Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. И. МАДУНЦ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫЕ И ЭВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2013

УДК 517.21

ББК

Линейная алгебра. Линейные и эвклидовы пространства. Линейные операторы: учеб. пособие / А. И. Мадунц – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 50 с.

Пособие содержит теоретическое изложение материала в соответствии с действующей программой по теме «Линейная алгебра. Линейные и эвклидовы пространства. Линейные операторы», а также большое количество разобранных примеров.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области технической физики, электроники и наноэлектроники при изучении дисциплины «Линейная алгебра».

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN 978-5-7422-1845-6

1 Понятие линейного пространства

Определение 1.1. *Линейным (векторным) пространством над множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ называется множество L в совокупности с двумя правилами. Одно из правил любой паре u и v элементов из L сопоставляет третий элемент из L, обычно называемый суммой u и v и обозначаемый $u+v$, а второе правило любому элементу u из L и любому вещественному числу α сопоставляет элемент из L, обычно называемый произведением α на u и обозначаемый αu. Эти правила подчиняются следующим аксиомам:*

1. *$\forall u, v \in L$ имеем $u+v=v+u$ — коммутативность,*
2. *$\forall u, v, w \in L$ имеем $u+(v+w)=(u+v)+w$ — ассоциативность,*
3. *$\exists \theta \in L : \forall u \in L$ имеем $u+\theta=u$ — существование нейтрального (нулевого) элемента,*
4. *$\forall u \in L \exists v \in L$ такой, что $u+v=\theta$ — существование противоположного (обратного) элемента,*
5. *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u \in L$ имеем $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$ — ассоциативность умножения на число,*
6. *$\forall u \in L$ имеем $1u=u$ — поглощение единицы,*
7. *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u \in L$ имеем $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$ — дистрибутивность,*
8. *$\forall \alpha \in \mathbb{R}, u, v \in L$ имеем $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$ — дистрибутивность.*

Аналогично определяется линейное пространство над множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$. Различие состоит лишь в том, что всюду в данном определении вместо вещественных чисел берутся комплексные. Для удобства записи введем следующее обозначение: под множеством K будем в дальнейшем подразумевать либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, а под числом элемент из K.

Определение 1.2. *Элементы линейного пространства называются векторами.*

Следует обратить внимание на то, что в определении линейного пространства неважна природа множества. Более того, реально неважна также природа операций, лишь по традиции называемых сложением и умножением на число. Одно и то же множество по отношению к разным операциям может составлять различные линейные пространства. Линейное пространство — именно совокупность множества и двух правил, подчиненных восьми аксиомам (последние часто называют аксиомами линейного пространства).

Замечание. Из аксиом линейного пространства легко выводятся некоторые свойства. Например, нейтральный элемент единственен. Действительно, если имеются два нейтральных, θ_1 и θ_2, то по аксиоме 3 имеем $\theta_1 + \theta_2 = \theta_1 = \theta_2$.

Верно также, что для любого элемента пространства обратный единственен. Доказательство этого факта оставляем читателю в качестве упражнения.

Задачи. Проверить, образует ли линейное пространство над K заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов u и v и произведение любого элемента u на любое число $\alpha \in K$.

При проверке прежде всего требуется посмотреть, корректно ли заданы операции, то есть лежит ли их результат в исходном множестве, а потом перейти к рассмотрению аксиом.

1.1. $K = \mathbb{R}$, L — множество геометрических векторов на плоскости, сумма $\overline{u} + \overline{v}$, произведение на число $\alpha\overline{u}$.

Решение. Из курса аналитической геометрии известно, что операции определены корректно и все восемь аксиом выполнены, поэтому множество геометрических векторов на плоскости составляет линейное пространство, которое в дальнейшем будем обозначать V_2.

1.2. $K = \mathbb{R}$, L — множество геометрических векторов в пространстве, сумма $\overline{u} + \overline{v}$, произведение на число $\alpha\overline{u}$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру видим, что L — линейное пространство. В дальнейшем будем обозначать его V_3. Заметим, что именно геометрические векторы послужили исходным толчком для создания понятия линейного (векторного) пространства, поэтому все связанные с этим понятием утверждения удобно осмысливать на примере геометрических векторов.

