

Федеральное агентство по образованию

—
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

И. А. Константинов В. В. Лалин И. И. Лалина

ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ

**Применение программы SCAD
для решения задач**

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007**

Федеральное агентство по образованию

—
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

И. А. Константинов В. В. Лалин И. И. Лалина

ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ

Применение программы SCAD
для решения задач

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007

УДК 624.04 (075.8)

ББК

К

Константинов И.А., Лалин В.В., Лалина И.И. **Динамика сооружений. Применение программы SCAD для решения задач.** Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 124 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Динамика сооружений» специальности «Промышленное и гражданское строительство» (ПГС) направления «Строительство».

На примере программы SCAD реализуется методика использования современных вычислительных комплексов, применяемых в инженерной практике для расчетов и проектирования строительных конструкций, при изучении дисциплины «Динамика сооружений» на инженерно-строительных факультетах вузов.

В первом и втором разделах пособия программа SCAD применена к расчету систем соответственно с одной и с несколькими степенями свободы от действия: гармонических возмущающих сил; импульсивных и ударных нагрузок; сейсмических нагрузок.

Предназначено для студентов очного, вечернего и заочного обучения специальности ПГС направления «Строительство».

Табл. 45. Ил. 46. Библиогр.: 25 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN

© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	4
Введение	5
1. Системы с одной степенью свободы.....	10
1.1. Свободные незатухающие колебания.....	10
1.2. Свободные затухающие колебания.....	31
1.3. Вынужденные колебания при произвольном силовом воздействии.....	38
1.4. Действие гармонической возмущающей силы.....	39
1.5. Действие внезапно приложенной постоянной силы.....	62
1.6. Действие ударной нагрузки.....	73
1.7. Расчет на заданную акселерограмму землетрясения.....	77
1.8. Расчет сооружений на сейсмическое воздействие по нормативной методике.....	80
2. Системы с несколькими степенями свободы.....	88
2.1. Два вида записи системы уравнений свободных незатухающих колебаний масс.....	88
2.2. Решение системы уравнений свободных незатухающих колебаний масс методом разложения вектора искомых перемещений масс по векторам перемещений в СФК	90
2.3. Свойство ортогональности собственных форм колебаний.....	99
2.4. Система уравнений свободных затухающих колебаний и ее решение методом разложения вектора искомых перемещений масс по векторам перемещений в СФК.....	101
2.5. Система уравнений вынужденных колебаний и ее решение методом разложения вектора искомых перемещений масс и вектора заданных нагрузок по векторам перемещений в СФК.....	103
2.6. Метод разложения искомых величин по СФК при установившихся гармонических колебаниях	107
2.7. Расчет сооружений на сейсмическое воздействие по заданной акселерограмме землетрясения	116
2.8. Расчет сооружений на сейсмическое воздействие по СНиП методом разложения искомых величин и сейсмической нагрузки по СФК.....	117
Библиографический список.....	123

ПРЕДИСЛОВИЕ

Динамика сооружений (ДС) является объемной и трудоемкой частью теории и практики расчета сооружений, так как наряду с обширной и многообразной теоретической частью ДС, имеется специфика конкретных задач динамики, связанная с характером и особенностью как самого динамического воздействия (например, сейсмического), так и сооружения (стержневого, плиты, оболочки и т. д.).

Поэтому на ИСФ СПбГПУ специальности ПГС курс динамики сооружений состоит из трех отдельных частей:

1. Теоретические основы динамики сооружений;
2. Расчет сооружений на сейсмические воздействия.
3. Расчет сооружений АЭС на особые воздействия.

Настоящее учебное пособие посвящено в основном первой части курса и частично второй.

В учебном пособии, наряду с приемами решения динамических задач вручную (в простейших случаях), демонстрируется их решение на персональных компьютерах (ПК) с применением программы SCAD, реализующей метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений. В связи с этим учащимся рекомендуются пособия [2, 3], книга разработчиков вычислительного комплекса SCAD [24] и монография [23].

При изучении первой из указанных выше трех частей курса динамики сооружений учащимся рекомендуются несколько учебников и учебных пособий [9–15] и справочная книга [20] по размерностям величин, используемых в ДС. Ко второй части рекомендуется также монография [16] и СНиП [17–19].

В библиографический список включены также учебные пособия по статике сооружений [21, 22], поскольку уравнения движения в ДС для расчетных схем с конечным числом степеней свободы ($n \geq 1$) записываются с использованием коэффициентов и матриц жесткости и коэффициентов и матриц податливости, уже встречавшихся при решении задач статики сооружений.

ВВЕДЕНИЕ

Статика и динамика сооружений. Силовые воздействия (нагрузки) и кинематические воздействия (заданные перемещения) на сооружение можно разделить на два класса: *статические* и *динамические*.

К статическим относятся воздействия, которые не вызывают ускорений масс сооружения или вызывают такие небольшие ускорения, что влиянием возникающих при этом сил инерции на НДС сооружения можно пренебречь.

Значение, направление и конфигурация статического воздействия не меняются во времени. Возможно изменение координат воздействия (подвижная нагрузка), но оно происходит столь медленно, что сохраняется его статический характер.

При статическом воздействии сооружение деформируется, возникают перемещения его точек и соответствующие усилия и напряжения, которые при работе материала в упругой стадии не меняются во времени.

Определение таких усилий, напряжений, деформаций и перемещений, т.е. определение напряженно-деформированного состояния (НДС) сооружения является основной задачей *статики сооружений*.

К динамическим относятся воздействия, которые сообщают массам сооружения существенные ускорения и, следовательно, вызывают такие силы инерции, что их влияние на НДС сооружения должно быть учтено.

Значение, направление и конфигурация и координаты динамического воздействия (сразу все параметры или некоторые из них) изменяются во времени.

Примерами динамических воздействий на строительные конструкции (сооружения) являются ударные и вибрационные нагрузки, вызванные действием машин и механизмов; воздействие взрывной волны через грунтовую и воздушную среду; сейсмическое воздействие на сооружение и т. д.

Динамические воздействия вызывают колебания сооружения, при которых изменяются во времени не только перемещения точек сооружения, но и связанные с ними деформации, усилия и напряжения.

Определение всех этих величин (НДС сооружения) в любой момент времени является основной задачей *динамики сооружений*.

Колебания сооружения называются *вынужденными*, если они происходят одновременно с действием динамической нагрузки, или *свободными*, если они происходят после окончания действия динамической нагрузки.

Основные допущения, принимаемые в динамике сооружений. Для расчета НДС сооружения при динамических воздействиях применяются расчетные схемы, в которых обычно используются те же допущения по отношению к материалу, что и при статических воздействиях:

- материал обладает свойствами сплошности, однородности и изотропности;

- предполагается соблюдение линейной зависимости между усилиями (напряжениями) и деформациями и перемещениями;

- деформации и перемещения считаются малыми.

Это, позволяет:

- при решении динамических задач (также как и в задачах статики) получить все основные уравнения в дифференциальной или интегральной формах и использовать принцип суперпозиции (принцип независимости действия нескольких динамических сил);

- использовать этот принцип, разделяя расчет сооружения от статических и динамических нагрузок.

Однако в динамике сооружений использованию модели идеального линейно деформируемого тела соответствуют колебания, происходящие без потерь энергии. В результате при свободных колебаниях они будут *незатухающими*.

В реальных сооружениях свободные колебания со временем затухают (*затухающие* свободные колебания), так как часть энергии, вызвавшей колебания сооружения, теряется на преодоление так называемого «внутреннего трения» или «внутреннего неупругого сопротивления» материала, связанного с тем, что реальные материалы не являются идеально упругими.

Кроме того, часть энергии теряется на преодоление трения в сочленениях элементов сооружения (между собой и с опорами), а также за счет потерь в основании сооружения и т. д.

Имеются различные методы учета потерь энергии при расчете сооружений на динамические воздействия, с представлением о которых учащемуся рекомендуется ознакомиться в работах [4, 10, 14]. В данном пособии этот вопрос рассмотрен кратко.

Собственные частоты и собственные формы колебаний сооружений.

В общем случае форма деформации сооружения при свободных колебаниях (форма свободных колебаний) изменяется в процессе колебаний.

Однако можно задать условия, при которых будут происходить свободные гармонические (с определенной частотой) колебания *с не изменяющейся во времени формой деформации сооружения.*

Свободные гармонические колебания сооружения, происходящие с определенной частотой и геометрически не изменяющейся формой деформации, называются *собственными колебаниями.* При этом частота называется *собственной частотой (СЧ),* а форма – *собственной формой колебаний (СФК)* сооружения. Иногда, например, в программе SCAD, СФК называют «модой».

Частоты и формы (моды) собственных колебаний являются важными динамическими характеристиками сооружения, с которыми связана его реакция на динамическое воздействие. Задача определения СЧ и СФК сооружения в программе SCAD имеет название «модальный анализ».

Число степеней свободы масс в расчетной схеме сооружения.

Сооружение имеет столько СЧ и СФК, сколько оно имеет динамических степеней свободы при колебаниях.

Под числом динамических степеней свободы понимают число независимых перемещений, которые при колебаниях определяют положение масс всех элементов сооружения.

В реальных сооружениях масса его элементов, масса фундамента и масса грунтового основания в общем случае непрерывно распределены по их объему и расчетная схема системы «сооружение-фундамент-основание» является системой с бесконечным числом степеней свободы.

При практических расчетах, например стержневых систем, в их расчетных схемах распределенная по объему стержневой масса обычно приводится к массе распределенной вдоль оси стержневой (см. рис. В1, *e*, взятый из [7]). В расчетных схемах тонких плит и оболочек распределенная масса приводится к массе распределенной соответственно, по срединной плоскости плиты или срединной поверхности оболочки. После указанного приведения массы системы по-прежнему остаются системами с бесконечным числом степеней свободы.

На сооружении могут быть расположены и дискретные (сосредоточенные) массы. Дискретные массы могут быть точечными (точечные массы или материальные точки, рис. В.1, *a, в, д*) или в виде жестких дисков с

распределенной по их объему массой (рис. В.1, б, з).

Точечная масса (материальная точка) при колебаниях в плоскости xu имеет две степени свободы (см. рис. В.1, а), так как ее положение на плоскости определяется двумя параметрами (компонентами u_x и u_y перемещения массы в направлении осей x и y).

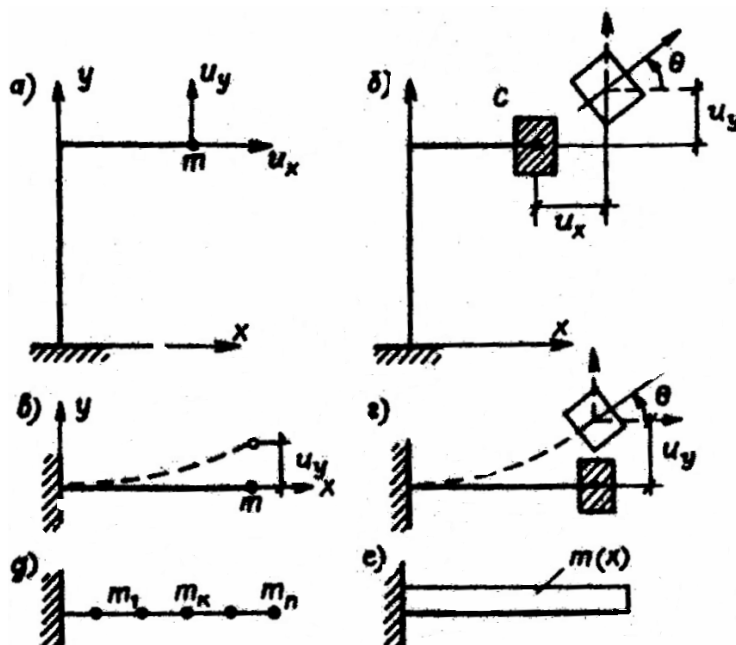


Рис. В. 1

Плоский жесткий массивный диск (см. рис. В.1, б) имеет три степени свободы (кроме указанных двух степеней свободы для точечной массы добавится еще степень свободы в виде угла поворота θ).

Однако при подсчете степеней свободы рассмотренных дискретных масс не всегда учитываются все их степени свободы. Например (см. рис. В.1, в), если расчетчик интересуется НДС консоли только при ее поперечных колебаниях (без учета продольных колебаний), то определяются только поперечные к оси консоли перемещения. Поэтому считается, что точечная масса, расположенная на консоли имеет только одну степень свободы в виде перемещения u_y .

При поперечных колебаниях консоли жесткий массивный диск (см. рис. В.1, з) рассматриваться как система с двумя степенями свободы, так как в этом случае учитывается и угол поворота жесткого диска.

При составлении расчетной схемы сооружения учитывается и тот фактор, что масса некоторых его элементов может оказаться малой по сравнению с массой других элементов и поэтому может мало влиять на НДС сооружения при его колебаниях. Тогда при колебаниях сооружения малыми силами

инерции на элементах с малой массой можно пренебречь и считать их безмассовыми (невесомыми, безинерционными).

Например (см. рис. В.1, а), при большом значении точечной массы m и малых значениях интенсивности μ распределенной вдоль оси стержней массы можно пренебречь массой стержней. Тогда получим систему только с двумя степенями свободы перемещений точечной массы. При аналогичных условиях система, изображенная на рис. В.1, б, может рассматриваться как система с тремя степенями свободы.

Система в виде безмассового консольного стержня с сосредоточенной точечной массой на конце (см. рис. В.1, в) при поперечных колебаниях также будет системой только с одной степенью свободы, так как ее положение определится только поперечным перемещением u_y массы m . Аналогичная система с плоским жестким массивным диском на конце (см. рис. В.1, г) будет иметь две степени свободы (u_y и θ).

При поперечных колебаниях невесомой консоли, с расположенными на ней n точечными массами (рис. В.1, д), она рассматривается как система с n степенями свободы.

Перемещения, деформации и усилия в безмассовых элементах при колебаниях системы связаны с деформированием сооружения, вызванного действием на него как заданных динамических нагрузок, так и инерционных сил, передающихся на сооружение при колебании элементов, обладающих массой.

Таким образом, **число динамических степеней свободы сооружения определяется его выбранной расчетной схемой.**

Важным при построении расчетных схем в динамике сооружений является использование численных методов решения задач, в том числе метода конечных элементов (МКЭ). При этом получают системы с конечным числом n степеней свободы. Это будет продемонстрировано в учебном пособии в примерах расчета стержневых систем с помощью программы SCAD.

В данном учебном пособии, как это обычно делается в курсе динамики сооружений [9-13], сначала рассматривается расчет линейно-деформируемых систем с одной степенью свободы ($n = 1$).

Затем на базе полученных результатов рассматриваются методы решения динамических задач для систем с конечным числом степеней свободы ($n > 1$).

1. СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1.1. Свободные незатухающие колебания

Уравнение свободных незатухающих колебаний. Рассмотрим упругую линейно деформируемую систему в виде балки (рис. 1.1, *a*), в середине пролета которой расположена точечная масса m . Пусть параметры балки и массы таковы, что в расчетной схеме можно считать саму балку безмассовой (невесомой). Такая система при поперечных к оси балки колебаниях массы будет системой с одной степенью свободы.

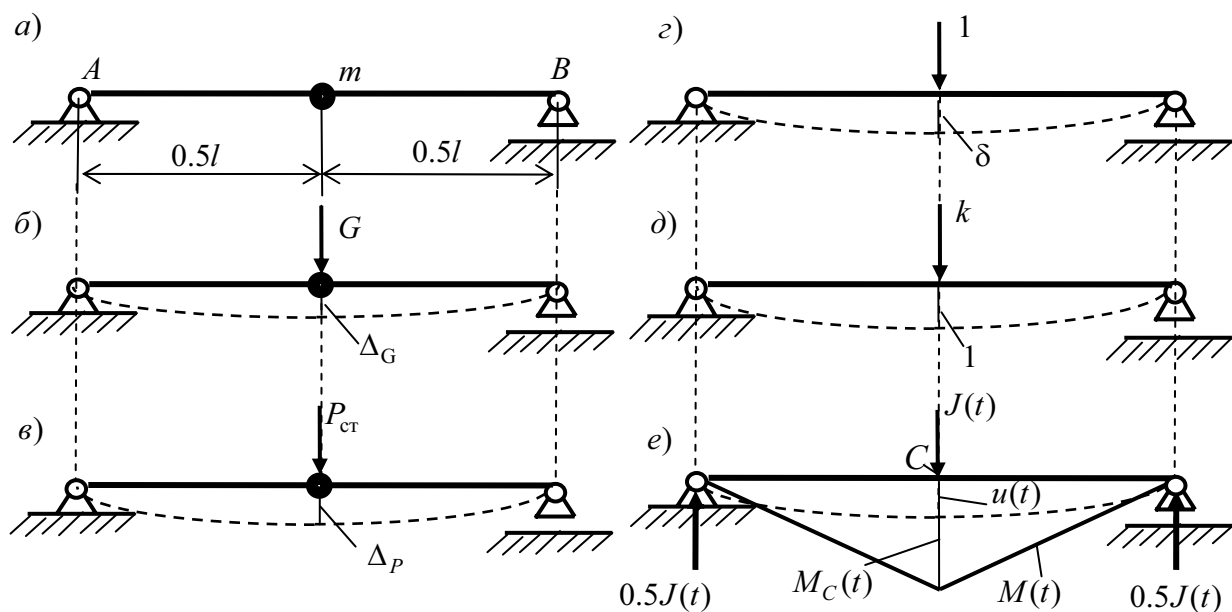


Рис. 1.1

В спокойном состоянии масса m действует на балку статической силой веса $G = m \cdot g$ (рис. 1.1, *b*), где g – ускорение свободного падения массы, и вызывает в балке статический прогиб Δ_G и соответствующие статические, усилия, деформации и напряжения.

Используем принцип суперпозиции и отделим статическую задачу от динамической задачи о свободных колебаниях, которую далее будем рассматривать. В соответствии с этим в динамической задаче будем считать положением равновесия балки прямолинейную ось балки (рис. 1.1, *a*).

Для создания свободных колебаний балки поступим следующим образом. Приложим к массе дополнительную статическую силу $P_{ст}$ (рис. 1.1, в). Она вызовет упругую статическую деформацию балки и отклонит массу от положения равновесия на величину Δ_p , которую можно определить с помощью либо коэффициента податливости δ балки (рис. 1.1, з), либо коэффициента жесткости k балки (рис. 1.1, д):

$$\Delta_p = \delta \cdot P_{ст} = P_{ст} / k. \quad (1.1)$$

При этом очевидно, что

$$\delta = k^{-1}; \quad k = \delta^{-1}; \quad \delta \cdot k = 1. \quad (1.2)$$

В отклоненном положении масса будет находиться в равновесии под действием приложенной силы $P_{ст} = k \cdot \Delta_p$ и равной ей, но противоположной по направлению, упругой «восстанавливающей» силы $K_{ст} = -k \cdot \Delta_p$, стремящейся вернуть массу в положение равновесия, которое она имела до приложения силы $P_{ст}$ (см. рис. 1.1, а):

$$P_{ст} + K_{ст} = 0. \quad (1.3)$$

В некоторый момент времени (зафиксируем его, как $t=0$) удалим (мгновенно) силу $P_{ст}$. Статическое равновесие массы нарушится, и она под действием упругой восстанавливающей силы $K_{ст} = -k \cdot \Delta_p$ балки начнет движение (перемещение) в направлении своего первоначального положения (см. рис. 1.1, а).

Но, в соответствии с законом Гука, как только прогиб балки уменьшится, пропорционально уменьшится и связанная с прогибом упругая восстанавливающая сила, т.е. обе величины будут являться функциями времени: $u = u(t)$; $K = K(t)$. При этом, как и в статической задаче, в любой момент времени при перемещении массы будет соблюдаться зависимость

$$K(t) = -k \cdot u(t). \quad (1.4)$$

Обратим внимание на то, что начальная скорость движения массы в момент времени $t=0$ была равна нулю. Поэтому начало движения массы связано с приданием ей силой $K(t) = -k \cdot u(t)$ ускорения $\ddot{u}_{t=0}$.

Дальнейшее движение массы к первоначальному положению равновесия под действием изменяющейся упругой силы $K(t) = -k \cdot u(t)$ также будет происходить с изменяющимся ускорением, так как по второму закону Ньютона упругая сила $K(t)$, «толкающая» массу m с ускорением $\ddot{u}(t)$, кроме выражения (1.4) может быть представлена также зависимостью:

$$K(t) = m \cdot \ddot{u}(t). \quad (1.5)$$

При этом из (1.5) видно, что и сила $K(t)$ и ускорение $\ddot{u}(t)$ будут иметь одинаковое направление – к первоначальному недеформированному положению равновесия балки (см. рис. 1.1, а).

Кроме того, при движении массы с ускорением на балку будет действовать сила инерции массы

$$J(t) = -m \cdot \ddot{u}(t), \quad (1.6)$$

которая, как видно из (1.6), направлена в сторону противоположную направлению ускорения $\ddot{u}(t)$.

Сопоставление (1.5) и (1.6) позволяет записать уравнение

$$J + K = 0. \quad (1.7)$$

Обратим внимание на то, что упругая сила $K = -k \cdot u = m \cdot \ddot{u}$ действует на массу от балки, а сила инерции $J = -m \cdot \ddot{u}$ действует на балку от массы. Но уравнение (1.7) можно рассматривать как *уравнение равновесия массы в любой момент ее движения*. Такое представление предложено Даламбером и называется «Принципом Даламбера».

Подставив в (1.7) выражения (1.4) и (1.6), получим уравнение

$$m\ddot{u} + ku = 0, \quad (1.8)$$

позволяющее путем интегрирования найти перемещение $u = u(t)$ массы рассматриваемой упругой линейно деформируемой системы с одной степенью свободы без учета влияния сил, вызывающих затухание перемещений.

Вернемся к наблюдению за движением массы после мгновенного удаления статической силы $P_{ст}$. Достигнув под действием упругой силы горизонтального первоначального положения (см. рис. 1.1, а) масса m не остановится, а, наоборот, в результате постоянного действия на нее силы $K(t)$ (1.5), двигаясь с ускорением, достигнет максимальной скорости и по инерции продолжит движение вверх, изгибая балку силой инерции (1.6).

В соответствии с законом Гука, прогиб балки, вызванный силой инерции, передающейся от массы на балку, в любой момент времени может быть определен из уравнения

$$u(t) = \delta \cdot J(t). \quad (1.9)$$

С учетом (1.6) (скобки с независимой переменной t опускаем)

$$u = \delta(-m \cdot \ddot{u}) \quad (1.10)$$

или

$$\delta m \ddot{u} + u = 0. \quad (1.11)$$

Как видно, уравнения (1.7), (1.8) и (1.9) – (1.11) соответственно представляют две формы записи уравнения движения массы, расположенной на упругой линейно деформируемой системе. В первой – использован коэффициент жесткости k балки, физически представляющий собой статическую силу, вызывающую единичный прогиб балки (см. рис. 1.1, δ). Этот коэффициент определяется приемом известным из метода перемещений статики сооружений [12].

Во второй форме записи уравнения движения использован коэффициент податливости δ балки, физически представляющий собой статический прогиб балки, вызванный единичной силой (см. рис. 1.1, ε). Для балки этот коэффициент может быть определен с помощью формулы Максвелла-Мора [11].

Обе формы уравнения движения массы ((1.8) и (1.11)) с учетом (1.2) приводятся к одному уравнению

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0, \quad (1.12)$$

где введено обозначение

$$\omega^2 = k/m = 1/\delta m, \quad (1.13)$$

или

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{1/\delta m}. \quad (1.14)$$

Из двух форм решения задачи выбирают ту, при которой проще практическая реализация задачи (в данном примере критерием является простота определения величин k или δ).

Анализ решения уравнения свободных незатухающих колебаний. Полученное уравнение (1.12) является обыкновенным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение известно и может быть записано в виде:

$$u = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t, \quad (1.15)$$

где A_1 и A_2 – действительные постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий движения:

$$u_{t=0} = u^0; \quad \dot{u}_{t=0} = u^{00}, \quad (1.16)$$

где u^0 и u^{00} – заданные в момент времени $t = 0$ начальные соответственно перемещение и скорость массы.

Примечание. В только что рассмотренном примере причиной начала движения массы в момент времени $t = 0$ была мгновенно удаленная сила P_{ct} , которая вызывала начальное перемещение массы $u^0 = \Delta_P = \delta \cdot P_{ct}$ (первое начальное условие). Начальная скорость при

удалении силы была нулевой, т. е. в момент времени $t=0$ $u^{00} = 0$ (второе начальное условие).

В общем случае (при задании обоих начальных условий в виде (1.16)) из первого условия получаем $A_1 = u^0$. Для использования второго начального условия необходимо записать выражение для скорости массы:

$$\dot{u} = -\omega A_1 \sin \omega t + \omega A_2 \cos \omega t. \quad (1.17)$$

Тогда, приняв $t = 0$, будем иметь $u^{00} = \omega A_2$, или $A_2 = u^{00}/\omega$.

Подставив эти найденные постоянные величины в (1.15), получим выражение для перемещения массы в виде

$$u = u^0 \cos \omega t + \frac{u^{00}}{\omega} \sin \omega t. \quad (1.18)$$

Выражения (1.15) и (1.18) показывают, что свободное перемещение точечной массы, расположенной на упругой линейно деформируемой балке, представляет собой сумму двух незатухающих гармонических колебаний.

Первое происходит по закону косинуса и имеет амплитуду $A_1 = u^0$, второе – по закону синуса с амплитудой $A_2 = u^{00}/\omega$.

Изменение этих составляющих перемещения массы m во времени для наглядности представлено графически на рис. 1.2.

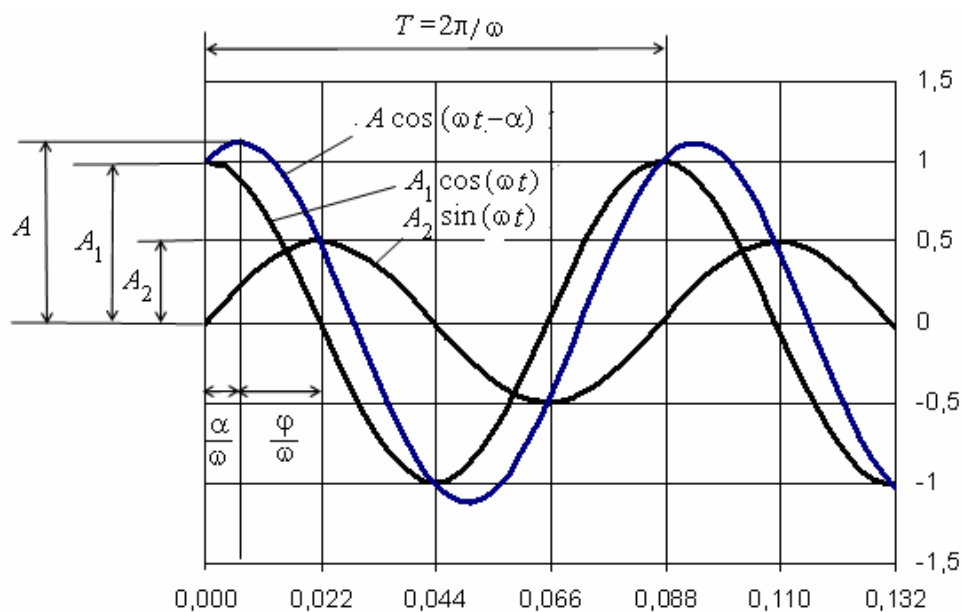


Рис. 1.2

Примечание к рис. 1.2. Графики выполнены с помощью программы **Mathcad** при $A_1 = 1$; $A_2 = 0.5A_1$; $\omega = 72.08$ 1/с.

Выражения (1.17) и (1.18) связывают также с вращением с равномерной

угловой скоростью ω вектора $A_1 = u^o$ и отстающего от него на угол $\pi/2$ вектора $A_2 = u^{oo}/\omega$ (рис. 1.3) вокруг оси, проходящей через точку O . Размерностью ω является рад/с – скорость равномерного вращения при которой за время 1 с совершается поворот векторов на угол 1 рад.

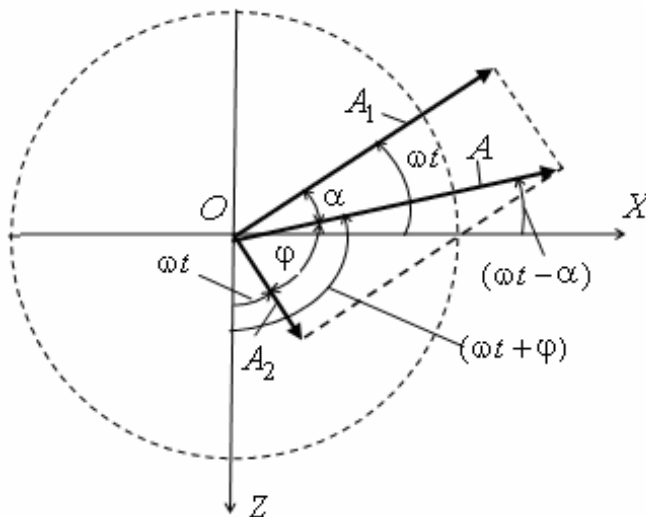


Рис. 1.3

На рис. 1.3 векторы показаны в момент времени t (до начала их вращения они совпадали соответственно с осями OX и OZ). Их горизонтальные составляющие представляют соответственно первое и второе слагаемые перемещения точечной массы в (1.15) и (1.18). При этом A представляет собой амплитуду суммарного перемещения u , а α – сдвиг фазы полного колебания по отношению к фазе колебания, соответствующего первому слагаемому:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{(u^o)_1^2 + (u^{oo}/\omega)^2}; \quad (1.19)$$

$$\alpha = \text{arctg} \frac{A_2}{A_1}; \quad (1.20)$$

$$A_1 = A \cos \alpha; \quad A_2 = A \sin \alpha. \quad (1.21)$$

С учетом (1.21) выражение (1.15) можно представить в виде

$$u = A \cos(\omega t - \alpha). \quad (1.22)$$

Как видно из сопоставления первого слагаемого в (1.15) и выражения (1.22) (см. также рис. 1.2 и рис.1.3), имеет место запаздывание на время $t = \alpha/\omega$ полной амплитуды A по отношению к амплитуде A_1 .

Можно выразить сдвиг фазы полной амплитуды A по отношению к фазе амплитуды A_2 с помощью величины

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1}{A_2}. \quad (1.23)$$

Тогда

$$A_1 = A \sin \varphi; \quad A_2 = A \cos \varphi; \quad (1.24)$$

$$u = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.25)$$

Как видно из сопоставления второго слагаемого в (1.15) и выражения (1.25) (см. также рис. 1.2 и рис.1.3), имеет место опережение по времени на величину $t = \varphi / \omega$ полной амплитуды A по отношению к амплитуде A_2 .

Очевидно, что

$$(\alpha + \varphi) = \pi / 2 \text{ и } t = (\alpha / \omega + \varphi / \omega) = \pi / 2\omega = T / 4. \quad (1.26)$$

Процесс перемещения массы при свободных поперечных колебаниях балки (см. рис. 1.2 и рис. 1.3) является периодическим. Он имеет период $T = 2\pi / \omega$ (время, с, одного цикла колебания массы на балке), равный периоду одного цикла вращения векторов вокруг точки O с равномерной угловой скоростью ω .

Величина

$$\nu = 1/T = \omega / 2\pi \text{ 1/с (Гц)} \quad (1.27)$$

представляет собой *частоту периодического процесса* колебаний массы на балке и периодического процесса вращения векторов, совершаемых за одну секунду времени. Такую частоту иногда называют *технической частотой*.

За единицу измерения этой величины принята *частота* колебаний, при которой за время 1 с совершается один цикл периодического процесса. Этой единице присвоено наименование – г е р ц (Гц) [20].

В периодическом процессе колебаний точечной массы на балке (см. рис. 1.2) величина

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi \cdot \nu \text{ рад/с (1/с)} \quad (1.28)$$

называется *угловой, круговой или циклической частотой*, которую в соответствии с (1.28) и физическим смыслом величин T и ν обычно рассматривают как число колебаний, совершаемых за время, равное 2π с (см. также определение этой величины, данное в [20]).

Из выражений (1.15), (1.22) и (1.25) получаются выражения для скорости и ускорения массы при свободных незатухающих колебаниях, а также для силы инерции, действующую на балку, например:

$$\dot{u} = -\omega A \sin(\omega t - \alpha); \quad \ddot{u} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \alpha); \quad (1.29)$$

$$J(t) = -m \ddot{u}(t) = m\omega^2 A \cos(\omega t - \alpha) = J_0 \cos(\omega t - \alpha), \quad (1.30)$$

где

$$J_0 = \max_t |J(t)| = m\omega^2 A \quad (1.31)$$

представляет собой амплитуду (максимальное значение во времени) силы инерции. Она будет иметь место, когда $\cos(\omega t - \alpha) = 1$, т. е. когда $(\omega t - \alpha) = 0$, или (см. рис. 1.2) при $t = \alpha / \omega$.

Силе инерции $J(t)$ (1.30) в рассматриваемой балке отвечает эпюра изгибающих моментов $M(t)$ (рис. 1.1, *e*) с ординатой $M_C(t)$ в сечении, где приложена сила. Максимальному во времени значению J_0 (1.31) силы инерции соответствует изгибающий момент $M_{C,0} = \max_t |M_C(t)| = J_0 l / 4$.

В поперечном сечении балки с максимальной ординатой $M_{C,0}$ могут быть определены максимальные и минимальные значения нормальных напряжений $\sigma_{1C,2C} = \pm M_{C,0} / W_C$ соответственно на нижней (растянутой) и верхней (сжатой) сторонах сечения.

Аналогично могут быть определены и поперечные силы в сечениях балки и соответствующие им касательные напряжения.

Полученные выражения для частот ω и f , для периода T , фазовых характеристик α и φ , перемещений u , скорости \dot{u} , ускорения \ddot{u} , силы инерции J являются общими для любых систем с одной степенью свободы.

Закон сохранения энергии колебаний при незатухающих колебаниях. Одновременное задание массе начальных условий движения (1.16) свободных колебаний системы с одной степенью свободы соответствует получению упругой системой энергии

$$\mathcal{E}_0 = \Pi_0 + T_0. \quad (1.32)$$

Слагаемые в (1.32) соответственно являются потенциальной и кинетической энергиями

$$\Pi_0 = 0.5 k(u^0)^2; \quad T_0 = 0.5 m(\dot{u}^{00})^2. \quad (1.33)$$

В процессе колебаний потенциальная и кинетическая энергии изменяются во времени, но поскольку рассматривается вариант колебаний без их затухания (без потери энергии колебаний), то суммарная величина энергии

$$\mathcal{E}(t) = \Pi(t) + T(t) = 0.5 k u^2 + 0.5 m \dot{u}^2 \quad (1.34)$$

в любой момент времени остается постоянной.

Действительно, подставив в (1.34) выражения (1.24) и первое из (1.29), получим

$$\mathcal{E}(t) = 0.5 kA^2 \cos^2(\omega t - \alpha) + 0.5 m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \alpha). \quad (1.35)$$

или с учетом (1.13)

$$\mathcal{E}(t) = 0.5 kA^2 [\cos^2(\omega t - \alpha) + \sin^2(\omega t - \alpha)] = 0.5 kA^2 = \mathcal{E}_0. \quad (1.36)$$

Суммарная энергия не изменяется и при прохождении массой первоначального положения равновесия ($u = 0$)

$$(\Pi(t) = 0; \quad T(t) = T_{\max}(t) = 0.5 m \omega^2 A^2 = 0.5 kA^2 = \mathcal{E}_0) \quad (1.37)$$

и при прохождении максимального отклонения массы на амплитуду ($u = A$)

$$(\Pi(t) = \Pi_{\max} = 0.5 kA^2 = \mathcal{E}_0; \quad T(t) = 0) \quad (1.38)$$

Так как энергия незатухающих колебаний (1.35) имеет постоянную величину, то ее производная по времени равна нулю

$$d\mathcal{E}(t)/dt = d\Pi(t)/dt + dT(t)/dt = d(0.5ku^2 + 0.5m\dot{u}^2)/dt = (m\ddot{u} + ku)\dot{u} = 0. \quad (1.39)$$

Как видим, это условие соответствует уравнению (1.8) свободных незатухающих колебаний упругой линейно деформируемой системы с одной степенью свободы.

Рассмотрим несколько примеров по определению динамических характеристик ω , ν и T колебания балок по расчетной схеме системы с одной степенью свободы.

Пример 1. Пусть требуется определить собственную частоту и период незатухающих колебаний упругой линейно деформируемой системы с одной степенью свободы в виде невесомой балки, несущей на себе точечную массу в середине пролета (см. рис. 1.1, а).

Единственная (первая) собственная круговая частота ω , рад/с, системы с одной степенью свободы, может быть определена из первого выражения (1.14) с помощью коэффициента жесткости k , либо из второго выражения (1.14) с помощью коэффициента податливости δ . Рассмотрим оба пути решения.

1. Величину k для балки найдем приемом, известным из метода перемещений статики сооружений (рис. 1.4, а) [22].

Введем жесткую связь, закрепляющую точку расположения массы на балке, и затем дадим этой связи единичное перемещение.

В результате такого воздействия балка деформируется, и в ней возникнут усилия, в частности, изгибающие моменты. Их эпюра с ординатой в середине пролета равна [22]:

$$\frac{3i_1}{l_1} = \frac{12EI}{l^2}, \text{ где } i_1 = EI/l_1 \quad (1.40)$$

Реакция во введенной связи и является коэффициентом k . Она равна сумме поперечных сил Q в сечениях балки, подходящих к связи слева и справа:

$$k = 2Q = 2 \cdot \left[\left(\frac{12EI}{l^2} \right) / \frac{l}{2} \right] = \frac{48EI}{l^3}. \quad (1.41)$$

Тогда круговая частота свободных незатухающих колебаний определится из формулы

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{48EI}{ml^3}} = 6.928 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \text{ рад/с, с}^{-1}, \quad (1.42)$$

а частота колебаний, равная числу циклов колебаний в 1 с (Гц), – из формулы

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 1.103 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \text{ с}^{-1}. \quad (1.43)$$

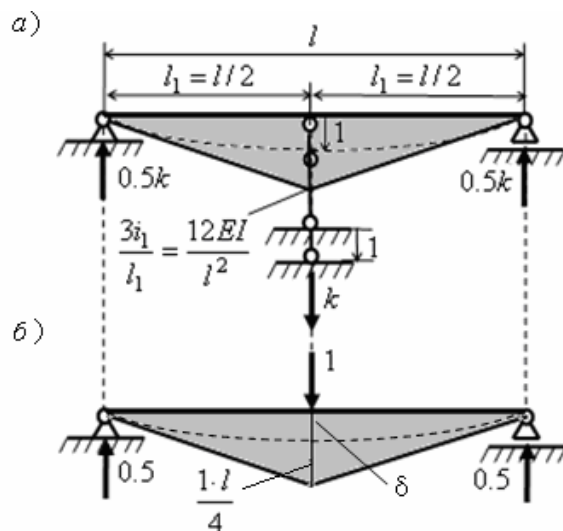


Рис. 1.4

Период колебаний определится из выражений

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{1.103} \sqrt{\frac{ml^3}{EI}} \text{ с}. \quad (1.44)$$

2. При определении круговой частоты из второго выражения (1.14) необходимо сначала вместо коэффициента жесткости определить коэффициент податливости δ , который для балки можно определить с помощью интеграла Максвелла – Мора [1, 22]. При учете только изгибных деформаций балки (эпюра M приведена на рис. 1.4, б) и вычислении интеграла численным методом с помощью формулы Симпсона [1, 22] получим

$$\delta = \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = 2 \cdot \frac{l}{2 \cdot 6EI} \left[0 + 4 \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{l}{8} + \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{4} \right] = \frac{l^3}{48EI} = k^{-1}. \quad (1.45)$$

Как видим, собственная круговая частота ω , рад/с, собственная частота ν , Гц, и соответствующий им период T колебаний, с, получаться такими же, как и при определении их с помощью коэффициента жесткости.

Из формул (1.14) видно, что с увеличением коэффициента жесткости k (уменьшением коэффициента податливости δ) балки и неизменным значением точечной массы m собственная круговая частота рассматриваемой системы увеличится.

Изменение коэффициента жесткости балки k зависит не только от изменения параметров E, I, l (см. формулу (1.41)), но и от опорных связей балки. Рассмотрим это на двух следующих примерах.

Пример 2. Оставим рассматриваемую в предыдущем примере балку и массу без изменения. Изменим только характер опирания балки: будем считать, что вместо шарнирных

опор она имеет по концам жесткие защемляющие опоры (заделки) (рис. 1.5, а) [7].

Рассмотрим, как изменятся определенные в предыдущем примере частоты и период колебаний системы с одной степенью свободы в связи с изменением опор балки.

1. При решении с помощью коэффициента жесткости k , для его определения вместо эпюры M , приведенной на рис.1.4, а, используется [1, 3, 22] эпюра M в виде, изображенном на рис. 1.5, б. Как видно, коэффициент жесткости балки с защемляющими опорами больше коэффициента жесткости этой же балки с шарнирными опорами в 4 раза:

$$k = 2Q = 2 \cdot \frac{12EI}{l_1^3} = 2 \cdot \frac{96EI}{l^3} = \frac{192EI}{l^3} = 4 \cdot \frac{48EI}{l^3} \quad (1.46)$$

Поэтому собственные частоты ω (1.42), f (1.43) увеличатся, а период собственных колебаний T (1.44) уменьшится, в 2 раза.

