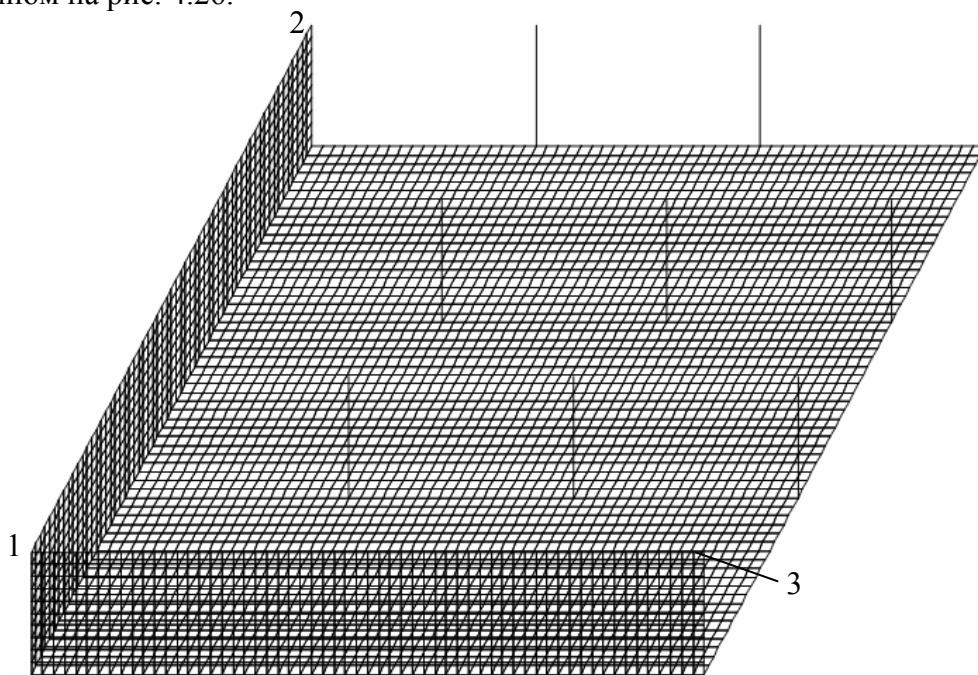


Рис. 4.26

3. Используя процедуру аналогичную процедуре установки стен, устанавливаем верхнюю плиту. При этом выберем соединение с построенной схемой (см. рис. 4.26) способом установки с помощью трех точек, отмеченных на рис. 4.26.

Выполним следующие операции с верхней плитой:

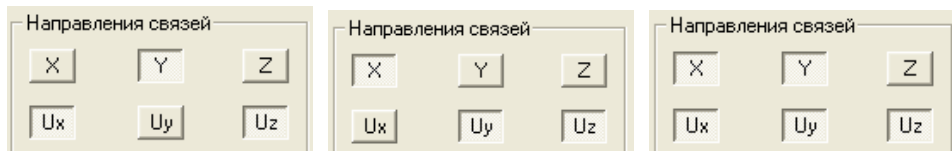
3.1. Используем фильтры визуализации и отображения для контроля сделанного ввода исходных данных для плиты: тип КЭ; жесткость КЭ, номера КЭ и номера узлов.

3.2. Создадим группу КЭ верхней плиты. Для этого заходим в раздел «Группы».

На инструментальной панели нажимаем кнопку «Отметка группы элементов». Отмечаем КЭ горизонтальной плиты (ХОУ) и нажимаем кнопку «Сохранение/модификация группы» и в открывшемся окне: вводим имя группы «кэ верхн. пл.»; нажимаем кнопки «Добавить группу» и «ОК».

3.3. Как и для нижней плиты, кроме созданной уже группы верхних узлов колонн, создадим для узлов верхней плиты еще две группы узлов, лежащих в вертикальных плоскостях, проходящих соответственно через оси симметрии ОС-1 и ОС-2.

3.4. В разделе «Назначения» задаем опорные связи в узлах КЭ для группы 1 (Y, Ux, Uz) и для группы 2 (X, Uy, Uz), чтобы обеспечить эквивалентность перемещений этих групп узлов в отрезанной четвертой части верхней плиты с перемещениями, которые эти узлы имеют в целой плите. В группы 1 и 2 узлов верхней плиты не входит угловой верхний узел. Для него вводим все связи кроме Z (см. вид части окна ввода связей, приведенной ниже справа):



Окончательная расчетная схема для определения НДС рассматриваемого симметричного пространственного сооружения (см. рис. 4.22) методом конечных элементов при симметричной нагрузке будет иметь вид, изображенный на рис. 4.27.