1.3. $K = \mathbb{R}$, L — множество геометрических векторов в пространстве, сумма $\overline{u} \times \overline{v}$, произведение на число $\alpha\overline{u}$.

Решение. Операции определены корректно, так как результат каждой дает вектор. Однако уже первая аксиома (коммутативность) не выполняется, ибо $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$ вместо требуемого $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{v} \times \overline{u}$. Поэтому множество L с данными операциями не составляет линейного пространства.

1.4. $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{R}^{m\times n}$ — множество матриц порядков m и n с вещественными элементами, сумма $A + B$, произведение на число αA.

Решение. При изучении свойств операций над матрицами (см. [3]) было проверено, что все требуемые аксиомы верны, поэтому данное множество составляет линейное пространство. Нулевым элементом этого пространства является нулевая матрица (все ее элементы — нули), которую обозначают $\mathbb{O}$, противоположным элементом для матрицы A — матрица $-A$.

В частности, множество столбцов или строк одной длины является линейным пространством.

1.5. $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{Z}^{m\times n}$ — множество матриц порядков m и n с целыми элементами, сумма $A + B$, произведение на число αA.

Решение. Произведение матрицы с целыми элементами на произвольное вещественное число не обязательно дает матрицу с целыми элементами. Таким образом, вторая из необходимых операций не определена и множество не образует линейного пространства.

1.6. $K = \mathbb{C}$, $L = \mathbb{C}^{m\times n}$ — множество матриц порядков m и n с комплексными элементами, сумма $A + B$, произведение на число αA.

Решение. Аналогично примеру 1.4 видим, что это линейное пространство.

1.7. $K = \mathbb{R}$, L — множество столбцов решений фиксированной системы линейных однородных уравнений (СЛОУ), сумма $X + Y$, произведение на число αX.

Решение. Поскольку сумма столбцов решений СЛОУ и произведение столбца решения на число являются столбцами решений той же СЛОУ, операции определены корректно. Что касается аксиом, то они верны для всех столбцов, в частности, для столбцов решений системы. Единственное, что требуется проверить — принадлежат ли нейтральный и обратный элементы нашему множеству. Да, принадлежат, поскольку нейтральный элемент — это нулевой столбец, а он является решением любой СЛОУ, и если столбец X — решение, то обратный к нему $-X = -1X$ — тоже решение.

Следовательно, L — линейное пространство.

1.7. $K = \mathbb{R}$, L — множество вещественных положительных чисел, сумма $u + v$, произведение на число αu.

Решение. Произведение положительного числа на произвольное вещественное число не обязательно дает положительное число. Таким образом, относительно второй из необходимых операций множество не является замкнутым, и потому оно не образует линейного пространства.

1.8. $K = \mathbb{R}$, L — множество вещественных положительных чисел, сумма uv, произведение на число u^α.

Решение. Итак, вместо $u+v$ мы имеем uv, а вместо αu — u^α. Произведение положительных чисел, а также возведение положительного числа в любую вещественную степень дает положительное число, поэтому обе операции определены корректно. Теперь проверяем аксиомы.

1. $\forall u, v \in L$ имеем $uv = vu$ — коммутативность,
2. $\forall u, v, w \in L$ имеем $u(vw) = (uv)w$ — ассоциативность,
3. $\exists 1 \in L : \forall u \in L$ имеем $1u = u$ — существование нейтрального (нулевого) элемента,
4. $\forall u \in L \exists v = \frac{1}{u} \in L : uv = 1$ — существование противоположного (обратного) элемента,
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u \in L$ имеем $(u^\beta)^\alpha = u^{\alpha\beta}$ — ассоциативность умножения на число,
6. $\forall u \in L$ имеем $u^1 = u$ — поглощение единицы,
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u \in L$ имеем $u^{\alpha+\beta} = u^\alpha u^\beta$ — дистрибутивность,
8. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u, v \in L$ имеем $(uv)^\alpha = u^\alpha v^\alpha$ — дистрибутивность.

Следовательно, относительно этих операций множество вещественных положительных чисел — линейное пространство.

2 Линейная зависимость и независимость векторов

Всюду в дальнейшем под L будем подразумевать линейное пространство.