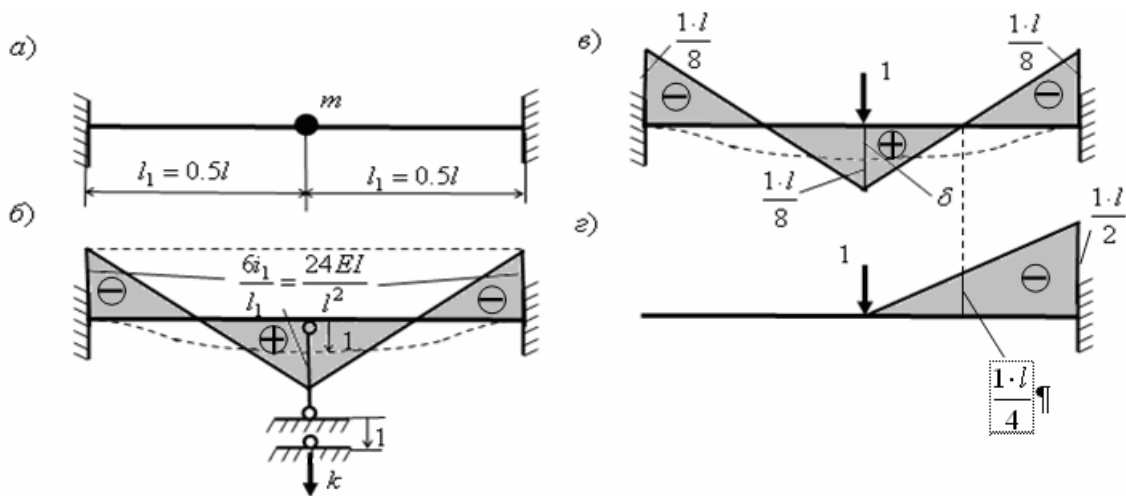


Рис. 1.5

2. На рис. 1.5, в, г показаны соответственно эпюры $M_{p=1}$ и \bar{M} [1, 22] для определения коэффициента податливости балки с защемляющими опорами с помощью интеграла Максвелла – Мора. В результате использования формулы Симпсона численного интегрирования, получим

$$\delta = \int_0^l \frac{M_{p=1} \bar{M}}{EI} dx = \frac{l}{2 \cdot 6EI} \left[\left(-\frac{l}{8}\right) \cdot \left(-\frac{l}{2}\right) \right] = \frac{l^3}{192EI} = k^{-1} \quad (1.47)$$

Как видим, этот путь решения приводит к тем же результатам, что и предыдущий.

Пример 3. Предположим, что у балки (см. рис. 1.1) жесткие вертикальные опорные связи заменены на упруго-податливые (рис. 1.6) с коэффициентом податливости опор $\alpha_{оп}$.

Рассмотрим, как влияет податливость вертикальных опорных связей на собственную частоту и период собственных колебаний.

Очевидно (рис. 1.6, б), что теперь коэффициент δ будет определяться из выражения:

$$\delta = \delta_{оп} + \delta_{\sigma} \quad (1.48)$$

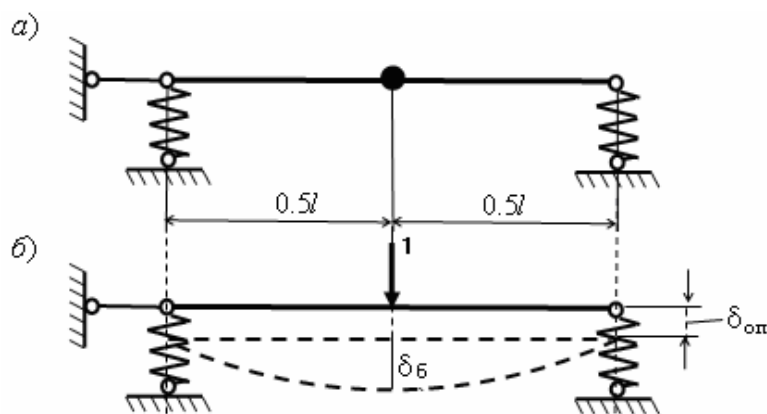


Рис. 1.6

Величина δ_b , представляющая собой прогиб балки связанной с ее изгибом, определена в примере 1. Величина $\delta_{оп} = 0.5\alpha_{оп}$ является осадкой балки от единичной силы, связанная с осадкой упругих опор от действующих на них сжимающих сил со значением 0.5.

В результате из второго выражения (1.14) получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m(0.5\alpha_{оп} + \frac{l^3}{48EI})}} \quad (1.49)$$

При жестких опорах их податливость $\alpha_{оп} = 0$ и круговая собственная частота ω (1.49) будет равна соответствующей частоте (1.42), полученной в примере 1.

При увеличении податливости опор знаменатель в выражении (1.47) будет увеличиваться, и частота ω будет уменьшаться. Очевидно, что при $\alpha_{оп} \rightarrow \infty$, получим $\omega \rightarrow 0$. Это означает отсутствие колебаний и неограниченное перемещение балки ($A \rightarrow \infty$).

Представляет интерес вариант, когда балка, оставаясь невесомой, является очень жесткой, так что в (1.49) можно принять $EI = \infty$. Тогда второе слагаемое в знаменателе выражения (1.49) будет равно нулю, и свободные колебания системы будут происходить с частотой ω , зависящей только от податливости опор:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{0.5m\alpha_{оп}}} \quad (1.50)$$

Для вычисления значений собственных частот и периода колебаний системы с одной степенью свободы для конкретной балки должны быть заданы ее геометрические параметры и характеристики материала. Рассмотрим такой пример.

Пример 4. Определение СЧ и СФК поперечных колебаний железобетонной балки по расчетной схеме системы с одной степенью свободы

Пусть дана железобетонная балка (рис. 1.7, а) со следующими геометрическими параметрами: длина $l_6 = 8$ м; ширина и высота прямоугольного поперечного сечения соответственно $b = 0.4$ м и $h = 0.6$ м. По этим параметрам вычислим: $A_6 = 0.24$ м² – площадь поперечного сечения; $V_6 = A_6 \cdot l_6 = 0.24 \cdot 8 = 1.92$ м³ – объем материала балки; $I_Y = bh^3/12 = 0.072$ м⁴ – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Y.

Материалом балки является железобетон класса В25 со следующими

характеристиками: плотность $\rho_6 = 2500 \text{ кг/м}^3 = 2.5 \text{ т/м}^3$; удельный вес $\gamma_6 = \rho_6 \cdot g = 24.525 \text{ кН/м}^3 = 2.5 \text{ тс/м}^3$, где $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения; модуль упругости $E = 3.00186 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2 = 3.06 \cdot 10^6 \text{ тс/м}^2$.

Определим следующие величины, необходимые далее для расчета:

1. Жесткость балки при ее изгибных колебаниях $EI_Y = 216133.92 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$;
2. Массу балки $m_6 = \rho_6 \cdot V_6 = 4800 \text{ кг} = 4.8 \text{ т}$ и ее вес $G_6 = m_6 \cdot g = 4.8 \cdot 9.81 = 47.088 \text{ кН} = 4.8 \text{ тс}$;
3. Линейную плотность балки $\mu_6 = m_6 / l_6 = \rho_6 \cdot A_6 = 0.6 \text{ т/м}$ и линейный вес балки $q_6 = G / l_6 = \mu_6 \cdot g = 0.6 \cdot 9.81 = 5.886 \text{ кН/м} = 0.6 \text{ тс/м}$.

Примечание. Величины μ_6 и q_6 являются ординатами эпюр равномерно распределенных по длине балки массы и веса балки (рис. 1.7, а, б). Площади $\mu_6 \cdot l_6 = m_6$ и $q_6 \cdot l_6 = G_6$ этих эпюр при длине l_6 соответственно равны массе и весу балки, а при длине части балки равной одному метру равны величинам $\bar{\mu}_6 = \mu_6 \cdot 1$ и $\bar{q}_6 = q_6 \cdot 1$, представляющим собой соответственно «погонную массу» и «погонный вес» балки с размерностью массы и силы.

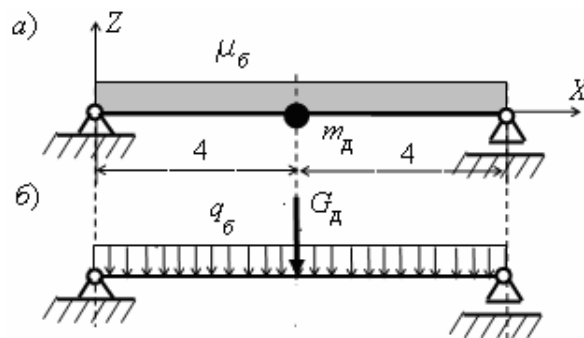


Рис. 1.7

По середине пролета балки расположен электродвигатель массой $m_d = 1500 \text{ кг} = 1.5 \text{ т}$, который в расчетной схеме балки (рис. 1.7, а) представляется в виде сосредоточенной в точке массы, действующей на балку (рис. 1.7, б) силой $G_d = m_d \cdot g = 1.5 \cdot 9.81 = 14.715 \text{ кН} = 1.5 \text{ тс}$ (вес двигателя).

Для решения динамической задачи по определению СЧ и СФК заданной балки по расчетной схеме в виде системы с одной степенью свободы надо сначала по заданным характеристикам балки создать такую расчетную схему. При ее создании воспользуемся информацией о числе динамических степеней свободы в расчетных схемах сооружений (рис. В.1), приведенной во введении к учебному пособию. В связи с этим:

1. Будем рассматривать балку как плоскую стержневую систему, отнесенную к общей системе XZ осей координат (см. рис. 1.7, а), и только поперечные к оси балки (в данном случае – вертикальные) колебания обозначенных на рис. 1.7 масс.
2. При решении задачи о колебаниях балки в плоскости XOZ разделим ее на плоские стержневые конечные элементы типа 2 (по нумерации, принятой в программе SCAD) [2, 23].

3. Учтем, что при использовании МКЭ для решения задач динамики стержневых систем равномерно распределенную по длине l_r стержневого конечного элемента (КЭ) r массу $m^{(r)} = \mu^{(r)} \cdot l^{(r)}$ заменяют двумя равными точечными массами $m_1^r = m_2^r = 0.5m^{(r)}$, отнесенными к концам элемента, т. е. к узлам $1^{(r)}$ (начало КЭ r) и $2^{(r)}$ (конец КЭ r). Нумерация узлов осуществляется в местной системе осей координат [3].

Разбив балку на два КЭ типа 2 (рис. 1.8, а) получим систему с одной динамической степенью свободы (рис.1.8, б) [2, 3, 24].

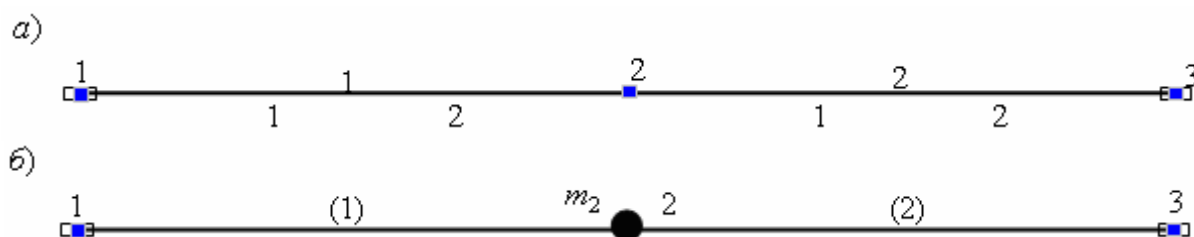


Рис. 1.8

В этом случае в узле 2 будет сосредоточена суммарная точечная масса $m_2 = m_d + m_{2,пр}$, где $m_d = 1.5$ т – масса электродвигателя; $m_{2,пр} = 0.5m^{(1)} + 0.5m^{(2)}$ – приведенная масса элементов 1 и 2, приходящаяся на узел 2. Здесь $m^{(1)} = m^{(2)} = 4\mu_6 = 2.4$ т; $m_{2,пр} = 4\mu_6 = 2.4$ т и $m_2 = 1.5 + 2.4 = 3.9$ т.

Точечные массы $m_1^1 = m_2^2 = 0.25\mu_6 = 1.2$ т, приводящие часть равномерно распределенной массы элементов 1 и 2 соответственно к опорным узлам 1 и 3, степеней свободы в поперечном к оси балки направлении не имеют. Поэтому на рис. 1.8, б эти массы не показаны.

Таким образом, полученная система (см. рис. 1.8, б) имеет только одну динамическую степень свободы – свободы вертикальных перемещений массы $m_2 = 3.9$ т в узле 2.

Определение динамических характеристик ω , ν , T балки и ее соответствующей СФК вручную

Указанные динамические характеристики можем вычислить вручную по формулам (1.42) – (1.44), подставив в них, известные значения величин EI , $m = m_{2,пр}$, l . Тогда получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{48EI}{ml^3}} = 6.928 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} = 6.928 \sqrt{\frac{3.00186 \cdot 10^7 \cdot 0.072}{3.9 \cdot 8^3}} = 72.08, \text{ рад/с}; \quad (1.51)$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 11.48 \text{ с}^{-1}; \quad (1.52)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} = 0.087 \text{ с}. \quad (1.53)$$

Собственная форма колебаний балки, соответствующая круговой частоте ω , определяется одной ординатой – перемещением массы, приложенной в узле 2 расчетной

схемы МКЭ, по направлению вертикальной степени свободы узла 2.

Поскольку нас интересует только форма колебаний, примем указанное перемещение массы равным единице и направим его в положительном направлении оси Z (см. рис. 1.7, *a*). Получающаяся при этом форма деформации балки показана в том виде, в котором она получается в дальнейшем в этом примере расчета с помощью программы SCAD.

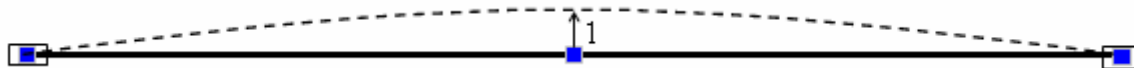



Рис. 1.9

Определение динамических характеристик ω , ν , T балки и ее соответствующей СФК на ПК с помощью программы SCAD


В программе SCAD расчетная схема, приведенная на рис. 1.8, *б*, получается из схемы МКЭ, приведенной на рис. 1.8, *а*, в результате следующей процедуры:

1. После построения в разделе «Схема» рис. 1.8, *а*, открываем раздел «Загружения».

2. В открывшейся инструментальной панели активизируем кнопку  «Динамические воздействия» и в открывшемся диалоговом окне выбираем «Создание нового нагружения». В результате открывается первая страница двухстраничного диалогового окна с перечислением различных динамических воздействий.

3. Выбираем «Модальный анализ» и задаем аналогичное имя динамического нагружения. Выходим из первой страницы окна нажатием в его верхней части «Модальный анализ».

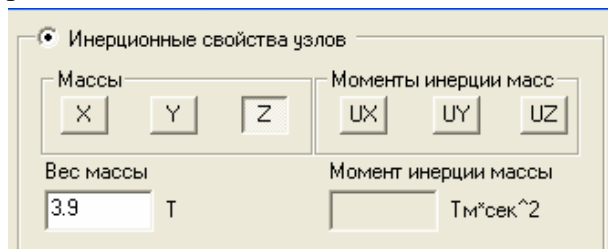
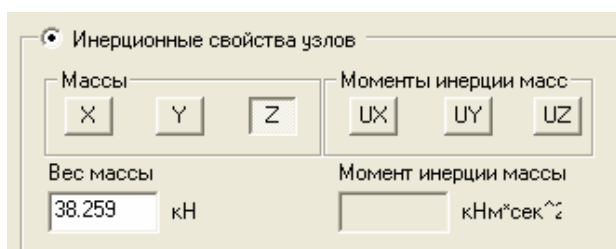
4. На открывшейся второй странице диалогового окна вводим число учитываемых форм колебаний (в построенной расчетной схеме для системы с одной степенью свободы вводим цифру 1). Нажатием кнопки «ОК» на второй странице выходим из диалогового окна.

5. На инструментальной панели активизируем кнопку  «Инерционные характеристики» и выбираем в открывшемся списке «Задание масс». Откроется окно «Массы»:

Дальнейшая последовательность операций по вводу масс имеет варианты. Поэтому следующий пункт 6 последовательности рассмотрим в следующих двух вариантах:

6. **Вариант 1.** Предположим, что суммарная точечная масса $m_2 = 3.9$ т в узле 2 расчетной схемы МКЭ балки уже подсчитана вручную (см. выше). Тогда в открывшемся окне «Массы» вводится вес этой массы $G_2 = G = m_2 \cdot g = 3.9 \cdot 9.81 = 38.259$ кН = 3.9 тс.

Этот вариант заполнения окна по вводу масс, когда вес массы задается в кН, приведен ниже слева, а когда вес массы задается в тс – справа:



Отнеся это нагружение к узлу 2, получим схему варианта 1 нагружения, представленную на рис. 1.10.

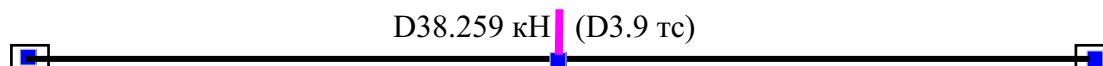
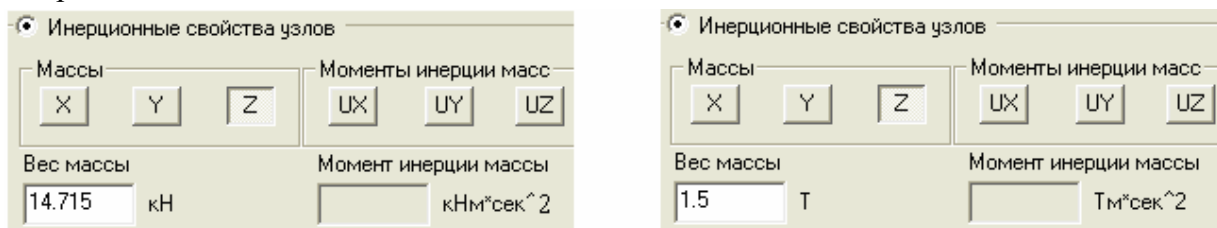
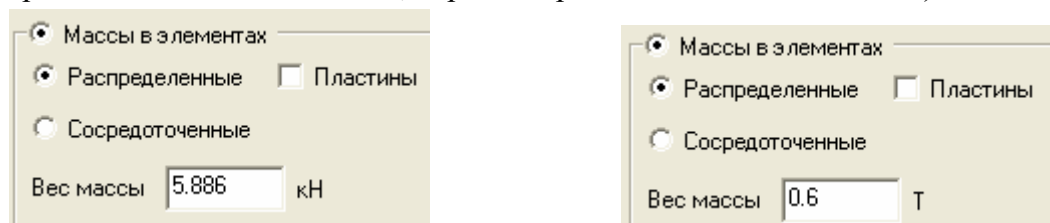


Рис. 1.10

6. **Вариант 2.** Предположим, что суммарная точечная масса в узле 2 расчетной схемы МКЭ балки не была подсчитана. Тогда в открывшемся окне «Массы» сначала в узел 2 вводится только вес $G_2 = G_d = m_d \cdot g = 1.5 \cdot 9.81 = 14.715$ кН точечной массы $m_d = 1.5$ т электродвигателя:



Затем вводится «погонный вес» (вес массы 1 м длины балки) $q_6 = 5.886$ кН = 0.6 тс. Этот вариант задания веса распределенной массы балки приведен в нижележащих окнах (слева – при задании веса массы в кН, справа – при задании веса массы в тс):



Вид схемы нагружения балки в варианте 2 задания веса масс приведен на рис. 1.11.

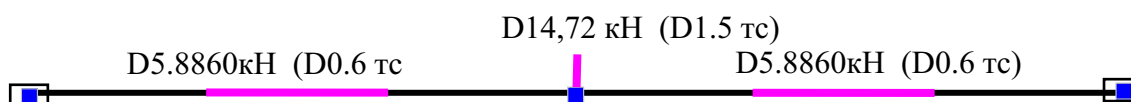



Рис. 1.11

7. В любом варианте нагружения его надо сохранить, а затем зайти в раздел «Управление», на инструментальной панели которого выбрать кнопку  «Выйти в экран управления проектом» и на «Дереве проекта» в разделе «Расчет» выбрать «Линейный».

8. После выполнения линейного расчета выбираем в разделе «Результаты» на «Дереве проекта» подраздел «Печать таблиц». Откроется диалоговое окно для построения таблиц с результатами расчета.

Результаты решения динамической задачи «Модальный анализ» находятся в трех таблицах раздела «Динамика». Для открытия этих таблиц активизируем соответствующую строку с названием «Динамика» в правом столбце диалогового окна.

9. Для получения интересующих расчетчика величин и в нужных выходных единицах необходимо в диалоговом окне последовательно выполнить редактирование таблиц в окнах «Параметры вывода», «Формирование документа» и затем открыть «Просмотр результатов». С этими вопросами учащийся уже встречался при решении задач статики сооружений [2, 3, 24].

Ниже три упомянутые таблицы в разделе «Динамика» для рассматриваемого примера расчета приведены в виде, который получается в программе SCAD при просмотре результатов расчета.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВ МАСС, кН		
1	2	3
1	(модальный анализ)	
Z	38.25	

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВ МАСС, Т (тс)		
1	2	3
1 -	(модальный анализ)	
Z	3.9	

Загру:	N	СОБСТВ.	Ч А С Т О Т Ы	ПЕРИОДЫ
жение:	П/П	ЗНАЧЕНИЯ	1/С	ГЦ
			ГЦ	С
1	1	.0138734	72.08	11.48
				.087

ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ		
1	2	3
1 -	1	(модальный анализ)
Z	1.	


В первой таблице отражен вес суммарной точечной массы $m_2 = m_d + m_{2,пр}$ в узле 2 расчетной схемы балки (см. рис. 1.8), совершающей свободные колебания в направлении поперек оси балки (таблица приведена дважды: соответственно при задании веса массы в кН и в тс).

Во второй таблице приводятся: круговая частота $\omega = 2\pi \cdot \nu = 72.08$ рад/с, поперечных к оси балки свободных колебаний массы; частота колебания массы $\nu = 11.48$ Гц и период колебаний $m^{(r)} = \mu^{(r)} \cdot J^{(r)}$ с.

В таблице три приведена максимальная относительная амплитуда перемещения массы

в первой СФК балки, которую принимает упругая балка при относительном смещении массы в узле 2, равном единице. В программе SCAD форма изгиба балки получается, если последовательно открыть в разделе «Результаты» дерева проекта подраздел «графический анализ», а затем «Деформации» и на открывшейся инструментальной панели нажать кнопку



При этом с помощью кнопки  «Отображение прогибов в стержнях» получим картину деформации балки, приведенную на рис. 1.9.

Результат получается одинаковым при использовании любого из рассмотренных выше двух вариантов задания масс балки.

Видно, что результат решения поставленной задачи вручную и на ПК с помощью программы SCAD полностью совпадает.

Пример 5. Использование программы SCAD для определения СЧ и СФК поперечных к оси башни колебаний ветроэнергетической установки башенного типа по расчетной схеме системы с одной степенью свободы

Постановка задачи. Пусть задана расчетная схема ветроэнергетической установки (ВЭУ) башенного типа с горизонтальной осью вращения ветроколеса (ВК) (рис. 1.12, а).

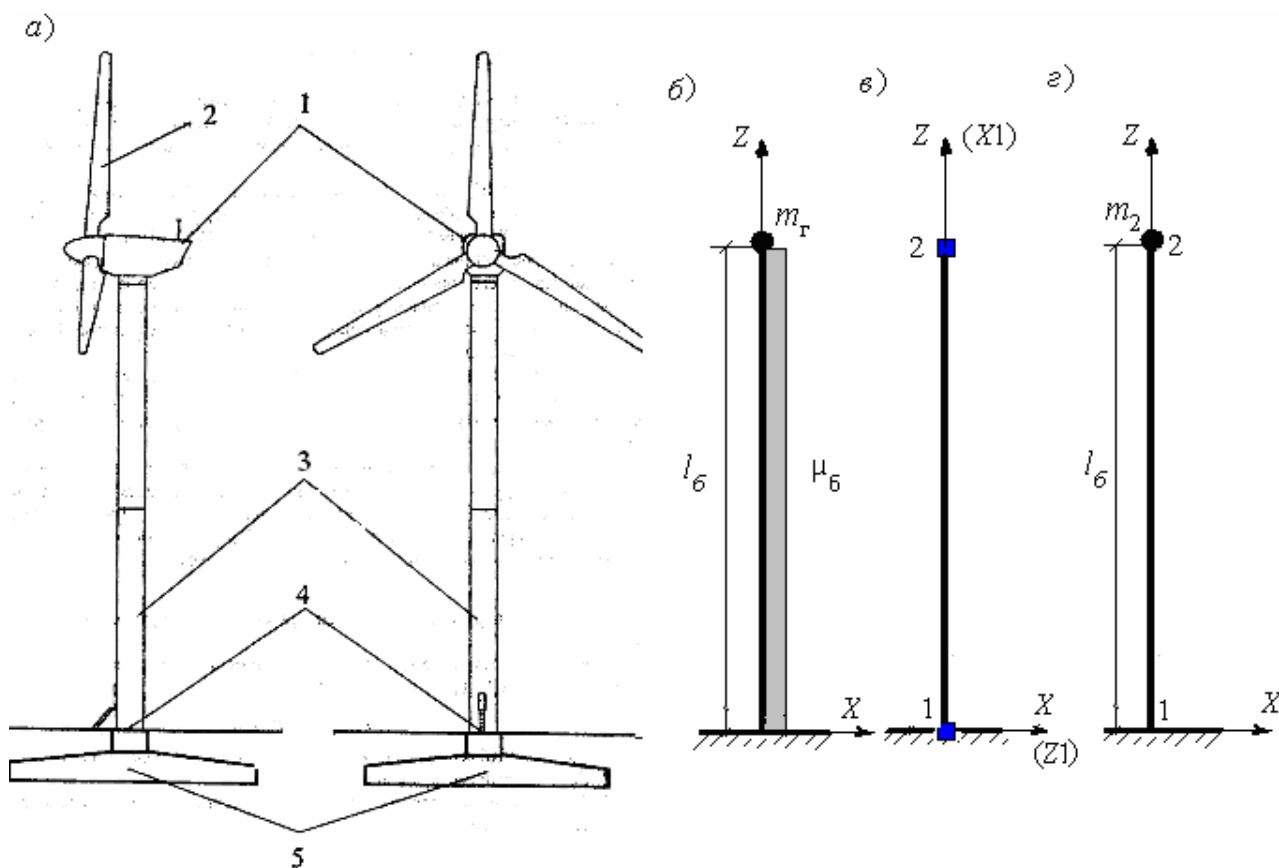


Рис. 1.12

Двухсекционная башня ВЭУ (3) из стали с модулем упругости $E_6 = 2.06 \cdot e + 08 \text{ кН/м}^2$ и плотностью $\rho_6 = 7850 \text{ кг/м}^3 = 7.85 \text{ т/м}^3$ представляется в виде цилиндрической трубы с осредненными по ее высоте геометрическими характеристиками: толщиной стенки $t = 1 \text{ см}$; наружного диаметра $D = 211 \text{ см}$; внутреннего диаметра $d = 209 \text{ см}$; среднего диаметра

$d_0 = 0.5(D + d) = 210$ см; площадью поперечного сечения $A_0 = \pi \cdot d_0 \cdot t = 3.14 \cdot 2.1 \cdot 0.01 = 0.066$ м².

На верхнем конце башни расположена поворачивающаяся вокруг ее оси гондола (1) с ветроколесом (2). Нижним торцом башня, например, с помощью анкерных болтов, крепится к верхней поверхности (4) железобетонного фундамента (5).

Внутри гондолы находится вал ВК, его опорная конструкция, редуктор, генератор и другое оборудование ВЭУ [25]. Полная масса $m_T = 6000$ кг = 6 т гондолы вместе с ВК задана.

Требуется определить динамические характеристики ω, ν, T и СФК ВЭУ как системы с одной степенью свободы (рис. 1.12, з).

Такая приближенная расчетная схема для заданной системы (см. рис. 1.12, а) получится, если принять следующие допущения:

1. Масса $m = 6$ т гондолы с ВК представляется в виде точечной массы.

2. Башня высотой $l_0 = 29$ м при заданных параметрах ее поперечного сечения рассматривается (рис. 1. 12, б) как тонкий стержень с общей массой $m_0 = \rho_0 \cdot (A_0 \cdot l_0) = 7.85 \cdot (0.066 \cdot 29) = 15$ т равномерно распределенной по длине стержня с линейной плотностью $\mu_0 = m_0 / l_0 = \rho_0 \cdot A_0 = 0.52$ т/м.

3. В расчетной схеме не учитываются деформации фундамента и основания, поэтому в расчетной схеме опора стержня представлена в виде жесткой заделки (см. рис. 1.12, б, в).

4. Рассматриваются только поперечные к оси стержня колебания ВЭУ, происходящие в плоскости осей координат X и Z (рис. 1.12, б), поэтому при построении расчетной схемы МКЭ стержень-консоль может быть разбит на необходимое число плоских стержневых конечных элементов типа 2 (по нумерации принятой в программе SCAD).

5. Как и в предыдущем примере 4 принято, что равномерно распределенная по длине l_r масса $m^{(r)} = \mu^{(r)} \cdot l^{(r)}$ конечного элемента r заменяется двумя равными точечными массами $m_1^r = m_2^r = 0.5 m^{(r)}$, отнесенными к концам КЭ, т. е. к узлам $1^{(r)}$ (начало КЭ r) и $2^{(r)}$ (конец КЭ r). Нумерация начального и конечного узлов элементов осуществляется в местной системе осей координат [3].

В связи с этим становится ясным, что расчетная схема ВЭУ как системы с одной динамической степенью свободы получится, если стержень-консоль по длине представить в виде только одного КЭ типа 2 (на рис. 1.12, в) она приведена в виде, который получается при использовании программы SCAD [2, 3, 24]).

В этом случае масса $m_1^1 = m_2^1 = 0.5 \cdot 0.52 \cdot 29 = 7.5$ т элемента 1 приведет к узлам 1 и 2. Приведенная масса $m_1^1 = 7.8$ т узла 1, совпадающего с защемляющей опорой, не будет иметь перемещений, поэтому эта масса на расчетной схеме (рис. 1.12, з) не показана. Так как узел 2 совпадает с концом башни, где расположена масса $m_T = 6$ т, то приведенная масса $m_2^1 = 7.5$ т узла 2 суммируется с массой гондолы, поэтому в узле 2 расчетной схемы МКЭ (см. рис. 1.12, в) будет находиться суммарная точечная масса $m_2 = m_T + m_2^1 = 6.0 + 7.5 = 13.5$ т (см. рис. 1.12, з).

В результате получили расчетную схему ВЭУ как систему с одной степенью свободы для ее динамического расчета по определению СЧ и СФК поперечных к оси стержня колебаний.

Как и в предыдущем примере, рассмотрим два способа определения динамических характеристик ω, ν, T этой системы и соответствующей ей СФК: расчет вручную и расчет на ПК с использованием программы SCAD.

Расчет вручную. Сначала определим угловую собственную частоту ω . Используем для этого вторую формулу (1.14).

Коэффициент податливости δ в этой формуле представляет собой прогиб консоли от единичной силы (рис. 1.13, а).

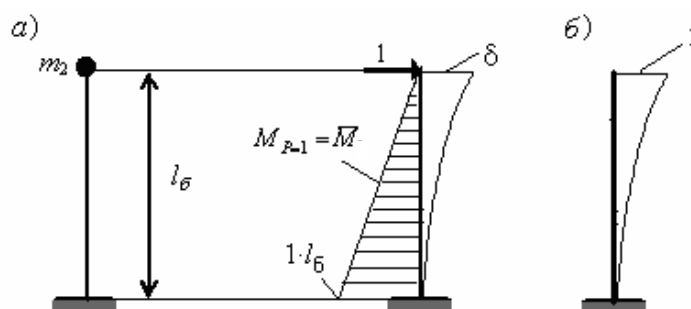


Рис. 1.13

Его величина может быть определена по формуле Максвелла – Мора [1] с учетом только интеграла, учитывающего изгибные деформации. Вычисляя этот интеграл по формуле Симпсона, получим:

$$\delta = \int_0^{l_6} \frac{M_{p=1} \bar{M}}{EI_6} dx = \frac{l_6}{6EI} \left[(1 \cdot l_6)^2 + 4 \left(\frac{l_6}{2} \right)^2 + 0 \right] = \frac{l_6^3}{3EI_6} = \frac{29^3}{3 \cdot 2.06 \cdot 10^8 \cdot 0.036349} = 0.0011 \text{ м}$$

При вычислении коэффициента δ момент инерции I_Y поперечного сечения тонкой трубы относительно оси Y (см. систему осей общей системы координат на рис. 1.12, б, в, г) был определен по приближенной формуле: $I_Y \approx \pi \cdot r_o^3 \cdot t = 3.14 \cdot (1.05)^3 \cdot 0.01 = 0.036349 \text{ м}^4$.

Входящая в формулу (1.14) масса $m = m_2 = 13.5 \text{ т}$. Тогда получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{0.0011 \cdot 13.5}} = 8.2 \text{ рад/с.} \quad (1.54)$$

По угловой частоте ω определяем частоту ν , Гц и период колебаний T , с;


$$\nu = \nu_1 = \omega / 2\pi = 8.2 / 6.28 = 1.3 \text{ с}^{-1}; \quad (1.55)$$

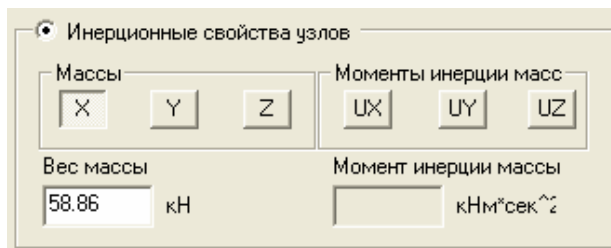
$$T = 2\pi / \omega = 1 / \nu = 0.77 \text{ с.} \quad (1.56)$$

Собственная форма колебаний рассмотренной расчетной схемы ВЭУ, соответствующая собственной частоте ω , будет иметь вид формы деформации консоли, изображенной на рис. 1.13, а, с относительной ординатой горизонтального перемещения узла 2 равной единице (рис. 1.13, б).

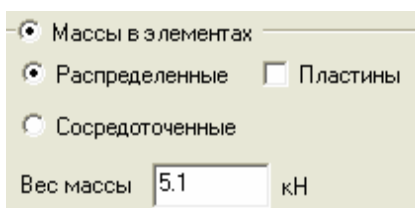
Расчет на ПК с помощью программы SCAD. Сначала выполним первый и второй этапы решения задачи с помощью программы SCAD [2], в результате чего будет создана расчетная схема ВЭУ в виде, приведенном на рис. 1.12, в.

Для загрузки построенной расчетной схемы динамическим воздействием в разделе «Загрузки» на инструментальной панели нажимаем кнопку **D**. Откроется диалоговое окно, в котором выбираем «Создать новое загрузку». Далее выбираем «Модальный анализ» и задаем требуемое число СФК: 1.

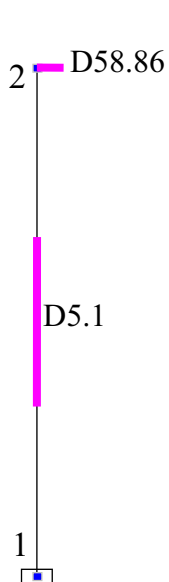
Затем открываем окно  «Инерционные характеристики» и выбираем «Задание масс». Заполняем диалоговое окно (оно приведено ниже) по заданию веса $G = m_r \cdot g = 6 \cdot 9.81 = 58.86$ кН точечной массы в узле 2. Для ввода этого значения отметим узел 2 и подтверждаем сделанный выбор нажатием в меню раздела «Загрузки» зеленого цвета галочки «ОК».





Затем аналогичными действиями вводится вес одного погонного метра башни $q_6 \cdot 1 = (\mu_6 \cdot g) \cdot 1 = (0.52 \cdot 9.81) \cdot 1 = 5.1$ кН:



Эти данные относим к единственному конечному элементу расчетной схемы.



В результате (при нажатых кнопках  и ) получим расчетную схему в виде изображенном на рис. 1.14.

Сохраняем загрузку 1 с названием «мод-вэу1» и выполняем расчет.

В результате в программе SCAD в таблице распределения весов масс получим вес $G_2 = 132.2$ кН сосредоточенной массы в узле 2.

Во второй таблице при поперечных колебаниях башни с указанной сосредоточенной массой в узле 2 получим круговую собственную частоту $\omega = 8.3 \text{ с}^{-1}$, частоту $\nu = \omega/2\pi = 1.3$ Гц и период собственных колебаний $T = 2\pi/\omega = 1/\nu = 0.76$ с.

Собственная форма колебаний, соответствующая первой собственной частоте ВЭУ, полученной по выбранной расчетной схеме, получается при расчете с использованием программы SCAD в виде, изображенном на рис. 1.13, б.

Рис. 1.14

Значения характеристик ω, ν, T , определенных вручную и с помощью программы SCAD, с достаточной для практических расчетов точностью соответственно совпадают.

1.2. Свободные затухающие колебания

Уравнение свободных затухающих колебаний. В реальных сооружениях энергия свободных колебаний необратимо теряется в результате потерь на преодоление внутреннего неупругого сопротивления материала, потерь в местах соединения элементов друг с другом и опорами, а также в результате потерь через основание, окружающую среду и т. д. Поэтому свободные колебания со временем затухают.

Проблеме учета различных сопротивлений при колебании сооружений посвящена многочисленная литература (см. библиографические списки, например, в работах [4, 10, 14, 23]). В учебнике [10] рассмотрен способ учета сил сопротивления в задачах динамики, основанный на гипотезе «вязкого трения», предложенной Фойгтом, а также способ, основанный на теории неупругого поглощения энергии колебаний, в том числе при учете внутреннего трения в комплексной форме по теории Е.С. Сорокина.

Исследования, выполненные в [10], показывают, что при решении задачи о свободных затухающих колебаниях системы с одной степенью свободы уравнение, описывающее эти колебания, и его решение могут быть записаны в виде, соответствующем использованию гипотезы «вязкого трения» Фойгта, но затем скорректированы с учетом имеющихся к настоящему времени результатов экспериментальных и теоретических исследований.

Чтобы пояснить это, запишем уравнение движения массы в системе с одной степенью свободы с использованием гипотезы Фойгта в тех же двух формах, что и при свободных незатухающих колебаниях (см. (1.7) и (1.9)), но с добавлением силы неупругого сопротивления $R_H = R_H(t)$:

$$J + R_H + K = 0 \quad (1.57)$$

$$u = \delta(J + R_H); \quad (1.58)$$

В соответствии с гипотезой «вязкого трения» Фойгта сила неупругого сопротивления колебаниям представляется в виде:

$$R_H = -c \cdot \dot{u}. \quad (1.59)$$

где c – сила вязкого сопротивления материала, соответствующая единичной скорости ($\dot{u} = 1$) движения массы.

Знак «минус» в выражении (1.59) показывает, что сила вязкого сопротивления, действующая на точечную массу при ее движении, имеет направление, противоположное направлению скорости движения.

В результате, два варианта записи уравнения движения точечной массы,

расположенной на невесомой линейно деформируемой балке (см. рис. 1.1, а), при поперечных свободных колебаниях с учетом сил вязкого сопротивления вместо (1.57) и (1.58) с учетом (1.4) и (1.5) будут иметь вид

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0; \quad (1.60)$$

$$u = \delta(-m\ddot{u} - c\dot{u}) \text{ или } \delta m\ddot{u} + c\dot{u} + u = 0 \quad (1.61)$$

Разделив (1.60) и (1.61) соответственно на m и δm получим уравнение свободных колебаний в виде

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + \omega^2 u = 0. \quad (1.62)$$

где ω^2 – обозначение (1.13), представляющее собой, как это показано в подразделе (1.1), квадрат круговой собственной частоты системы при незатухающих колебаниях, обозначение

$$2\varepsilon = c / m \quad (1.63)$$

представляет собой удвоенную величину ε , которая называется *коэффициентом затухания колебаний* или *коэффициентом демпфирования*.

Для решения уравнения (1.62) важно соотношение величин ε и ω . В строительных конструкциях характерным является соотношение

$$\varepsilon < \omega. \quad (1.64)$$

Анализ решения уравнения (1.56) свободных колебаний с учетом сил «вязкого» сопротивления колебаниям Решение уравнения (1.62) с учетом (1.64) имеет (см. ход решения, например, в [4]) вид:

$$u = e^{-\varepsilon t} (A_1 \cos \omega_D t + A_2 \sin \omega_D t); \quad (1.65)$$

$$u = A e^{-\varepsilon t} \cos(\omega_D t - \alpha); \quad (1.66)$$

$$u = A e^{-\varepsilon t} \sin(\omega_D t + \varphi). \quad (1.67)$$

где постоянные A_1, A_2 определяются из начальных условий движения (1.16):

$$A_1 = u^0; \quad A_2 = \frac{u^{00} + \varepsilon u^0}{\omega_D}, \quad (1.68)$$

а по ним из формул (1.21), (1.22), (1.25) - постоянные величины A, α, φ .