Задание нагрузки на элементы сооружения можно выполнить как на более ранних этапах построения расчетной схемы, так и на данном этапе.

Как уже отмечалось, в примере рассмотрим только загрузку верхней плиты сооружения вертикальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q_z = 1 \text{ тс/м}^2$.

После сохранения загрузки и выполнения расчета можно приступить к анализу результатов расчета. В пособии такой анализ сделан только в виде сопоставления эпюры M_x в сечениях верхней плиты перпендикулярных оси симметрии ОС-1 (см. рис. 4.17) с аналогичной эпюрой, полученной для приближенной расчетной схемы верхней плиты в виде фрагмента (см. рис. 4.21 в предыдущем примере).

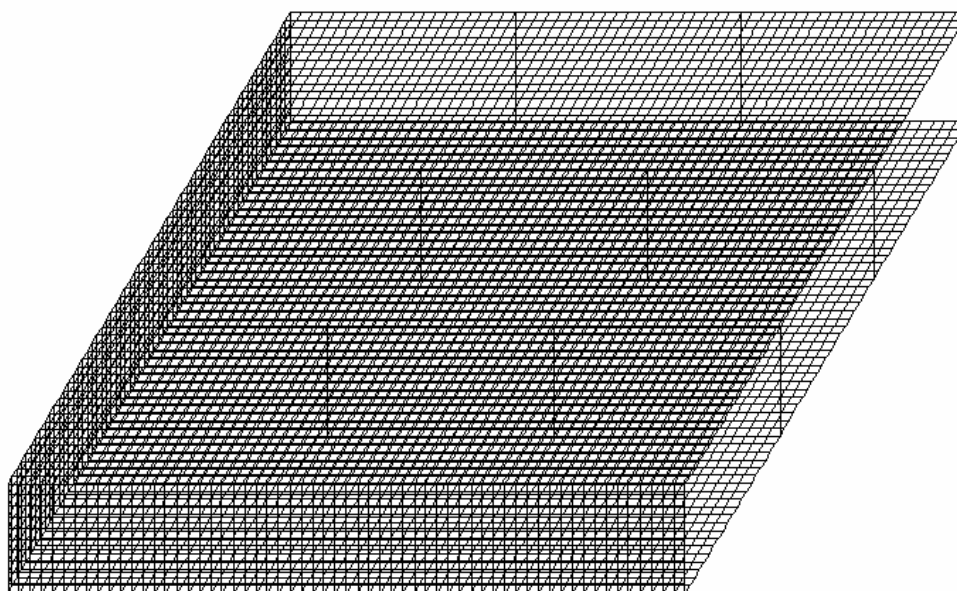
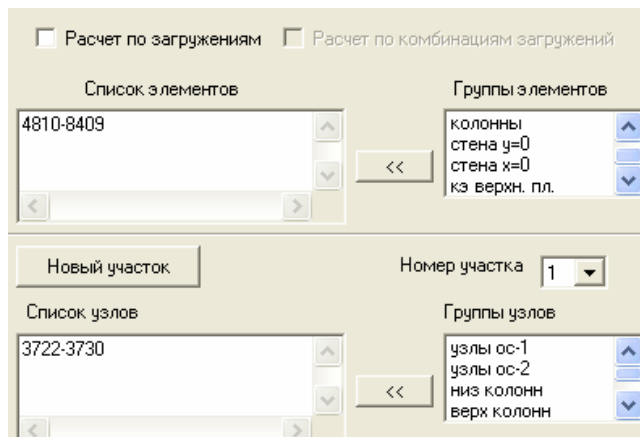


Рис. 4.27

На рис. 4.21 в квадратных скобках приведены значения M_x , полученные расчетом по пространственной расчетной схеме, изображенной на рис. 4.27. Как видим, результаты,

полученные по приближенной расчетной схеме практически совпадают с результатом, полученным по пространственной расчетной схеме.

4. Определим давление верхней плиты на колонны и давление колонн на нижнюю плиту. Для этого на древе проекта выберем раздел «Специальные исходные данные», а в нем «Нагрузки от фрагмента схемы». Откроется одноименное окно с указанием созданных групп КЭ и узлов:



Для определения усилий, передающихся с верхней плиты на колонны, выполняем следующие операции:

- выбираем группу «кэ верхн. пл» и, нажав кнопку с обозначением <<, получим список номеров КЭ, входящих в эту группу.