Определение 2.1. *Линейной комбинацией векторов* $u_1, \ldots, u_m \in L$ *называется вектор вида* $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m$, *где* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$. *Числа* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *называются коэффициентами линейной комбинации.*

Определение 2.2. *Векторы* $u_1, \ldots, u_m \in L$ *называются линейно независимыми, если из равенства нулевому вектору их линейной комбинации следует равенство нулю всех ее коэффициентов. В противном случае векторы называются линейно зависимыми.*

Приведем основные условия линейной зависимости.

Теорема 2.1. *Векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных.*

Доказательство. Пусть векторы $u_1, \ldots, u_m$ линейно зависимы. В этом случае существует их линейная комбинация, равная нулевому вектору и имеющая не только нулевые коэффициенты. Для определенности предположим, что первый коэффициент ненулевой, то есть

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = \theta, \alpha_1 \neq 0.$$

Следовательно,

$$u_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_2 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} u_m,$$

то есть u_1 является линейной комбинацией остальных векторов.

Теперь пусть один из векторов, для определенности первый, представлен в виде линейной комбинации остальных:

$$u_1 = \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m.$$

Тогда

$$1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \cdots - \alpha_m u_m = \theta, \alpha_1 = 1 \neq 0,$$

что и означает линейную зависимость.

Теорема 2.2. *Если среди векторов есть нулевой, то они линейно зависимы.*

Доказательство. Составим следующую линейную комбинацию данной системы векторов: при нулевом векторе коэффициент единица, а при оставшихся нули. Комбинация нулевая, причем не все ее коэффициенты нули. Следовательно, векторы линейно зависимы.

Теорема 2.3. *Если подсистема линейно зависима, то и система тоже.*

Доказательство. Пусть векторы $u_1, \dots, u_m$ линейно зависимы. Таким образом, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m = \theta$, причем не все коэффициенты равны нулю. Рассмотрим систему $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k$. Составим линейную комбинацию ее элементов

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + 0v_1 + \dots + 0v_k.$$

Комбинация нулевая, причем не все ее коэффициенты нули. Следовательно, векторы $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k$ линейно зависимы.

Теорема 2.4. *(О линейной зависимости линейных комбинаций). Если $v_1, \dots, v_k$ являются линейными комбинациями $u_1, \dots, u_m$ и $k > m$, то $v_1, \dots, v_k$ линейно зависимы.*

Доказательство. По условию

$$\begin{cases} v_1 = \alpha_{11} u_1 + \dots + \alpha_{1m} u_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_k = \alpha_{k1} u_1 + \dots + \alpha_{km} u_m. \end{cases}.$$

Составим произвольную линейную комбинацию $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k$ и попытаемся найти ненулевые коэффициенты, обращающие ее в ноль. Данная комбинация имеет вид

$$(\beta_1 \alpha_{11} + \dots + \beta_k \alpha_{k1}) u_1 + \dots + (\beta_1 \alpha_{1m} + \dots + \beta_k \alpha_{km}) u_m,$$

причем α_{ij} фиксированы, а β_i пока неизвестны. Потребуем выполнения равенств

$$\begin{cases} \beta_1 \alpha_{11} + \dots + \beta_k \alpha_{k1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_1 \alpha_{1m} + \dots + \beta_k \alpha_{km} = 0 \end{cases}$$

(в таком случае и линейная комбинация очевидным образом дает нулевой вектор).

Эти равенства представляют собой систему линейных однородных уравнений, в которой число уравнений m меньше числа неизвестных k. Подобная система имеет ненулевое решение (см. [3]). Следовательно, имеются числа $\beta_1^0, \dots, \beta_k^0$, не все равные нулю и обращающие в ноль линейную комбинацию, что и дает требуемую линейную зависимость.

Пример 2.1. В школьном курсе геометрии было доказано, что в случае пространства геометрических векторов V_3 два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны, три линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны, а четыре вектора и более всегда линейно зависимы.