Как следует из выражений (1.65) - (1.67), свободные движения системы с одной степенью свободы при начальных условиях движения в виде (1.16) представляют собой гармонические колебания (рис. 1.15), происходящие с круговой частотой

$$\omega_D = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} = \omega \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\omega^2}}, \quad 1/c, \quad (1.69)$$

и амплитудой $A \exp(-\varepsilon t)$, которая в связи с наличием множителя $\exp(-\varepsilon t)$ со

временем уменьшается, затухает. Частота процесса затухающих колебаний ν_D , Гц, и период затухающих колебаний T_D , с, определяются, как и при незатухающих колебаниях, соответственно из выражений

$$f_D = \frac{\omega_D}{2\pi} = \frac{1}{T_D}; \quad T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{1}{\nu_D}. \quad (1.70)$$

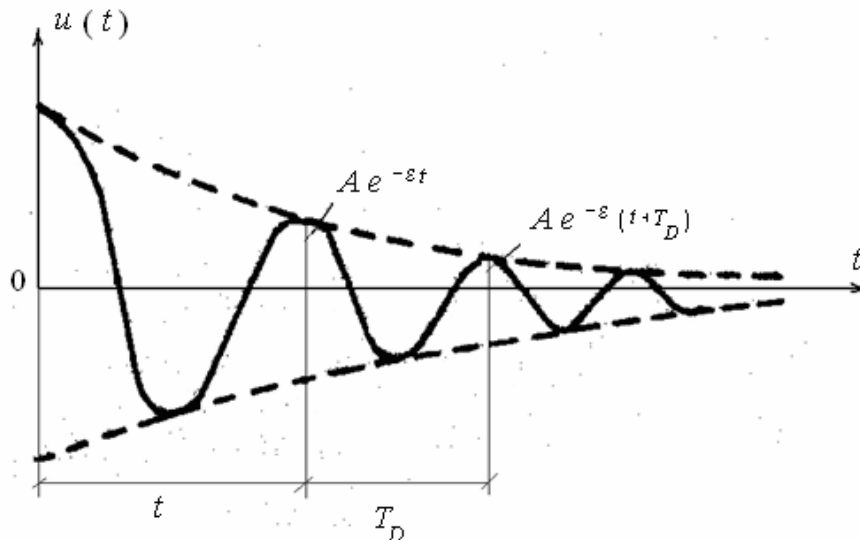


Рис. 1.15

Характеристики затухания колебаний. Экспериментальными исследованиями установлено, что коэффициент затухания ε (1.63), полученный при использовании гипотезы Фойгта, зависит от частоты колебаний. В то же время экспериментально получены характеристики затухания колебаний, которые можно считать постоянными (частотно-независимыми) для конкретного типа сооружений или их элементов.

Одна из таких характеристик – *коэффициент поглощения энергии колебаний* [4, 10, 14]

$$\psi = \frac{\Delta W}{W}, \quad (1.71)$$

где ΔW – потеря энергии колебаний за один цикл (за период \bar{T}); W – потенциальная энергия упругой деформации, соответствующая амплитуде A_n в начале цикла.

Второй характеристикой затухания колебаний, не зависящей от частоты колебаний, является *логарифмический коэффициент затухания колебаний*, который определяется выражением:

$$\delta_{л} = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}, \quad (1.72)$$

где A_n и A_{n+1} являются следующими друг за другом с периодом $T_D = 2\pi/\omega_D$ амплитудами колебаний (см. рис.1.15).

Между постоянными величинами $\delta_{л}$ и ψ существует равенство [4, 10]:

$$\psi = 2\delta_{л}. \quad (1.73)$$

В динамических расчетах используют также *коэффициент неупругого сопротивления* колебаниям

$$\gamma_{н} = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{\delta_{л}}{\pi}. \quad (1.74)$$

Значения коэффициентов $\delta_{л}$, ψ , $\gamma_{н}$ можно найти в различных работах, например [10, 14, 15]. Из приведенных там данных следует, что наименьшее значение этих коэффициентов имеют стальные конструкции (стальные дымовые трубы – $\psi \approx 0.11$, стальные мосты – $\psi \approx 0.17$). Для железобетонных перекрытий $\psi \approx 0.44–0.56$, мостов ≈ 0.63 . Наибольшее значение ψ имеет для различных зданий (≈ 0.66), железобетонных фундаментов под генераторы (≈ 0.8). При этом соответствующие значения коэффициентов $\delta_{л}$, $\gamma_{н}$ можно установить из (1.73).

Корректировка гипотезы Фойгта состоит в том, что коэффициент затухания ε (1.63) для системы с одной степенью свободы увязывают с коэффициентами $\delta_{л}$, ψ , $\gamma_{н}$, не зависящими от частоты колебаний и с частотой ω_D . Это получается, например, с помощью выражения (1.72) и с учетом решения (1.66) или (1.67). Тогда при гармонических колебаниях с частотой ω_D :

$$\delta_{л} = \ln \frac{A e^{-\varepsilon t_n}}{A e^{-\varepsilon(t_n+T)}} = \varepsilon T_D = \varepsilon \frac{2\pi}{\omega_D}. \quad (1.75)$$

Отсюда с учетом (1.74)

$$\varepsilon = \frac{\delta_{л}}{2\pi} \omega_D = \frac{\psi}{4\pi} \omega_D = \frac{\gamma_{н}}{2} \omega_D. \quad (1.76)$$

В учебном пособии [4] показано, что вместо выражения (1.69) можно записать

$$\omega_D = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta_{л}}{2\pi}\right)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_{н}}{2}\right)^2}}. \quad (1.77)$$

Так как для строительных конструкций (сооружений) коэффициенты

$\delta_{\text{л}}, \psi, \gamma_{\text{н}}$ малы (см. приведенные выше значения ψ для различных конструкций), то

$$\left(\frac{\delta_{\text{л}}}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2 = \left(\frac{\gamma_{\text{н}}}{2}\right)^2 \ll 1 \quad (1.78)$$

и вторыми слагаемыми под знаком корня в знаменателе выражений (1.77) можно пренебречь по сравнению с единицей. Тогда для строительных конструкций (сооружений) получаем:

$$\omega_D \approx \omega; \quad v_D \approx v; \quad T_D \approx T. \quad (1.79)$$

В дальнейшем такая приближенная замена частот и периодов затухающих колебаний частотами и периодами незатухающих колебаний для строительных конструкций сделана во всех используемых далее формулах.

Скорректированный коэффициент затухания Фойгта ε с учетом (1.76) и (1.79) будем представлять в виде [16]:

$$\varepsilon = \zeta \omega, \quad (1.80)$$

где ζ – коэффициент демпфирования, который также как коэффициенты $\delta_{\text{л}}, \psi, \gamma_{\text{н}}$ является независимым от частоты колебаний и может быть представлен любым из равенств:

$$\zeta = \frac{\delta_{\text{л}}}{2\pi} = \frac{\psi}{4\pi} = \frac{\gamma_{\text{н}}}{2}. \quad (1.81)$$

Пример 1. Определим круговую частоту собственных колебаний затухающих колебаний системы с одной степенью свободы в виде, представленном на рис. 1.1, а, предполагая, что упругая линейно-деформируемая балка является железобетонной.

Для определения искомой величины воспользуемся вторым равенством в (1.77). Значение коэффициента поглощения энергии $\psi \approx 0.56$ возьмем из справочника [14]. Тогда

$$\omega_D = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{0.56}{4 \cdot 3.14}\right)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + 0.002}} \approx \omega.$$

Пример наглядно подтверждает выражения (1.78) и (1.79). Круговая собственная частота ω незатухающих колебаний была получена в примере 1 подраздела 1.1.

Пример 2. Для системы с одной степенью свободы, рассмотренной в предыдущем примере (см. рис. 1.1, а) требуется определить перемещение точечной массы в некоторый момент времени $t = \tau + t_k$ при условии, что свободные колебания системы начались от мгновенного вертикального импульса, приложенного к точечной массе: 1) в момент времени $t = 0$ (рис. 1.16, а); 2) в момент времени $t = \tau$ (рис. 1.16, б).

Вариант с импульсом при $t = 0$ (см. рис. 1.16, а). Ударный импульс представим в виде $J_p = m u^{\text{оо}}$, где $u^{\text{оо}}$ – начальная скорость движения массы. Тогда из (1.16) получим:

$$u_{t=0} = u^{\text{оо}} = 0; \quad \dot{u}_{t=0} = u^{\text{оо}} = J_p / m.$$

Используя эти начальные условия движения массы для определения постоянных величин A_1 и A_2 в выражении перемещения массы в виде (1.65), из (1.68) с учетом (1.79) найдем:

$$A_1 = u^0 = 0; \quad A_2 = u^{00} / \omega_D = J_p / m\omega_D = J_p / m\omega.$$

При этом из (1.65) получим следующее выражение для определения искомого перемещения массы:

$$u(t) = \frac{J_p}{m\omega} e^{-\varepsilon t} \sin \omega t.$$

Графически изменение перемещения массы при свободных затухающих колебаниях после воздействия импульса в варианте 1 показано на рис. 1.16, а.

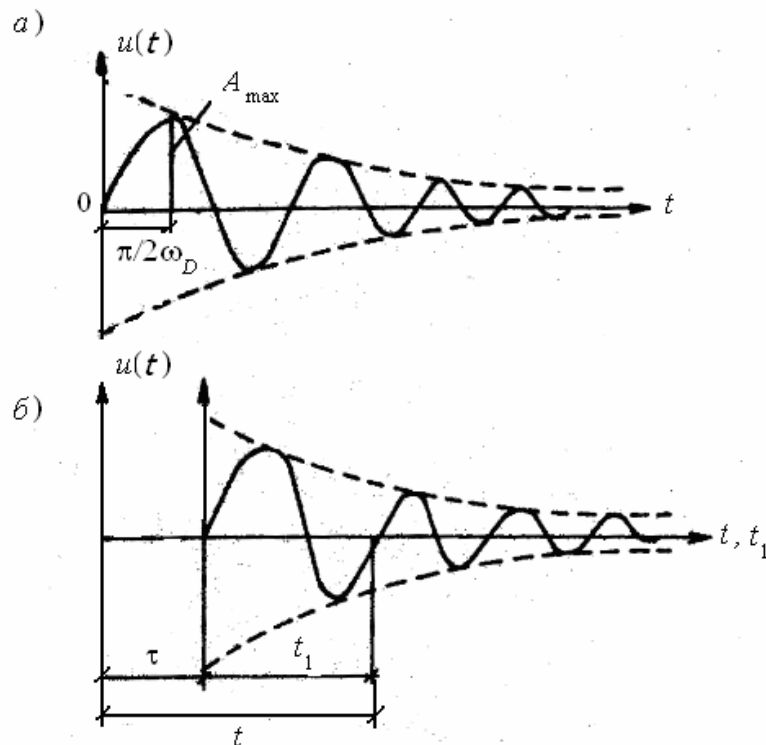


Рис. 1.16

Вариант с импульсом при $t = \tau$ (см. рис. 1.16, б). Для получения решения в этом варианте введем новую переменную $t_1 = t - \tau$. Поскольку τ некоторый фиксированный момент времени, а t и t_1 переменные величины, то $du/dt_1 = du/dt$ и $d^2u/dt_1^2 = d^2u/dt^2$. Это означает, что уравнение свободных колебаний (1.62) и его решение (1.65) после ввода новой переменной остаются без изменения. Только в этих выражениях функция $u(t)$ и ее производные по t заменятся соответственно на функцию $u(t_1)$ и ее производные по t_1 . Тогда с учетом равенства $t_1 = t - \tau$ получим

$$u(t_1) = \frac{J_p}{m\omega} e^{-\varepsilon t_1} \sin \omega t_1 \quad \text{или} \quad u(t - \tau) = \frac{J_p}{m\omega} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau).$$

График этой функции изображен на рис. 1.16, б. Он представляет собой график от импульса в момент времени $t = 0$ (см. рис. 1.16, а), но сдвинутый по времени на величину τ .

Пример 3. Как было показано выше (см. (1.79) и пример 1), учет силы неупругого (по Фойгту – вязкого) сопротивления при колебаниях строительной конструкции по расчетной схеме с одной степенью свободы практически не влияет на частоту и период собственных колебаний, которые поэтому принимаются равными соответствующим величинам при незатухающих колебаниях.

Основное влияние сила неупругого сопротивления оказывает на значения перемещений массы, в том числе на амплитуды колебаний (см. рис. 1.15 и рис. 1.16).

Оценим в зависимости от времени интенсивность затухания амплитуд колебаний массы m в расчетной схеме железобетонной балки, рассмотренной в предыдущем примере ($\psi \approx 0.56$), при свободных колебаниях.

Из приведенной в примере 2 формулы для определения перемещения точечной массы при свободных затухающих колебаниях, вызванных импульсом J_p в начальный момент времени $t = 0$ (см. пример 2 и рис. 1.16, а), видно, что амплитуда затухающих колебаний имеет максимальное значение в момент времени $t = t_1 = \pi/2\omega$, когда $\sin \omega t_1 = 1$. При этом в указанной формуле будем иметь

$$-\varepsilon t_1 = \frac{\psi \omega}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{2\omega} = -\frac{0.56}{8} = -0.07 \text{ и } A_{\max} = \frac{J_p}{m\omega} e^{-\varepsilon t_1} = \frac{J_p}{m\omega} e^{-0.07} = 0.93 \frac{J_p}{m\omega}.$$

Определим, во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний A_{\max} через 5 периодов после максимальной амплитуды. С этой целью в формуле для перемещения массы примем

$$t = t_1 = \frac{\pi}{2\omega} + 5T = \frac{\pi}{2\omega} + 5 \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 10.5 \frac{\pi}{\omega}.$$

Тогда получим

$$-\varepsilon t_1 = \frac{\psi \omega}{4\pi} \cdot \frac{10.5\pi}{\omega} = -\frac{0.56 \cdot 10.5}{4} = -1.47 \text{ и } A_{t_1} = \frac{J_p}{m\omega} e^{-\varepsilon t_1} = \frac{J_p}{m\omega} e^{-1.47} = 0.23 \frac{J_p}{m\omega}.$$

Таким образом, через 5 периодов после появления максимальной амплитуды затухающих свободных колебаний балки получим амплитуду меньшую, примерно, в 4 раза, максимальной.

Графически (рис. 1.17) это продемонстрировано с помощью программы **Mathcad** при $(J_p / m\omega) = 1$, $\omega = 72.08$ и $\psi = 0.56$.

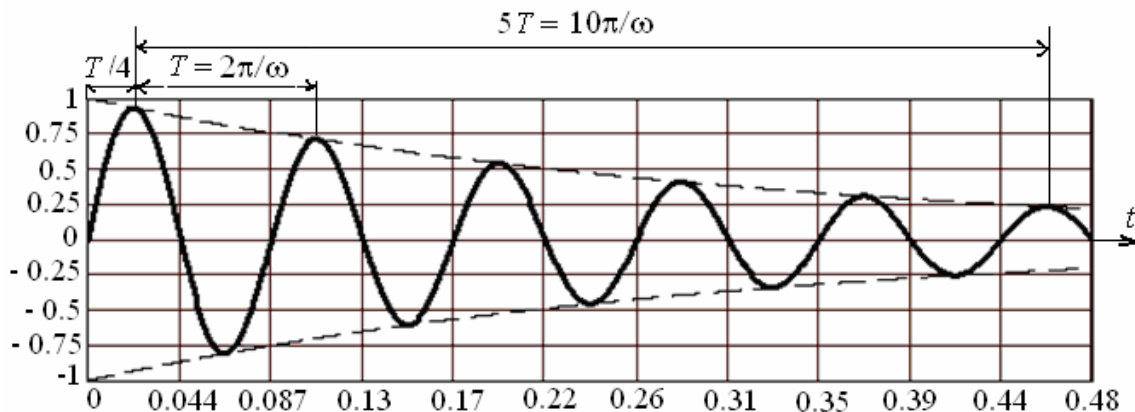


Рис. 1.17

Учащимся рекомендуется воспользоваться этой простой для пользователя программой и исследовать влияние коэффициента ψ на интенсивность затухания амплитуд колебаний.

1.3. Вынужденные колебания при произвольном силовом воздействии

Рассмотрим действие на точечную массу системы с одной степенью свободы (рис. 1.18, а) произвольной силы $P(t)$, графическое изменение которой во времени изображено на рис. 1.18, б [7].

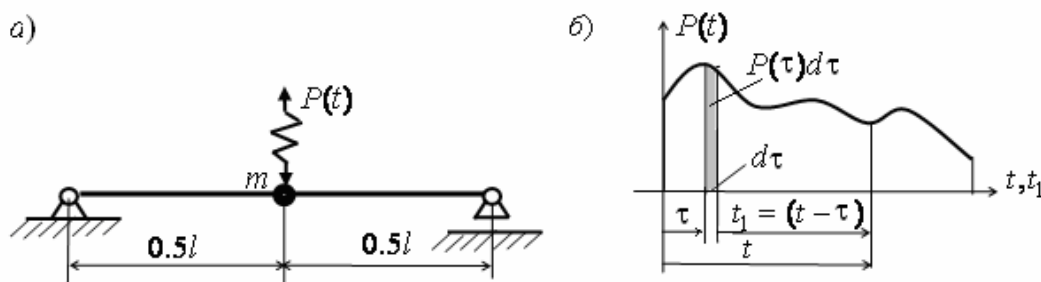


Рис. 1.18

Уравнение движения точечной массы может быть представлено как уравнение ее равновесия в любой момент времени под действием возмущающей силы $P = P(t)$, упругой силы $K = K(t)$, силы неупругого сопротивления $R_n = R_n(t)$ и силы инерции $J = J(t)$, которая в соответствии с принципом Даламбера также считается приложенной к массе:

$$J + R_n + K + P = 0. \quad (1.82)$$

С учетом (1.4), (1.6), (1.53) это уравнение имеет вид

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P. \quad (1.83)$$

При составлении уравнения движения вторым способом (как выражения для определения перемещения упругой системы в месте расположения точечной массы под действием заданной возмущающей силы, силы инерции и силы неупругого сопротивления), получим:

$$u = \delta(P + I + R_n); \quad (1.84)$$

$$u = \delta(P - m\ddot{u} - c\dot{u}) \text{ или } \delta \cdot m\ddot{u} + \delta \cdot c\dot{u} + u = \delta \cdot P. \quad (1.85)$$

Также как и при свободных колебаниях, уравнения (1.83) и (1.85) приводятся к одному типу:

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + \omega^2 u = P/m, \quad (1.86)$$

где собственная круговая частота незатухающих колебаний ω определяется из (1.14).

Примечание. Здесь, в обеих формах записи уравнения вынужденных колебаний, как и при свободных затухающих гармонических колебаниях с частотой $\omega_D \approx \omega$, сила неупругого сопротивления представлена в виде, который используется в гипотезе «вязкого трения» Фойгта. Вопрос о корректировании при вынужденных колебаниях коэффициента затухания колебаний ε с учетом экспериментальных и теоретических исследований рассмотрим позже.

Как известно, общее решение $u = u(t)$ неоднородного дифференциального уравнения (1.86) представляется как сумма общего решения $u_{\text{одн}} = u_{\text{одн}}(t)$ (1.65) однородного уравнения (1.62) и частного решения $u_{\text{ч}} = u_{\text{ч}}(t)$.

Частное решение найдем, воспользовавшись выражением, полученным выше (см. пример 2 подраздела 1.2), при действии на массу мгновенного импульса в момент времени τ (см. рис. 1.16, б). Если взять возмущающий силовой импульс бесконечно малой величины $dJ_p = P(\tau)d\tau$ (см. рис. 1.18, б), то от него получим в любой момент времени t бесконечно малое перемещение:

$$du(t) = \frac{dJ_p}{m\omega} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) = \frac{P(\tau)d\tau}{m\omega} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau). \quad (1.87)$$

Просуммируем действие всех импульсов от $\tau = 0$ до $\tau = t$. В результате получим частное решение в виде *интеграла Дюамеля*

$$u_{\text{ч}}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau. \quad (1.88)$$

При нулевых начальных условиях движения (1.16) постоянные A_1 и A_2 в решении (1.65) однородного уравнения (1.62) будут равны нулю и общее решение уравнения (1.86) будет равно частному решению в виде (1.88): $u(t) = u_{\text{ч}}(t)$.

Вопрос о вычислении интеграла Дюамеля рассмотрим при конкретных динамических воздействиях, т.е. при конкретном виде заданной функции $P(t)$.

1.4. Действие гармонической возмущающей силы

Рассмотрим вариант возмущающей нагрузки в виде $P(t) = P_0 \sin \theta t$, где P_0 и θ – соответственно амплитуда и круговая частота возмущающей силы.

Решение этой часто встречающейся инженерной задачи рассмотрено в различных учебных пособиях, учебниках и справочниках по динамике сооружений, например в [4, 7, 9 - 14] и т. д.

Здесь рассмотрим только результат решения при таких значениях t , при которых *свободные колебания, вызванные начальными условиями движения, а также и сопровождающие свободные колебания, связанные с их возмущением*

при начале действия возмущающей силы, уже практически затухли, и процесс вынужденных колебаний принял установившийся гармонический характер.

Перемещение точечной массы при установившихся колебаниях

Представим найденное в результате решения перемещение точечной массы в момент времени t в виде:

$$u(t) = u_{\text{ст}}\beta(t), \quad (1.89)$$

где

$$u_{\text{ст}} = \frac{P_o}{m\omega^2} = P_o \cdot \delta; \quad (1.90)$$

$$\beta(t) = \omega \int_0^t \sin \theta \tau \cdot e^{-\varepsilon(t-\tau)} \cdot \sin \omega(t-\tau) \cdot d\tau = \beta \sin(\theta t - \alpha). \quad (1.91)$$

Здесь:

- коэффициент податливости $\delta = 1/m\omega^2$ известен из (1.13);
- $u_{\text{ст}}$ является статическим прогибом балки в месте расположения массы от статически приложенной силы P_o ;
- $\beta(t)$ представляет собой *динамический коэффициент* (используется также название *коэффициент динамичности*), который характеризует отношение динамического перемещения $u(t)$ (1.89) к статическому перемещению $u_{\text{ст}}$ (1.90).

Подставив (1.91) в (1.89), получим выражение для динамического перемещения массы в виде установившихся гармонических колебаний:

$$u(t) = A \sin(\theta t - \alpha), \quad (1.92)$$

где A является амплитудой установившихся колебаний, равной максимальному значению динамического перемещения $u(t)$, когда $\sin(\theta t + \varphi) = \pm 1$:

$$A = \max_t |u(t)| = u_{\text{ст}}\beta. \quad (1.93)$$

При этом

$$\beta = \max_t |\beta(t)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2})^2 + 4\varepsilon^2 \frac{\theta^2}{\omega^4}}} \quad (1.94)$$

представляет собой динамический коэффициент, равный максимальному значению величины $\beta(t)$ (1.91).

При рассмотрении задачи о свободных гармонических затухающих колебаниях с частотой $\omega_D \approx \omega$ коэффициент ε (1.63), полученный при

использовании гипотезы «вязкого трения» Фойгта, был скорректирован и представлен в виде (1.80) с учетом (1.81).

При использовании выражений (1.80) и (1.81) вместо (1.94) можно записать:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\theta^2}{\omega^2})^2 + 4\varepsilon^2 \frac{\theta^2}{\omega^4}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\theta^2}{\omega^2})^2 + 4\zeta^2 \frac{\theta^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\theta^2}{\omega^2})^2 + \gamma_{\text{н}}^2 \frac{\theta^2}{\omega^2}}}. \quad (1.95)$$

Как видно из выражения (1.92), при установившихся гармонических колебаниях изменение перемещения $u(t)$ во времени происходят с частотой θ возмущающей силы $P(t) = P_0 \sin \theta t$, но имеют по отношению к ней сдвиг по фазе на величину α .

Иногда выражение (1.92) представляют в виде:

$$u(t) = A \sin(\theta t - \alpha) = A' \sin \theta t - A'' \cos \theta t, \quad (1.96)$$

где $A' = A \cos \alpha$; $A'' = A \sin \alpha$ – составляющие полной амплитуды A вынужденных установившихся гармонических колебаний. В связи с этим дополнительно рассмотрим вопрос о получении формул для вычисления A, A', A'' и α .

Выражение для перемещения массы в виде правой части равенства (1.96) и выражение для силы в виде $P(t) = P_0 \sin \theta t$ подставляют в уравнение вынужденных колебаний (1.86). Тогда уравнение (1.86) можно записать в виде:

$$L \sin \theta t + N \cos \theta t = (P_0 / m) \sin \theta t + 0 \cdot \cos \theta t,$$

где

$$L = (\omega^2 - \theta^2)A' + 2\varepsilon\theta A''; \quad N = 2\varepsilon\theta A' - (\omega^2 - \theta^2)A''.$$

Приравнявая коэффициенты при синусе и косинусе преобразованного уравнения, получим систему двух уравнений для определения A' и A'' :

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \theta^2)A' + 2\varepsilon\theta A'' &= (P_0 / m); \\ 2\varepsilon\theta A' - (\omega^2 - \theta^2)A'' &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A' &= P_0(\omega^2 - \theta^2) / m\Delta; \quad A'' = P_0 2\varepsilon\theta / m\Delta; \\ \Delta &= (\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2. \end{aligned} \quad (1.97)$$

По аналогии с тем, как это было сделано при свободных колебаниях (см. (1.17) и рис. 1.3), выражение (1.96) связывают с вращением с равномерной угловой скоростью θ вектора $A' = A \cos \alpha$ и отстающего от него на угол $\pi/2$ вектора $A'' = A \sin \alpha$ (рис. 1.19) вокруг оси, проходящей через точку 0 [13].

Направление вектора A'' выбрано таким, чтобы учесть знак минус в (1.96). Тогда, если спроектировать векторы A, A', A'' на ось X (см. рис. 1.19), получатся левая и правая

части равенства (1.96).

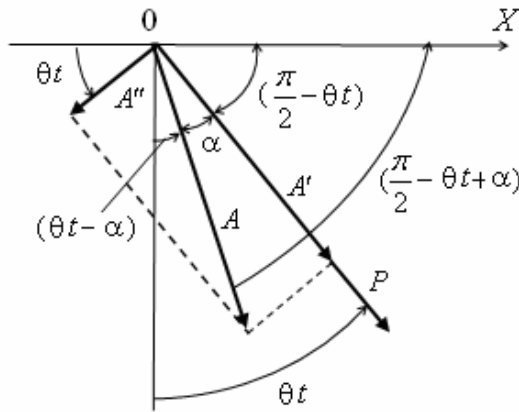


Рис. 1.19

Суммарная амплитуда A и тангенс угла α теперь определяются (см. рис. 1.19) из формул:

$$A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2} = u_{\text{ст}}\beta; \quad \text{tg}\alpha = \frac{A''}{A'} = \frac{2\varepsilon\theta}{(\omega^2 - \theta^2)}; \quad \alpha = \text{arctg}\left(\frac{2\varepsilon\theta}{(\omega^2 - \theta^2)}\right), \quad (1.98)$$

где формулы для определения $u_{\text{ст}}$ и β имеют соответственно вид (1.90) и (1.95).

Подставляя в (1.98) выражение (1.80) для ε с учетом (1.81) формулы для вычисления α можно представить в виде:

$$\alpha = \text{arc tg} \frac{2\varepsilon \frac{\theta}{\omega^2}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \text{arc tg} \frac{2\zeta \frac{\theta}{\omega}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \text{arc tg} \frac{\gamma_{\text{н}} \frac{\theta}{\omega}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}. \quad (1.99)$$

Вторая и третья формулы в (1.95) и (1.99) получились при использовании для корректировки коэффициента затухания колебаний ε в уравнении (1.86) выражения (1.80). В ряде работ, список которых можно посмотреть в работах [4, 10], показано, что величина ε при вынужденных установившихся колебаниях с частотой θ возмущающей силы зависит не только от величины собственной частоты ω , но и от частоты θ и при корректировке величины ε вместо формулы (1.80) должна использоваться формула:

$$\varepsilon = \zeta(\omega^2 / \theta). \quad (1.100)$$

При этом формулы (1.95) и (1.99) с использованием коэффициента неупругого сопротивления $\gamma_{\text{н}}$ будут иметь вид:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma_{\text{н}}^2}}; \quad \alpha = \text{arc tg} \frac{\gamma_{\text{н}}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}. \quad (1.101)$$

Анализ изменения динамического коэффициента β и амплитуды A .

Явление резонанса

Рассмотрим два варианта:

1. Неупругое сопротивление колебаниям отсутствует (например, в (1.95), (1.99) и (1.101) $\gamma_H = 0$);

2. Имеется реальное неупругое сопротивление колебаниям (заданное, например, в виде коэффициента γ_H).

Вариант 1 ($\gamma_H = 0$). Тогда (см. (1.91), (1.99), (1.101))

$$u(t) = A \sin \theta t, \quad (1.102)$$

$$\beta = \left| \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} \right|. \quad (1.103)$$

При этом (см. (1.93)) $A = u_{ст} \beta$.

Проследим в этом варианте изменение абсолютных значений (модулей) β (1.103) и A (1.93) в зависимости от изменения отношения θ/ω (рис. 1.20) [7].

Графику изменения значений модуля β при $\gamma_H = 0$ (1.93) соответствуют следующие ординаты (см. рис.1.20):

θ/ω	0.25	0.5	0.75	0.875	1.25	$\sqrt{2}$	1.5	1.75	2	2.5
β	1.07	1.33	2.29	4.29	3.76	1	0.8	0.48	0.33	0.19

При увеличении отношения θ/ω от 0 до 1 происходит увеличение модуля динамического коэффициента β . Интенсивность возрастания увеличивается с приближением отношения θ/ω к 1. Аналогично изменяется и амплитуда A (1.93).

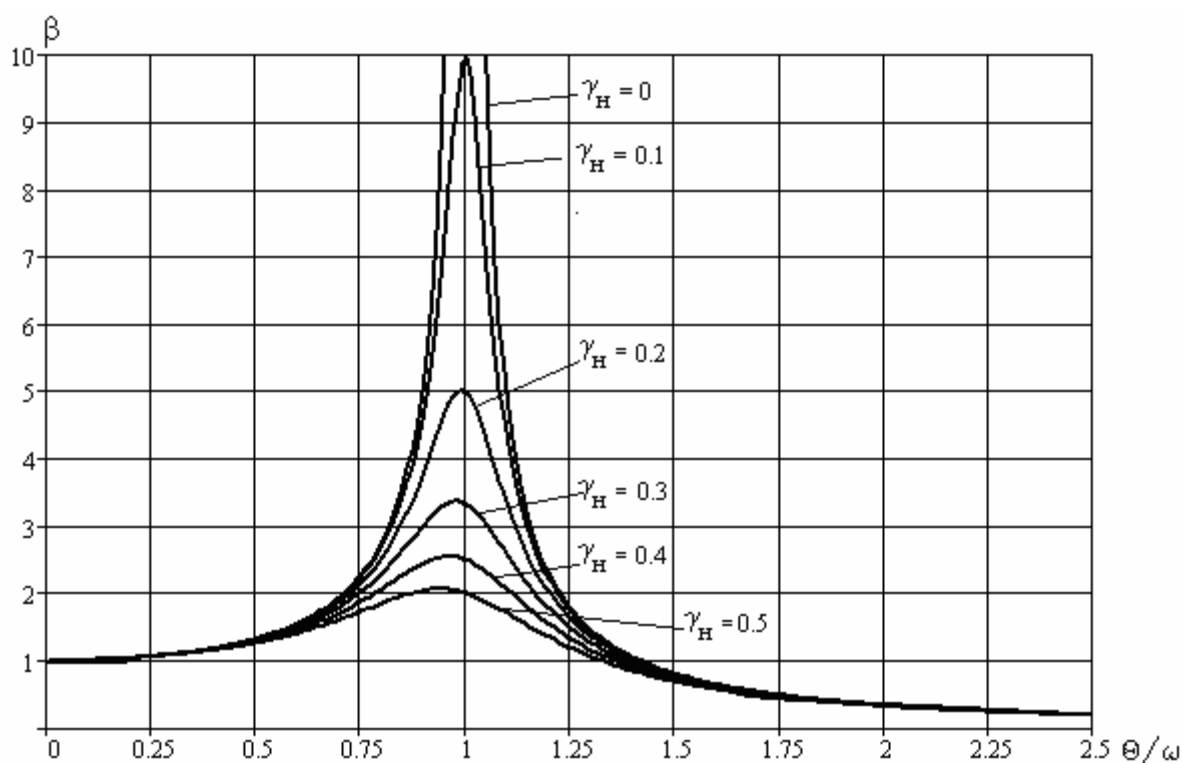


Рис. 1.20

При увеличении отношения θ/ω от 1 до ∞ происходит уменьшение значений модуля динамического коэффициента β и амплитуды A от ∞ до 0 (сначала быстрое, затем

медленное).

Отметим в таблице, приведенной ниже данного абзаца, характерные значения модулей β и A при некоторых характерных отношениях θ/ω . Обратим внимание на то, что при отношении $\theta/\omega = \sqrt{2} = 1.41$ значение модуля динамического коэффициента равно единице, а при $\theta/\omega > \sqrt{2}$ модуль динамического коэффициента β будет меньше единицы, и модуль амплитуды установившихся колебаний $A = u_{ст}\beta$ будет меньше модуля статического прогиба $u_{ст}$ от силы P_0 .

1	$\theta/\omega = 0$	$\beta = 1$	$A = u_{ст}$
2	$\theta/\omega = 1$	$\beta = \infty$	$A = \infty$
3	$\theta/\omega = \sqrt{2} = 1.41$	$\beta = 1$	$A = u_{ст}$
4	$\theta/\omega = \infty$	$\beta = 0$	$A = 0$

В реальных сооружениях значений $\beta = \infty$ и $A = \infty$ быть не может. Так что вариант 1 ($\gamma_n = 0$) является чисто теоретическим. Но даже, если $\gamma_n = 0$, величины β и A могут стать бесконечно большими только за бесконечно большой промежуток времени. Это показано в работе [11], где для рассматриваемого варианта приведено решение уравнения движения, когда $\theta/\omega = 1$:

$$u(t) = \frac{P_0}{2m\omega} t \cdot \sin \omega t. \quad (1.104)$$

При наших обозначениях это выражение имеет вид (1.89), где

$$\beta(t) = 0.5\omega t \cdot \sin \omega t. \quad (1.105)$$

Графически изменение $\beta(t)$ (1.105), а значит и $u(t)$ (1.89), в зависимости от времени показано на рис. 1.21.

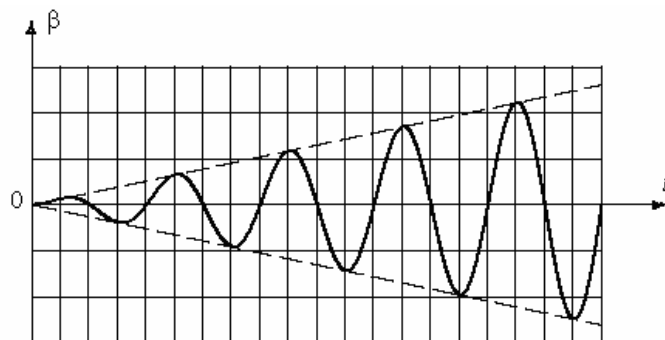


Рис. 1.21

Как видно, с увеличением времени t происходит неограниченное возрастание динамического коэффициента и амплитуд колебаний, а сам процесс колебаний, когда $\theta/\omega = 1$, имеет вид постепенной раскачки рассматриваемой упругой системы с одной степенью свободы. Ниже приведены значения амплитуд колебаний, полученные по формуле (1.104) при указанных в таблице значениях t :

t	$\pi/2\omega$	$3\pi/2\omega$	$5\pi/2\omega$	$7\pi/2\omega$
$A(t) = 0.5u_{ст}\omega t$	$\pi u_{ст}/4$	$3\pi u_{ст}/4$	$5\pi u_{ст}/4$	$7\pi u_{ст}/4$

Совпадение частоты θ возмущающей силы с собственной частотой ω незатухающих колебаний системы и возникающее при этом явление раскачки и возрастания амплитуд колебаний называется *резонансом*.

При очень небольшом различии в величинах θ и ω возникают колебания с явлением *биения* [10, 14]. Это состояние сооружения также является резонансным.

Зона значений отношения θ/ω , в которой даже небольшое изменение отношения θ/ω приводит к значительному изменению величин β и A , называется *резонансной зоной*.

Ширина резонансной зоны (по оси значений θ/ω) условна и зависит от критериев, принимаемых при ее определении (например, критерия о допустимых значениях величин β и A или соответствующих им величин перемещений, усилий и напряжений при расчете рассматриваемого упругого сооружения на жесткость и прочность). Различные приближенные оценки ширины этой зоны даны, например, в учебных пособиях [8, 10].

Из соображений допустимости значений искомых величин может быть установлено и время $t_{доп}$ безопасной для сооружения раскачки при резонансе.

Вариант 2 ($1 \gg \gamma_n > 0$). При наличии неупругого сопротивления материала сооружения (при конкретном значении характеристики затухания) и при отношении $\theta/\omega = 1$ динамический коэффициент β и амплитуда колебаний A уже не будут бесконечно большими. Их конечные значения определяются соответственно из выражений (1.106) после подстановки в них заданного значения γ_n .

$$\beta = \frac{1}{\gamma_n}; \quad A = \frac{u_{ст}}{\gamma_n} = \frac{P_o \cdot \delta}{\gamma_n} = \frac{P_o}{m\omega^2} \cdot \frac{1}{\gamma_n} \quad (1.106)$$

Как видно (см. рис. 1.20), изменение значения γ_n в выражении β (1.101) заметно влияет на изменение β и A только в резонансной зоне, т.е. при значениях отношения θ/ω близком к $\theta/\omega = 1$.

Вне резонансной зоны, точнее при удалении отношения θ/ω (влево и вправо на рис. 1.20) от значения $\theta/\omega = 1$, изменение значения γ_n в выражении β мало влияет на изменение значение динамического коэффициента и, следовательно, амплитуды колебаний.

Анализ изменения величины сдвига по фазе α искомых величин по отношению к возмущающей силе $P(t)$

Очевидно, что при отсутствии неупругого сопротивления колебаниям, когда, например, $\gamma_n = 0$, значение $\alpha = 0$ (1.99). Сила $P(t)$ и прогиб $u(t)$ в этом варианте изменяются синхронно по закону $\sin \theta t$ без сдвига по фазе.

При $\theta/\omega = 1$ и любых значениях $\gamma_n > 0$ получим $\alpha = \pi/2$. Такой сдвиг по фазе между силой и перемещением показывает, что при достижении силой $P(t) = P_o \sin \theta t$:

- максимального значения P_o (например, в момент времени $t = T_o/4$, когда

$\sin \theta t = \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4}\right) = 1$) перемещение движущейся массы будет равно нулю

$$u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

- нулевого значения (например, в момент времени $t = T_0/2$, когда $\sin \theta t = \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{2}\right) = 0$) перемещение движущейся массы будет равно максимальному значению $u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = A$.

Во всех этих выражениях величина $T_0 = 2\pi/\theta$ является периодом установившихся гармонических колебаний с частотой θ возмущающей силы.

При $\theta/\omega < 1$ ($\theta/\omega > 1$) и любых значениях $\gamma_n > 0$ получим $\alpha < \pi/2$ ($\alpha > \pi/2$).

Характер изменения величины α в зависимости от изменения отношения θ/ω при некоторых заданных постоянных значениях $\gamma_n > 0$ показан на рис. 1.22.

Чем меньше значение γ_n , тем сильнее изменяется функция α в зоне резонанса. В пределе (при $\gamma_n = 0$ и при $\theta/\omega = 1$) происходит скачкообразное изменение α : от нулевого значения при $\theta/\omega < 1$ до π (штриховая линия на рис. 1.22).

При $\alpha = \pi$ возмущающая сила $P(t) = P_0 \sin \theta t$ и перемещение массы $u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t - \alpha\right)$ находятся в противофазе. Это будет, например, когда $t = T_0/4$, т. к. в этот момент времени $P(t) = P_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4}\right) = P_0$ и $u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4} - \pi\right) = -A$.

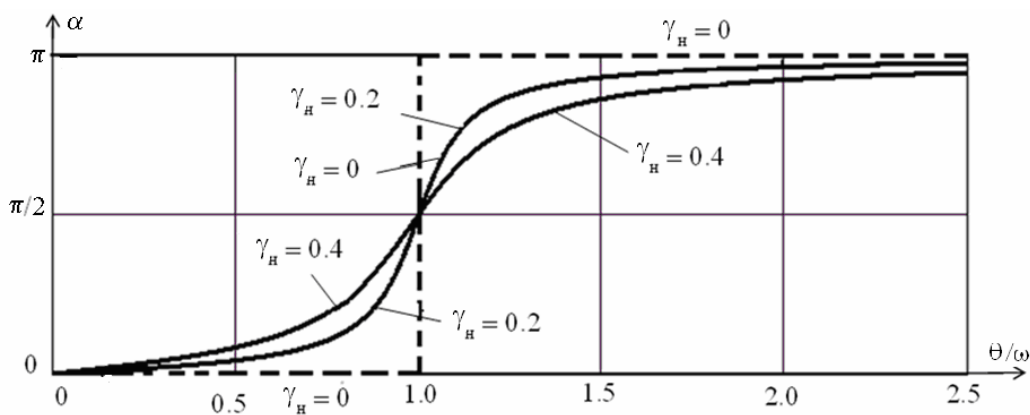


Рис. 1.22

Суммарная сила $S(t)$ при установившихся гармонических колебаниях и ее синусоидальная и косинусоидальная составляющие

Полученное решение (1.92) уравнения (1.86) вынужденных колебаний при установившихся гармонических колебаниях под действием нагрузки

$P(t) = P_o \sin \theta t$ сопоставим с уравнением движения (1.84), которое, введя обозначение суммарной силы $S(t) = P(t) + J(t) + R_H(t)$, представим в виде (1.84)

Очевидно, что можно записать равенство

$$S(t) = S_o \sin(\theta t - \alpha), \quad (1.107)$$

где

$$S_o = A/\delta = (u_{ct} \cdot \beta)/\delta = (P_o \cdot \delta \cdot \beta)/\delta = P_o \cdot \beta \quad (1.108)$$

является амплитудой суммарной силы $S(t)$.

Определив амплитуду S_o суммарной силы, можно определить максимальный прогиб балки

$$A = S_o \cdot \delta = \frac{S_o}{m\omega^2} \quad (1.109)$$

и определить опорные реакции балки и усилия в ее сечениях.