- нажатием кнопки «Новый участок» назначаем номер участка (1).

- выбираем группу узлов «верх колонн» и нажатием кнопки с обозначением << получим список узлов, входящих в эту группу. В этих узлах и ставится задача вычисления усилий, передающихся на колонны.

- нажатием кнопки «ОК» подтверждается сделанный ввод и открывается «Дерево проекта».

- выполняется расчет «Нагрузки от фрагмента схемы».

- на древе проекта выбирается «Графический анализ». В открывшемся окне последовательно выбираем раздел «Постпроцессоры», затем на инструментальной панели этого раздела кнопку

«Анализ нагрузок от фрагмента схемы». Откроется инструментальная панель

- нажимаем кнопку «Отображение нагрузок от фрагмента схемы». После этого появляется возможность анализировать нагрузки на колонны. Ниже приведены только вертикальные давления R_z (рис. 4.28).

Сопоставляя давления R_z на колонны, полученные для верхней плиты с заземленными сторонами (см. рис. 4.22) и полученные при использовании приближенной расчетной схемы этой же плиты в виде фрагмента около колонны (см. рис. 4.17 и рис. 4.20), видим достаточно неплохое совпадение давлений с полученными на рис. 4.28.

Полученные в результате расчета графические и табличные результаты для построенной расчетной схемы позволяют с помощью различных функциональных возможностей программы SCAD провести весьма разнообразный анализ НДС рассматриваемого

сооружения при любых симметричных нагрузках. Для несимметричных нагрузок необходимо составить расчетную схему для всего сооружения.

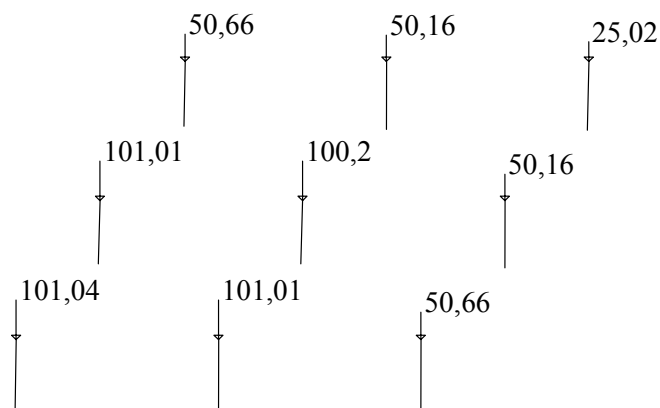


Рис. 4.28

Заключение к учебному пособию

Приведенные в пособии примеры использования программы SCAD для расчета сооружений, составленных из двумерных элементов типа «стена» и «тонкая плита» показывают большие возможности для использования программы SCAD в учебном процессе по теории упругости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. Вычислительный комплекс SCAD: – М.:Изд-во АСВ, 2004. – 592 с.
2. А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа – Киев: ВПП «Компас», 2001. – 448 с.: ил.
3. Константинов И.А., Лалина И.И. Строительная механика. Расчет стержневых систем. Учеб. пособие: СПб.: Изд-во Политехн. Ун-та. 2005.155 с.
4. Константинов И.А. Строительная механика. Использование программы SCAD для расчета стержневых систем. Ч.1.: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. 81с.
5. Константинов И.А., Лалина И.И. Строительная механика. Использование программы SCAD для расчета стержневых систем. Ч.2.: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007, 91с.
6. Константинов И.А., Лалина И.И. Строительная механика. Примеры расчетных работ с применением программы SCAD. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006, 72с.
7. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 1998.
8. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов. Изд-во «Энергия». Л., 1971.
9. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. Стройиздат. М., 1977.
10. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. Гос. Изд-во литературы по строительству и архитектуре. М., 1957.
11. Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстнев В.А. Сопроотивление материалов: Учеб. пособие /под редакцией Б.Е. Мельникова – СПб. Изд-во «Лань», 2003. – 528 с.
12. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов: Учеб. для гидротехн. спец. Вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш.шк., 1991. – 447 с; ил.

КОНСТАНТИНОВ Игорь Алексеевич
ЛАЛИН Владимир Владимирович
ЛАЛИНА Ирина Игоревна

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

**Расчет плоских элементов сооружений
с использованием программы SCAD**

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005 – 93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать . . . 2007 . Формат 60×84/16
Усл. печ. л. . Уч.- изд. л. . Тираж 150. Заказ .

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,
в типографии Издательства Политехнического университета,
195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.