Задача 2.1. $L = \mathbb{R}^{3\times 1}$ — пространство столбцов высоты 3. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим их линейную комбинацию и приравняем ее к нулевому вектору данного пространства:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это равенство равносильно системе линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 6\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Решаем ее: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Таким образом, например, $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -5, \alpha_3 = 3$ — ненулевое решение системы, то есть ненулевой набор коэффициентов линейной комбинации, обращающий эту комбинацию в ноль. Следовательно, исходные векторы линейно зависимы.

Заметим, что реально нас интересовало лишь наличие ненулевого (нетривиального) решения рассматриваемой системы. По теореме о нетривиальном решении системы линейных однородных уравнений (см. [3]) оно существует тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных. В данном случае число неизвестных равно трем, а ранг матрицы системы двум.

Задача 2.2. L — пространство вещественных функций, непрерывных на всей вещественной оси. Исследовать на линейную зависимость систему элементов $\sin x, \cos x, 1$.

Решение. Легко видеть, что L действительно является линейным пространством и предлагаемые элементы ему принадлежат. Под 1 здесь подразумевается функция, тождественно равная единице.

Составим линейную комбинацию исследуемых векторов и приравняем ее к нулевому вектору данного пространства:

$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 = 0$.

Заметим, что 0 здесь — функция, тождественно равная нулю на всей вещественной оси, и перед нами не уравнение, а равенство функций. Если функции равны, то они принимают равные значения при одинаковых значениях аргумента. Таким образом, в частности, при $x = 0$ имеем $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, то есть $\alpha_2 = -\alpha_3$.

При $x = \pi/2$ имеем $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, то есть $\alpha_1 = -\alpha_3$.

И, наконец, при $x = \pi$ имеем $-\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, то есть $\alpha_1 = \alpha_3$.

Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и элементы линейно независимы.

Задача 2.3. L — пространство вещественных функций, непрерывных на всей вещественной оси. Исследовать на линейную зависимость систему элементов $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$.

Решение. По основному тригонометрическому тождеству

$$1 \sin^2 x + 1 \cos^2 x + (-1)1 = 0.$$

Перед нами линейная комбинация заданных элементов, равная нулевому вектору, причем не все ее коэффициенты равны нулю. Значит, векторы линейно зависимы.

3 Размерность и базис

Определение 3.1. *Линейной оболочкой, натянутой на совокупность векторов $u_1, \ldots, u_m \in L$, называется множество всех их линейных комбинаций.*

Обозначается линейная оболочка $< u_1, \ldots, u_m >$.

Определение 3.2. *Векторы $u_1, \ldots, u_m \in L$ называются системой образующих пространства L, если их линейная оболочка составляет все пространство.*

Определение 3.3. *Пространство L называются конечномерным, если у него существует конечная система образующих. В противном случае пространство называется бесконечномерным.*

Определение 3.4. *Линейно независимая система образующих называется базисом пространства.*

Договоримся, что в дальнейшем, если не оговорено противное, пространство L будет считаться ненулевым.

Теорема 3.1. *Пусть $u_1, \ldots, u_n \in L$. Следующие условия равносильны:*

1. $u_1, \ldots, u_n$ *— базис,*

2. $u_1, \ldots, u_n$ *— минимальная система образующих (то есть такая, из которой нельзя убрать ни одного элемента),*

3. $u_1, \ldots, u_n$ *— максимальная линейно независимая система (то есть такая, к которой нельзя добавить ни одного элемента).*

Доказательство. Сперва докажем, что из выполнения условия 1 следует выполнение условия 2.

Итак, $u_1, \ldots, u_n$ — линейно независимая система образующих. Требуется проверить ее минимальность, то есть тот факт, что при отбрасывании любого вектора система перестает быть системой образующих.

Пусть это не так. Значит, например, $u_1, \ldots, u_{n-1}$ — система образующих. Следовательно, u_n представляется в виде линейной комбинации $u_1, \ldots, u_{n-1}$, что по Теореме 2.1 дает линейную зависимость $u_1, \ldots, u_n$, а это противоречит условию. Импликация доказана.

Теперь проверим, что из условия 2 следует условие 3. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — минимальная система образующих. Если она линейно зависима, то по Теореме 2.1 один из векторов, например, u_n, представляется в виде линейной комбинации остальных. Значит,

$$< u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n >=< u_1, \ldots, u_{n-1} >= L$$

и $u_1, \ldots, u_{n-1}$ — тоже система образующих, то есть $u_1, \ldots, u_n$ не минимальна, что противоречит условию. Итак, линейная независимость доказана, осталось проверить максимальность.