Иногда при решении задачи об установившихся гармонических колебаниях определяется не полная амплитуда S_o суммарной силы $S(t)$, а амплитуды S' и S'' синусоидальной и косинусоидальной составляющих суммарной силы в соответствии с представлением ее в виде

$$S(t) = S_o \sin(\theta t - \alpha) = S' \sin \theta t - S'' \cos \theta t. \quad (1.110)$$

Формулы для вычисления амплитуд S' и S'' составляющих сил, а также полной амплитуды S_o , можно получить из имеющихся формул (1.97) и (1.98) для соответствующих им амплитуд A' и A'' составляющих перемещений, а также полной амплитуды A , с учетом представления решения (1.92) в виде (1.96):

$$u(t) = A \sin(\theta t - \alpha) = A' \sin \theta t - A'' \cos \theta t.$$

Преобразуем первую формулу (1.101) и формулы (1.97), представив их с учетом (1.96) и (1.110) в виде:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + \gamma_H^2}}, \quad \chi = \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right).$$

$$A' = \frac{P_o}{m\omega^2} \cdot \beta^2 \cdot \chi = \frac{S'}{m\omega^2} = S' \cdot \delta; \quad A'' = \frac{P_o}{m\omega^2} \cdot \beta^2 \cdot \gamma_H = \frac{S''}{m\omega^2} = S'' \cdot \delta.$$

где

$$S' = \omega^2 m A' = P_o \cdot \beta^2 \cdot \chi; \quad S'' = \omega^2 m A'' = P_o \cdot \beta^2 \cdot \gamma_H. \quad (1.111)$$

В последних выражениях для A' и A'' учтено, что $(1/m\omega^2) = \delta$.

Полная амплитуда A перемещений $u(t)$ (1.96) (см. рис. 1.18,а) при установившихся гармонических колебаниях может быть получена по формуле

(1.98) а так же по формуле (1.109), где

$$S_0 = \sqrt{(S')^2 + (S'')^2}. \quad (1.112)$$

Наибольшее значение амплитуда S_0 суммарной силы имеет, когда при решении задачи не учитывается сила неупругого сопротивления (принимается условие, что $\gamma_n = 0$). Тогда силы $P(t)$ и $J(t)$ действуют синхронно (синфазно), без сдвига по фазе ($\alpha = 0$), и сила неупругого сопротивления отсутствует.

Усилия и напряжения в балке при установившихся колебаниях

Вариант 1 ($\gamma_n = 0$). Поскольку в этом варианте изменение во времени возмущающей силы и силы инерции происходит синхронно, то максимальных значений эти силы и суммарная сила (1.110) достигают в одинаковые моменты времени, например, когда $t = T_0 / 4$ (при этом $\sin \theta t = 1$).

Для определения максимальных значений во времени любых динамических величин при установившихся гармонических колебаниях без учета сил неупругого сопротивления рекомендуется такая последовательность расчета:

1. Выполняется расчет балки от действия статической силы P_0 (рис. 1.23, а): определяются опорные реакции $V_A^0 = V_B^0 = P_0 / 2$, прогиб балки $u_{ст} = P_0 \cdot \delta$; строятся эпюры изгибающих моментов и поперечных сил; определяются нормальные и касательные напряжения в интересующих расчетчика сечениях балки.

На рис. 1.23 приведены: а) эпюра $M^0 = M_{ст}$ с указанием максимальной ординаты в среднем сечении балки, когда сила P_0 направлена вниз; б) эпюра нормальных напряжений σ^0 с указанием ординат $\sigma_{1,2}^0 = \pm M_{max}^0 / W$ на нижней (1) и верхней (2) сторонах сечения балки с моментом сопротивления W .

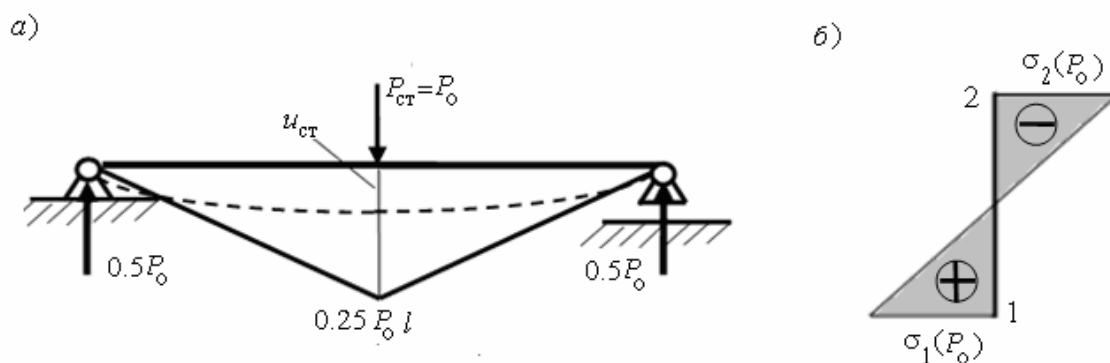


Рис. 1.23

2. Подсчитывается динамический коэффициент β , например по формуле (1.103).

3. Определяются амплитудные значения следующих величин в среднем сечении балки:

– перемещений массы $A = u_{\text{ст}}\beta = (P_0 \cdot \beta) / m\omega^2$;

– суммарной силы $S_0 = P_0 + J_0 = P_0 \cdot \beta$, действующей на балку в месте расположения массы.

– ординаты эпюры изгибающих моментов $M_{\text{д}} = M_{\text{ст}} \cdot \beta$, где $M_{\text{ст}}$ – соответствующая ордината эпюры изгибающих моментов от действия силы P_0 (см. рис.1.23, а);

– ординаты эпюры нормального напряжения в точках 1 и 2 поперечного сечения балки $\sigma_{1,2} = \pm(\sigma_{1,2}^0 \cdot \beta)$, где $\sigma_{1,2}^0$ – максимальная ордината эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении балки от действия силы P_0 (см. рис. 1.23, б).

Вариант 2 ($1 \gg \gamma_{\text{н}} > 0$). В этом варианте при определении амплитудных значений усилий и напряжений обычно поступают следующим образом:

1. Определяем динамический коэффициент β , например, по формуле (1.101).

2. Затем по формулам (1.111) определяем амплитуды S' и S'' синусоидальной и косинусоидальной составляющих суммарной силы.

3. По формулам (1.97) определяем амплитуды A' и A'' перемещений массы, соответствующих действию на балку сил S' и S'' .

4. Отдельно от действия амплитудных значений S' и S'' синусоидальной и косинусоидальной составляющих суммарной нагрузки строим для балки необходимые эпюры усилий. Ограничившись в балке рассмотрением только изгибающих моментов, построим эпюры M' и M'' и определим максимальные амплитуды моментов в сечении балки под силой: M'_{max} и M''_{max} .

5. Поскольку амплитудные значения сил S' и S'' не связаны друг с другом временным фактором, все суммарные амплитудные значения искомых величин (S_0 – полной амплитуды суммарной силы $S(t)$, A – полной амплитуды перемещения массы $u(t)$, M_{max} – полной амплитуды изгибающего момента в среднем сечении балки и т. д.) определяются по формулам вида (1.98) для амплитуды перемещения и (1.112) для амплитуды суммарной силы. Поэтому полная амплитуда изгибающего момента в среднем сечении балки определится по формуле:

$$M_{\max} = \sqrt{(M'_{\max})^2 + (M''_{\max})^2}. \quad (1.113)$$

Аналогичным способом определяются максимальные значения и других искомых усилий и напряжений.

Пример 1. Рассмотрим железобетонную балку, на которой в середине ее пролета расположен электродвигатель (рис. 1.24).

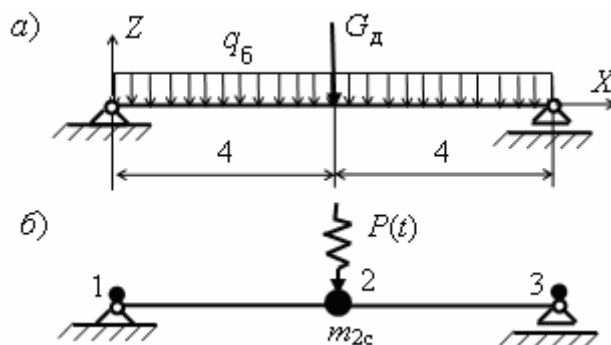


Рис. 1.24

Поставим задачу расчета балки от совместного действия статической нагрузки в виде собственного веса балки и веса двигателя а также от динамического воздействия на балку вертикальной составляющей $P(t) = P_0 \sin \theta t$ центробежной силы (рис. 1.24, б), возникающей при вращении ротора электродвигателя (рис. 1.25).

На заданной схеме балки (рис. 1.24, а) ее вес представлен в виде равномерно распределенной нагрузки, а вес электромотора – в виде сосредоточенной силы.

Расчетная схема для динамического расчета балки представляется в виде системы с одной степенью свободы (см. рис. 1.24, б). Такая расчетная схема получилась в результате представления балки в виде системы двух стержневых конечных элементов с узлами на опорах и по середине балки, равномерно распределенная масса которых заменена двумя равными массами по концам элементов (см. пример 4 в подразделе 1.1).

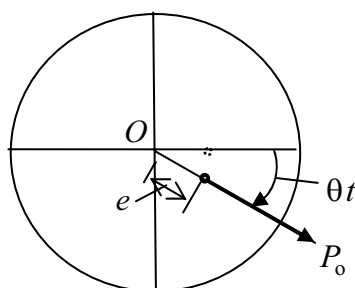


Рис. 1.25

Амплитуда центробежной силы определяется по формуле $P_0 = \theta^2 m_p e = \theta^2 \cdot \frac{G_p}{g} \cdot e$, где e – эксцентриситет между центром массы ротора $m_p = G_p / g$ и его геометрической осью (см. рис. 1.25). В примере он принят равным 5 мм.

Уточним постановку задачи:

Требуется определить максимальный прогиб балки и максимальный изгибающий момент в ее среднем сечении:

от статической нагрузки в виде собственного веса балки и собственного веса электродвигателя;

от динамической нагрузки $P(t) = P_0 \sin \theta t$ при рассмотрении установившихся гармонических колебаний балки.

от суммарного действия статических и динамической нагрузок

Статический и динамический расчет выполним вручную и на ПК с помощью программы SCAD.

Статический расчет

Процедура статического расчета балки вручную и с помощью программы SCAD учащемуся хорошо известна [1, 2, 21-24], поэтому здесь не рассматривается. Приведем следующие результаты этих расчетов.

1. При загрузении 1 балки ее собственным весом:

1.1. Линейный вес балки (см. пример 4 в подразделе 1.1)

$$q_6 = (b \cdot h) \rho_6 \cdot g = (0.4 \cdot 0.6) \cdot 2.5 \cdot 9.81 = 5.886 \text{ кН/м} = 0.6 \text{ тс/м}.$$

1.2. Изгибающий момент в среднем сечении балки

$$M_{\text{ст}}(q_6) = q_6 l_6^2 / 8 = 0.6 \cdot 8^2 / 8 = 4.8 \text{ тс} \cdot \text{м} = 47.088 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

1.3. Прогиб балки в среднем сечении

$$u_{\text{ст}}(q_6) = \frac{1}{EI} \int_0^8 \overline{MM}_p dx = \frac{5}{384} \frac{q_6 l_6^4}{EI} = 0.00145 \text{ м} = 1.4 \text{ мм}.$$

При загрузении 2 балки собственным весом двигателя:

2.1. Сосредоточенная сила веса двигателя

$$G_d = m_d \cdot g = 1.5 \cdot 9.81 = 14.715 \text{ кН} = 1.5 \text{ тс}.$$

2.2. Изгибающий момент в среднем сечении балки

$$M_{\text{ст}}(G_d) = G_d l_6 / 4 = 1.5 \cdot 8 / 4 = 3 \text{ тс} \cdot \text{м} = 29.43 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2.3. Прогиб балки в среднем сечении (см. формулу (1.45) для прогиба от единичной силы δ)

$$u_{\text{ст}}(G_d) = \delta \cdot G_d = \frac{G_d \cdot l^3}{48EI} = \frac{14.715 \cdot (8)^3}{48 \cdot 3.00186 \cdot 10^7 \cdot 0.0072} = 0.0007 \text{ м} = 0.7 \text{ мм}.$$

3. Искомые величины при комбинации 1 статических загрузений 1 и 2:

$$M_{\text{ст}}(q_6 + G_d) = M_{\text{ст}}(q_6) + M_{\text{ст}}(G_d) = 4.8 + 3.0 = 7.8 \text{ тс} \cdot \text{м} = 76.718 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$u_{\text{ст}}(q_6 + G_d) = u_{\text{ст}}(q_6) + u_{\text{ст}}(G_d) = 1.4 \text{ мм} + 0.7 \text{ мм} = 2.1 \text{ мм}.$$

Динамический расчет вручную

1. Составляем расчетную схему балки для динамического расчета как системы с одной степенью свободы.

Представим балку как систему двух элементов типа 2 «Стержень плоской рамы» (по классификации стержневых элементов в программе SCAD [1, 2]) с узлами на опорах и в середине пролета (в месте расположения двигателя) и произведем замену линейной (удельной распределенной вдоль оси балки) массы балки $\mu_6 = A_6 \rho_6 = A_6 \frac{\gamma_6}{g} = \frac{q_6}{g}$ точечными массами (см. рис. 1.24, б).

Вес точечной массы на каждой опоре (см. рис. 1.24, б) равен $G_{16} = G_{36} = q_6 \cdot \frac{l_6}{4} = 0.6 \cdot \frac{8}{4} = 1.2 \text{ тс} = 11.772 \text{ кН}$. Вес точечной массы в среднем узле 2 в два раза больше: $G_{26} = q_6 \cdot \frac{l_6}{2} = 0.6 \cdot \frac{8}{2} = 2.4 \text{ тс} = 33.354 \text{ кН}$.

С учетом массы двигателя в узле 2 получим суммарную массу $m_{2c} = m_{2d} + m_{26} = (1.5 + 2.4) = 3.9 \text{ т}$ (см. рис. 1.24, б). Ее вес равен $G_{2c} = G_{2d} + G_{26} = 1.5 + 2.4 = 3.9 \text{ тс} = 38.259 \text{ кН}$.

2. Определяем амплитуду вертикальной составляющей центробежной силы (см. рис. 1.25).

2.1. Сначала для ротора с заданной частотой вращения в одну минуту $n = 500$, 1/мин, находим частоту вращения в одну секунду $f = n/60$, 1/с, а затем – угловую частоту вращения $\theta = 2\pi \cdot f$, 1/с, представляющую $2\pi \cdot$ циклов вращения в одну секунду [20]:

$$f = 500/60 = 8.33 \text{ 1/с}; \quad \theta = 6.28 \cdot 8.33 = 52.33 \text{ 1/с, рад/с}$$

Примечание. Иногда частоту вращения n, f, θ называют «числом оборотов» ротора соответственно за одну минуту, за одну секунду, за 2π секунд.

2.2. Затем находим амплитуду центробежной силы:

$$P_0 = (52.33)^2 \cdot \frac{0.3}{9.81} \cdot 0.005 \approx 0.42 \text{ тс} = 4.162 \text{ кН}.$$

3. По формуле (1.14) для любой системы с одной степенью свободы или (1.51) для заданной балки найдем угловую частоту свободных незатухающих колебаний полученной системы с одной степенью свободы (см. пример 4 в подразделе 1.1):

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m_{2c} \delta}} = \sqrt{\frac{g}{G_{2c} \delta}} = 6.928 \sqrt{\frac{g}{G_{2c}} \cdot \frac{EI}{l_6^3}} = 6.928 \sqrt{\frac{9.81}{3.9} \cdot \frac{3.06 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 6^3}{8^3 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 12}} = 72.08 \text{ 1/с, рад/с}.$$

4. Вычисляем по формуле (1.101) динамический коэффициент β для двух рассмотренных выше вариантов учета коэффициентов, характеризующих силу неупругого сопротивления материала балки при установившихся колебаниях:

Вариант 1. Коэффициент γ_n неупругого сопротивления колебаниям равен нулю:

$$\beta = \left| \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} \right| = \left| \frac{1}{1 - (52.33/72.08)^2} \right| = 2.11.$$

Вариант 2. Коэффициент γ_n неупругого сопротивления колебаниям принят в соответствии с (1.74) и со средним значением $\psi = 0.56$ коэффициента поглощения энергии колебаний для железобетонных балок (см. подраздел 1.2). Тогда: $\gamma_n = \psi/4 = 0.56/4 = 0.09$ и

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma_n^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (52.33/72.08)^2\right)^2 + (0.09)^2}} = 2.08.$$

Как видим, значение динамического коэффициента для железобетонной балки с достаточной для практических целей точностью может быть принято как в варианте 1, т. е. без учета влияния на него коэффициента затухания колебаний.

5. Вычислим амплитуды искомых величин для варианта 1 ($\gamma_n = 0$).

5.1. Амплитуды S' и S'' (1.111) составляющих суммарной силы $S(t)$ (1.110) и полная амплитуда S_o :

$$S' = (P_o + J_o) = P_o \cdot \beta = 0.42 \cdot 2.11 = 0.89 \text{ тс} = 8.731 \text{ кН};$$

$$S'' = 0.$$

$$S_o = \sqrt{(S')^2 + (S'')^2} = S' = 0.89 \text{ тс} = 8.731 \text{ кН}.$$

5.2. Амплитуда установившихся колебаний $A = (u_{ct}\beta) = (S_o \cdot \delta)$:

$$A = (0.89 \cdot 0.0005) = 0.0004 \text{ м} = 0.4 \text{ мм}.$$

Величина δ здесь получена пересчетом по прогибу $u_{ct}(G_d)$, подсчитанному выше от действия силы веса двигателя $G_d = 1.5 \text{ тс}$: $\delta = (0.0007/1.5) \approx 0.0005 \text{ м}$.

5.3. Амплитуда изгибающего момента в среднем сечении балки

$$M_d = M_{ct} \cdot \beta = (P_o \cdot l_6 / 4) \cdot \beta = S_o \cdot l_6 / 4 = (0.89 \cdot 8 / 4) = 1.78 \text{ тс} \cdot \text{м} = 17.462 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Суммирование воздействий статических и динамической нагрузок

Определяем суммарные значения искомых величин в среднем сечении балки с учетом переменности знака динамических амплитуд относящиеся к нижней (цифра 1 соответствует знаку +) и верхней (цифра 2 соответствует знаку -) сторонам балки:

$$u_{1,2} = u_{ct}(q_6 + G_d) \pm (A) = 2.1 \pm 0.4 = \begin{cases} +2.5 \text{ мм} \\ +1.7 \text{ мм} \end{cases}.$$

$$M_{1,2} = M_{ct}(q_6 + G_d) \pm (M_{ct} \cdot \beta) = 7.8 \pm 1.78 = \begin{cases} +9.58 \text{ тс} \cdot \text{м} \\ +6.02 \text{ тс} \cdot \text{м} \end{cases} = \begin{cases} +93.980 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ +59.056 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{cases}.$$

Как видим, в рассмотренном примере влияние динамического воздействия незначительно. Это связано с малой массой ротора двигателя и малой частотой его вращения по сравнению с собственной частотой системы. Малому значению отношения $\theta/\omega \approx 0.7$ соответствует и малое значение коэффициента динамичности (см. рис. 1.20) $\beta = 2.11$.

Если предположить, что возмущающая частота совпала с собственной частотой системы ($\theta/\omega = 1$), то коэффициент динамичности, амплитуда перемещений и амплитуда

максимального изгибающего момента при резонансе получились бы соответственно равными (см. (1.103)):

$$\beta = 1/\gamma_H = 1/0.09 = 11.1.$$

$$A = (0.42 \cdot 0.0005 \cdot 11.1) = 0.0023 \text{ м} = 2.3 \text{ мм}.$$

$$M_d = M_{ct} \cdot \beta = (P_o l_6 / 4) \cdot \beta = (0.42 \cdot 8 / 4) \cdot 11.1 = 9.33 \text{ тс} \cdot \text{м}$$

Тогда соответствующие суммарные величины для прогиба и изгибающего момента в среднем сечении балки получились бы равными:

$$u_{1,2} = u_{ct}(q_6 + G_d) \pm (A) = 2.1 \pm (2.3) = \begin{cases} +4.5 \text{ мм} \\ -0.2 \text{ мм} \end{cases}.$$

$$M_{1,2} = M_{ct}(q_6 + G_d) \pm (M_{ct} \cdot \beta) = 7.8 \pm 9.33 = \begin{cases} +17.13 \text{ тс} \cdot \text{м} \\ -1.53 \text{ тс} \cdot \text{м} \end{cases} = \begin{cases} +168.045 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ -15.009 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{cases}.$$

Последние результаты показывают, что при $\theta/\omega = 1$ максимальный во времени прогиб и максимальный изгибающий момент в среднем сечении балки с периодом $T_o = 2\pi/\theta$ изменяют значения и знак. Растянутыми будут то нижняя (знак +), то верхняя (знак -), стороны балки.


Такое явление может наблюдаться и вне резонансной зоны, что связано с влиянием на искомые величины различных параметров рассматриваемой системы.

Динамический расчет на ПК с помощью программы SCAD

Решение рассмотренной задачи на установившиеся гармонические колебания может быть выполнено с помощью программы SCAD. Расчет будем выполнять для расчетных схем балки, изображенных на рис. 1.24, а, б). Так как программа SCAD уже неоднократно использовалась учащимся для решения различных статических задач [1, 2, 3], рассмотрим процедуру расчета в сокращенном виде.


1. Выполним этапы 1 и 2 последовательности расчета, приведенной в [1] и создадим расчетную схему балки в виде системы двух КЭ типа 2 «Плоская рама» (см. рис. 1.8, а в примере 4 подраздела 1.1).

2. На этапе 3 расчета создадим загрузку 1 от собственного веса балки и загрузку 2 от собственного веса двигателя.

3. **Создадим загрузку 3 с динамическим воздействием.** Для этого нажмем кнопку  на инструментальной панели, соответствующей разделу **Загрузка** и откроем первую страницу «Ввод параметров динамической нагрузки» диалогового окна «Параметры динамических воздействий». На поле «Вид воздействия» выбираем «Гармонические колебания» и делаем запись (например, «гарм-1») на светлом поле «Имя загрузки».

Затем выбираем в верхней части диалогового окна «Гармонические колебания». Откроется вторая страница окна, часть которого с введенными параметрами приведена ниже.

Подтвердив назначенные параметры нажатием кнопки «ОК» диалогового окна, закрываем его.

Затем на инструментальной панели раздела **Загрузка** нажимаем кнопку  «Инерционные характеристики». В соответствующем диалоговом окне выбирается его часть «Гармонические колебания», где вводятся необходимые для расчета параметры.

Расчет на заданную частоту

Число учитываемых форм собственных колебаний

Коэффициент неупругого сопротивления материала

Круговая частота внешнего воздействия рад/сек.

Точность вычисления частоты

Здесь также как при задании масс при решении задачи «модальный анализ» могут быть рассмотрены два варианта.

В варианте 1 под массой в узле 2 расчетной схемы понимается *суммарная масса* $m_2 = m_d + m_{2,пр}$, где $m_{2,пр} = 0.5m^{(1)} + 0.5m^{(2)} = 0.5(2.4 + 2.4) = 2.4$ т. Так как масса двигателя $m_d = 1.5$ т, то $m_2 = 1.5 + 2.4 = 3.9$ т. Поэтому в открывшемся окне задается *суммарный вес* $G_2 = G_d + G_{2,пр} = 1.5$ тс + 2.4 тс = 3.9 тс:

Направление

Параметры воздействия

Вес массы в узле Т

Величина амплитуды Т

Закон колебания

Сдвиг фазы (радиан)

(Размерность силы «Т» в окне эквивалентна размерности силы «тс»).

В варианте 2 под массой в узле 2 расчетной схемы понимается *только масса двигателя* $m_d = 1.5$ т. Поэтому, во втором варианте последовательно вводятся исходные данные с помощью приведенных ниже частей двух диалоговых окон.

В приведенной ниже слева части диалогового окна «Гармонические колебания», в отличие от предыдущего варианта в позиции «Вес массы в узле» вводится вес только массы двигателя.

Направление

Параметры воздействия

Вес массы в узле Т

Величина амплитуды Т

Закон колебания

Сдвиг фазы (радиан)

Массы в элементах


Распределенные Пластины

Сосредоточенные

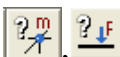
Вес массы Т

В правом окне вводится «погонный» вес массы балки. Введенные параметры в окне

первого варианта и в левом окне второго варианта относятся к колеблющейся точечной массе, расположенной в узле 2 (см. рис. 1.24, б).

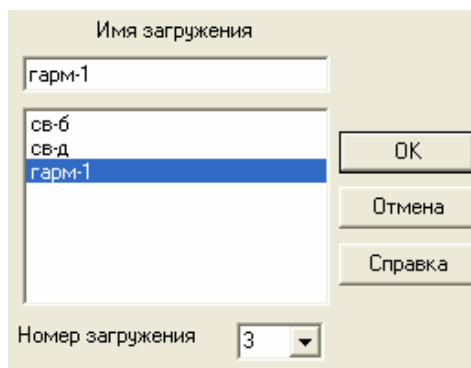
Поэтому в обоих вариантах после нажатия в окне кнопки «ОК» необходимо подвести курсор на экране дисплея к узлу 2 и, нажав на левую кнопку мыши, отметить этот узел (это равносильно расположению массы в узле 2 и приложению к нему указанной гармонической силы). Все эти действия подтверждаются нажатием кнопки  на инструментальной панели раздела **Загрузка**.

Во втором варианте для совершения загрузки балки «погонным» весом $q_6 = 0.6 \text{ тс} = 5.886 \text{ кН}$ балки, параметр которого отражен на приведенном выше правом диалоговом окне, необходимо с помощью курсора отметить конечные элементы 1 и 2 балки.

Если при этом на панели **Фильтры отображения** будут нажаты кнопки , то на расчетной схеме около узла 2 появится характерное обозначение и значение веса массы в узле 2, а во втором варианте появится также характерное обозначение распределенной массы конечных элементов и значение веса одного погонного метра балки. Эти рисунки имеют такой же вид, как и при задании масс при решении задачи «модальный анализ» (см. рис. 1.10 и рис. 1.11).

В рассматриваемом примере были выполнены оба варианта загрузки при гармоническом воздействии. Они были сохранены как загрузка 3 и загрузка 4.

При сохранении динамических загрузок имена предыдущих загрузок 1 и 2 и заданное имя динамического воздействия, например, «гарм-1», уже будут отражены в диалоговом окне для сохранения загрузки:



Но в появившемся диалоговом окне в поле «Номер загрузки» сначала ничего не будет. Надо с помощью указателя открыть список номеров и выбрать порядковый номер данного загрузки. При загрузке «гарм-1» выбираем цифру 3 (см. приведенное выше окно на этапе задания загрузки 3), а затем (при загрузке с именем «гарм-1-распр.») – цифру 4).

После задания загрузок переходим к выполнению этапа 4 расчета [1].

4. Выполняем линейный расчет, и представляем его табличные и графические результаты.

Вся процедура выполнения этого этапа остается такой же, как и при статическом расчете.

Отличие наблюдается в таблице «Оформление результатов расчета», где результаты решения динамической задачи для загрузок 3 и 4 отражены не только в виде таблиц для искомых перемещений и усилий, но и в специальном разделе «Динамика».

При открытии раздела «Динамика» последовательно открываются четыре таблицы. Поскольку результаты расчетов при динамических загрузках 3 и 4 получились совершенно одинаковыми, ограничимся (после редактирования таблиц) приведением только результатов динамического нагружения 3.

1. Распределение весов масс (тс)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВ МАСС			
1	2	3	
3 -	(гарм-1)		
Z	3.9		

2. Собственная частота и период системы с одной степенью свободы

Загру:	N	СОБСТВ.	ЧАСТОТЫ	ПЕРИОДЫ
жение:	П/П	ЗНАЧЕНИЯ	1/С	ГЦ
			С	
3	1	.0138734	72.08	11.48
				.087

3. Ординаты СФК

ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ			
1	2	3	
3 -	1	(гарм-1)	
Z	1.		

4. Инерционные нагрузки

ИНЕРЦИОННЫЕ НАГРУЗКИ			
1	2	3	
3 -	1	(гарм-1)	
Z	.87		
3 -	2		
Z	-.17		

Таблицы 1, 2, 3 имеют такой же вид, как и в динамической задаче «модальный анализ» (см. примере 4 подраздела 1.1).

В последней таблице результатов расчета с помощью программы SCAD приводятся значения амплитуд S' и S'' составляющих суммарной силы $S(t)$. Знаки этих амплитуд соответствуют правилу знаков для нагрузок, принятому в программе SCAD [2, 24].

Расчетная амплитуда S_0 суммарной силы $S(t)$ (1.110) определится по формуле (1.112):

$$S_0 = \sqrt{(S')^2 + (S'')^2} = \sqrt{(0.87)^2 + (-0.17)^2} = 0.89 \text{ тс.}$$

Это значение совпадает со значением, полученном в разделе примера «Динамический расчет вручную». Знак расчетной амплитуды назначается по знаку наибольшей слагаемой силы.

Примечание к последней таблице.

Таблица с составляющими амплитудами S' и S'' полной амплитуды S_0 названа «Инерционные нагрузки» с учетом того, что амплитуду S_0 можно представить как амплитуду инерционной силы $J = m\omega^2 u_{\text{ст}}$ при собственных колебаниях балки с частотой ω и амплитудой $u_{\text{ст}}$ (см. формулу 1.31), умноженную на динамический коэффициент β :

$$S_0 = m\omega^2 A = (m\omega^2 \cdot u_{\text{ст}})\beta = J \cdot \beta.$$

Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в разделе 2 пособия, посвященного системам с несколькими степенями свободы.

Для получения численных значений перемещений и усилий, а также их знаков, определяющих направление искомых величин, необходимо возвратиться в таблицу «Оформление результатов расчета» и открыть таблицу с перемещениями узлов и таблицу с усилиями в намеченных сечениях конечных элементов.

Ниже приведены отредактированные таблицы с данными только о вертикальных перемещениях узлов КЭ и только об изгибающих моментах в этих узлах для загрузений 1, 2 и 3.

П Е Р Е М Е Щ Е Н И Я У З Л О В, мм			
	1	2	3
1 -	(св-б)		
Z	-1.45		
2 -	(св-д)		
Z	-.73		
3 -	1	(гарм-1)	
Z	-.42		
3 -	2		
Z	.08		

В таблице перемещений узлов приведены прогибы балки от ее собственного веса, от веса двигателя и амплитуды перемещений $A' = -0.42$ мм и $A'' = 0.08$ мм от действия сил $S' = 0.87$ тс и $S'' = -0.17$ тс. Знаки перемещений берутся в соответствии с направлением оси Z общей системы осей координат (см. рис. 1.24,а). Расчетная амплитуда A полного перемещения $u(t)$ (1.96) определяется по формуле (1.98):

$$A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2} = \sqrt{(-0.42)^2 + (0.08)^2} = -0.43 \text{ мм.}$$

В таблице перемещений эта величина не приводится. Знак определенной расчетной амплитуды назначается по знаку наибольшего слагаемого перемещения. Значение амплитуды A практически совпадает со значением, полученным в разделе примера «Динамический расчет вручную».

У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ, тс*м				
2_	1-1	1-2	2-1	2-2
1 -	(СВ-б)			
М		4.8	4.8	
2 -	(СВ-д)			
М		3.	3.	
3 -	1	(гарм-1)		
М		1.75	1.75	
3 -	2			
М		- .34	- .34	
3 -	S1			
М		1.78	1.78	

В таблице усилий приведены амплитуды изгибающих моментов в узлах от этих же воздействий и расчетное значение полной амплитуды изгибающих моментов в узлах, подсчитанное (строка S1) по формуле (1.113).

Искомые величины при суммарном воздействии загрузений 1, 2 и 3 получатся при суммировании значений соответствующих величин с учетом их знаков:

$$u_{1,2} = u_{ct}(q_6 + G_d) \pm (A) = (1.4 + 0.7) \pm 0.4 = 2.1 \pm 0.4 = \begin{cases} +2.5 \text{ мм} \\ +1.7 \text{ мм} \end{cases}.$$

$$M_{1,2} = M_{ct}(q_6 + G_d) \pm (M_{ct} \cdot \beta) = 7.8 \pm 1.78 = \begin{cases} +9.58 \text{ тс} \cdot \text{м} \\ +6.02 \text{ тс} \cdot \text{м} \end{cases} = \begin{cases} +93.980 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ +59.056 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{cases}.$$

Сопоставление значений соответствующих величин и их знаков, полученных с помощью программы SCAD и выполненных вручную для балки с заданными параметрами, показывает их хорошее совпадение.

При расчете вручную был рассмотрен вариант исходных данных, когда угловая частота θ , с^{-1} , вращения ротора двигателя совпадает с угловой собственной частотой $\omega = 72.08$, с^{-1} , расчетной схемы балки с одной степенью свободы (случай резонанса).

Рассматривая в задаче «Гармонические колебания» этот вариант как новое динамическое нагружение балки (с заданной возмущающей угловой частотой $\theta = 72.08 \text{ с}^{-1}$), получим в таблице «Инерционные нагрузки» раздела «Динамика» дополнительные строки с нагрузками $S' = 0$ и $S'' = -4.67 \text{ тс} = 45.813 \text{ кН}$:

И Н Е Р Ц И О Н Н Ы Е Н А Г Р У З К И, тс			
	1	2	3
5 -	1	(гарм1-резонанс)	
5 -	2		
Z		-4.67	

При расчете вручную эти же силы получатся по формулам (1.111):

$$S' = P_o \cdot \beta^2 \cdot \chi = P_o \cdot (1/\gamma_n)^2 \cdot 0 = 0;$$

$$S'' = P_o \cdot \beta^2 \cdot \gamma_n \cdot \theta / \omega = P_o (1/\gamma_n)^2 \cdot \gamma_n \cdot 1 = P_o / \gamma_n = 0.42 / 0.09 = 4.67 \text{ тс} = 45.813 \text{ кН}.$$

В соответствии с правой частью выражения (1.110) это амплитудное значение силы должно быть взято со знаком «минус».

Соответствующие найденным амплитудам составляющих полной силы $S(t)$ амплитуды A' и A'' составляющих полного перемещения $u(t)$ и амплитуды M'_{\max} и M''_{\max} составляющих полного изгибающего момента в среднем сечении балки найдем в таблицах «Перемещения» и «Усилия и напряжения»:

Единицы измерения линейных перемещений: мм

П Е Р Е М Е Щ Е Н И Я У З Л О В, мм				
	1	2	3	
5 - 1	(гарм1-резонанс)			
5 - 2				
Z	2.26			
У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ, тс*м				
2_	1-1	1-2	2-1	2-2
5 - 1	(гарм1-резонанс)			
5 - 2				
M	-9.33	-9.33		
5 - S1				
M	-9.33	-9.33		

Эти результаты соответственно совпадают с результатами, полученными выше расчетом вручную при значении $\gamma_n = 0$. Совпадение результатов получается при использовании полученных выше вручную по формулам (1.111) силам $S' = 0$ и $S'' = 4.67 \text{ тс} = 45.813 \text{ кН}$. Действительно, используя формулы (1.97)* и (1.113) получим:

$$A' = 0; \quad A'' = \pm S'' / m\omega^2 = \pm \frac{45.813 \text{ кН}}{3.9 \text{ т} \cdot (72.08)^2 (\text{с}^{-1})^2} = \pm 0.00226 \text{ м} = \pm 2.3 \text{ мм}.$$

$$M_{\max} = M''_{\max} = \pm S'' \cdot l_6 / 4 = \pm (4.67 \cdot 8 / 4) = \pm 9.34 \text{ тс} \cdot \text{м} = \pm 91.625 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Поэтому и в случае, когда $(\theta/\omega) = 1$, суммарные величины для прогиба и изгибающего момента в среднем сечении балки при расчете по программе SCAD соответственно совпадают с приведенными выше результатами расчета вручную.

На рис. 1.26, а, б приведена картина изгиба и эпюры изгибающих моментов балки, соответствующие ее статическим загрузениям 1 и 2. На рис. 1.26, в, г аналогичные результаты расчета изображены для двух состояний балки от действия соответственно сил $S' = 0.87 \text{ тс}$ и $S'' = -0.17 \text{ тс}$, полученных при загрузении 3 динамической силой $P(t) = P_o \sin \theta t$. Направления сил S' и S'' соответствуют их знакам, принятым в программе SCAD.

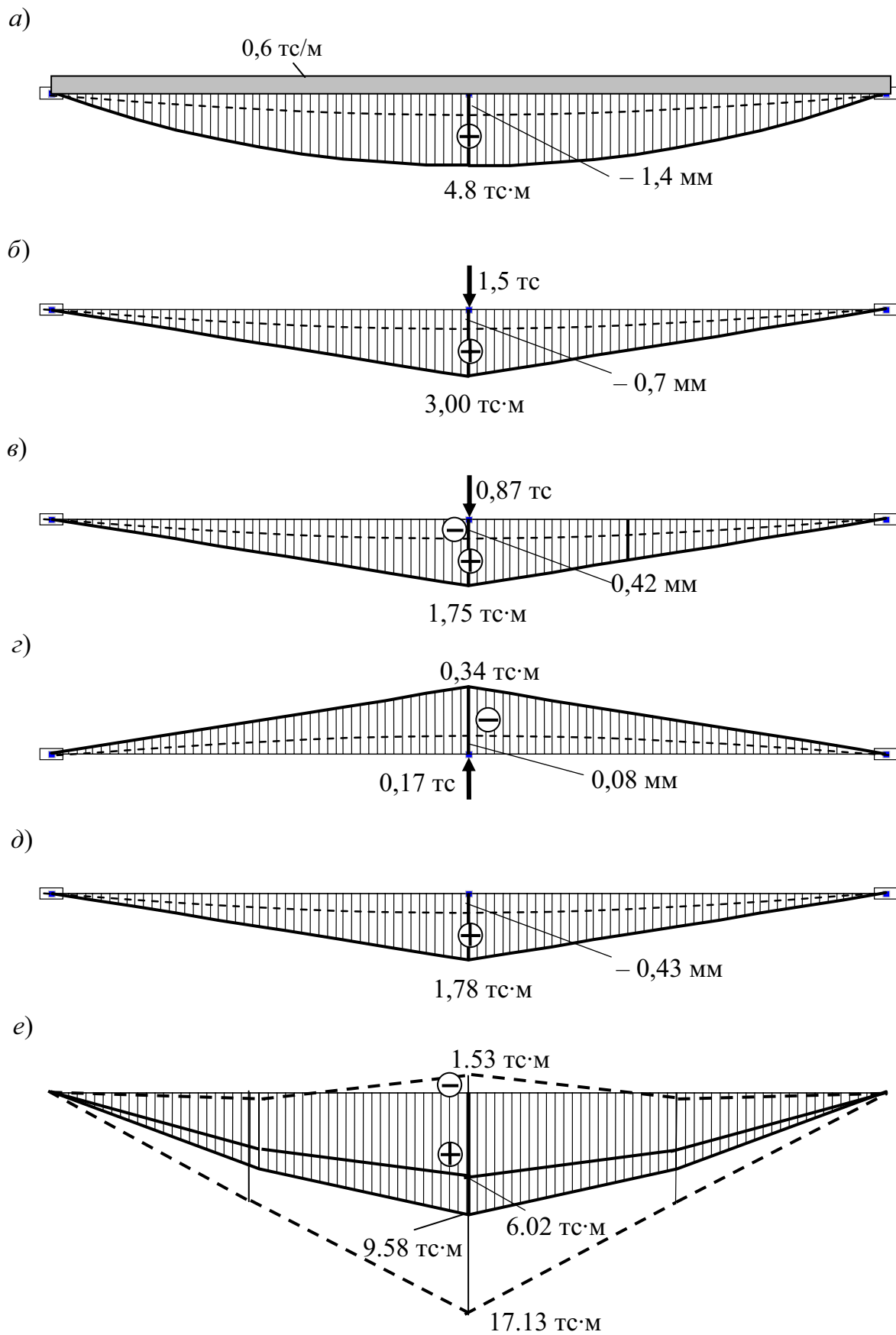


Рис. 1.26

На рис. 1.26, *д* приведены эпюры расчетных амплитуд A и M_{\max} , подсчитанных соответственно по формулам (1.98) и (1.113), а на рис. 1.26, *е* построены суммарные эпюры изгибающих моментов при заданном в примере соотношении угловых частот $(\theta/\omega) = 0.723$ (сплошные линии) и для варианта, когда $(\theta/\omega) = 1$ (штриховые линии). Обратим внимание, что во втором варианте при установившихся колебаниях балки растянутой оказываются не только ее нижняя сторона, но и верхняя. Так как рассматриваемая балка является железобетонной, это должно учитываться при подборе продольной арматуры.

1.5. Действие внезапно приложенной постоянной силы

Пусть на расчетную схему балки в виде невесомого упругого стержня с сосредоточенной массой m (см. рис. 1.1, *а*) в момент времени $t = 0$ мгновенно приложена постоянная сила P_0 . (будем считать ее направленной вниз). Определим перемещение массы (прогиб балки) при различной длительности воздействия силой P_0 . При этом будем предполагать, что статическое перемещение от веса массы рассмотрено отдельно и все перемещения, вызванные мгновенно приложенной силой P_0 , отсчитываются от оси балки с нулевыми перемещениями (см. рис. 1, *а*).

С и л а д е й с т в у е т б е с к о н е ч н о д о л г о. Рассмотрим вариант, когда $\gamma_n = 0$. Тогда при начальных условиях движения массы $u^0 = u^{00} = 0$ из интеграла Дюамеля (1.88) найдем

$$u(t) = \frac{P_0}{m\omega_0} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau = u_{ст} \beta(t). \quad (1.114)$$

где

$$u_{ст} = P_0 \delta; \quad \delta = 1/m\omega_0^2; \quad \beta(t) = (1 - \cos \frac{2\pi}{T} t). \quad (1.115)$$

График изменения перемещения (1.114) массы m с учетом (1.115) в зависимости от времени при силе P_0 , направленной вниз, показан на рис. 1.27 сплошной линией.

Как видно, мгновенно приложенная сила P_0 вызовет при $\gamma_n = 0$ незатухающие колебания системы. Причем в моменты времени $t = T/2 + kT$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, *перемещение массы будет в два раза больше прогиба балки $u_{ст} = P_0 \delta$ от этой же силы, приложенной статически.* Это означает, что *мгновенное приложение силы P_0 представляет собой динамическое воздействие. Коэффициент динамичности в указанные моменты времени равен двум ($\beta = \max_t \beta(t) = 2$).*

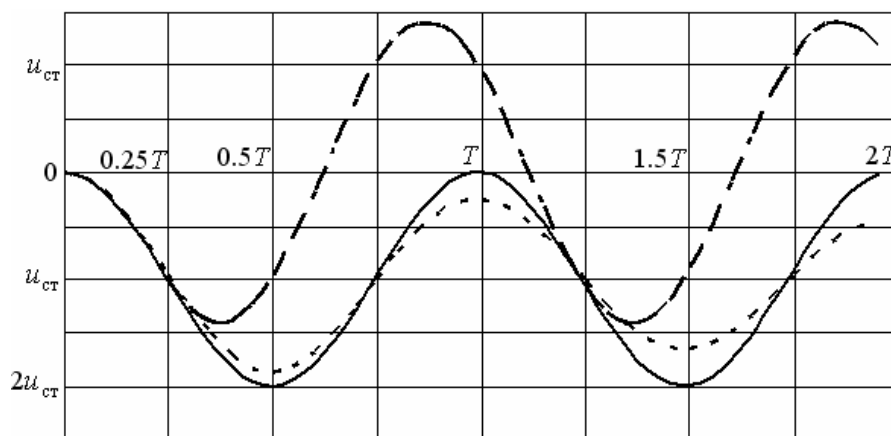


Рис. 1.27

Если при рассмотрении колебаний балки от мгновенного приложения силы учесть влияние сил неупругого сопротивления, то в результате решения интеграла Дюамеля (1.88) вместо (1.114) и (1.115), с учетом (1.79), получим:

$$u(t) = \frac{P_0}{m\omega_0} \int_0^t \exp(-0.5\gamma_n \omega t) \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau = u_{ст} \beta(t). \quad (1.116)$$

где

$$\beta(t) = \left[1 - \exp(-0.5\gamma_n \frac{2\pi}{T} t) \cdot (\cos \frac{2\pi}{T} t + 0.5\gamma_n \sin \frac{2\pi}{T} t) \right]. \quad (1.117)$$

График изменения перемещения (1.116) с учетом (1.117) показан на рис. 1.27 штриховой линией. Видно, что при $\gamma_n \neq 0$ перемещения массы при ее колебаниях, вызванных мгновенным приложением силы P_0 , со временем будут затухать, приближаясь к значению перемещения $u_{ст}$. При $t = T/2$ из (1.117) получим максимальный динамический коэффициент:

$$\beta = 1 - \exp(-0.5 \cdot 0.09 \cdot \pi) \cdot (\cos \pi + 0.5 \cdot 0.09 \sin \pi) = 1 + e^{-0.1413} = 1 + 0.87 = 1.87.$$

Это означает, что расчетной силой для балки является сила $P_{расч} = \beta_{max} \cdot P_0 = 1.87 \cdot P_0$. Максимальная амплитуда колебаний будет равна $A_{max} = \beta_{max} \cdot u_{ст} = 1.87 \cdot u_{ст}$.

С и л а д е й с т в у е т к р а т к о в р е м е н н о. Рассмотрим вариант, когда сила P_0 в момент времени $t = 0$ мгновенно приложена к балке и через небольшой период времени $t = \tau$ мгновенно удалена. Чтобы подсчитать перемещение массы при таком воздействии на балку, рассмотрим следующие два этапа.

Этап 1 ($t \leq \tau$). Перемещение массы на этом этапе можно подсчитать при $\gamma_n = 0$ по формуле (1.114) с учетом (1.115) или при $\gamma_n \neq 0$ – по формуле (1.116) с учетом (1.117). Из анализа соответствующих графиков (см. рис. 1.27) видно,

что и при $\gamma_n = 0$ и при $\gamma_n \neq 0$ перемещения массы практически совпадают, если $t \leq T/2$.

Кроме того, из анализа этих графиков видно, что если удалить силу в момент времени $\tau \leq T/4$, то к моменту удаления силы на этапе 1 перемещение не превысит значения $u_{ст}$, а динамический коэффициент – значения $\beta_1 = 1$.

Если же удалить силу в момент времени $\tau \leq T/2$, то на этапе 1 перемещение и динамический коэффициент к моменту удаления силы не превысят соответственно значений $2 u_{ст}$ и $\beta_1 = 2$.

Этап 2 ($t \geq \tau$). На втором этапе (после удаления силы) будут происходить свободные колебания массы, перемещение которой при $t \geq \tau$, определяется равенством (1.18) и зависит от начальных условий свободных колебаний (1.16). Эти начальные условия связаны с временем τ удаления силы (время конца первого и начала второго этапов). Из (1.114) с учетом (1.115) эти начальные условия запишутся в виде:

$$u^o = u_{ст} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} \tau\right); \quad u^{oo} = u_{ст} \frac{2\pi}{T} \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \tau. \quad (1.118)$$

Тогда в соответствии с (1.18) и (1.21) получим:

$$u_2(t) = u^o \cos \omega t + \frac{u^{oo}}{\omega} \sin \omega t = u_{ст} \beta_2(t), \quad (1.119)$$

$$\beta_2(t) = \left[\left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} \tau\right) \cos \frac{2\pi}{T} t_2 + \sin \frac{2\pi}{T} \tau \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t_2 \right], \quad (1.120)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{(u^o)^2 + (u^{oo} / \omega)^2} = 2u_{ст} \sin \frac{\pi}{T} \tau; \quad (1.121)$$

где $t_2 = t - \tau$.

Так как

$$\max[u_2(t)]_t = A \text{ и } \max[\beta_2(t)]_t = \beta_2, \quad (1.122)$$

то (1.119)

$$\beta_2 = \frac{A}{u_{ст}} = 2 \sin \pi \frac{\tau}{T}, \quad (1.123)$$

График свободных колебаний массы $u_2(t)$ (1.119) с учетом (1.120) изображен на рис. 1.27 штрихпунктирной линией для варианта, когда сила P_0 удалена в момент времени $\tau = T/4$. Тогда, как видно из выражения (1.123), динамический коэффициент β_2 при начавшихся свободных колебаниях массы

на втором этапе достигнет максимального значения $\beta_2 = \sqrt{2} = 1.41$, а колебания массы будут происходить относительно положения балки с нулевым прогибом.

При удалении силы P_0 в момент времени $\tau = T/2$ – динамический коэффициент успеет достичь значения $\beta_2 = 2$. Но свободные колебания балки по-прежнему будут происходить относительно положения равновесия балки с нулевым прогибом (график колебаний массы для этого варианта на рис.1.27 не изображен).

Кратковременную нагрузку обычно называют импульсивной, а величину $J_p = P_0 \tau$ – импульсом постоянной силы. Максимальные прогибы балки, максимальные усилия и напряжения при такой нагрузке получатся от расчетной силы

$$P_{\text{расч}}(\tau) = P_0 \cdot \beta_2(\tau) = 2P_0 \cdot \sin \frac{\omega \tau}{2} = 2P_0 \cdot \sin \pi \frac{\tau}{T}, \quad (1.124)$$

значение которой, как и значение динамического коэффициента зависит от времени τ действия силы, точнее – от соотношения τ/T .

Если импульс создается силой, изменяющейся за промежуток времени τ , он определяется из выражения

$$J_p = \int_0^{\tau} P(t) dt, \quad (1.125)$$

где

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 f(t) \text{ при } 0 \leq t \leq \tau; \\ P(t) &= 0 \text{ при } t > \tau. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Функция $f(t)$ характеризует форму импульса, причем максимум $|f(t)| = 1$.

Как было продемонстрировано в приведенном выше примере, реакция упругой системы с одной степенью свободы зависит от отношения τ/T .

Если $\tau > 0.1T$, при расчете сооружения на импульсивную нагрузку необходимо учитывать следующие три параметра:

1) продолжительность τ импульса; 2) форму $f(t)$ импульса; 3) наибольшую ординату P_0 графика нагрузки $P(t)$.

Если $\tau \leq 0.1T$, импульс называют мгновенным. При таком импульсе основным параметром при расчете сооружения считается значение J_p самого импульса, а его форма $f(t)$ практического влияния на реакцию системы не оказывает.

При действии мгновенного импульса предполагается примерное равенство $\sin \pi\tau/T \approx \pi\tau/T$. Тогда вместо (1.123) и (1.124) получим соответственно выражения (1.127) и (1.128).

$$\beta_2 = \frac{A}{u_{\text{ст}}} = 2 \sin \pi \frac{\tau}{T} \approx 2\pi \frac{\tau}{T} = \omega\tau. \quad (1.127)$$

$$P_{\text{расч}}(\tau) = P_0 \cdot \beta_2 = 2P_0 \cdot \sin \frac{\omega\tau}{2} = P_0 \cdot \omega\tau = J_p \omega. \quad (1.128)$$

В программе SCAD предполагается задание, как значения амплитуды P_0 силы, так и значения импульса.

Примечание. С более детальным исследованием вопроса о расчете системы с одной степенью свободы на кратковременные нагрузки при различных видах функции $f(t)$ можно ознакомиться в справочнике [14] и в учебном пособии [22].

В разделе 5 справочника [14] приведены шесть функций $f(t)$ и соответствующих им графиков форм импульсов, наиболее часто встречающихся в практике расчетов. Там же приведены основные сведения о методике расчета сооружений на импульсивные нагрузки и результаты ряда исследований, которые были использованы в программе SCAD при расчете сооружений на импульсивные нагрузки [22].

Расчет системы с одной степенью свободы при действии импульсивной нагрузки достаточно прост для его выполнения вручную. Однако, учитывая направленность учебного пособия, продемонстрируем использование программы SCAD и на соответствующих простых примерах.

Пример 1. Предположим, что железобетонная балка, рассмотренная в примере 4 подраздела 1.1 и примере 1 подраздела 1.4, до установки на нее электродвигателя подверглась воздействию импульсивной нагрузки, приложенной перпендикулярно к оси балки в середине ее пролета.

Импульсивную нагрузку зададим в виде постоянной силы $P_0 = 1.5$ тс, приложенной к балке в момент времени $t = 0$ по направлению вниз и удаленной в момент времени $t = \tau = 0.5T$. Иными словами, балка, находящаяся под действием собственного веса, в момент времени $t = 0$ получила динамическое воздействие в виде постоянного по форме импульса $J_p = P_0 \cdot \tau = 1.5 \cdot 0.5T$ продолжительностью $\tau = 0.5T$. Здесь под параметром T понимается период собственных колебаний балки как системы с одной степенью свободы. Такая расчетная схема была получена (см. рис. 1.8) при аппроксимации балки двумя стержневыми конечными элементами типа 2 (по классификации программы SCAD).

Балка до приложения импульса находилась под действием только собственного веса с интенсивностью нагрузки вдоль оси балки $q_6 = \gamma_6 A_6 = (2.5 \text{ тс/м}^3) \cdot (0.24 \text{ м}^2) = 0.6 \text{ тс/м} = (0.6 \text{ тс/м}) \cdot (9.81 \text{ м/с}^2) = 5.886 \text{ кН/м}$. При этом статический изгибающий момент и прогиб в среднем сечении балки от ее собственного веса уже известны из примера 1 подраздела 1.4:

$$M_{\text{ст}}(q_6) = q_6 l_6^2 / 8 = 0.6 \cdot 8^2 / 8 = 4.8 \text{ тс} \cdot \text{м} = 47.088 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$u_{ст}(q_6) = \frac{1}{EI} \int_0^8 \overline{MM}_p dx = \frac{5}{384} \frac{q_6 l_6^4}{EI} = 0.00145 \text{ м} = 1.4 \text{ мм} .$$

Как следует из формул (1.123) и (1.124), динамический коэффициент и расчетная сила для определения расчетных перемещений и усилий в балке при удалении силы $P_0 = 1.5 \text{ тс}$ в момент времени $t = \tau = 0.5T$ к этому моменту времени уже достигнут (без учета влияния сил неупругого сопротивления) соответственно максимальных значений $\beta_1 = \beta_2 = 2$ и $P_{расч} = 2P_0 = 3 \text{ тс}$ (см. рис. 1.27). При учете сил неупругого сопротивления, как это показано выше расчетом по формуле (1.117), эти значения соответственно будут несколько меньше: $\beta_1 = \beta_2 = 1.87$ и $P_{расч} = 1.87 \cdot P_0 = 1.87 \cdot 1.5 = 2.8 \text{ тс}$ (штриховая линия на рис. 1.27).

Определив расчетную динамическую нагрузку с учетом силы неупругого сопротивления в виде сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета балки, найдем расчетное значение изгибающего момента и расчетного прогиба балки в ее среднем сечении:

$$M_{расч}(P_{расч}) = P_{расч} l_6 / 4 = 2.8 \cdot 8 / 4 = 5.6 \text{ тс} \cdot \text{м} = 54.94 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$u_{расч}(P_{расч}) = \delta \cdot P_{расч} = 0.000484 \cdot 2.8 = 0.0013 \text{ м} = 1.3 \text{ мм} .$$

Как видно (см. рис. 1.27), при импульсе $J_p = P_0 \cdot \tau = 1.5 \cdot 0.5T$, направленном вниз, полученный в момент времени $t = 0.5T$ максимальный (расчетный) динамический изгибающий момент будет растягивать нижнюю сторону балки и поэтому должен быть просуммирован со статическим изгибающим моментом, возникающим в среднем сечении балки от ее собственного веса. В результате в момент времени $t = 0.5T$ получим суммарный момент

$$M_c = M_{ст}(q) + M_{расч}(P_{расч}) = 4.8 + 5.6 = 10.4 \text{ тс} \cdot \text{м} = 102.024 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Аналогично (см. рис. 1.27) при импульсе $J_p = P_0 \cdot \tau = 1.5 \cdot 0.5T$, направленном вниз, полученное в момент времени $t = 0.5T$ расчетное динамическое перемещение также будет направлено вниз и поэтому должно быть просуммировано со статическим прогибом балки от ее собственного веса. В результате в момент времени $t = 0.5T$ получим суммарный прогиб балки

$$u_c = u_{ст}(q_6) + u_{расч}(P_{расч}) = (1.4 \text{ мм}) + (1.3 \text{ мм}) = 2.7 \text{ мм} .$$


При дальнейших (уже свободных после удаления силы P_0) колебаниях балки, как системы с одной степенью свободы, динамические составляющие изгибающего момента, растягивающие нижнюю сторону балки, и прогиба балки по направлению вниз при учете сил неупругого сопротивления будут уменьшаться с каждым периодом колебаний, приближаясь к нулевым перемещениям (см. рис. 1.27).

Однако при свободных колебаниях массы около положения равновесия массы с нулевыми перемещениями перемещение массы в моменты времени $t = kT$, где $k = 1, 2, 3, \dots$ (см. рис. 1.27) будет происходить вверх. Тогда динамический коэффициент $\beta(kT)$, амплитуда перемещений массы $A(kT)$ и изгибающий момент $M(kT)$ в среднем сечении балки будут иметь знак «минус», так как балка будет в указанные моменты времени прогибаться вверх от направленной вверх инерционной силы $J(kT)$ (см. (1.31)).

Выполним расчет по определению расчетной силы и соответствующих ей расчетных значений перемещения балки и изгибающих моментов в среднем сечении по длине балки с


помощью программы SCAD в приведенной ниже последовательности операций. При этом предположим, что расчетная схема балки как системы с одной степенью свободы для ее динамического расчета от заданного импульса уже построена (см. пример 4 в подразделе 1.1).

1. После получения в разделе «Схема» расчетной схемы МКЭ для балки (см. рис. 1.8, а) открываем раздел «Загрузки».

2. В открывшейся инструментальной панели активизируем кнопку  «Динамические воздействия» и в открывшемся диалоговом окне выбираем «Создание нового нагружения». В результате открывается первая страница двухстраничного диалогового окна с перечислением различных динамических воздействий.


Поскольку в поставленной задаче время $\tau = 0.5T$ воздействия постоянной силы $P_0 = 1.5 \text{ тс}$ на балку связано с периодом T собственных колебаний балки как системы с одной степенью свободы, сначала найдем этот период, т. е. сначала выполним соответствующий динамический расчет, названный в программе SCAD как «Модальный анализ». Эта задача для заданной балки была решена в примере 4 подраздела 1.1 для балки, когда на нее был поставлен электродвигатель весом $G_d = m_d \cdot g = (1.5 \text{ т}) \cdot (9.81 \text{ м/с}^2) = 14.715 \text{ кН} = (14.715 \text{ кН}) : (9.81 \text{ м/с}^2) = 1.5 \text{ тс}$. Там была получена угловая собственная частота $\omega = 72.08 \text{ с}^{-1}$ и период $T = 2\pi / \omega = 0.087 \text{ с}$.

При отсутствии двигателя, масса m_2 в узле 2 расчетной схемы уменьшится и будет равна только массе балки, приведенной к узлу 2, а именно 2.4 т (вместо 3.9 т при наличии в этом же узле массы двигателя). Из формулы (1.14) видно, что с уменьшением массы угловая собственная частота ω системы с одной степенью свободы увеличится. Действительно, в рассматриваемой в данном примере системы с одной степенью свободы получим: $\omega = 91.88 \text{ с}^{-1}$ и $T = 0.068 \text{ с}$.

Теперь в разделе «Загрузки» снова нажимаем кнопку  и создадим новое динамическое нагружение от заданного импульсного воздействия на балку (точнее на ее расчетную схему в виде системы с одной степенью свободы).

3. Выбираем вид воздействия «Импульс» и задаем отражающее суть расчета имя динамического нагружения. Выходим из первой страницы диалогового окна нажатием в его верхней части «Импульсные и ударные воздействия».

4. На открывшейся второй странице диалогового окна вводим число учитываемых собственных форм колебаний (в построенной расчетной схеме для системы с одной степенью свободы вводим цифру 1) и значение $\gamma_n = 0.09$ коэффициента неупругого сопротивления железобетонной балки. Нажатием кнопки «ОК» на второй странице выходим из диалогового окна.

5. На инструментальной панели активизируем кнопку  «Инерционные характеристики» и выбираем в открывшемся списке «Импульсное воздействие». Откроется диалоговое окно, основная часть которого приведена ниже.

В окне вводятся указанные там характеристики заданного импульсивного воздействия постоянной силой. Выбранные единицы измерения вводимых величин при открытии проекта отражены в окне. Форма воздействия принята прямоугольная; направление воздействия – Z.

Вес массы в узле вводится в зависимости от варианта учета равномерно распределенной массы балки.

При использовании второго варианта (см. пример 4 в подразделе 1.1) вводим вес массы равным 0 кН (в программе SCAD предусмотрено, что равномерно распределенная масса конечных элементов, подходящих к узлу, где приложен импульс, может быть введена отдельно и затем приведет к узлу 2 расчетной схемы в виде сосредоточенной приведенной массы, равной 2.4 т).

Импульсное воздействие силы задается либо в виде значения импульса $J_p = P_o \tau$ в кН·с, либо, как показано в диалоговом окне, – в виде амплитуды силы воздействия: $P_o = 1.5 \text{ тс} = 14.715 \text{ кН}$. Продолжительность воздействия τ определена заданием: $\tau = 0.5T = 0.034 \text{ сек}$.

Предполагается, что импульс действует однократно, поэтому период повторения и количество повторений заданы равными нулю.

Форма воздействия

Направление: X Y Z

Параметры воздействия

Вес массы в узле: Т

Значение импульса: Т*сек

Амплитуда силы воздействия: Т

Продолжительность воздействия: сек

Период повторения: сек

Количество повторений:

OK Отмена Справка

Заданное воздействие относим к узлу 2 расчетной схемы МКЭ балки. При этом на расчетной схеме в узле 2 (при нажатых соответствующих кнопках фильтра отображения) появится информация «D0» о сделанном вводе (рис. 1.28).

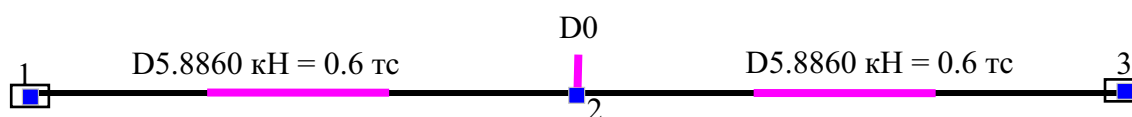

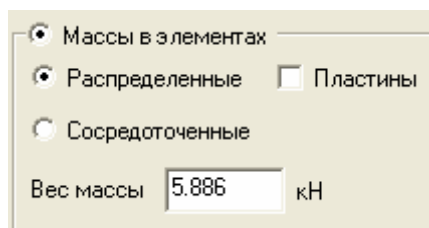


Рис. 1.28


Затем переходим к заданию равномерно распределенной массы балки. Для этого снова

нажимаем кнопку  и задаем на конечных элементах, аппроксимирующих балку, вес одного погонного метра балки:



Отмечаем конечные элементы, к которым относится эта масса. При этом на расчетной схеме МКЭ балки (см. рис. 1.28) появится информация о сделанном вводе.

Примечание. В первом варианте загрузки (см. пример 4 в подразделе 1.1) в диалоговом окне в узле 2 вместо нулевого значения будет введено значение веса массы в узле 2 равное $G_2 = m_{2,пр} \cdot g = (2.4 \text{ т}) \cdot (9.81 \text{ м/с}^2) = 23.544 \text{ кН}$, поэтому на рис. 1.28 в узле 2 вместо D0 кН будет обозначение D23.544 кН. Распределенная масса балки в варианте 1 не вводится, так как она учтена в виде сосредоточенной массы в узле 2. Поэтому приведенного здесь второго диалогового окна по вводу распределенной массы КЭ не будет, и на рис. 1.28 будет отсутствовать указание на ввод распределенной массы.

7. При любом варианте загрузки его надо сохранить, а затем зайти в раздел «Управление», на инструментальной панели которого выбрать кнопку  «Выйти в экран управления проектом» и на «дереве проекта» в разделе «Расчет» выбрать «Линейный».

8. После выполнения линейного расчета выбираем в разделе «Результаты» на «дереве проекта» подраздел «Печать таблиц». Откроется диалоговое окно для построения таблиц с результатами расчета.

Результаты решения динамической задачи «Импульс» находятся в уже известных из задачи о расчете балки при установившихся гармонических колебаниях четырех таблицах раздела «Динамика» (см. пример 1 в подразделе 1.4).

Для открытия этих таблиц активизируем соответствующую строку в правом столбце диалогового окна с названием «Динамика». В результате после редактирования таблиц и с учетом первого динамического нагружения при выполнении задачи «Модальный анализ» получим сначала первую таблицу:

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВ МАСС, тс			
	1	2	3
1 -		(мод-1)	
Z		2.4	
2 -		(импульс-1)	
Z		2.4	

Вторая таблица содержит собственные частоты ω , с^{-1} , $\nu = \omega/2\pi$, Гц, и период собственных колебаний $T = 2\pi/\omega = 1/\nu$, с.

В третьей таблице приводится единичное значение ординаты СФК в узле 2.

Загру:	N	СОБСТВ.	Ч А С Т О Т Ы		ПЕРИОДЫ
жение:	П/П	ЗНАЧЕНИЯ	1/С	Гц	С
1		.0108832	91.88433	14.63126	.0683467
2		.0108832	91.88433	14.63126	.0683467

Ф О Р М Ы К О Л Е Б А Н И Й			
	1	2	3

1	(мод-1)		
Z	1.		
2	(импульс-1)		
Z	1.		

Н Е Р Ц И О Н Н Ы Е Н А Г Р У З К И, тс			
	1	2	3
2	(импульс-1)		
Z	-2.8		

Четвертая таблица представляет значение расчетной силы $P_{\text{расч}} = 2.8$ тс в узле 2. Аналогичное значение получится при ручном расчете (см. использование формулы (1.117) для получения максимального динамического коэффициента): $P_{\text{расч}} = 1.87 \cdot 1.5 = 2.8$ тс.

Примечание к последней таблице.

Эта таблица названа «Инерционные нагрузки» с учетом того, что амплитуду $P_{\text{расч}}$ можно представить как амплитуду инерционной силы $J = m\omega^2 A = \bar{J} \cdot A$ при собственных колебаниях балки с частотой ω и амплитудой перемещений $A = u_{\text{ст}} \beta$ (см. формулу 1.31):

$$P_{\text{расч}} = P_o \cdot \beta = \frac{u_{\text{ст}}}{\delta} \beta = m\omega^2 A = \bar{J} \cdot A.$$

Здесь $\bar{J} = m\omega^2 \cdot 1$ – амплитуда инерционной силы, вызывающей деформацию и перемещения балки по первой собственной форме колебаний, имеющей в относительных перемещениях единичный прогиб балки в узле 2 расчетной схемы балки как системы с одной степенью свободы.

Действующая инерционная сила $J = \bar{J} \cdot A = \bar{J} \cdot u_{\text{ст}} \cdot \beta = (m\omega^2 \cdot 1) \frac{P_o \beta}{m\omega^2} = P_{\text{расч}}$ при колебаниях балки и будет расчетной силой, от действия которой и определяются расчетное перемещение узла 2 и расчетный изгибающий момент.

Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в разделе 2 пособия, посвященного системам с несколькими степенями свободы.

При использовании программы SCAD вычисляются перемещения в узлах КЭ в общей

системе осей координат и усилия в намеченных расчетчиком сечениях. В данном примере ограничимся усилиями в узлах. Соответствующие расчетной силе перемещения узла 2 и изгибающие моменты в нем приведены в следующих таблицах.

П Е Р Е М Е Щ Е Н И Я У З Л О В, мм				
	1	2	3	
1 - 1	(имп=0.5т)			
Z		1.3		

У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ, тс*м				
2_	1-1	1-2	2-1	2-2
2 - 1	(импульс-1)			
M		-5.6	-5.6	

Теперь обратим внимание на знаки вычисленных величин.

Поскольку собственная форма колебаний балки с точечной массой, расположенной в середине пролета балки, имеет вид, изображенный на рис. 1.9, с относительной ординатой перемещения равной +1, то вызывающая такое перемещение балки статическая сила будет представлять собой амплитудное значение инерционной силы $\bar{J} = m\omega^2 \cdot 1$ и будет направлена в сторону единичного перемещения (рис. 1.29).

Направление такой силы в программе SCAD имеет знак «минус». Поскольку сила при изгибе балки растягивает верхнюю сторону балки, то и изгибающий момент также имеет знак «минус».

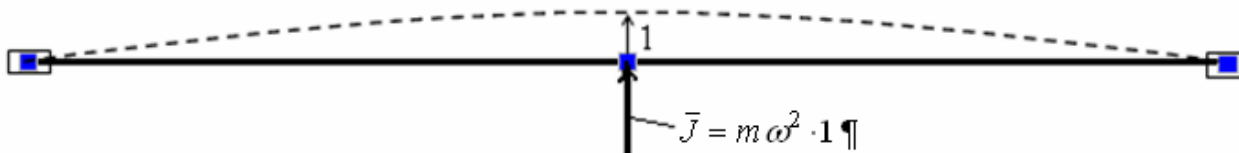


Рис. 1.29

Из физических соображений ясно, что, так как балка после импульсного воздействия на массу направленного вниз начнет изгибаться выпуклостью вниз, то полученное динамическое расчетное перемещение $u_{расч}(P_{расч}) = 1.3$ мм должно быть просуммировано со статическим перемещением от собственного веса балки $u_{ст}(P_0) = 1.4$ мм. Это было сделано выше при расчете вручную. Аналогично необходимо просуммировать динамический расчетный изгибающий момент $M_{расч}(P_{расч}) = 5.6$ тс·м со статическим изгибающим моментом $M_{ст}(P_0) = 4.8$ тс·м. Это также было выполнено при ручном расчете. Результаты ручного расчета и расчета с использованием программы SCAD совпадают.

1.6. Действие ударной нагрузки

В предыдущем подразделе предполагалось, что численное значение импульса определялось по формуле (1.125) по трем указанным там параметрам. Если импульс связан с ударом по конструкции некоторого тела массой m , значение импульса можно определить по приближенной формуле (1.129), приведенной в справочнике [14] (там импульс J_p имеет обозначение S):

$$J_p = m v_o (1 + k_o). \quad (1.129)$$

Здесь v_o – скорость ударяющего тела в начале удара; k_o – коэффициент восстановления при ударе, зависящий от свойств соударяющихся тел, приближенные численные значения которого приведены в табл. 5.1 указанного справочника [14].

Из трех параметров импульса решающее влияние на реакцию системы имеют его величина S и продолжительность τ , форма же импульса оказывает второстепенное влияние [14].

Если масса ударяющего тела мала в сравнении с массой конструкции, воспринимающей удар, расчет конструкции как системы с одной степенью свободы производится на удары так же, как и при импульсе силы, рассмотренном в предыдущем подразделе.

Если же масса ударяющего тела сравнима с массой ударяемой конструкции, то, при определении собственной частоты конструкции как системы с одной степенью свободы, ее перемещений, а также усилий, связанных с колебанием системы, следует учесть массу ударяющего тела как присоединенную к массе конструкции. При этом учитывается только составляющая ударного импульса в направлении перемещения массы.

Пример 1. Рассмотрим расчетную схему простой однопролетной горизонтальной балки с равномерно распределенной вдоль ее оси массой балки интенсивностью μ_b (см. рис. 1.30, а).

Предположим, что на балку в середине пролета с высоты h_m упало тело, которое в расчетной схеме может рассматриваться как материальная точка массой m (см. рис. 1.30, а).

Приведем балку с равномерно распределенной массой к системе с одной степенью свободы (рис. 1.30, б) приемом, рассмотренным в примере 4 подраздела 1.1 и в примере 1 подраздела 1.4. Тогда вместо расчетной схемы балки с равномерно распределенной массой (см. рис. 1.30, а) получим невесомую балку с сосредоточенной в середине пролета массой равной $0.5 m_b$ (см. рис 1.30, б). После падения груза на систему с одной степенью свободы к

этой точечной массе присоединится масса упавшего груза m , в результате чего в центре пролета балки образуется суммарная масса $m_c = 0.5 \cdot m_0 + m$.

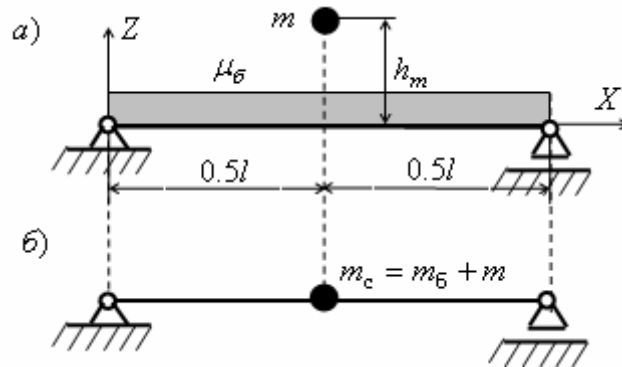


Рис. 1.30

При падении массы на балку последняя испытывает действие ударного импульса J_p (1.129), где $v_0 = \sqrt{2gh_m}$ – скорость, м/с, падения массы с высоты h_m , м, с ускорением свободного падения $g = 9.81$ м/с². После ударного импульса начнутся свободные колебания системы с угловой частотой

$$\omega = \sqrt{1/m_c \delta} = \sqrt{g/G_c \delta} = \sqrt{g/u_{ст,с}}, \quad (1.130)$$

где $u_{ст,с} = G_c \delta$ – вертикальное перемещение балки как системы с одной степенью свободы от статически приложенной силы веса $G_c = m_c g$ суммарной массы $m_c = 0.5 \cdot m_0 + m$.

Из (1.128) следует, что

$$\beta = \beta_2 = \frac{P_{расч}}{G} = \frac{S\omega}{mg} = \frac{[mv_0(1+k_0)]\omega}{mg} = \frac{(1+k_0)\sqrt{2gh_m} \cdot \sqrt{g/u_{ст,с}}}{g} = (1+k_0) \sqrt{\frac{2h_m}{u_{ст,с}}}. \quad (1.131)$$

Максимальное численное значение динамического перемещения суммарной массы при колебаниях будет иметь знаки \mp соответственно при перемещении массы вниз и вверх:

$$\mp A = \mp u_{ст} \beta = \mp u_{ст} (1+k_0) \sqrt{\frac{2h_m}{u_{ст,с}}}. \quad (1.132)$$

Здесь $u_{ст} = G\delta$ – вертикальное перемещение балки как системы с одной степенью свободы от статически приложенной силы веса $G = mg$ ударяющей массы m .

Максимальное значение изгибающего момента в среднем сечении балки определяется по формуле

$$\pm M = \pm M_{ст} \beta \quad (1.133)$$

Здесь $M_{ст} = Gl/4$ – изгибающий момент в среднем сечении балки от статически приложенной силы в виде веса $G = mg$ ударяющей массы m .

Численное решение вручную

Рассмотрим численное решение задачи, задав балке параметры, использованные в примере 4 подраздела 1.1 и в примере 1 подраздела 1.4: длина пролета балки $l = 8$ м; площадь поперечного сечения $A_0 = 0.24$ м²; момент инерции $I_Y = bh^3/12 = 0.072$ сечения балки относительно оси Y ; плотность материала балки $\rho_0 = 2500$ кг/м³ = 2.5 т/м³; модуль упругости $E = 3.00186 \cdot 10^7$ кН/м² = 3.06 · 10⁶ тс/м²; жесткость балки при ее изгибных

колебаниях $EI_Y = 216133.92 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$; масса балки $m_6 = \rho_6 \cdot V_6 = 4800 \text{ кг} = 4.8 \text{ т}$ и ее вес $G_6 = m_6 \cdot g = (4.8 \text{ т}) \cdot (9.81 \text{ м/с}^2) = 47.088 \text{ кН} = 4.8 \text{ тс}$. Кроме того, примем: масса ударяющего балку груза $m = 1.5 \text{ т}$; высота падения груза $h_m = 2 \text{ см} = 0.02 \text{ м}$.

Вычислим следующие величины:

Статический расчет

1. Вес $G = mg$ ударяющей массы m : $G = (1.5 \text{ т}) \cdot (9.81 \text{ м/с}^2) = 14.715 \text{ кН} = 1.5 \text{ тс}$.

2. Коэффициент податливости балки, соответствующий середине пролета балки

$$\delta = l^3 / 48EI = 8^3 / (48 \cdot 216133.92) = 4.93 \cdot 10^{-5} \text{ м/кН} \approx 48.4 \cdot 10^{-5} \text{ м/тс}. \quad (1.134)$$

3. Статический прогиб балки $u_{\text{ст}} = G \cdot \delta = (1.5 \text{ тс}) \cdot (48.4 \cdot 10^{-5}) = 72.6 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

4. Изгибающий момент в среднем сечении балки от статически приложенной силы G :

$$M_{\text{ст}} = Gl/4 = 1.5 \cdot 8 / 4 = 3 \text{ тм}. \quad (1.135)$$

Вес суммарной массы в среднем сечении как сумма веса половины распределенной массы балки, приведенной к точечной массе в среднем сечении балки, и веса ударяющей массы:

$$G_c = (0.5m_6 + m)g = (2.4 + 1.5) 9.81 = 38.259 \text{ кН} = 3.9 \text{ тс}. \quad (1.136)$$

5. Статический прогиб $u_{\text{ст,с}} = G_c \delta$ балки от суммарной статической силы G_c :

$$u_{\text{ст,с}} = (3.90 \text{ тс}) (0.000484 \text{ м/тс}) = 0.00189 \text{ м}. \quad (1.137)$$

Динамический расчет

1. Угловая собственная частота (1.130) системы с одной степенью свободы с суммарной массой $m_c = (0.5m_6 + m) = G_c / g$:

$$\omega = \sqrt{1/m_c \delta} = \sqrt{g/G_c \delta} = \sqrt{g/u_{\text{ст,с}}} = \sqrt{9.81/0.00189} = 72.09 \text{ с}^{-1} \quad (1.138)$$

2. Скорость $v_o = \sqrt{2gh_m}$ ударяющей массы в момент удара:

$$v_o = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.02} = 0.626 \text{ м/с} \quad (1.139)$$

3. Ударный импульс (1.129) (при $k_o = 0$)

$$J_p = mv_o = (1.5 \text{ т}) \cdot (0.626 \text{ м/с}) = 0.939 \text{ т}\cdot\text{м/с} = 0.939 \text{ кН}\cdot\text{с}. \quad (1.140)$$

4. Динамический коэффициент (при $k_o = 0$)

$$\beta = \beta_2 = \frac{P_{\text{расч}}}{G} = \frac{J_p \omega}{mg} = \sqrt{\frac{2h_m}{u_{\text{ст,с}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.02}{0.00189}} = 4.6. \quad (1.141)$$

5. Расчетная сила при мгновенном импульсе (1.128)

$$P_{\text{расч}} = G\beta = J_p \cdot \omega = (14.715 \text{ кН}) \cdot 4.6 \approx (0.939 \text{ кН}\cdot\text{с}) \cdot (72.09 \text{ с}^{-1}) = 67.7 \text{ кН} \quad (1.142)$$

6. Максимальная по численному значению амплитуда колебаний массы после ударной нагрузки в виде мгновенного импульса

$$\mp A = \mp u_{\text{ст}} \beta = (72.6 \cdot 10^{-5} \text{ м}) \cdot 4.6 = \mp 0.0033 \text{ м}. \quad (1.143)$$

7. Максимальный по численному значению изгибающий момент в среднем сечении балки:

$$\pm M = \pm M_{\text{ст}} \beta = \pm (3 \text{ тс}\cdot\text{м}) \cdot 4.6 = \pm 13.8 \text{ т}\cdot\text{м}. \quad (1.144)$$

Расчет на ПК с помощью программы SCAD

С этой целью составим новое загрузжение «Удар с учетом массы ударяющего тела». В этом случае диалоговое окно программы SCAD для задания исходных данных имеет вид:

Направление удара	<input type="checkbox"/> X	<input checked="" type="checkbox"/> Y	<input type="checkbox"/> Z
Параметры воздействия			
Вес массы в узле	<input type="text" value="1.5"/>	т	
Вес массы ударяющего тела	<input type="text" value="1.5"/>	т	
Скорость в момент удара	<input type="text" value="0.626"/>	м/сек	
Продолжительность воздействия	<input type="text" value="0.0087"/>	сек.	
Коэффициент восстановления при ударе	<input type="text" value="0"/>		
Угол между направлением удара и вертикалью	<input type="text" value="0"/>	рад.	

Эти исходные данные относятся к узлу 2 в середине пролета балки.

Затем задается распределенная масса на конечных элементах. Картина сохраненных инерционных данных приведена на рис. 1.31.



Рис. 1.31

Результаты расчета приведены ниже в виде двух таблиц из раздела «Динамика» и двух таблиц с расчетным перемещением и расчетным изгибающим моментом в узле 2:

Р А С П Р Е Д Е Л Е Н И Е В Е С О В М А С С , т с

1 2 3

| 1 - (удар-1+)
z 3.9

| Загру: N : СОБСТВ. : Ч А С Т О Т Ы : ПЕРИОДЫ |
| : П/П : :-----:-----|
жение: : ЗНАЧЕНИЯ : 1/С : ГЦ : С

| 1 1 .0138734 | 72.08 | 11.4777 | 871254 |

П Е Р Е М Е Щ Е Н И Я У З Л О В, мм				
	1	2	3	
1 - 1 (удар-1+)				
Z		-0.003388		
У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ, тс*м				
2_	1-1	1-2	2-1	2-2
1 - 1 (удар-1+)				
M		13.9997	13.9997	
1 - S1 (удар-1+)				
M		13.9997	13.9997	

Как видно, результаты расчета вручную и с использованием программы SCAD хорошо совпадают.

1.7. Расчет на заданную акселерограмму землетрясения

Рассмотрим расчетную схему в виде невесомой консоли с точечной массой (рис. 1.32). Такая расчетная схема часто используется для динамического расчета различного типа сооружений [4-17]. При поперечных колебаниях она является системой с одной степенью свободы.

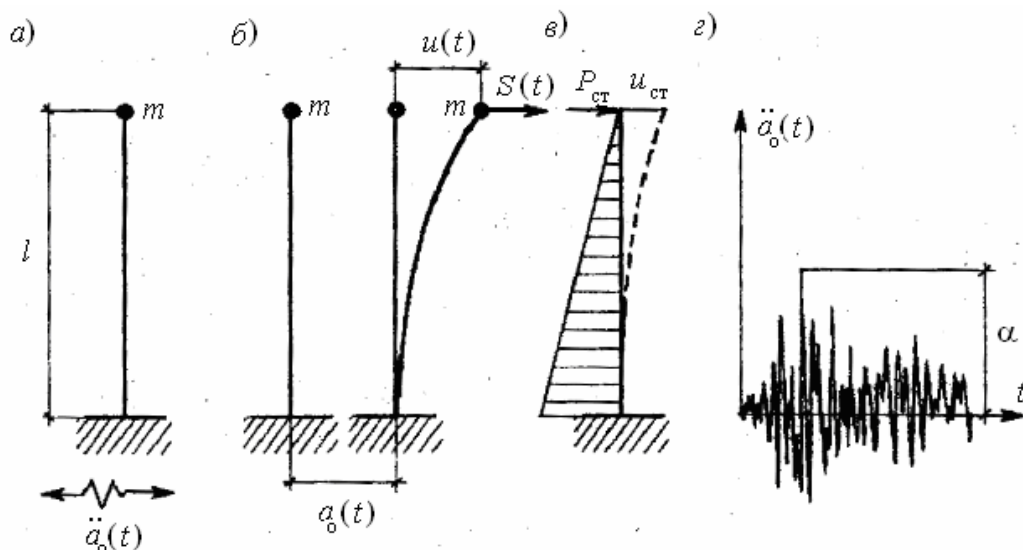


Рис. 1.32

Предположим, что опора консоли, а значит и вся консоль, во время

землетрясения вместе с поверхностью Земли совершает горизонтальные колебания с ускорением $\ddot{a}_o = \ddot{a}_o(t)$ (см. рис. 1.32, а), которое задано в виде акселерограммы [5, 15, 16] (условно она показана на рис. 1.32, з). В результате движения массы с заданным ускорением на консоль будет действовать возмущающая сила инерции $P(t) = -m\ddot{a}_o(t)$, вызывающая НДС консоли.