Добавим к данной системе произвольный вектор

$$u \in L =< u_1, \ldots, u_n > .$$

По Теореме 2.1 получившаяся система линейно зависима.

Докажем, наконец, что из условия 3 следует условие 1. Пусть $u_1, \dots, u_n$ — максимальная линейно независимая система. Проверим, что она является системой образующих. Если это не так, то существует вектор $u \in L, u \notin < u_1, \dots, u_n >$. Тогда система $u_1, \dots, u_n, u$ линейно независима. Действительно, составим и приравняем к нулю линейную комбинацию ее элементов:

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \alpha u = \theta.$$

Если $\alpha \neq 0$, то u представляется в виде линейной комбинации $u_1, \dots, u_n$ и принадлежит их линейной оболочке, что не так. Следовательно, $\alpha = 0$ и в линейной комбинации реально фигурируют лишь $u_1, \dots, u_n$. Они линейно независимы, поэтому $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. Значит, нулями оказались все коэффициенты и $u_1, \dots, u_n, u$ линейно независимы, что противоречит максимальности.

Теорема 3.2. *Любое ненулевое конечномерное пространство имеет базис, причем количество элементов в нем не зависит от выбора самих элементов.*

Доказательство. Сперва докажем существование базиса. Поскольку L конечномерно, оно имеет конечную систему образующих $u_1, \dots, u_m$. Если система линейно независима, то является базисом. Если нет, то один из ее элементов является линейной комбинацией остальных. Откинув его, мы не изменим линейной оболочки. Продолжим этот процесс. Так как изначально векторов было конечное число, рано или поздно он оборвется за счет получения линейно независимой системы образующих, то есть базиса. При этом отбросить все векторы мы не можем, поскольку пространство ненулевое.

Осталось проверить, что число элементов базиса не зависит от выбора самого базиса. Пусть имеется два базиса $u_1, \dots, u_m$ и $v_1, \dots, v_n$. Тогда $< u_1, \dots, u_m > = < v_1, \dots, v_n >$. Значит,

$$u_1, \dots, u_m \in < v_1, \dots, v_n > .$$

Если $m > n$, то по Теореме 2.4 векторы $u_1, \dots, u_m$ линейно зависимы, что противоречит условию. Аналогично невозможным оказывается и случай $m < n$. Следовательно, $m = n$. □

Данная теорема позволяет ввести еще одно важное понятие.

Определение 3.5. *Число элементов в базисе конечномерного пространства называется размерностью пространства.*

Если размерность пространства L равна n, принято записывать

$$\dim L = n.$$

Отметим следующий очевидный, но существенный факт, следующий из приведенных выше теорем: если $\dim L = n$, то любые n линейно независимых векторов или любые n векторов, составляющих систему образующих, являются базисом. Кроме того, любую линейно независимую систему можно дополнить до базиса. Доказательство оставляем читателю в качестве упражнений.

Примеры.

3.1. $L = V_2$.

Любые два неколлинеарных вектора, лежащих в плоскости, линейно независимы, причем произвольный вектор, лежащий в плоскости, представляется в виде их линейной комбинации. Таким образом, базисом плоскости является любая пара лежащих в ней неколлинеарных векторов. Размерность пространства равна 2.

3.2. $L = V_3$.

Любые три некомпланарных вектора линейно независимы, причем произвольный вектор представляется в виде их линейной комбинации. Таким образом, базисом пространства является любая тройка некомпланарных векторов. Размерность пространства равна 3.

Задачи. Проверить, являются ли пространства конечномерными. В случае положительного ответа найти базис и размерность.

3.1. $L = \mathbb{R}^{n\times 1}$ — множество столбцов высоты n с вещественными элементами, сумма $X + Y$, произведение на число αX.

Решение. Рассмотрим следующую систему столбцов: первый содержит нули на всех местах, кроме первого, на котором стоит единица, второй содержит нули на всех местах, кроме второго, на котором стоит единица, и так далее, до n-ого, содержащего нули на всех местах, кроме n-ого, на котором стоит единица.