Уравнение (1.86) вынужденных движений массы на линейно деформируемой консоли с учетом (1.80), можно представить в виде:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega \dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{a}_o, \quad (1.145)$$

Его решение при нулевых начальных условиях движения и с учетом того, что для строительных конструкций $\omega_D \approx \omega$, представляет интеграл

$$u(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{a}_o(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau. \quad (1.146)$$

Если ускорения акселерограммы записать в виде

$$\ddot{a}_o(t) = \alpha \cdot f(t), \quad (1.147)$$

где α – максимальная амплитуда акселерограммы; $f(t) = \ddot{a}_o(t)/\alpha$ – функция относительных (безразмерных) ординат акселерограммы, и подставить (1.147) в (1.146), то искомое решение для перемещений массы можно записать в виде (1.89), где

$$u_{ст} = P_{ст} \cdot \delta = (m\alpha) \cdot \left(\frac{1}{m\omega^2}\right) = \frac{\alpha}{\omega^2}; \quad (1.148)$$

$$\beta(t) = \frac{u(t)}{u_{ст}} = -\omega \int_0^t f(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau. \quad (1.149)$$

В линейно деформируемой системе выражению (1.89) соответствует выражение для изменяющейся во времени инерционной силы, действующей на консоль,

$$S(t) = P_{ст} \cdot \beta(t) = m\alpha \cdot \beta(t). \quad (1.150)$$

Эта сила является сейсмической нагрузкой на консоль и представляет собой суммарную инерционную силу, включающую в себя заданную возмущающую инерционную силу, связанную с заданным ускорением $\ddot{a}_o(t)$, и инерционную силу, связанную с ускорениями $\ddot{u}(t)$ упругих колебаний консоли:

$$S(t) = P(t) + J(t) = m\ddot{a}_o(t) + m\ddot{u}(t) = m\ddot{u}_c(t). \quad (1.151)$$

Величина $\ddot{u}_c(t) = \ddot{a}_o(t) + \ddot{u}(t)$ является суммарным ускорением массы при колебаниях, которая из сопоставления с (1.150) может быть также

представлена в виде

$$\ddot{u}_c(t) = \alpha \cdot \beta(t). \quad (1.152)$$

По сейсмической нагрузке $S(t) = P_{ct} \cdot \beta(t)$ можно найти в поперечных сечениях консоли изгибающие моменты и соответствующие им нормальные напряжения:

$$M(t) = M_{ct} \cdot \beta(t); \quad \sigma(t) = \sigma_{ct} \cdot \beta(t) \quad (1.153)$$

а также поперечные силы и соответствующие им касательные напряжения:

$$Q(t) = Q_{ct} \cdot \beta(t); \quad \tau(t) = \tau_{ct} \cdot \beta(t). \quad (1.154)$$

Здесь статические величины определяются статическим расчетом консоли от силы $P_{ct} = m\alpha$.

Таким образом, динамический расчет консоли как системы с одной степенью свободы в основном сводится к вычислению интеграла Дюамеля в виде (1.149).

Проектировщика сооружения часто интересуют максимальные значения всех искомых величин. Тогда вместо определения динамического коэффициента $\beta(t)$ по формуле (1.149) находят только его максимальное значение $\beta = \max_t \beta(t)$, которое будет зависеть от трех величин: функции $f(t)$; угловой собственной частоты колебаний ω (или периода $T = 2\pi/\omega$ этих колебаний) рассматриваемой системы с одной степенью свободы; коэффициента ζ (1.81), характеризующего неупругое сопротивление материала и конструкции:

$$\beta = \max_t \beta(t) = \max_t \beta(f(t), T, \zeta). \quad (1.155)$$

Кроме численного интегрирования с использованием ЭВМ, значение β может быть определено экспериментально.

Представим, что консоль (или ее модель) с известным периодом собственных колебаний T и коэффициентом ζ , характеризующим неупругое сопротивление материала (1.81), установлена на подвижной в горизонтальном направлении платформе, которая совершает движение, определяемое функцией $f(t)$.

Тогда при колебаниях массы может быть зафиксирована амплитуда ее колебаний $\max_t u(t) = u_{ct} \cdot \beta$. Так как величина u_{ct} известна (1.148), то определится величина $\beta = \max_t u(t) / u_{ct}$.

Моделью для получения динамического коэффициента рассматриваемой консоли может служить любая система с одной степенью свободы, имеющая

равный период свободных колебаний T и равную характеристику ζ затухания колебаний, например маятник.

Если на платформе, двигающейся с ускорениями $f(t)$ заданной акселерограммы, установить много маятников, имеющих различные периоды собственных колебаний T_i ($i = 1, 2, \dots, n$), но одинаковое значение характеристики ζ затухания колебаний, то можно построить график изменения динамического коэффициента $\beta(T)$ только в зависимости от периодов.

Может быть построено много графиков $\beta(T)$ для различного вида заданных акселерограмм $f(t)$ и различных значений коэффициентов ζ , характеризующих потери энергии при колебаниях.

В настоящее время накоплена большая информация по этому вопросу. Это позволило построить некоторые обобщенные графики (рис. 1.31) динамического коэффициента $\beta(T)$, которые используются для расчетов любых сооружений в любых сейсмически активных районах [4, 5, 15, 16]. На их основе построен нормативный метод расчета сооружений, приведенный в СНиП «Строительство в сейсмических районах» [17, 18, 19].

1.8. Расчет сооружений на сейсмическое воздействие по нормативной методике

В настоящее время в России расчет сооружений на сейсмическое воздействие выполняется по указаниям действующих СНиП [19] для сейсмических районов с интенсивностью землетрясения 7, 8 и 9 баллов по шкале интенсивности MSK-64 [5, 15, 16].

В соответствии с этими нормами при расчете на сейсмическое воздействие рассматриваемой в предыдущем подразделе консоли как системы с одной степенью свободы вместо определения всех искомых величин как функций времени, находятся их максимальные значения. Например, для определения сейсмической нагрузки вместо формулы (1.150) используется формула

$$S = \max_t S(t) = m \alpha \cdot \max_t \beta(t) = m \alpha \beta. \quad (1.156)$$

При расчете по СНиП [19] формула (1.156) приводится к виду обобщенному для различных сооружений и различных сейсмических районов.

Преобразования в формуле сводятся к следующему.

1. Максимальная амплитуда ускорений поверхности Земли α представляется в виде $\alpha = A \cdot g$, где $A = \alpha / g$ – коэффициент, характеризующий

значение ускорения поверхности Земли по отношению к ускорению свободного падения g . Он принимается равным 0,1, 0,2, 0,4 соответственно для расчетной сейсмичности 7, 8, 9 баллов.

Это позволяет записать формулу (1.156) в виде

$$S = G A \beta, \quad (1.157)$$

где $G = m \cdot g$ – сила тяжести массы (в СНиП используется обозначение Q).

2. Значение коэффициента динамичности β определяется в зависимости от периода T рассматриваемой системы по обобщенным формулам, разделенным на два варианта*) учета неупругого сопротивления колебаниям сооружений (по категории грунтов, на которые опирается сооружение):

Грунты I и II категории	Грунты III категории
При $T \leq 0.1$ с $\beta = 1 + 15T$	При $T \leq 0.1$ с $\beta = 1 + 15T$
При 0.1 с $< T \leq 0.4$ с $\beta = 2.5$	При 0.1 с $< T \leq 0.8$ с $\beta = 2.5$
При $T \geq 0.4$ с $\beta = 2.5(\sqrt{0.4/T})$	При $T \geq 0.8$ с $\beta = 2.5(\sqrt{0.8/T})$

В первом варианте учета сил неупругого сопротивления колебаниям сооружений формулы относятся к сооружениям, расположенным на грунтах I и II категории (см. СНиП [19]). Во втором варианте формулы относятся к сооружениям, расположенные на грунте III категории.

Графики $\beta(T)$, построенные по приведенным формулам изображены на рис. 1.33.

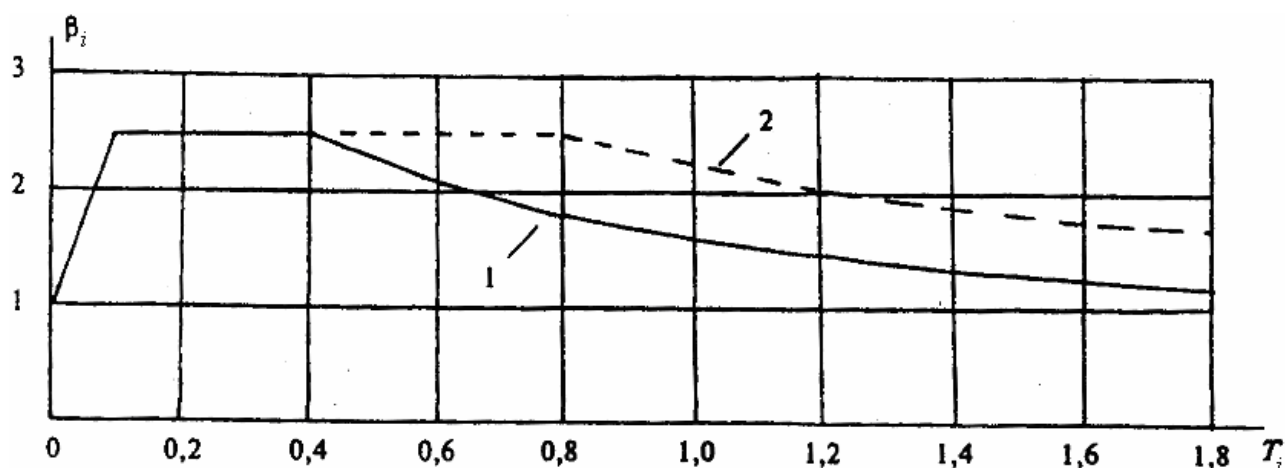


Рис. 1.33

В СНиП [17, 18] в соответствии с другими формулами приведены три графика $\beta(T)$.

*) В СНиП [17, 18] рассмотрены три варианта и соответствующие им формулы и графики для $\beta(T)$.

Сооружения, колеблющиеся на более жестких грунтовых основаниях имеют меньшие значения коэффициентов ($\zeta, \psi, \delta_{\text{лог}}, \gamma_n$), характеризующих потери энергии при колебаниях, чем сооружения на менее жестких грунтах.

3. Для приближенного учета конструктивных особенностей сооружений в формулу (1.157) введены два*) коэффициента: K_1 и K_ψ :

$$S = K_1 G A \beta K_\psi \quad (1.158)$$

Коэффициент K_1 берется из табл.3* СНиП [19]. Он изменяет значение сейсмической нагрузки, определяемой по формуле (1.158) в зависимости от возможности допущения различных состояний сооружений. Для зданий и сооружений, в конструкциях которых повреждения или неупругие деформации не допускаются, принимается $K_1 = 1$. К таким сооружениям относятся сооружения особой категории (например, реакторное отделение АЭС и т. п.). Для большинства сооружений ПГС некоторые неопасные повреждения допускаются (см. табл. 3*). В этом случае значение коэффициента K_1 принимается много меньше $K_1 = 1$ ($K_1 = 0.12 - 0.35$).

Коэффициент K_ψ берется из табл.6* СНиП [19]. Он учитывает влияние конструктивных особенностей сооружения на изменение коэффициента, характеризующего потери энергии при колебаниях, например на коэффициент поглощения энергии ψ [14], а значит и на коэффициент динамичности.

Для высоких сооружений небольших размеров в плане (башни, мачты, дымовые трубы, отдельно стоящие шахты лифтов и т. д.) коэффициенты поглощения энергии ψ при колебаниях имеют значения значительно меньшие, чем для сооружений в виде зданий или массивов.

Так как при уменьшении коэффициента поглощения энергии ψ (а значит и любого из связанных с ним коэффициентов (1.81), характеризующих неупругое сопротивление материала) динамический коэффициент увеличивается (см., например график на рис. 1.20), то для указанных высоких сооружений вводят коэффициент увеличения коэффициента динамичности: $K_\psi = 1.5$. Для другого типа сооружений в табл. 6* СНиП [19] приводятся значения $1 \leq K_\psi < 1.5$.

*) В СНиП [17, 18] вводится еще коэффициент K_2 , учитывающий другие конструктивные особенности зданий и сооружений.

Пример 1. Рассмотрим пример расчета ветроэнергетической установки (ВЭУ) башенного типа с горизонтальной осью вращения ветроколеса (ВК) (см. рис. 1.12) на горизонтальное сейсмическое воздействие по рассмотренной выше нормативной методике.

Предполагается, что ВЭУ находится в сейсмическом районе с расчетной сейсмичностью 9 баллов по шкале MSK-64 [5, 15. 16].

Требуется определить по формуле (1.158) сейсмическую нагрузку на ВЭУ и соответствующие усилия, передающиеся от башни на фундамент при горизонтальном сейсмическом воздействии с использованием указаний СНиП [19].

Расчет на заданное сейсмическое воздействие выполним вручную и на ПЭВМ с использованием программы SCAD по приближенной расчетной схеме в виде системы с одной степенью свободы (см. рис. 1.12, схема справа).

Последовательность расчета вручную

1. Для расчетной схемы ВЭУ вычисляются значения интенсивности распределенной массы башни и точечной массы на ее верхнем конце. Башня ВЭУ представляет собой стержень с равномерно распределенной по его длине массой (линейной плотностью) $\mu_6 = \rho \cdot A_6 = (7.85 \text{ т/м}) \cdot (0.066 \text{ м}^2) = 0.52 \cdot \text{т/м}$, где $\rho = 7.85 \text{ т/м}^3$ – плотность стали; $A_6 = \pi d_{\text{ср}} t = 3.14 \cdot (2.1 \text{ м}) \cdot (0.01 \text{ м}) = 0.066 \text{ м}^2$ – площадь поперечного сечения башни. При использовании программы SCAD при вводе исходных данных вводится не интенсивность распределенной массы $\mu_6 = 0.52 \text{ т/м}$, а ее вес: $q_6 = \mu_6 \cdot g = 5.1 \text{ кН/м} = 0.52 \text{ тс/м}$.

Расчетная схема ВЭУ в виде системы с одной степенью свободы была построена в примере 5 подраздела 1.1 при решении для ВЭУ динамической задачи «Модальный анализ» (см. рис. 1.12). При этом равномерно распределенная масса башни была приведена к сосредоточенным массам по концам аппроксимирующего башню стержневого КЭ: $m_{\text{пр}} = \mu_6 \cdot l / 2 = (0.52 \text{ тс/м}) \cdot (14.5 \text{ м}) = 7.54 \text{ т}$.

Приведенная масса на верхнем конце суммируется с сосредоточенной массой гондолы, в результате чего получается суммарная масса $m_c = m_{\text{Г}} + m_{\text{пр}} = 6 + 7.54 = 13.54 \text{ т}$.

Как уже отмечалось в указанном примере, башня ВЭУ (см. рис. 1.12) нижним торцом (4) крепится с помощью анкерных болтов к железобетонному фундаменту (5). В примерах расчета, для упрощения задачи, пренебрегаем податливостью грунтового основания и фундамента и полагаем, что башня жестко закреплена по нижнему торцу. Поэтому приведенная масса, отнесенная к нижнему концу башни, в ее колебаниях не участвует, а считается присоединенной к массе фундамента (см. пособие [8]).

В результате получена расчетная схема в виде невесомой линейно деформируемой консоли с одной верхней точечной массой $m_c = 13.54 \text{ т}$. Такая система при горизонтальном сейсмическом воздействии работает как система с одной степенью свободы.

При определении по формуле (1.158) сейсмической силы, действующей на консоль, вместо массы используется ее сила тяжести: $G_c = m_c \cdot g = (13.54 \text{ т}) \cdot (9.81 \text{ м/с}^2) = 132.83 \text{ кН} = 13.54 \text{ тс}$.

2. Вычисляется динамический коэффициент β . Динамический коэффициент для рассматриваемой схемы в виде системы с одной степенью свободы определяется по одной из

формул, приведенных в СНиП [19] и в данном подразделе пособия, по значению периода T собственных колебаний ВЭУ. В свою очередь период находится по круговой частоте ω : $T = 2\pi/\omega$, а круговая частота – по значению массы m_c и коэффициенту податливости δ упругой консоли из второй формулы (1.14). Таким образом, для вычисления β выполняются следующие вычисления:

2.1. Подсчитывается коэффициент упругой податливости консоли:

$$\delta = l^3 / 3EI = (29 \text{ м})^3 / 3 \cdot (777941.62 \text{ тс} \cdot \text{м}^2) = 0.01045 \text{ м/тс}.$$

2.2. Вычисляется круговая собственная частота системы с одной степенью свободы:

$$\omega = \sqrt{1/m_c \cdot \delta} = \sqrt{g/G_c \cdot \delta} = \sqrt{(9.81 \text{ м/с}^2) / [(13.54 \text{ тс}) \cdot (0.01045 \text{ м/тс})]} = 8.326 \text{ 1/с}.$$

2.3. Вычисляется период собственных колебаний системы с одной степенью свободы:

$$T = 2\pi / \omega = 6.28 / 8.326 = 0.754 \text{ с}.$$

2.4. Динамический коэффициент β определяется по указаниям СНиП [19]. Полагая в примере расчета основание ВЭУ жестким, относим его к грунту I категории. Тогда

$$\text{при } T \geq 0.4 \text{ с} \quad \beta = 2.5(\sqrt{0.4/T}) = 2.5\sqrt{0.4/0.754} = 1.82.$$

3. Из СНиП [19] находятся коэффициенты, входящие в формулу (1.158).

3.1. Коэффициент A , представляющий собой значение относительного ускорения поверхности Земли, находится по расчетному баллу сейсмического района. При заданной расчетной сейсмичности 9 баллов находим, что $A = 0.4$.

3.2. Коэффициента K_1 находится из табл. 3*. Считая, что ВЭУ относится к сооружениям, в конструкции которых не допускаются повреждения и неупругие деформации, получим $K_1 = 1$.

3.3. Коэффициент K_ψ находится из табл. 6* СНиП [19]., Поскольку ВЭУ относится к высоким сооружениям небольших размеров в плане, то выбираем значение $K_\psi = 1.5$.

4. Вычисляется сейсмическая нагрузка на ВЭУ в виде силы S (1.158):

$$S = K_1 G_c A \beta K_\psi = 1 \cdot (13.54 \text{ тс}) \cdot 0.4 \cdot 1.82 \cdot 1.5 = 14.78 \text{ тс}.$$

5. На башне – консоли строятся эпюры изгибающих моментов и поперечных сил (рис. 1.34).

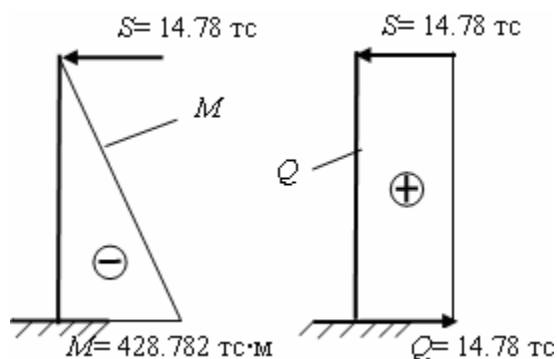


Рис. 1.34

Знаки на эпюрах M и Q поставлены по правилу знаков, принятому в программе SCAD для плоских стержневых конечных элементов [1, 2].

6. Определяются усилия, действующие на фундамент башни. Анализ рис. 1.34 показывает, что на верхнюю плоскость фундамента ВЭУ через торец башни передается нагрузка в виде двух усилий (рис. 1.35).

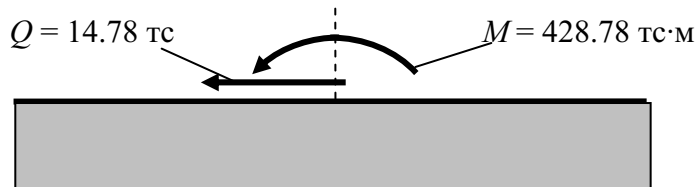



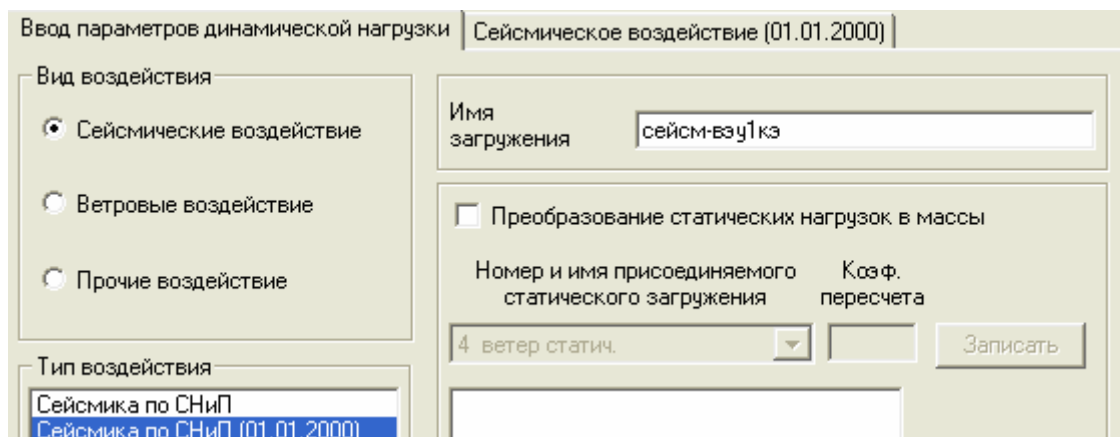
Рис. 1.35

Эти усилия соответственно противоположны тем, которые действуют на нижний торец башни.

Расчет с применением программы SCAD

С учетом того, что программа SCAD уже неоднократно использовалась учащимся для решения различных статических задач [1, 2, 3] и при решении в данном пособии динамических задач процедуру расчета рассмотрим в сокращенном виде.

Учитывая, что расчетная схема ВЭУ как системы с одной степенью свободы уже была построена в примере 5 подраздела 1.1 (см. рис. 1.12), можно использовать ее и просто, продолжая расчет в этом примере, создать новое динамическое нагружение. С этой целью открываем раздел **Загружения** и на инструментальной панели нажимаем кнопку  и выбираем «Создание нового нагружения». Откроется диалоговое окно «Параметры динамических воздействий» (ниже приведен один из его вариантов, зависящих от номера версии программы SCAD).



На поле «Параметры динамической нагрузки» выбираем «Сейсмика по СНиП (01.01.2000)» и делаем запись (например, «сейсм-вз1кэ») на светлом поле «Имя загрузки».

Затем выбираем в верхней части диалогового окна «Сейсмическое воздействие (01.01.2000)» и открываем диалоговое окно, вид которого после заполнения исходных данных приведен ниже.

Ввод параметров динамической нагрузки Сейсмическое воздействие (01.01.2000)

Число учитываемых форм собственных колебаний: 1

Ориентация высоты здания на схеме: X Y Z

Направление нагрузки: X 1, Y 0, Z 0

Косинусы углов с осями: X 1, Y 0, Z 0

Категория грунта: I категория

Сейсмичность [7 - 9]: 9 баллов

Количество этажей [≥ 5]: 5

Поправочный коэффициент: 1

Тип сооружения: Жилые, общественные, производств.


Кoeffициенты [СНиП II-7-81*] на 01.01.2000: Допускаемые повреждения (см. табл. 3): Не допускаются

Характеристика конструкции (см. табл. 6): Башни, мачты, дымовые трубы, э

Расстояние между дневной поверхностью и началом общей системы координат: 0 м

Принцип заполнения светлых полей этого окна практически понятен. Поля с наименованиями: «Количество этажей», «Поправочный коэффициент», «Расстояние между дневной» заполнены в программе по умолчанию и эти данные исправлять не нужно.

После нажатия кнопки «ОК» окно закрывается и на инструментальной панели раздела

Загрузки нажимается кнопка  «Инерционные характеристики». Выбирается функция диалогового окна «Задание масс». При первом открытии окна «Массы» задается вес массы гондолы в узле 2 расчетной схемы МКЭ для ВЭУ с одним КЭ. При втором открытии диалогового окна «Массы» задается вес одного погонного метра конечного элемента. Эти операции описаны в примере 5 при решении динамической задачи «Модальный анализ» для ВЭУ. В результате задания масс получается расчетная схема ВЭУ с заданными инерционными характеристиками при сейсмическом воздействии, которая сохраняется как загрузка 2 при заданном имени «сейсм-ВЭУ-1кэ».

Затем выполняется полный расчет. Вся процедура выполнения этого этапа остается такой же, как и при решении всех предыдущих динамических задач в данном пособии.

В таблице «Оформление результатов расчета» результаты решения динамической задачи отражены как в известных уже учащемуся четырех таблицах раздела «Динамика», так и в виде таблиц для искомых перемещений и усилий.

Ниже приведены только результаты расчета ВЭУ на сейсмическое воздействие. Отредактированные таблицы имеют следующий вид:

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВ МАСС, тс	
2	
1 - сейсм-вэу1кэ	
X	13.54

Загру:	Н	СОБСТВ.	Ч А С Т О Т Ы	ПЕРИОДЫ
жение:	П/П	ЗНАЧЕНИЯ	1/С	ГЦ
1	1	.1200985	8.33	1.3
				0.75

Ф О Р М Ы К О Л Е Б А Н И Й, м				
2				
1 -	1	сейсм-вэу1кэ		
X	1.			

И Н Е Р Ц И О Н Н Ы Е Н А Г Р У З К И, тс				
2				
1 -	1	сейсм-вэу1кэ		
X	14.78			

Таблица усилий M , тс·м и Q , тс, получается в следующем виде:

У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ			
	1-1	1-2	
1 -	1 сейсм-вэу1кэ		
M	-428.824		
Q	14.787	14.787	
1 -	S1		
M	-428.824		
Q	14.787	14.787	

Примечания к табл. «Усилия».

1. Результат для указанных усилий выдается в назначенных на элементе двух сечениях (они совпадают с узлами 1 и 2).

2. Первые две строки результатов относятся к загрузению 1 с именем «1 сейсм-вэу1кэ», а последние две строки соответствуют методу получения расчетных значений усилий в каждом сечении в системах с несколькими степенями свободы. Этот вопрос будет рассмотрен в разделе 2 пособия.

Обратим внимание, что результаты расчета, полученные вручную и с помощью программы SCAD, полностью совпадают.

2. СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

2.1. Два вида записи системы уравнений свободных незатухающих колебаний масс

Рассмотрим расчетную схему сооружения в виде невесомого упругого линейно деформируемого стержня, на котором располагается n точечных масс (рис. 2.1).

Как показано во введении к пособию, при изучении только горизонтальных составляющих упругих перемещений масс при колебаниях такая расчетная схема будет системой с n степенями свободы.

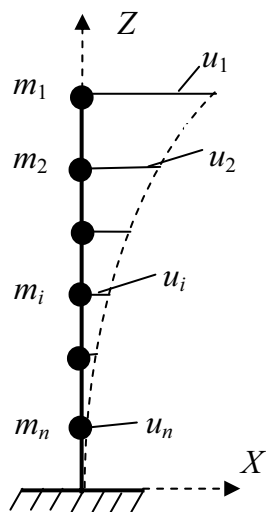


Рис. 2.1

Для системы с одной степенью свободы ($n=1$) уравнение свободных незатухающих колебаний одной массы было записано в двух видах: (1.8) и (1.10).

Для расчетной схемы с несколькими степенями свободы ($n > 1$) систему уравнений свободных незатухающих колебаний масс можно представить в аналогичных двух видах записи.

При использовании матриц эти два вида представляются соответственно уравнениями:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}(-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}) \quad (2.2)$$

В уравнениях движения (2.1) и (2.2) использованы следующие матрицы.

1. Матрицы столбцы перемещений и ускорений масс, входящих в обе формы записи системы уравнений свободных незатухающих колебаний точечных масс стержня в поперечном к оси стержня направлении:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_i \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

где $u_i = u_i(t)$, $\ddot{u}_i = \ddot{u}_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$), – соответственно перемещение и ускорение любой точечной массы с номером i .

2. Диагональная матрица масс:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & m_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & m_n \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

3. Две матрицы, известные из статики сооружений как, соответственно, матрица жесткости и матрица податливости:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1i} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2i} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \dots & \delta_{ii} & \dots & \delta_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{ni} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

4. В первой форме записи системы уравнений (2.1) правая часть системы имеет вид нулевого вектора. Он имеет такую же структуру как векторы перемещений и ускорений (2.3) только его элементы являются нулевыми.

Системы уравнений (2.1) и (2.2) представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени. Поэтому для их решения должны быть заданы начальные условия движения каждой массы. В матричном виде они имеют вид (2.7) с учетом (2.8).

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{u}^{00}. \quad (2.7)$$

$$\mathbf{u}^0 = \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ \vdots \\ u_i^0 \\ \vdots \\ u_n^0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}^{00} = \begin{bmatrix} u_1^{00} \\ u_2^{00} \\ \vdots \\ u_i^{00} \\ \vdots \\ u_n^{00} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Матрицы (2.8) являются векторами заданных соответственно начальных перемещений и скоростей всех масс.

Задание системе начальных условий движения (2.7), являющихся причиной ее свободных колебаний, соответствует получению этой системой некоторой положительной потенциальной энергии упругой деформации

$$P^0 = 0.5(\mathbf{u}^0)^T \mathbf{K} \mathbf{u}^0 = 0.5(\mathbf{p}^0)^T \mathbf{D} \mathbf{p}^0,$$

где $\mathbf{p}^0 = \mathbf{K} \mathbf{p}^0$ – вектор начальных значений сил, соответствующих вектору начальных перемещений \mathbf{u}^0 , и положительной кинетической энергии

$$T^0 = 0.5(\mathbf{u}^{00})^T \mathbf{M} \mathbf{u}^{00}.$$

Полная начальная энергия системы $\mathcal{E}^0 = P^0 + T^0 > 0$ и матрицы \mathbf{K} , \mathbf{D} , \mathbf{M} являются положительно определенными и неособенными, т.е. имеют обратные матрицы: \mathbf{K}^{-1} , \mathbf{D}^{-1} , \mathbf{M}^{-1} .

Умножим систему уравнений (2.1) на \mathbf{K}^{-1} и учтем, что $\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} является единичной матрицей. Тогда получим:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(-\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}). \quad (2.9)$$

Сопоставляя (2.9) и (2.2), отметим, что $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{D}$, и матричное уравнение (2.1) умножением его на матрицу \mathbf{K}^{-1} преобразовалось в матричное уравнение (2.2).

Аналогично, система уравнений движения в форме (2.2) преобразуется в систему уравнений (2.1) умножением (2.2) на матрицу \mathbf{D}^{-1} . При этом учитывается, что $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{D} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{K}$.

Запись системы уравнений в матричном виде применима и для системы с одной степенью свободы, когда $n = 1$. Действительно, в этом случае:

$$\mathbf{M} = m_1 = m; \quad \mathbf{u} = u_1 = u; \quad \ddot{\mathbf{u}} = \ddot{u}_1 = \ddot{u}; \quad \mathbf{D} = \delta_{11} = \delta; \quad \mathbf{K} = k_{11} = k,$$

$$k^{-1} = \delta; \quad \delta^{-1} = k; \quad \delta \cdot k = 1$$

и системы уравнений (2.1) и (2.2) принимают соответственно вид (1.8) и (1.10).

2.2. Решение системы уравнений свободных незатухающих колебаний методом разложения вектора искомых перемещений масс по векторам перемещений в СФК

При расчете сооружений от различных воздействий, вызывающих динамический характер их НДС, наиболее часто используют решение системы уравнений, записанной либо в форме (2.1), либо в форме (2.2), методом

разложения искомых перемещений в ряд по собственным формам колебаний (модальная суперпозиция):

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{u}}_i \cdot \Phi_i(t). \quad (2.10)$$

где $\bar{\mathbf{u}}_i = (\bar{u}_{1i} \bar{u}_{2i} \dots \bar{u}_{ni})^T$ – вектор перемещений i -й собственной формы колебаний расчетной схемы сооружения, определяющий форму деформирования сооружения при его свободных колебаниях с некоторой собственной частотой, которая будет далее определена; $\Phi_i(t)$ – коэффициент разложения, соответствующий вектору $\bar{\mathbf{u}}_i$ и представляющий собой функцию времени, которая определяет синхронное изменение во времени вектора перемещений i -й собственной формы колебаний:

$$\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i \cdot \Phi_i(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{1i} \cdot \Phi_i(t) \\ \bar{\mathbf{u}}_{2i} \cdot \Phi_i(t) \\ \cdot \\ \bar{\mathbf{u}}_{ki} \cdot \Phi_i(t) \\ \cdot \\ \bar{\mathbf{u}}_{ni} \cdot \Phi_i(t) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Подставив любое i -е слагаемое (2.11) суммы (2.10) в систему уравнений движения, записанную в виде (2.1) и в виде (2.2), получим:

$$\mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i \ddot{\Phi}_i(t) + \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_i \Phi_i(t) = \mathbf{0};$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i \Phi_i(t) = -\mathbf{D} \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i \ddot{\Phi}_i(t).$$

или

$$\mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i \frac{\ddot{\Phi}_i(t)}{\Phi_i(t)} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{0}; \quad (2.12)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{D} \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i \frac{\ddot{\Phi}_i(t)}{\Phi_i(t)}. \quad (2.13)$$

Система уравнений в форме (2.12) и в форме (2.13) имеет смысл, когда дробь $\ddot{\Phi}_i(t)/\Phi_i(t)$ равна постоянной величине. Приравняв $\ddot{\Phi}_i(t)/\Phi_i(t)$ величине $-\omega_i^2$, получим уравнение

$$\ddot{\Phi}_i(t) + \omega_i^2 \Phi_i(t) = 0, \quad (2.14)$$

из которого и определяется функция времени $\Phi_i(t)$.

В результате выполненного действия произошло отделение функции времени из системы уравнений движения как в первой (2.12), так и во второй

(2.13) формах ее записи. Теперь двум формам системы уравнений движения будут соответствовать *однородные системы уравнений* в виде:

$$(\mathbf{K} - \varphi_i \mathbf{M}) \bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{0}; \quad (2.15)$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) \bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Здесь введены обозначения: $\varphi_i = \omega_i^2$; $\lambda_i = 1/\omega_i^2$; $\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{M}$.

Уравнение (2.14) имеет такой же вид, как уравнение свободных незатухающих колебаний (1.12) для системы с одной степенью свободы. Поэтому его решение будет иметь вид (1.15)

$$\Phi_i(t) = A_{1i} \cos \omega_i t + A_{2i} \sin \omega_i t, \quad (2.17)$$

или (1.24), (1.27).

Таким образом, частное решение (2.11) с функцией времени (2.17) соответствует незатухающим гармоническим колебаниям, происходящим с частотой ω_i и имеющим форму колебаний, определяемую вектором $\bar{\mathbf{u}}_i$. Частота ω_i является i -й собственной частотой (i -й СЧ) колебаний сооружения, а вектор $\bar{\mathbf{u}}_i$ – вектором перемещений, соответствующим i -ой собственной форме колебаний (i -й СФК). Таких СЧ и СФК будет столько, сколько имеется степеней свободы масс в принятой расчетной схеме ($i = 1, 2, \dots, n$).

Постоянные интегрирования A_{1i} и A_{2i} решения (2.17) уравнения (2.14) определяются из начальных условий движения (2.7) с помощью использования свойства ортогональности СФК, которое будет рассмотрено в подразделе 2.3.

Определение собственных частот. Собственные частоты находятся решением характеристического уравнения, соответствующего рассматриваемой форме системы уравнений ((2.15) или (2.16)), которое получается из следующих соображений.

При определении векторов перемещений в СФК решением системы уравнений (2.15) или (2.16) расчетчика интересует только ненулевые решения. А так как указанные системы уравнений являются однородными, то ненулевое решение возможно только тогда, когда определитель соответствующей системы равен нулю:

$$|\mathbf{K} - \varphi_i \mathbf{M}| = 0; \quad (2.18)$$

$$|\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}| = 0. \quad (2.19)$$

Раскрывая определители, получим алгебраические уравнения n -ой степени, соответственно в виде:

$$b_n \varphi^n + b_{n-1} \varphi^{n-1} + \dots + b_1 \varphi + b_0 = 0; \quad (2.20)$$

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (2.21)$$

Так как матрицы **K**, **D**, **M** являются симметричными положительно определенными, то решение характеристических уравнений дает n вещественных положительных корней, соответственно φ и λ , по которым определяются собственные частоты ω_i незатухающих колебаний:

$$\omega_i = \sqrt{\varphi_i} = 1/\sqrt{\lambda_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.22)$$

Спектр собственных частот рассматриваемой упругой расчетной схемы представляют в виде:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n, \quad (2.23)$$

где первая СЧ является низшей собственной частотой.

Определение векторов \bar{u}_i i -й СФК. Каждой найденной частоте ω_i из системы уравнений (2.15) при решении задачи в форме метода перемещений, или из системы уравнений (2.16) при решении в форме метода сил, соответствует вектор перемещений \bar{u}_i .

Так как указанные системы n уравнений являются однородными, то независимыми являются только $n-1$ уравнение. Это означает, что абсолютные значения перемещений в векторе \bar{u}_i найти нельзя. Возможно определение только их относительных значений.

Рассмотрим, например, систему уравнений (2.15) в каноническом виде:

$$\left. \begin{aligned} (k_{11} - \varphi_i m_1) \bar{u}_{1i} &+ k_{12} \bar{u}_{2i} &+ \dots &+ k_{1n} \bar{u}_{ni} &= 0 \\ k_{21} \bar{u}_{1i} &+ (k_{22} - \varphi_i m_2) \bar{u}_{2i} &+ \dots &+ k_{2n} \bar{u}_{ni} &= 0 \\ \vdots &\vdots &\vdots &\vdots &\vdots \\ k_{n1} \bar{u}_{1i} &+ k_{n2} \bar{u}_{2i} &+ \dots &+ (k_{nn} - \varphi_i m_n) \bar{u}_{ni} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Разделим ее на величину \bar{u}_{1i} и введем новые относительные перемещения $\bar{y}_{ji} = \bar{u}_{ji} / \bar{u}_{1i}$, где $j = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Так как $\bar{y}_{1i} = \bar{u}_{1i} / \bar{u}_{1i} = 1$, то неизвестными являются $n-1$ относительные перемещения $\bar{y}_{ji} = \bar{u}_{ji} / \bar{u}_{1i}$, где $j = 2, \dots, n$; $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Их можно определить решением системы любых $n-1$ уравнений:

$$\left. \begin{aligned} k_{12} \bar{y}_{2i} &+ k_{13} \bar{y}_{3i} &+ \dots &+ k_{1n} \bar{y}_{ni} &= &-(k_{11} - \varphi_i m_2); \\ (k_{22} - \varphi_j m_2) \bar{y}_{2i} &+ k_{23} \bar{y}_{3i} &+ \dots &+ k_{2n} \bar{y}_{ni} &= &-k_{21}; \\ \vdots &\vdots &\vdots &\vdots &= &\vdots \\ k_{n2} \bar{y}_{2i} &+ k_{n3} \bar{y}_{3i} &+ \dots &+ (k_{nn} - \varphi_i m_n) \bar{y}_{ni} &= &-k_{n1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

В результате для n собственных частот получим n векторов:

$$\bar{y}_i = (1, \bar{y}_{2i}, \bar{y}_{3i}, \dots, \bar{y}_{ni})^T. \quad (2.25)$$

Им будут соответствовать искомые векторы СФК, определенные с точностью до постоянного множителя \bar{u}_{1i} :

$$\bar{u}_i = \bar{u}_{1i} \cdot \bar{y}_i. \quad (2.26)$$

Определение сил инерции, разложенных по СФК. При свободных незатухающих колебаниях каждому вектору перемещений $\mathbf{u}_i = \bar{u}_i \cdot \Phi_i(t)$ (2.11) соответствует вектор ускорений $\ddot{\mathbf{u}}_i = \bar{u}_i \cdot \ddot{\Phi}_i(t)$ и (с учетом (2.14)) вектор сил инерции

$$\mathbf{j}_i = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{M}\bar{u}_i \cdot \ddot{\Phi}_i(t) = \bar{\mathbf{j}}_i \cdot \Phi_i(t). \quad (2.27)$$

Здесь

$$\bar{\mathbf{j}}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \bar{u}_i \quad (2.28)$$

представляет собой вектор амплитудных значений сил инерции, соответствующий вектору \bar{u}_i . Вектор этих сил инерции и вызывает деформацию сооружения по i -й СФК.

Пример 1. В примере 1, рассмотренном в подразделе 1.4, расчетная схема железобетонной балки с электродвигателем, расположенным в середине пролета (см. рис. 1.24), была представлена как система с одной степенью свободы.

При использовании программы SCAD это было достигнуто разделением балки на два конечных элемента типа 2 «Стержень плоской рамы» и заменой равномерно распределенной массы каждого элемента двумя точечными массами по концам элементов.

В результате такого действия балка стала невесомой (безмассовой) по длине, а ее масса оказалась сосредоточенной в трех узлах расчетной схемы МКЭ (см. рис. 1.8, б). При этом точечные массы, попавшие в опорные узлы 1 и 3, оказались неподвижными при рассмотрении поперечных колебаний полученной системы. Приведенная точечная масса балки, оказавшаяся в узле 2, совпала с массой двигателя, в результате чего образовалась суммарная масса m_{2c} , которая при поперечных колебаниях балки имеет одну степень свободы.

Если при использовании МКЭ рассматриваемую балку разбить не на два, а на четыре равных элемента (рис. 2.2, а) и использовать такой же способ замены распределенной массы точечными массами по концам КЭ, то при поперечных колебаниях балки получим систему с тремя степенями свободы (рис. 2.2, б).

Такая система имеет три СЧ и три СФК (три «моды» собственных колебаний), представленных при расчете соответствующими векторами поперечных перемещений масс в каждой СФК балки.

Решим задачу по определению СЧ и СФК с помощью программы SCAD. Эта динамическая задача в программе SCAD называется «модальным анализом».

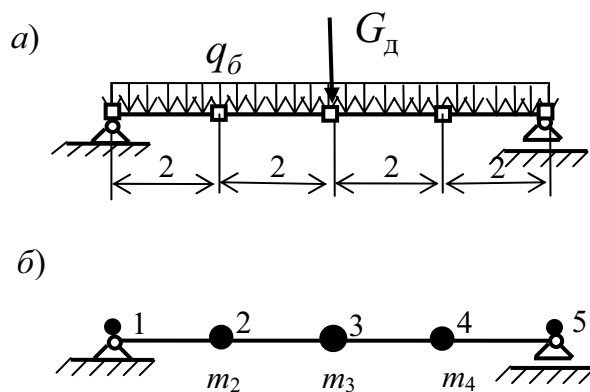


Рис. 2.2

С учетом того, что программа SCAD уже неоднократно использовалась учащимися для решения различных статических задач [1, 2, 3] и динамических задач в данном пособии, рассмотрим процедуру расчета в сокращенном виде.

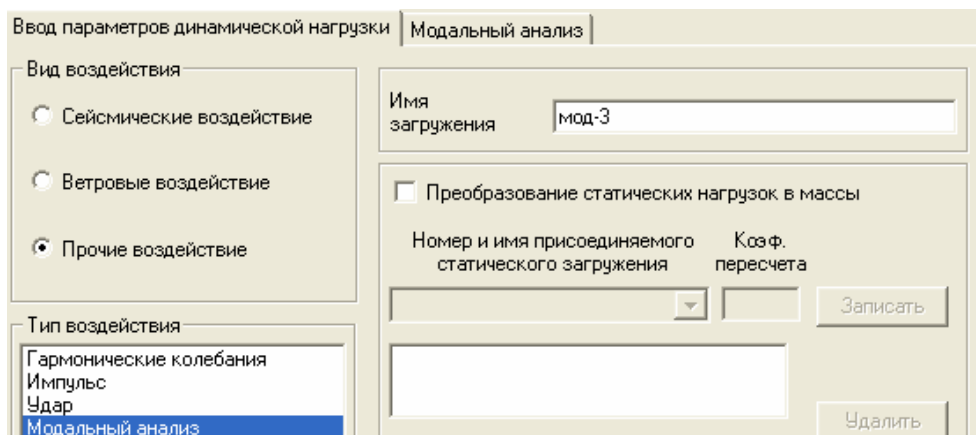
Инструкция по решению динамической задачи «Модальный анализ» с помощью программы SCAD


Этапы 1 и 2. Выполним этапы 1 и 2 последовательности расчета, приведенной в [1], и создадим расчетную схему балки в виде системы четырех КЭ типа 2 «Стержень плоской рамы».

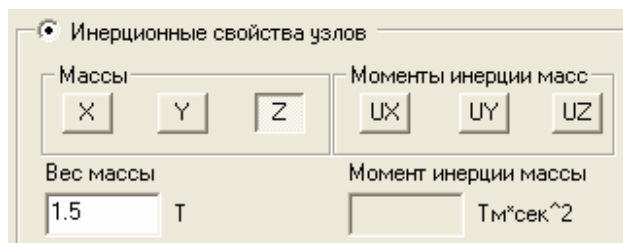
Этап 3. Создадим загрузку для динамической задачи «Модальный анализ». Для этого нажмем кнопку **D** «Динамические воздействия» на инструментальной панели, соответствующей разделу **Загрузки**. Появившийся при этом вид диалогового окна зависит от используемой версии программы SCAD. Однако, принципиального различия в процедуре задания динамического воздействия в разных версиях нет.

Ниже показана часть варианта вида диалогового окна «Параметры динамических воздействий», где на стр. 1 «Ввод параметров динамической нагрузки» на поле «Вид воздействия» выбираем «Прочие воздействия», а затем «Модальный анализ». На этой же странице в окне «Имя загрузки» записываем имя «мод-3».

Все остальные возможности этого окна пока рассматривать не будем и нажатием верхней строке «модальный анализ» перейдем на вторую страницу диалогового окна, на которой вводим число учитываемых форм собственных колебаний (в нашем случае – 3).

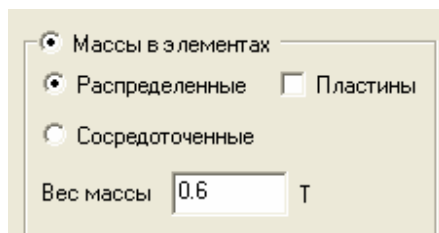


Подтвердив введенную информацию нажатием кнопки «ОК», закроем диалоговое окно и на инструментальной панели раздела **Загружения** нажмем кнопку  «Инерционные характеристики». В открывшемся списке выберем «Задание масс». Откроется окно «Массы». Рассмотрим вначале, приведенную ниже, его часть «Инерционные свойства узлов». Здесь введен вес двигателя 1.5 тс, отнесенный к узлу 3 расчетной схемы МКЭ балки и указано направление рассматриваемой степени свободы этой массы:



Окно закрывается и с помощью курсора сделанный ввод относится к узлу 3 на расчетной схеме МКЭ балки и подтверждается нажатием кнопки «ОК» на инструментальной панели. При нажатых на фильтре отображения соответствующих кнопках в узле 3 расчетной схемы получим информацию о сделанном вводе (рис. 2.3).

Для ввода распределенной массы конечных элементов элемента на приведенном ниже поле «массы в элементах» вводится вес одного метра длины элемента (в примере: 0.6 тс).



После закрытия окна нажатием кнопки «ОК» элементы на расчетной схеме, имеющие указанную интенсивность веса, «отмечаются» (эта процедура неоднократно отмечалась в различных примерах расчета). В результате получим схему нагружения 1 с именем «мод-3» в виде, приведенном на рис. 2.3, которую необходимо сохранить.

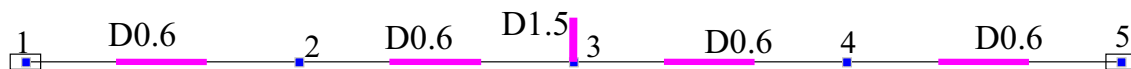


Рис. 2.3

Этап 4. Выполняем линейный расчет и приводим его результаты. Результаты расчета динамической задачи «Модальный анализ» выдаются в таблице «Оформление результатов расчета» в разделе «Динамика» в виде следующих трех таблиц.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВ МАСС, тс					
	1	2	3	4	5
1 - (мод-3)					
Z		1.2	2.7	1.2	

В таблице дан вес точечных масс в узлах 2, 3, 4 расчетной схемы балки после приведения в программе SCAD распределенной массы конечных элементов к указанным узлам.

Загру:		СОБСТВ.:	Ч А С Т О Т Ы:		ПЕРИОДЫ
жение:	П/П :	ЗНАЧЕНИЯ :	1/С :	ГЦ :	С
1	1	.0137914	72.50864	11.54596	.0866103
	2	.0027208	367.5373	58.52505	.0170867
	3	.0015063	663.8773	105.7129	.0094595

Ф О Р М Ы К О Л Е Б А Н И Й, м (рис. 2.5)					
	1	2	3	4	5
1 - 1 (мод-3)					
Z		0.6994	1.	0.6994	
1 - 2					
Z		1.	0	-1.	
1 - 3					
Z		1.	-0.6216	1.	

Примечание к табл. В результате решения в программе SCAD системы уравнений (2.15) с точностью до постоянной величины определяются перемещения масс в узлах 2, 3 и 4, являющиеся компонентами векторов \bar{u}_i , $i = 2, 3, 4$. Постоянная величина \bar{u}_{ki} (2.26) в каждой СФК принимается равной значению максимального перемещения узла k в этой СФК. Таким образом, в таблице приведены значения вектора \bar{y}_i (2.26).

При открытии на дереве проекта раздела «Графический анализ», могут быть последовательно открыты и сохранены изображения СФК (рис. 2.4).

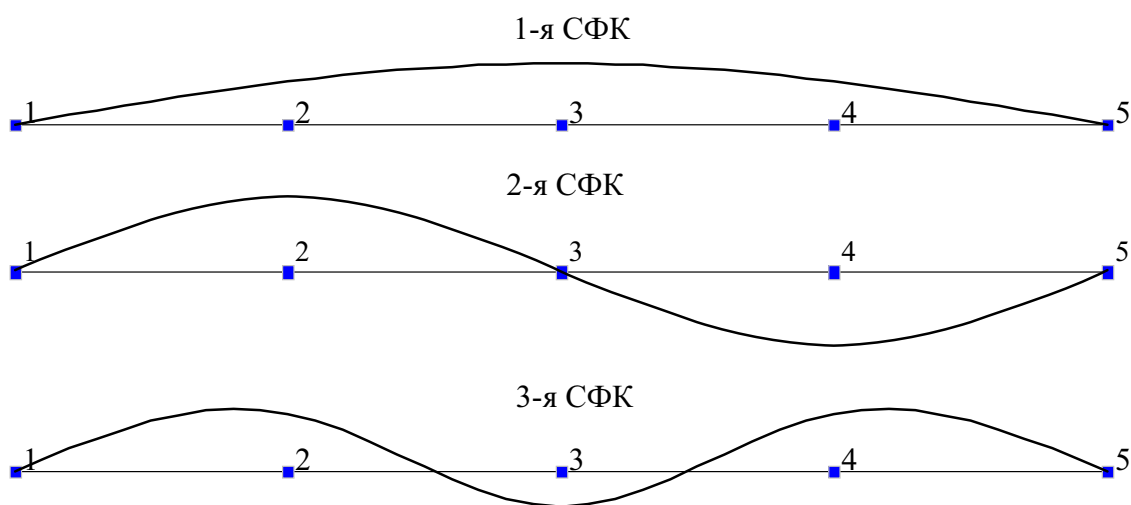


Рис. 2.4

Обратим внимание во второй таблице на значение первой частоты. Она получилась примерно на 5 процентов выше соответствующей собственной частоты в системе с одной степенью свободы (см. пример 4 в подразделе 1.1).

Это означает, что более точная аппроксимация распределенной массы балки дискретными массами, уменьшая приведенную массу, относящуюся к среднему узлу, способствует увеличению первой собственной частоты (в системе с одной степенью свободы это видно из формул (1.14)).

Следовательно, при увеличении числа элементов, на которые разделена балка, собственные частоты и формы колебаний будут уточняться.

Ниже приведены соответствующие таблицы при разделении балки на 8 элементов.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВ МАСС, тс									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 -	(мод-7)								
Z	.6	.6	.6	2.1	.6	.6	.6	.6	

Загру:	N	СОБСТВ.	ЧАСТОТЫ				ПЕРИОДЫ	
: П/П :	:	:	:				:	
жение:	:	ЗНАЧЕНИЯ:	1/С	:	Гц	:	С	
1	1	.013788	72.52652		11.5488		.086589	
	2	.0027018	370.1119		58.93501		.0169678	
	3	.0014249	701.7884		111.7497		.0089485	
	4	.0006802	1470.149		234.1002		.0042716	
	5	.0005024	1990.379		316.9394		.0031551	
	6	.0003203	3121.445		497.0455		.0020118	
	7	.0002825	3539.174		563.5627		.0017744	

ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ, м										
	1	2	3	4	5	6	7	8		
1 -	1	(мод-7)								
Z		.3766	.6994	.92	1.	.92	.6994	.3766		
1 -	2									
Z		-.7071	-1.	-.7071		.7071	1.	.7071		
1 -	3									
Z		.827	.8046	.0207	-.5104	.0207	.8046	.827		
1 -	4									
Z		.6666		-.6666		.6666		-.6666		
1 -	5									
Z		.5785	-.3111	-.4655	.2446	-.4655	-.3111	.5785		
1 -	6									
Z		.4309	-.6094	.4309		-.4309	.6094	-.4309		
1 -	7									
Z		.388	-.6463	.7246	-.2061	.7246	-.6463	.388		

Для иллюстрации вида СФК в последнем разбиении балки на КЭ приведены еще две СФК: четвертая и пятая (рис. 2.5).

С увеличением числа КЭ собственные частоты и соответствующие им СФК уточняются.

Необходимость разбиения рассматриваемой системы на большее число элементов определяется практической необходимостью получения заданной точности расчета.

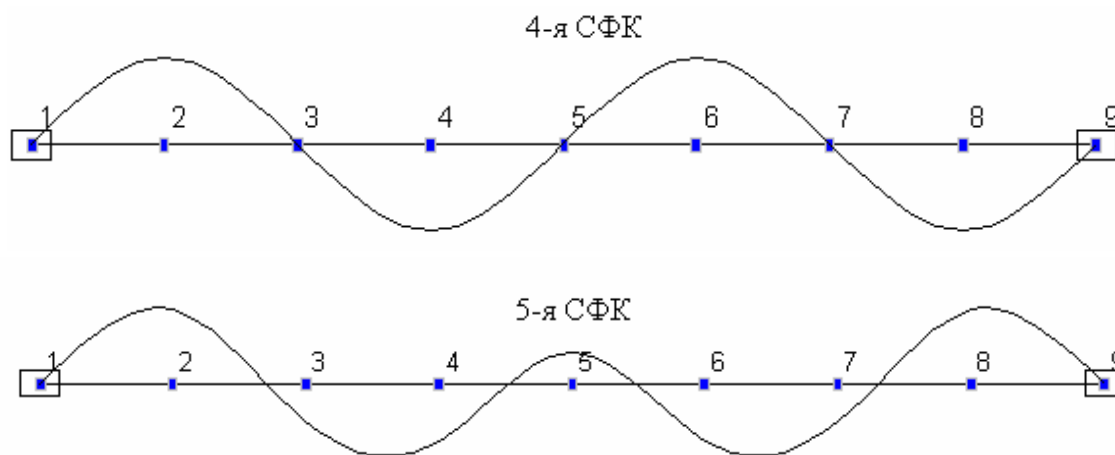


Рис. 2.5

Число конечных элементов должно быть выбрано таким, чтобы нужные СЧ и СФК практически не изменялись бы при дальнейшем увеличении числа КЭ.

2.3. Свойство ортогональности собственных форм колебаний

Собственные формы колебаний обладают свойством ортогональности, заключающимся в том, что соблюдается равенство нулю следующего произведения матриц:

$$(\bar{\mathbf{u}}_j)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i = 0 \quad \text{при } j \neq i. \quad (2.29)$$

Для доказательства рассмотрим две любые СФК (j - ю и i - ю), которые соответствуют некоторым двум не равным друг другу собственным частотам ($\omega_j \neq \omega_i$).

Представим систему уравнений (2.16) в виде

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{D}(\omega_i^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i). \quad (2.30)$$

Учитывая смысл матрицы \mathbf{D} , как матрицы влияния сил на перемещения по их направлениям, заключаем, что $\bar{\mathbf{j}}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i$ представляет собой вектор сил, статически приложенных к рассматриваемой упругой системе и вызывающих ее перемещения в виде вектора $\bar{\mathbf{u}}_i$. Это было показано и в выражениях (2.27) и (2.28).

Для j -ой СФК можно записать выражение аналогичное (2.28).

Используем для этих двух произвольных форм колебаний теорему о взаимности работ [21]:

$$(\mathbf{j}_j)^T \bar{\mathbf{u}}_i = (\mathbf{j}_i)^T \bar{\mathbf{u}}_j. \quad (2.31)$$

Учитывая, что

$$(\mathbf{j}_j)^T = (\omega_j^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_j)^T = \omega_j^2 (\bar{\mathbf{u}}_j)^T \mathbf{M} \quad \text{и} \quad (\mathbf{j}_i)^T = (\omega_i^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i)^T = \omega_i^2 (\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M},$$

получим

$$\omega_j^2 (\bar{\mathbf{u}}_j)^T \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{u}}_i = \omega_i^2 (\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_j.$$

Но

$$(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{u}}_j = (\bar{\mathbf{u}}_j)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i, \quad (2.32)$$

поэтому

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2) (\bar{\mathbf{u}}_j)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i = 0.$$

Так как по постановке задачи имеются две разные формы колебаний, у которых $(\omega_j^2 - \omega_i^2) \neq 0$, то получим равенство (2.29), что и требовалось доказать.

Свойство ортогональности СФК может быть также представлено в виде произведения (2.33), в котором вместо матрицы масс в приведенном выше выражении (2.29) использована матрица жесткости \mathbf{K} :

$$(\bar{\mathbf{u}}_j)^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_i = 0. \quad (2.33)$$

Для пояснения матричное уравнение (2.15), записанное для какой-то i -ой СФК, умножим слева на матрицу строку $(\bar{\mathbf{u}}_j)^T$. Тогда получим:

$$(\bar{\mathbf{u}}_j)^T \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}}_i - \varphi_i (\bar{\mathbf{u}}_j)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i = 0. \quad (2.34)$$

Поскольку второе слагаемое в уравнении (2.34) равно нулю вследствие свойства ортогональности СФК (2.29), то равно нулю и первое слагаемое:

Свойство ортогональности СФК является важным свойством, которое используется при решении динамических задач.

Примечание. Очевидно, что при проверке свойства ортогональности СФК в виде (2.29) можно вместо векторов $\bar{\mathbf{u}}_j$ и $\bar{\mathbf{u}}_i$ использовать соответствующие векторы $\bar{\mathbf{y}}_j$ и $\bar{\mathbf{y}}_i$ (см. выражение (2.15), а вместо матрицы масс \mathbf{M} использовать матрицу весов масс $\mathbf{G} = \mathbf{M} \cdot g$. Действительно, равенство (2.29) не изменится при умножении его на постоянные величины \bar{u}_j , \bar{u}_i и g .

Пример 1. Выполним вручную проверку свойства (2.29) ортогональности для первой и второй и для первой и третьей СФК системы с тремя степенями свободы, рассмотренной в предыдущем примере. С учетом сделанного примечания вместо (2.29) можно записать:

$$\begin{aligned}
& (\bar{\mathbf{y}}_1)^T \mathbf{G}(\bar{\mathbf{y}}_2) = \\
& = (0.699 \quad 1 \quad 0.699) \cdot \begin{bmatrix} 1.2 & & \\ & 2.7 & \\ & & 1.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0.839 \quad 2.7 \quad 0.839) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0; \quad (2.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{\mathbf{y}}_2)^T \mathbf{G}(\bar{\mathbf{y}}_3) = \\
& = (0.839 \quad 2.7 \quad 0.839) \cdot \begin{bmatrix} 1.2 & & \\ & 2.7 & \\ & & 1.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6216 \\ 1 \end{pmatrix} = (0.839 \quad -1.678 \quad 0.839) = 0. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Пример 2. Используем свойство ортогональности СФК (2.29) при определении постоянных интегрирования в выражении (2.17) с помощью начальных условий движения масс в виде (2.7). Для использования начальных условий подставим (2.17) в (2.10). Тогда получим выражения (2.37) и (2.38):

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{u}}_i (A_{1i} \cos \omega_i t + A_{2i} \sin \omega_i t); \quad (2.37)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{u}}_i (-A_{1i} \cdot \omega_i \sin \omega_i t + A_{2i} \omega_i \cos \omega_i t). \quad (2.38)$$

После подстановки сюда $t = 0$, начальные условия запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{u}}_i A_{1i} = \mathbf{u}^0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{u}}_i (A_{2i} \omega_i) = \mathbf{u}^{00}. \quad (2.39)$$

Умножив эти выражения на матрицу-строку $(\bar{\mathbf{u}}_j)^T \mathbf{M}$, с учетом (2.29), найдем:

$$A_{1i} = \frac{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \mathbf{u}^0}{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i}; \quad A_{2i} = \frac{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \mathbf{u}^{00}}{\omega_i (\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i}. \quad (2.40)$$

2.4. Система уравнений свободных затухающих колебаний и ее решение методом разложения вектора искомого перемещения по векторам перемещений в СФК

Рассмотрим расчетную схему сооружения в виде невесомого упругого линейно деформируемого стержня, на котором располагается n точечных масс (см. рис. 2.1).

Также как при незатухающих колебаниях стержня при учете только поперечных к оси стержня перемещениях точечных масс будем иметь систему с n степенями свободы.

Систему уравнений ее свободных затухающих колебаний, как и при незатухающих колебаниях (см. системы уравнений (2.1) и (2.2)), запишем в матричном виде по аналогии с уравнениями для схемы с одной степенью свободы (см. уравнения (1.60) и (1.61)):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.41)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}(-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}) \quad (2.42)$$

В отличие от систем уравнений (2.1) и (2.2) системы уравнения для затухающих колебаний содержат еще одно слагаемое, которое учитывает силы неупругого сопротивления материала. Для матричных уравнений это означает добавление вектора сил неупругого сопротивления, который в скорректированном методе Фойгта [4] имеет вид:

$$\mathbf{r}_H = -\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}. \quad (2.43)$$

Вектор $\dot{\mathbf{u}}$ в (2.43) является вектором скоростей масс и имеет вид аналогичный виду векторов перемещений \mathbf{u} и ускорений $\ddot{\mathbf{u}}$ масс (см. (2.3)); матрица \mathbf{C} представляет собой матрицу демпфирования.

Решение указанных систем уравнений с использованием разложения (2.10) при учете сил неупругого сопротивления в виде вектора (2.43) оказывается возможным, если наряду со свойством ортогональности СФК в виде (2.29) и (2.33) предположить наличие свойства ортогональности в виде

$$(\bar{\mathbf{u}}_j)^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{u}}_i = 0, \quad j \neq i. \quad (2.44)$$

В этом случае системы уравнений движения масс в первой (2.42) и второй (2.43) формах записи разделяются соответственно на системы однородных уравнений (2.15), (2.16) и уравнение (2.45) для определения функции времени $\Phi_i(t)$ для каждой i -ой СФК:

$$\ddot{\Phi}_i(t) + 2\varepsilon_i \dot{\Phi}_i(t) + \omega_i^2 \Phi_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.45)$$

где введено обозначение

$$2\varepsilon_i = \frac{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{u}}_i}{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i}. \quad (2.46)$$

Решение уравнения (2.45) известно (см. подраздел 1.2):

$$\Phi_i(t) = e^{-\varepsilon_i t} (A_{1i} \cos \omega_{Di} t + A_{2i} \sin \omega_{Di} t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.47)$$

Эта функция показывает, что каждой i -й СФК соответствует некоторое гармоническое затухающее колебание.

Интенсивность затухания колебаний характеризует коэффициент ε_i , который может быть определен по коэффициентам, известным из подраздела 1.2 (см. (1.76)):

$$\varepsilon_i = \frac{\delta_{\text{л}}}{2\pi} \omega_{Di} = \frac{\Psi}{4\pi} \omega_{Di} = \frac{\gamma_{\text{н}}}{2} \omega_{Di}, \quad (2.48)$$

где ω_{Di} – частота затухающих колебаний, соответствующая i -ой СФК и определяемая для каждой СФК из выражений аналогичных (1.77).

В связи с тем, что в формулах (1.77) для строительных конструкций $(\gamma_H)^2 = \left(\frac{\Psi}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{\delta_L}{\pi}\right)^2 \ll 1$, получим $\omega_{Di} \approx \omega_i$ и, следовательно, $T_{Di} \approx T_i$. Поэтому для определения ε_i можно использовать также выражение (1.80) с учетом равенства (1.81).

Постоянные интегрирования в (2.45) определяются также как для незатухающих колебаний и, после использования свойства ортогональности СФК (2.29), получаются в виде

$$A_{1i} = \frac{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \mathbf{u}^0}{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i}; \quad A_{2i} = \frac{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \mathbf{u}^{00}}{\omega_i (\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i} + \frac{\gamma_H}{2} A_{1i}. \quad (2.49)$$

2.5. Система уравнений вынужденных колебаний и ее решение методом разложения вектора искомых перемещений и вектора заданных нагрузок по векторам перемещений в СФК

Рассмотрим ход решения этой задачи на примере упругой линейно деформируемой системы, изображенной на рис. 2.1. Допустим, что к массам в направлении поперек оси консоли приложен вектор внешних динамических сил, изменяющих свое значение во времени:

$$\mathbf{p} = (P_1(t) \quad P_2(t) \quad \dots \quad P_n(t))^T. \quad (2.50)$$

Введя этот вектор в систему уравнений свободных колебаний, записанную в форме метода перемещений (2.42) или в форме метода сил (2.43), получим две аналогичных формы системы уравнений вынужденных колебаний:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}; \quad (2.51)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}(-\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{p}). \quad (2.52)$$

Начальные условия движения при $t = 0$ будем считать нулевыми.

Ход решения рассмотрим на примере системы уравнений (2.51). Выполним следующие действия.

1. Подставим в (2.51) вектор искомых перемещений масс при вынужденных колебаниях в виде разложения по СФК (2.10) и соответствующие разложения векторов производных.

2. Полученную систему уравнений умножим слева на матрицу-строку $(\bar{\mathbf{u}}_j)^T$ и используем свойство ортогональности СФК в виде (2.29), (2.33) и (2.44). В результате вместо системы (2.51) n уравнений с n неизвестными получим n независимых уравнений ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\ddot{\Phi}_i(t)\{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i\} + \dot{\Phi}_i(t)\{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{u}}_i\} + \Phi_i(t)\{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_i\} = (\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{p}, \quad (2.53)$$

Поскольку при умножении матрицы-строки $(\bar{\mathbf{u}}_j)^T$ на матрицы $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ получим соответствующие матрицы-строки, то результатом умножения матриц в фигурных скобках будут скалярные величины.

3. Разделим уравнение (2.53) на скалярную величину $(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i$. При этом во втором слагаемом уравнения учтем уже известное обозначение (2.46). В третьем слагаемом учтем, что из уравнения (2.15) при умножении его на матрицу-строку $(\mathbf{u}_i)^T$ получается

$$\frac{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_i}{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i} = \omega_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для слагаемого уравнения, перенесенного в правую часть, после его деления на скалярную величину $(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i$ введем новое обозначение

$$\frac{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{p}}{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i} = H_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.54)$$

Функция $H_i(t)$ является коэффициентом разложения вектора заданной нагрузки \mathbf{p} по собственным формам колебаний в виде:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i H_i(t). \quad (2.55)$$

Умножив (2.55) на матрицу-строку $(\bar{\mathbf{u}}_j)^T$ (см. (2.53)), с учетом свойства ортогональности СФК (2.29) получим (2.54).

Уравнение (2.53) примет вид уравнения вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы (1.82)

$$\ddot{\Phi}_i(t) + 2\varepsilon_i \dot{\Phi}_i(t) + \omega_i^2 \Phi_i(t) = H_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.56)$$

решение которого при нулевых начальных условиях имеет вид интеграла Дюамеля (1.84):

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t H_i(\tau) e^{-\varepsilon_i(t-\tau)} \sin \omega_i(t-\tau) d\tau. \quad (2.57)$$

В общем виде вектор \mathbf{p} (2.50) является произвольным. Однако, для многих практических задач, например для гармонических колебаний и при расчете сооружений на сейсмическое воздействие рассматриваются частные случаи, когда вектор \mathbf{p} можно представить в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 f(t). \quad (2.58)$$

где \mathbf{p}_0 – заданный вектор амплитудных значений сил; $f(t)$ – заданная функция, характеризующая изменение сил во времени. Тогда из (2.54) получим

$$H_i(t) = \bar{\eta}_i f(t). \quad (2.59)$$

Здесь постоянная для i – ой СФК величина $\bar{\eta}_i$ определяется из формулы:

$$\bar{\eta}_i = \frac{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{p}_0}{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.60)$$

Подставим (2.59) в интеграл Дюамеля (2.57) и представим его в виде (2.61), где (с учетом $\omega_{Di} \approx \omega_i$) $\beta_i(t)$ определится из интеграла (2.62).

$$\Phi_i(t) = \frac{\bar{\eta}_i}{\omega_i^2} \beta(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.61)$$

$$\beta_i(t) = \omega_i \int_0^t f(\tau) e^{-\varepsilon_i(t-\tau)} \sin \omega_i(t-\tau) d\tau. \quad (2.62)$$

Учитывая (2.61), искомый вектор (2.10) можно записать в виде:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{u}}_i \Phi_i(t) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\eta}_i \omega_i^{-2} \beta_i(t), \quad (2.63)$$

где

$$\boldsymbol{\eta}_i = \bar{\eta}_i \bar{\mathbf{u}}_i \quad (2.64)$$

является вектором локальных коэффициентов i – ой СФК, соответствующих каждой массе в направлении ее степени свободы.

Как видно из (2.30), вектору перемещений $\bar{\mathbf{u}}_i$ в i – ой СФК соответствует вектор амплитудных значений сил инерции $\bar{\mathbf{j}}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i$ (2.28).

Выполнив статический расчет рассматриваемой консоли от этих сил, получим изгибающие моменты $\bar{M}_{k,i}$ и поперечные силы $\bar{Q}_{k,i}$ в ее сечениях k i – й СФК, а по ним соответствующие нормальные и касательные напряжения. Обозначим любую такую величину $\bar{v}_{k,i}$.

В соответствии с разложением (2.63) оказываются разложенными по СФК и все нагрузки, и все усилия, и все напряжения.

Разложение нагрузок представляется в виде:

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{j}}_i \Phi_i(t) = \sum_{i=1}^n (\omega_i^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i) \Phi_i(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}_i \beta_i(t), \quad (2.65)$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{p} + \mathbf{j} + \mathbf{r}_H$ является суммарным вектором всех нагрузок, действующих на рассматриваемую систему;

$$\mathbf{s}_i = \bar{\mathbf{j}}_i \Phi_i(t) = \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}_i \beta_i(t) \quad (2.66)$$

представляет собой вектор нагрузок, приходящихся на систему в i -й СФК.

Разложение величины $v_k = v_k(t)$ (усилия или напряжения) по соответствующим не зависящим от времени величинам \bar{v}_{ki} в СФК имеет вид:

$$v_k(t) = \sum_{i=1}^n v_{ki} = \sum_{i=1}^n \bar{v}_{ki} \Phi_i(t) = \sum_{i=1}^n \bar{v}_{ki} \bar{\eta}_i \omega_i^{-2} \beta_i(t), \quad (2.67)$$

Аналогичный результат при использовании метода разложения вектора искомых перемещений (2.10) и вектора заданных нагрузок (2.55) по собственным векторам $\bar{\mathbf{u}}_i$ получился бы при решении системы уравнений вынужденных колебаний в форме (2.52).

Полученные формулы позволяют наметить следующую последовательность решения задачи методом разложения величин, входящих в уравнения вынужденных колебаний, по СФК.

1. Определяется спектр собственных частот (2.23) незатухающих колебаний рассматриваемой расчетной схемы сооружения и для каждой i -й СФК находятся соответствующие собственной частоте ω_i вектора перемещений масс $\bar{\mathbf{u}}_i$ по направлению принятых для расчета их степеней свободы,

Эта часть расчета сооружения на вынужденные колебания при использовании программы SCAD соответствует решению задачи «Модальный анализ», даже, если она была выполнена отдельно.

2. При задании вектора возмущающей нагрузки в виде (2.58) определяются постоянные для каждой СФК коэффициенты $\bar{\eta}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, (2.60) и векторы локальных коэффициентов СФК $\boldsymbol{\eta}_i = \bar{\eta}_i \bar{\mathbf{u}}_i$ (2.64).

3. По формуле (2.28) определяются амплитудные значения инерционных сил $\bar{\mathbf{j}}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i$ и выполняется статический расчет с целью определения любых k -ых усилий или напряжений в i -й СФК ($i = 1, 2, \dots, n$).

4. Для каждой СФК должен вычисляться интеграл (2.62).

5. Далее выполняются суммирования (2.63), (2.65) и (2.67) для вычисления соответствующих искомых величин в интересующие расчетчика моменты времени.

Однако четвертый и пятый пункты являются весьма трудоемкими. Поэтому, при решении практических задач для строительных конструкций обычно в п.4 ограничиваются определением в каждой СФК только максимальных значений интеграла:

$$\beta_i = \max_t |\beta_i(t)|. \quad (2.68)$$

В этом случае искомые величины в СФК становится независимым от времени (см. слагаемые в формулах (2.63), (2.65) и (2.67)):

$$\mathbf{a}_{oi} = \max_t |\mathbf{u}_i(t)| = \boldsymbol{\eta}_i \omega_i^{-2} \beta_i; \quad (2.69)$$

$$\mathbf{s}_{oi} = \max_t |\mathbf{s}_i(t)| = \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}_i \beta_i = \mathbf{G} \boldsymbol{\eta}_i \beta_i / g; \quad (2.70)$$

$$v_{oi} = \max_t |v_i(t)| = \bar{v}_i \bar{\eta}_i \omega_i^{-2} \beta_i \quad (2.71)$$

В инженерной практике, для суммирования этих независимых от времени *амплитудных значений*, полученных в результате разложения искомых величин по СФК, и определения их расчетных значений применяют приближенные методы, которые рассмотрим далее применительно к конкретным задачам.

2.6. Метод разложения искомых величин по СФК при установившихся гармонических колебаниях

Предположим, что на систему с n степенями свободы задан вектор возмущающей нагрузки в виде (2.58). Требуется определить перемещения, усилия и напряжения при установившихся гармонических колебаниях системы.

Для решения используем метод разложения искомых величин по СФК и соответствующие формулы, полученные в предыдущем подразделе. Конкретизируем вид формул для любой i -й СФК применительно к рассматриваемому варианту, когда $f(t) = \sin \theta t$.

Подставив эту функцию в интеграл (2.62), запишем для него решение, известное из подраздела (1.4), в виде:

$$\beta_i(t) = \beta_i \sin(\theta t - \alpha_i) \quad (2.72)$$

где по аналогии с выражениями (1.95) и (1.99)

$$\beta_i = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_i^2}\right)^2 + 4\varepsilon_i^2 \frac{\theta^2}{\omega_i^4}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_i^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\theta^2}{\omega_i^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_i^2}\right)^2 + \gamma_H^2 \frac{\theta^2}{\omega_i^2}}}. \quad (2.73)$$

$$\alpha_i = \arctg \frac{2\varepsilon_i \frac{\theta}{\omega_i^2}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_i^2}} = \arctg \frac{2\zeta \frac{\theta}{\omega_i}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_i^2}} = \arctg \frac{\gamma_H \frac{\theta}{\omega_i}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_i^2}}. \quad (2.74)$$

Тогда векторы искоемых перемещений (2.63) и суммарных нагрузок (2.65) запишутся в виде:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{u}}_i \cdot \Phi_i(t) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\eta}_i \cdot \omega_i^{-2} \cdot \beta_i(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{oi} \sin(\theta t - \alpha_i); \quad (2.75)$$

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{j}}_i \Phi_i(t) = \sum_{i=1}^n (\omega_i^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i) \Phi_i(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_{oi} \sin(\theta t - \alpha_i), \quad (2.76)$$

где \mathbf{a}_{oi} и \mathbf{s}_{oi} представляют собой векторы амплитудных значений соответствующих векторов, определяемых по формулам (2.69), (2.70) для каждой СФК.

Используя известную тригонометрическую формулу

$$\sin(\theta t \pm \alpha_i) = \sin \theta t \cos \alpha_i \pm \cos \theta t \sin \alpha_i, \quad (2.77)$$

представим решения (2.76) и (2.77) в виде:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{oi} \sin(\theta t - \alpha_i) = \mathbf{a}' \sin \theta t - \mathbf{a}'' \cos \theta t; \quad (2.78)$$

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_{oi} \sin(\theta t - \alpha_i) = \mathbf{s}' \sin \theta t - \mathbf{s}'' \cos \theta t, \quad (2.79)$$

Примечание к формулам (2.78) и (2.79). В данном учебном пособии процесс получения формул для вычисления амплитудных векторов \mathbf{a}' , \mathbf{a}'' , \mathbf{s}' , \mathbf{s}'' не рассматривается. С учетом принятых ранее обозначений (в том числе в подразделе 1.4) приведем соответствующие формулы в окончательном виде:

$$\mathbf{a}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}'_i, \text{ где } \mathbf{a}'_i = a_i \omega_i^{-2} \bar{\mathbf{u}}_i, \quad a_i = \bar{\eta}_i \beta_i^2 \chi_i;$$

$$\mathbf{a}'' = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}''_i, \text{ где } \mathbf{a}''_i = b_i \omega_i^{-2} \bar{\mathbf{u}}_i, \quad b_i = \bar{\eta}_i \beta_i^2 \gamma_n;$$

$$\mathbf{s}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}'_i, \text{ где } \mathbf{s}'_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{a}'_i = a_i \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i = \chi_i \beta_i^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}_i;$$

$$\mathbf{s}'' = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}''_i, \text{ где } \mathbf{s}''_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{a}''_i = b_i \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i = \gamma_n \beta_i^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}_i.$$

Из них, как частный случай, получаются формулы (1.97)* и (1.111), полученные для амплитудных значений A'' и A'' перемещения массы и соответствующих амплитудных значений S' и S'' инерционной силы в системе с одной степенью свободы. При этом скалярную величину в числителе выражения (2.60) для скалярной величины $\bar{\eta}_i$ можно рассматривать как обобщенную силу в СФК с номером i : $P_{oi} = (\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{p}_o$, а скалярную величину в знаменателе выражения (2.60) – как обобщенную массу $m_i = (\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i$ в этой же СФК.

Приведенные формулы аналогичны используемым в программе SCAD [23] и полученным в учебнике [10] (с учетом принятых в указанных работах обозначений и несколько отличающейся формы их представления).

После определения векторов нагрузок s', s'' (2.79) выполняются два соответствующих статических расчета и определяются усилия, например, M'_k и M''_k для изгибающих моментов в сечении k . Расчетные усилия, например, $M_{k,p}$ для изгибающего момента в сечении k , определяется по формуле

$$M_{k,p} = \sqrt{(M'_k)^2 + (M''_k)^2}. \quad (2.80)$$

Пример 1. В примере 1 подраздела 1.4 было рассмотрено решение задачи о вынужденных колебаниях железобетонной балки с электродвигателем, расположенным по середине ее пролета. Расчет выполнялся от двух статических загрузжений (загружение 1 с именем «св-б» от собственного веса балки и загружение 2 с именем «св-д» от собственного веса двигателя) а также от динамического нагружения вертикальной гармонической нагрузкой $P(t) = P_0 \sin \theta t$ (загружение 3 с именем «гарм-1») по расчетной схеме балки в виде системы с одной степенью свободы (см. рис. 1.24, б).

Рассмотрим решение этой же задачи с использованием расчетной схемы МКЭ, когда балка по длине пролета разделена на четыре равных конечных элемента типа 2 (см. рис. 2.2, а, б). В этом случае при нагружении узла 3 динамической нагрузкой в виде $P(t) = P_0 \sin \theta t$ получим расчетную схему в виде системы с тремя степенями свободы, которая может быть представлена в виде, приведенном на рис. 2.6.

Сначала создадим статические загрузки 1 и 2 соответственно от собственного веса балки и двигателя. Затем перейдем к динамическому нагружению для решения задачи об установившихся гармонических колебаниях системы, вызванных вращением ротора электродвигателя с теми же параметрами, которые рассматривались при решении аналогичной задачи для системы с одной степенью свободы (см. пример 1 в подразделе 1.4).

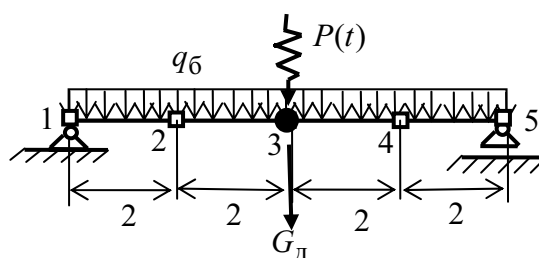


Рис. 2.6

Этап 3. Создание загрузки 3 «Гарм-3» для динамической задачи «Гармонические колебания». Для этого нажмем кнопку **D** на инструментальной панели, соответствующей разделу **Загружение** и откроем первую страницу «Ввод параметров динамической нагрузки»

диалогового окна «Параметры динамических воздействий» (вид окна здесь не приводится). На поле «Вид воздействия» выбираем «Гармонические колебания» и делаем запись (например, «гарм-3») на светлом поле «Имя загрузки».

Затем выбираем в верхней части диалогового окна «Гармонические колебания». Откроется вторая страница окна, часть которого с введенными параметрами приведена ниже.

Ввод параметров динамической нагрузки Гармонические колебания

Учет промежуточных резонансных состояний
 Расчет на заданную частоту


Число учитываемых форм собственных колебаний 3

Коэффициент неупругого сопротивления материала 0.09

Круговая частота внешнего воздействия 52.33 рад/сек

Точность вычисления частоты 0.01

Необходимые для заполнения этого окна данные аналогичны (кроме числа учитываемых СФК) использованным данным в примере 1 подраздела 1.5 при рассмотрении задачи для системы с одной степенью свободы.

Подтвердив введенную информацию нажатием кнопки «ОК», закроем диалоговое окно и на инструментальной панели раздела **Загрузки** нажмем кнопку  «Инерционные характеристики». В открывшемся списке выбираем «Гармонические колебания». Откроется диалоговое окно, заполненная исходными данными основная часть которого приведена ниже.

Направление X Y Z

Параметры воздействия

Вес массы в узле 1.5 Т


Величина амплитуды 0.42 Т

Закон колебания sin

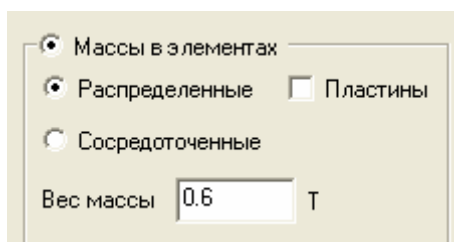
Сдвиг фазы (радиан) 0

Оно заполнено для гармонической силы, приложенной в узле 3, теми же исходными данными, что и при расчете балки как системы с одной степенью свободы.

После закрытия окна нажатием кнопки «ОК» необходимо «отметить» узел 3 (эта процедура неоднократно встречалась ранее).

Затем еще раз нажмем кнопку  «Инерционные характеристики». В открывшемся списке выбираем «Задание масс». Откроется окно, которое было использовано ранее в примере расчета системы с одной степенью свободы для задания равномерно распределенной массы стержневых конечных элементов типа 2. В данной задаче на

приведенном ниже поле диалогового окна «массы в элементах» вводится вес одного метра длины элемента $q_6 = (2.5 \text{ тс/м}^3) \cdot (0.24 \text{ м}^2) \cdot (1 \text{ м}) = 0.6 \text{ тс}$).



После закрытия окна нажатием кнопки «ОК» элементы на расчетной схеме, имеющие указанную интенсивность веса, «отмечаются» на расчетной схеме МКЭ уже известным способом (см. предыдущие примеры в данном пособии и в работах [1, 24]).

В результате получим схему нагружения балки с именем «гарм-3» в виде, уже встречавшемся при решении динамической задачи «Модальный анализ» (см. рис. 2.3). Выполненное нагружение сохраняем.

Этап 4. Выполнение линейного расчета и приведение его результатов. Результаты расчета динамической задачи «Гармонические колебания» выдаются в таблице «Оформление результатов расчета» в разделе «Динамика» в виде следующих четырех таблиц.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВ МАСС, тс					
	1	2	3	4	5
1 - (гарм-3)					
Z		1.2	2.7	1.2	

Загру:	N	СОБСТВ.	Ч А С Т О Т Ы		ПЕРИОДЫ
жение:	П/П	ЗНАЧЕНИЯ	1/C	ГЦ	С
1	1	.0137914	72.50864	11.54596	.0866103
	2	.0027208	367.5373	58.52505	.0170867
	3	.0015063	663.8773	105.7129	.0094595

ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ, м (см. рис.2.4)					
	1	2	3	4	5
1 - 1 (гарм-3)					
Z		.6994	1.	.6994	
1 - 2					
Z		1.		-1.	
1 - 3					
Z		1.	-.6216	1.	

И Н Е Р Ц И О Н Н Ы Е Н А Г Р У З К И, тс (рис. 2.7, в, г)					
	1	2	3	4	5
1 - 1 (гарм-3-2)					
Z		.0964	.7295	.0964	
1 - 2					
Z		-.0277	-.1272	-.0277	

Инерционные силы представлены в таблице в виде амплитудных значений $S_{k,1}$ и $S_{k,2}$, где $k=2,3,4$ – номер узла в расчетной схеме (рис. 2.7, в, г), 1 и 2 – номера составляющих векторов s' и s'' суммарной (по всем СФК) нагрузки (см. (2.79)).

Перемещения при установившихся гармонических колебаниях (загружение «гарм.-3») выдаются также в виде двух амплитудных значений (см. (2.78) и рис. 2.7, а, б):

П Е Р Е М Е Щ Е Н И Я У З Л О В, мм					
	1	2	3	4	5
1 - (св-б)					
Z		-1.034	-1.452	-1.034	
2 - (св-д)					
Z		-.4992	-.7262	-.4992	
3 - 1 (гарм-3)					
Z		-.2895	-.4174	-.2895	(рис. 2.7, а)
3 - 2					
Z		.0557	.08	.0557	(рис. 2.7, б)

Ординаты эпюр изгибающих моментов (и не приведенных здесь поперечных сил) выдаются при установившихся гармонических колебаниях в виде двух величин, соответствующих действию векторов s' и s'' суммарной (по всем СФК) нагрузки (см. табл. усилий и эпюры M' и M'' на 2.7, в, г).

У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ, тс·м									
2_	1-1	1-2	2-1	2-2	3-1	3-2	4-1	4-2	
1 - (св-б)									
M		3.6	3.6	4.8	4.8	3.6	3.6		
2 - (св-д)									
M		1.5	1.5	3.	3.	1.5	1.5		
3 - 1 (гарм-3)									
M		.9224	.9224	1.652	1.652	.9224	.9224		
3 - 2									
M		-.1827	-.1827	-.3099	-.3099	-.1827	-.1827		
3 - S1									
M		.9403	.9403	1.68	1.68	.9403	.9403		

Кроме того, в приведенной таблице усилий в узлах k балки выдаются расчетные амплитуды ординат эпюры s' и s'' при динамическом нагружении 3 «гарм-3» (на рис. 2.7, в они указаны в скобках).

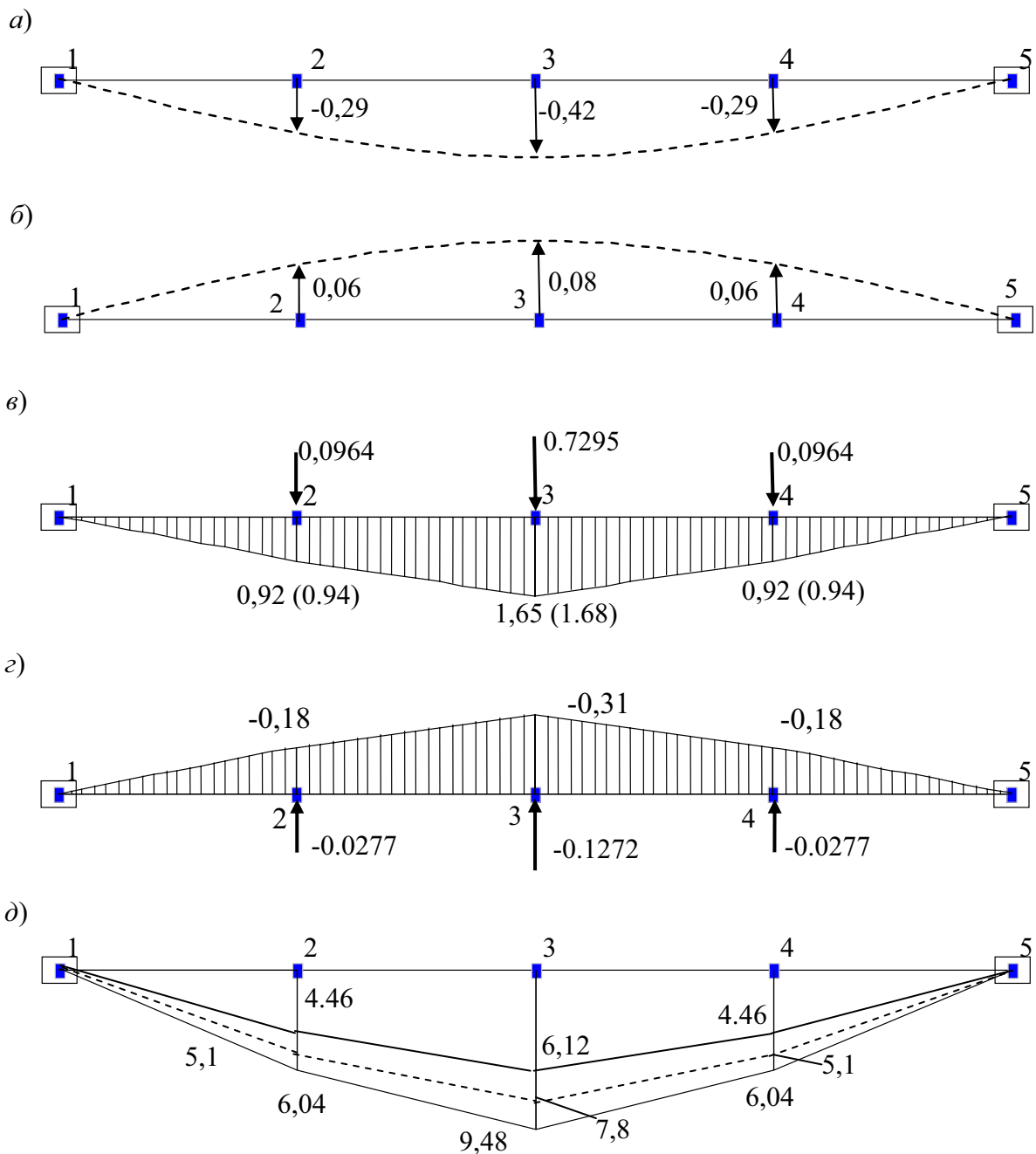


Рис. 2.7

Суммарные значения искомых величин от статических и динамического нагружений получатся суммированием соответствующей величины от статических нагружений и ее расчетного значения при динамическом воздействии. На рис. 2.7, д штриховой линией показана суммарная эпюра $M_{ст}$ и сплошными линиями показано изменение ординат суммарной эпюры $M = M_{ст} \pm M_{д}$ при установившихся гармонических колебаниях балки около статического положения равновесия.

Пример 2. С помощью полученных в данном разделе пособия формул продемонстрируем выполнение некоторых расчетов в рассматриваемой задаче вручную. Исходными данными для выполнения расчетов вручную будем считать определенные в результате модального анализа СЧ и СФК для рассматриваемой балки как для системы с тремя степенями свободы.

1. Вычисление векторов инерционных сил в СФК по формуле (2.70). Предварительно (с учетом примечания к подразделу 2.3) по формуле (2.60) определим постоянные $\bar{\eta}_i$ ($i=1,2,\dots,n$), затем по формуле (2.64) – соответствующие векторы η_i локальных коэффициентов СФК и по формуле (2.74) – максимальные значения коэффициентов динамичности β_i (при $\gamma_n = 0$). Пример вычислений для первой СФК ($i=1$) приведен ниже. Результаты вычислений для всех СФК ($i=1, 2, 3$) приведены в табл. 2.1.

$$\bar{\eta}_1 = \frac{(\bar{\mathbf{u}}_1)^T \mathbf{p}_0}{(\bar{\mathbf{u}}_1)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_1} = \frac{(\bar{\mathbf{y}}_1)^T \mathbf{p}_0}{(\bar{\mathbf{y}}_1)^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{y}}_1} \cdot \frac{g}{\bar{u}_{31}} = \frac{(0.7 \ 1 \ 0.7) \begin{pmatrix} 0 \\ 0.42 \\ 0 \end{pmatrix}}{(0.7 \ 1 \ 0.7) \begin{bmatrix} 1.2 & & \\ & 2.7 & \\ & & 1.2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1 \\ 0.7 \end{pmatrix}} \cdot \frac{g}{\bar{u}_{31}} = 0.108 \frac{g}{\bar{u}_{31}};$$

$$\eta_1 = \bar{\eta}_1 \bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{\eta}_1 \bar{\mathbf{y}}_1 \bar{u}_{31} = 0.108 \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1 \\ 0.7 \end{pmatrix} \frac{g}{\bar{u}_{31}} \bar{u}_{31} = \begin{pmatrix} 0.076 \\ 0.108 \\ 0.076 \end{pmatrix} g;$$

$$\beta_1 = \frac{1}{1 - (\theta/\omega_1)^2} = \frac{1}{1 - (52.33/72.51)^2} = 2.11;$$

$$\mathbf{s}_{oi} = \mathbf{M} \eta_i \beta_i = \frac{\mathbf{G}}{g} \eta_i \beta_i = \begin{pmatrix} S_{2,1} \\ S_{3,1} \\ S_{4,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} 1.2 & & \\ & 2.7 & \\ & & 1.2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.076 \\ 0.108 \\ 0.076 \end{pmatrix} g \cdot 2.11 = \begin{pmatrix} 0.091 \\ 0.292 \\ 0.091 \end{pmatrix} \cdot 2.11 = \begin{pmatrix} 0.19 \\ 0.62 \\ 0.19 \end{pmatrix} \text{ тс.}$$

Т а б л и ц а 2.1

i	$\bar{\eta}_i, 1/c^2$	$\eta_i, м/c^2$	$\mathbf{M} \eta_i, \text{тс}$	β_i	$\mathbf{s}_{oi}, \text{тс}$
1	0.108	$\begin{pmatrix} 0.076 \\ 0.108 \\ 0.076 \end{pmatrix} g$	$\begin{pmatrix} 0.091 \\ 0.292 \\ 0.091 \end{pmatrix}$	2.11	$\begin{pmatrix} 0.19 \\ 0.62 \\ 0.19 \end{pmatrix}$
2	0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	≈ 1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3	-0.076	$\begin{pmatrix} -0.076 \\ 0.047 \\ -0.076 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.091 \\ 0.127 \\ -0.091 \end{pmatrix}$	≈ 1	$\begin{pmatrix} -0.091 \\ 0.127 \\ -0.091 \end{pmatrix}$

2. Выполнение контроля разложения вектора \mathbf{p}_o по СФК. Обратим внимание на следующий возможный контроль расчетов, выполненных в табл. 2.3. Если подставить выражение (2.58) для вектора заданной нагрузки и выражение (2.59) для коэффициента разложения в (2.55), то получим формулу, отражающую разложение вектора \mathbf{p}_o в виде:

$$\mathbf{p}_o = \sum_{i=1}^n \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i \bar{\eta}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{M} \eta_i = \mathbf{M} \sum_{i=1}^n \eta_i = \frac{\mathbf{G}}{g} \sum_{i=1}^n \eta_i. \quad (2.81)$$

В нашем случае проверка (2.81) выполняется:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.42 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.091 \\ 0.292 \\ 0.091 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.091 \\ 0.127 \\ -0.091 \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

3. Вычисление перемещений и усилий в СФК в любом сечении k балки. Вектору инерционных нагрузок \mathbf{s}_i (2.70) соответствует вектор прогибов балки \mathbf{u}_i (2.69) и усилия y_{ki} в любом сечении k , которые можно определить по формуле (2.71). Для сокращения ручных вычислений по формулам (2.69) и (2.71) ограничимся вычислением соответственно прогиба и изгибающего момента только в среднем сечении балки (узел 3 в принятой для МКЭ расчетной схеме) (табл.2.2).

4. Сопоставление суммарного вектора инерционных нагрузок по всем СФК, вычисленного по формуле (2.76) и по формуле (2.79). Этот вектор во всех СФК (при $\gamma_n = 0$) определяется по формуле (2.76) при синусе равном единице.

Т а б л и ц а 2.2

i	$Z_{3i}, \text{мм}$	$M_{3i}, \text{тс} \cdot \text{м}$
1	$Z_{31} = \frac{0.108}{(72.51)^2} \cdot 2.11 = \frac{0.228}{5257.7} = 0.04$	$M_{31} = 0.5 \cdot 4 - 0.19 \cdot 2 = 1.62 \text{ тс} \cdot \text{м}$
2	0	0
3	$Z_{33} = \frac{0.047}{(664)^2} \cdot 1 \approx 0$	$M_{33} = -0.0275 \cdot 4 + 0.091 \cdot 2 = 0.072 \text{ тс} \cdot \text{м}$

В этом случае (без сдвига по фазе) векторы амплитуд \mathbf{s}_{oi} просто суммируются по всем СФК, поскольку без учета сил неупругого сопротивления они изменяются во времени синхронно:

$$\mathbf{s}_p = \begin{pmatrix} S_{2p} \\ S_{3p} \\ S_{4p} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{s}_{oi} = \begin{pmatrix} 0.19 \\ 0.62 \\ 0.19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.091 \\ 0.127 \\ -0.091 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.75 \\ 0.1 \end{pmatrix} \text{ тс}. \quad (2.83)$$

В приведенной таблице результатов расчета инерционных сил в программе SCAD приводятся не векторы \mathbf{s}_{oi} СФК, а векторы \mathbf{s}' и \mathbf{s}'' (2.79). Тогда расчетный вектор \mathbf{s}_p получится (2.84) подсчетом по формуле вида (1.112).

$$\mathbf{s}_p = \begin{pmatrix} S_{2p} \\ S_{3p} \\ S_{4p} \end{pmatrix} = \mathbf{s}' + \mathbf{s}'' = \sqrt{\begin{pmatrix} 0.096 \\ 0.73 \\ 0.096 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} -0.028 \\ -0.127 \\ -0.028 \end{pmatrix}^2} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.74 \\ 0.1 \end{pmatrix} \text{ тс}. \quad (2.84)$$

Этот вектор в программе SCAD не вычисляется.

5. Вычисление расчетного изгибающего момента в среднем сечении балки.

Суммирование амплитудных значений изгибающего момента, вычисленных в среднем сечении балки (узел 3 в расчетной схеме МКЭ балки) для всех трех СФК (см. табл. 2.4), выполняется (без учета сил неупругого сопротивления колебаниям) по формуле (2.85) аналогичной (2.83):

$$M_{3p} = \sum_{i=1}^3 M_{3i} = 1.62 + 0 + 0.072 = 1.69 \text{ тс}\cdot\text{м}. \quad (2.85)$$

В программе SCAD эта расчетная величина была вычислена по формуле (2.80) (см. строку S1 в табл. усилий программы SCAD):

$$M_{3p} = \sqrt{(1.65)^2 + (0.31)^2} = 1.68 \text{ тс}\cdot\text{м}. \quad (2.86)$$

Как видим, расчеты, выполненные двумя способами вычисления расчетных величин (по программе SCAD и вручную), приводят практически к одинаковым результатам.

2.7. Расчет сооружений на сейсмическое воздействие по заданной акселерограмме землетрясения

Рассмотрим расчетную схему сооружения в виде упругой линейно деформируемой консоли, изображенной на рис. 2.1.

Предположим, что опора консоли, а значит и вся консоль, во время землетрясения вместе с поверхностью Земли совершает горизонтальные колебания с ускорением $\ddot{a}_o = \ddot{a}_o(t)$ (см. рис. 1.32, *a*), которое задано в виде акселерограммы [5, 15, 16] (условно она показана на рис. 1.32, *z*). Для дальнейшего удобно представить заданное ускорение в виде $\ddot{a}_o(t)$ (1.147), как это сделано при рассмотрении этой же задачи для системы с одной степенью свободы (см. рис. 1.32, *z*).

В результате горизонтального движения масс, расположенных на консоли (см. рис. 2.1), с заданным ускорением на консоль будут действовать возмущающие силы инерции $P_k(t) = -m_k \ddot{a}_o(t)$, которые можно представить в виде вектора (2.50).

Этот вектор получается перемножением диагональной матрицы масс \mathbf{M} (2.4) на единичный вектор $\mathbf{e} = (1 \ 1 \dots \ 1)^T$ и на одинаковое для всех масс ускорение $\ddot{a}_o(t)$:

$$\mathbf{p} = -\mathbf{M}\mathbf{e} \ddot{a}_o(t). \quad (2.87)$$

Таким образом, вектор возмущающих сил \mathbf{p} имеет вид (2.58), где

$$\mathbf{p}_o = \mathbf{M}\mathbf{e} = (\mathbf{G} / g)\mathbf{e}; \quad f(t) = -\ddot{a}_o(t). \quad (2.88)$$

Все формулы, полученные в подразделе 1.7 при представлении вектора возмущающих сил (2.58) в виде (2.87), остаются без изменения.

2.8. Расчет сооружений на сейсмическое воздействие по СНиП методом разложения искомых величин и сейсмической нагрузки по СФК

Термин «нормативная методика» означает, что этот метод является основным (обязательным) методом расчета сооружений на сейсмическое воздействие, отраженным в действующих СНиП [19]. Идея метода была изложена в подразделе 1.8 для расчетной схемы в виде системы с одной степенью свободы. Здесь приведем последовательность расчета применительно к системам с несколькими ($n > 1$) степенями свободы (см. рис. 2.1).

1. Проводится модальный анализ выбранной расчетной схемы сооружения с n степенями свободы и определяется спектр СЧ $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$ и соответствующие СФК $\bar{\mathbf{u}}_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

2. Определяются сейсмические нагрузки, соответствующие каждой СФК. Они не зависят от времени и имеют вид вектора (2.70). При этом формула (2.70) для определения векторов этих сейсмических сил в соответствии с методикой, приведенной в СНиП [19] и в данном пособии (см. подраздел 1.8), принимает вид:

$$\mathbf{s}_{oi} = K_1 A \beta_i K_\psi \mathbf{G} \boldsymbol{\eta}_i \quad (2.89)$$

Входящие сюда коэффициенты K_1, A, β_i, K_ψ определяются из СНиП, а матрицы \mathbf{G} и $\boldsymbol{\eta}_i$ определяются по формулам:

$$\mathbf{G} = \mathbf{M} \mathbf{g}; \quad \boldsymbol{\eta}_i = \bar{\eta}_i \bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\eta}_i \bar{\mathbf{y}}_i \bar{u}_{ki} \quad (2.90)$$

где \bar{u}_{ki} – максимальное перемещение в узле с номером k СФК с номером i ;

$$\bar{\eta}_i = \frac{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \mathbf{e}}{(\bar{\mathbf{u}}_i)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_i} = \frac{(\bar{\mathbf{y}}_i)^T \mathbf{G} \mathbf{e}}{(\bar{\mathbf{y}}_i)^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{y}}_i} \cdot \frac{1}{\bar{u}_{ki}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.91)$$

Из выражения (2.81) после подстановки в его левую часть выражения $\mathbf{p}_o = \mathbf{M} \mathbf{e} = (\mathbf{G} / g) \cdot \mathbf{e}$ (2.88) получим контроль определения векторов $\boldsymbol{\eta}_i$:

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\eta}_i \quad (2.92)$$

Это выражение показывает, что при горизонтальном сейсмическом воздействии единичный вектор $\mathbf{e} = (1, 1, 1, \dots, 1)^T$ равен сумме векторов $\boldsymbol{\eta}_i$ по всем СФК.

Вектору сейсмической нагрузки в i -й СФК (2.89) соответствует вектор

перемещений \mathbf{a}_{oi} и усилия и напряжения v_{oi} , которые интересуют расчетчика в i -й СФК. Формулы для их определения, получаются соответственно из выражений (2.69), (2.71) и имеют вид:

$$\mathbf{a}_{oi} = K_1 A g \omega^{-2} \beta_i K_\psi \boldsymbol{\eta}_i; \quad (2.93)$$

$$v_{oi} = K_1 A g \omega^{-2} \beta_i K_\psi \bar{\eta}_i \bar{y}_{oi}. \quad (2.94)$$

3. Определяются расчетные значения v_p любых усилий и напряжений по значениям v_i , определенным в каждой СФК. С этой целью в СНиП [19] используется формула (8), которая с учетом обозначений, принятых выше для любой искомой величины в виде усилия или напряжения имеет вид :

$$v_p = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{n^*} v_i^2}. \quad (2.95)$$

Пример 1. Выполним на ПК с помощью программы SCAD расчет на горизонтальное сейсмическое воздействие ветроэнергетическую установку, рассмотренную в примере 5 подраздела 1.1 (см. рис. 1.12) и в примере 1 подраздела 1.7, где расчет был выполнен по расчетной схеме с одной степенью свободы.

Здесь для иллюстрации метода расчета систем с $n > 1$ степенями свободы выполним расчет по расчетной схеме с $n = 2$. Такая схема получится, если стальную башню ВЭУ в соответствии с ее разбивкой на секции (см. рис. 1.12, а) при использовании МКЭ аппроксимировать двумя конечными элементами типа 2.

Ход решения задачи расчета ВЭУ на сейсмическое воздействие по нормативной методике с использованием программы SCAD был продемонстрирован при использовании расчетной схемы с одной степенью свободы. Поэтому для системы с двумя степенями свободы рассмотрим только результаты расчета.

В табличном виде результаты представлены ниже уже известными четырьмя таблицами, получаемыми при открытии раздела «Динамика» в общей таблице результатов:

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВ МАСС, тс					
2	3				
1 -	(вэу-сейсм-2эл)				
X	7.54	9.77			
Загру:	N	СОБСТВ.:	ЧАСТОТЫ		ПЕРИОДЫ
	: П/П	:	:		:
жение:	:	ЗНАЧЕНИЯ	:	1/С	: ГЦ С
1	1	.1058663	9.445874	1.50412	.6648404
	2	.014281	70.02274	11.15011	.0896851

ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ, м (рис.2.8, а, б)		
	2	3
1 - 1 (вэу-сейсм-2эл)		
X	.3187	1.
1 - 2		
X	1.	-.2459

ИНЕРЦИОННЫЕ НАГРУЗКИ, тс (рис.2.8, в, г)		
	2	3
1 - 1 (вэу-сейсм2эл)		
X	3.23	13.13
1 - 2		
X	6.704	-2.137

На рис. 2.8, а, б приведен вид соответственно первой и второй СФК.

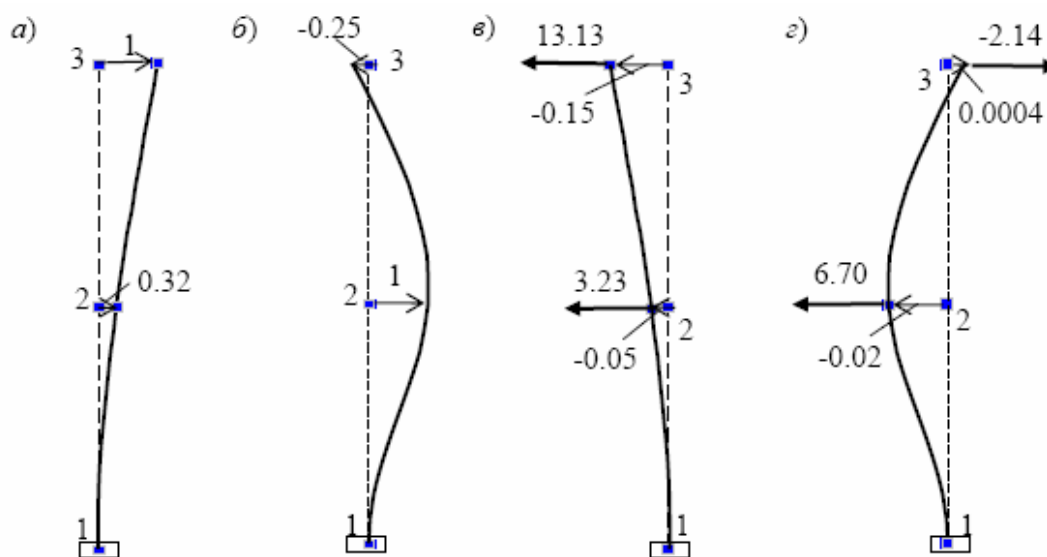


Рис. 2.8

Ниже приведены также известные таблицы перемещений и усилий M и Q в узлах элементов в 1 и 2 СФК. Перемещения в программе SCAD выдаются в общей системе координат. Положительные перемещения совпадают по направлению с осью X .

На рис. 2.8, в, г. показана картина этих перемещений масс (м) от полученных в первой и второй СФК сейсмических (инерционных) сил (тс).

В таблице усилий кроме усилий, соответствующих действию сейсмической нагрузки в первой и во второй СФК, даны и расчетные значения M_p и Q_p в узлах системы КЭ (2.95). Усилия выдаются в местной системе координат для каждого элемента.

П Е Р Е М Е Щ Е Н И Я У З Л О В, м (рис. 2.8, в, г)		
	2	3
1 - 1 (вэу-сейсм-2000)		
X	-.047	-.1477
1 - 2		
X	-.0017	.0004

У С И Л И Я В ЭЛЕМЕНТАХ, тс*м, тс					
	2_	1-1	1-2	2-1	2-2
1 - 1 (вэу-сейсм2эл)					
M	-427.617	-190.391	-190.391		
Q	16.3604	16.3604	13.1304	13.1304	
1 - 2					
M	-35.2414	30.9871	30.9871		
Q	4.56748	4.56748	-2.13704	-2.13704	
1 - S1					
M	-429.066	-192.896	-192.896		
Q	16.986	16.986	13.3032	13.3032	

Полученные усилия M и Q в узлах в первой и второй СФК представлены на рис. 2.9.

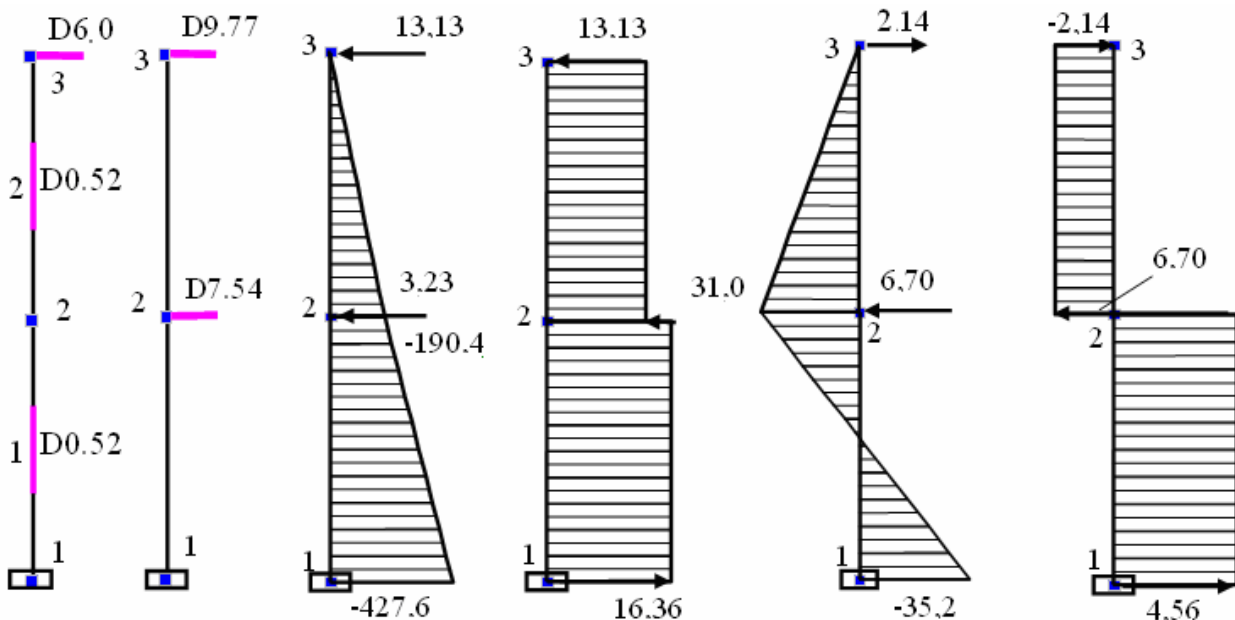


Рис. 2.9

Кроме того, на рис. 2.9 представлена следующая информация:

1. Вид расчетной схемы (первая слева) после ввода значений масс. На конечных элементах типа 2 масса введена как распределенная. В узле 3 введено значение массы

гондолы с ветроколесом (см. пример 1 в подразделе 1.7).

2. Вид расчетной схемы после приведения распределенной массы элементов к узлам сетки КЭ (вторая слева). Эта схема получилась бы вместо предыдущей схемы, если бы приведение распределенной массы на элементах к узлам было выполнено вручную и вводились бы только массы сосредоточенные в узлах 2 и 3 схемы.

3 и 4. Инерционные силы, образующие вектор $\mathbf{s}_1 = (1.753 \quad 7.127)^T$ в первой СФК (2.89), приведенные выше в таблице «Инерционные нагрузки».

5 и 6. Инерционные силы, образующие вектор $\mathbf{s}_2 = (6.287 \quad 2.004)^T$ во второй СФК (2.89), также приведенные в таблице «Инерционные нагрузки».

Соответствующие расчетным усилиям M_p и Q_p эпюры имеют вид эпюр в позициях 3 и 4 рис. 2.9.

Пример 2. Выполним некоторые расчеты вручную. Для выполнения расчетов вручную будем использовать приведенные в таблицах предыдущего примера периоды собственных колебаний, полученные в результате модального анализа СЧ и СФК.

Выполнение работы начинаем с вычисления векторов инерционных сил по формуле (2.89) в такой последовательности:

1. Примем значения коэффициентов K_1 , A , и K_ψ такими же, как при решении задачи для системы с одной степенью свободы (см. пример 1 в подразделе 1.7): $K_1 = 1$, $A = 0.4$, $K_2 = 1.5$.

2. Коэффициенты динамичности вычислим по формулам (3) СНиП [19] (см. также для грунтов категории I первый столбец таблицы с этими формулами в подразделе 1.7) пособия:

$$2.1. \text{ При } T_1 = 0.665 > 0.4 \text{ с} \quad \beta = 2.5(\sqrt{0.4/T}) = 2.5\sqrt{0.4/0.665} = 1.939.$$

$$2.2. \text{ При } T_2 = 0.089 < 0.1 \text{ с} \quad \beta = 1 + 15T = 1 + 15 \cdot 0.089 = 2.335.$$

3. Определим (2.91) постоянные $\bar{\eta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и (2.90) соответствующие векторы $\boldsymbol{\eta}_i$ локальных коэффициентов СФК. Для первой и второй СФК получаем:

$$\bar{\eta}_1 = \frac{(\bar{\mathbf{u}}_1)^T \mathbf{G} \mathbf{e}}{(\bar{\mathbf{u}}_1)^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{u}}_1} = \frac{(\bar{\mathbf{y}}_1)^T \mathbf{G} \mathbf{e}}{(\bar{\mathbf{y}}_1)^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{y}}_1} \cdot \frac{1}{\bar{u}_{31}} = \frac{(0.3187 \quad 1) \begin{bmatrix} 7.54 \\ 9.77 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(0.3187 \quad 1) \begin{bmatrix} 7.54 \\ 9.77 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.3187 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot \frac{1}{\bar{u}_{31}} = 1.1554 \frac{1}{\bar{u}_{31}}.$$

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \bar{\eta}_1 \bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{\eta}_1 \bar{\mathbf{y}}_1 \bar{u}_{31} = \frac{1.1554}{\bar{u}_{31}} \begin{pmatrix} 0.3187 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{u}_{31} = \begin{pmatrix} 0.3682 \\ 1.1554 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{\eta}_2 = \frac{(\bar{\mathbf{u}}_2)^T \mathbf{G} \mathbf{e}}{(\bar{\mathbf{u}}_2)^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{u}}_2} = \frac{(\bar{\mathbf{y}}_2)^T \mathbf{G} \mathbf{e}}{(\bar{\mathbf{y}}_2)^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{y}}_2} \cdot \frac{1}{\bar{u}_{22}} = \frac{(1 \quad -0.2459) \begin{bmatrix} 7.54 \\ 9.77 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1 \quad -0.2459) \begin{bmatrix} 7.54 \\ 9.77 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2459 \end{pmatrix}} \cdot \frac{1}{\bar{u}_{22}} = 0.63 \frac{1}{\bar{u}_{22}}.$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \bar{\eta}_2 \bar{\mathbf{u}}_2 = \bar{\eta}_2 \bar{\mathbf{y}}_2 \bar{u}_{22} = \frac{0.63}{\bar{u}_{22}} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2459 \end{pmatrix} \bar{u}_{22} = \begin{pmatrix} 0.63 \\ -0.1549 \end{pmatrix}.$$

По формуле (2.92) выполним контроль вычисления векторов $\boldsymbol{\eta}_i$:

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\eta}_i = \begin{pmatrix} 0.3682 \\ 1.1554 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.63 \\ -0.1549 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем искомые векторы (2.89) сейсмических нагрузок для каждой СФК:

$$\mathbf{s}_1 = 1 \cdot 0.4 \cdot 1.939 \cdot 1.5 \cdot \begin{bmatrix} 7.54 \\ 9.77 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.3682 \\ 1.1554 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.23 \\ 13.13 \end{pmatrix} \text{ тс.}$$

$$\mathbf{s}_2 = 1 \cdot 0.4 \cdot 2.335 \cdot 1.5 \cdot \begin{bmatrix} 7.54 \\ 9.77 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.63 \\ -0.1549 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.65 \\ -2.12 \end{pmatrix} \text{ тс.}$$

Полученные результаты достаточно близки к результатам, полученным в примере 1 с помощью программы SCAD.

По этим сейсмическим нагрузкам и соответствующим им усилиям (см. рис. 2.9) можно определить расчетные усилия в любых поперечных сечениях башни ВЭУ. Для узлов расчетной схемы МКЭ результаты этих вычислений в программе SCAD приведены в таблице усилий. Здесь вручную подсчитаем только расчетные значения усилий, передающиеся от башни на фундамент ВЭУ (рис. 2.10):

$$M_p = \sqrt{(-427.62)^2 + (35.24)^2} = 429.07 \text{ тс}\cdot\text{м};$$

$$Q_p = \sqrt{(16.36)^2 + (4.57)^2} = 16.99 \text{ тс.}$$

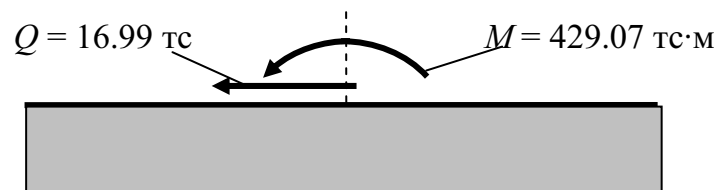


Рис. 2.10

Программа SCAD позволяет рассчитывать различные сооружения при различных динамических воздействиях [23, 24]. Поскольку данное пособие предназначается для студентов только начинающих знакомиться с методами динамического расчета строительных конструкций, в нем рассмотрено ограниченное число только простейших динамических задач.

Полученные навыки использования проектно вычислительного комплекса SCAD при решении простых задач помогут учащемуся применить этот комплекс при решении более сложных динамических задач, с которыми он может встретиться в курсовых и дипломных проектах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Константинов И.А., Лалина И.И.** Строительная механика. Расчет стержневых систем. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2005. 155 с.
2. **Константинов И.А.** Строительная механика. Использование программы SCAD для расчета стержневых систем. Ч. I: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. 81с.
3. **Константинов И.А., Лалина И.И.** Строительная механика. Использование программы SCAD для расчета стержневых систем. Ч. 2: Учеб. пособие. СПб.:Изд-во Политехн. ун-та, 2005. 82с.
4. **Константинов И.А.** Динамика гидротехнических сооружений. Ч. 1. Основы динамики сооружений: Учеб. пособие. ЛПИ: Изд-во ЛПИ, 1974.
5. **Константинов И.А.** Динамика гидротехнических сооружений. Ч. 2. Расчет плотин на сейсмическое воздействие: Учеб. пособие. ЛПИ: Изд-во ЛПИ, 1976.
6. **Константинов И.А.** Расчет гравитационных плотин на сейсмическое воздействие: Учеб. пособие. ЛПИ: Изд-во ЛПИ, 1989.
7. **Константинов И.А.** Колебание систем с конечным числом степеней свободы: Учеб. пособие. ЛПИ: Изд-во ЛПИ, 1992.
8. **Елистратов В.В., Константинов И.А., Панфилов А.А.** Динамические расчеты системы «Ветроэнергетическая установка-фундамент-основание»: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 1999. 49 с.
9. **Киселев В.А.** Строительная механика: специальный курс (динамика и устойчивость сооружений). М.: Стройиздат, 1980.
10. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. Учебник для вузов/ А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, В.Я. Лашенков, Н.Н. Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. 416 с.
11. **Ржаницин А.Р.** Строительная механика. М.: Высш. шк., 1982.
12. **Дарков А.В., Шапошников Н.Н.** Строительная механика. М.: Высш. шк., 1986.
13. **Тимошенко С.П.** Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.
14. **Коренев Б.Г., Рабинович И.М.** Справочник по динамике сооружений. М.: Стройиздат, 1972.
15. **Корчинский И.Л.** Сейсмостойкое строительство зданий. М.: Высш. шк., 1971.
16. **Бирбраер А.Н.** Расчет конструкций на сейсмостойкость. –СПб.: Наука, 1998.
17. СНиП II-7-81: Строительство в сейсмических районах. Нормы проектирования. М.: Стройиздат, 1982.
18. СНиП II-7-81*: Строительство в сейсмических районах. Нормы проектирования. М.: Стройиздат, 1989.
19. СНиП II-7-81*: Строительство в сейсмических районах. Нормы проектирования. М.: Стройиздат, 2000.
20. **Стойкий Л.Р.** Физические величины и их единицы. Справочная книга для учителя. М.: Просвещение.1984.
21. **Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А.** Расчет статически определимых стержневых систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.
22. **Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А.** Расчет статически неопределимых стержневых систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
23. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: ВПП «Компас», 2001. 448 с.: ил.
24. Вычислительный комплекс SCAD/ В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов., А.А. Маляренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер. М.: Изд-во АСВ, 2004. 592 с.
25. **Елистратов В.В., Константинов И.А., Панфилов А.А.** Нагрузки на элементы ветроэнергетической установки, на ее фундамент и основание. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. 38 с.

КОНСТАНТИНОВ Игорь Алексеевич
ЛАЛИН Владимир Владимирович
ЛАЛИНА Ирина Игоревна

ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ

Применение программы SCAD для решения задач

Учебное пособие

Редактор *О.Е.Сафонова*
Технический редактор *А.И.Колодяжная*

Оригинал – макет подготовлен авторами

Директор Издательства Политехнического университета *А.В.Иванов*

Свод. Темплан 2007 г.

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005 – 93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать 27.05.2007. Формат 60×84/16
Усл. печ. л. 7,75. Уч.- изд. л. 7,75. Тираж 150. Заказ 245.

Санкт-Петербургский политехнический университет,
Издательство Политехнического университета,
Член Издательско – полиграфической ассоциации университетов России.
Адрес университета и издательства:
195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.