Итак, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Проверим их линейную независимость. Для этого возьмем линейную комбинацию и приравняем к нулевому столбцу:

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n = \mathbb{O}$.

Следовательно, $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}^T$, то есть все коэффициенты равны нулю. Линейная независимость доказана.

Остается проверить, что мы имеем систему образующих. Выберем произвольный столбец $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix}^T$. Его можно представить в виде

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n,$$

что и доказывает наше утверждение. Таким образом, приведенная система столбцов составляет базис. Размерность пространства равна n. Заметим, что найденный нами базис не является единственным, однако имеет наиболее простой вид из всех возможных.

3.2. L — множество решений фиксированной системы линейных однородных уравнений, сумма $X + Y$, произведение на число αX.

Решение. Вспомним понятие фундаментальной системы решений (ФСР) системы линейных однородных уравнений (см. [3]). Это набор линейно независимых решений, обладающий тем свойством, что любое решение представляется в виде их линейной комбинации (то есть линейно независимая система образующих). Таким образом, любая ФСР является базисом пространства решений системы линейных однородных уравнений. Более того, известна стандартная ФСР, содержащая ровно $n - r$ элементов (здесь n — число неизвестных и r — ранг матрицы системы). Поскольку число элементов базиса не зависит от выбора базиса, произвольная ФСР тоже состоит из $n - r$ элементов.

3.3. L — множество многочленов, сумма $f(X) + g(X)$, произведение на число $\alpha f(X)$.

Решение. Предположим, что найдется конечный набор многочленов

$$f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)$$

такой, что их линейная оболочка даст все пространство. Пусть наибольшая из степеней $f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)$ равна m. Тогда степень любой их линейной комбинации не превосходит m. Следовательно, например, многочлен X^{m+1} в виде их линейной комбинации представлен быть не может. Получили противоречие. Значит, пространство бесконечномерно.

4 Координаты вектора. Матрица перехода от базиса к базису

Пусть L — конечномерное линейное пространство, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — его базис. Тогда любой вектор $x \in L$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n. \tag{1}$$

Действительно, существование подобного разложения следует из того, что e является системой образующих, а единственность из того, что элементы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы.

Определение 4.1. *Равенство* (1) *называется разложением вектора x по базису e, числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координатами вектора x в этом базисе, а столбец $x_e = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — столбцом координат.*

Замечание. Равенство (1) теперь можно записать более кратко:

$$x = e x_e$$

(здесь справа перемножаются строка e и столбец x_e).

Примеры.

4.1. $L = V_2$, базис $e = (\overline{i}, \overline{j})$. Если $\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j}$, то $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

4.2. $L = V_3$, базис $e = (\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$. Если $x = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} + x_3\overline{k}$, то $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

4.3. $L = \mathbb{R}^{n\times 1}$ — множество столбцов высоты n, базис описан в задаче 3.1. Тогда $x_e = X$.

Задача 4.1. $L = V_3$, базис

$$\overline{e}_1 = \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}, \overline{e}_2 = 2\overline{i} - \overline{j}, \overline{e}_3 = -\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}.$$

Найти координаты в этом базисе вектора $\overline{x} = 6\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$.

Решение. Итак, требуется найти коэффициенты x_1, x_2, x_3 такие, что

$$6\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k} = x_1(\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}) + x_2(2\overline{i} - \overline{j}) + x_3(-\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}).$$

Это векторное равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & -1 \\ 2x_1 + x_3 & = & 3 \end{cases}.$$

Решаем ее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, $x_e^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Заметим, что в процессе решения данной задачи подтвердилось, что e является базисом. Действительно, однородная система с той же основной матрицей, что и у решенной нами неоднородной, имеет только нулевое решение, поэтому векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ линейно независимы. $\square$

Разумется, при изменении базиса координаты вектора меняются. Существует формула, позволяющая по координатам вектора в одном базисе найти его координаты в другом базисе.

Пусть $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ — базисы конечномерного пространства L. Разложим элементы базиса e по базису f:

$$\begin{cases} e_1 = c_{11}f_1 + c_{21}f_2 + \cdots + c_{n1}f_n \\ e_2 = c_{12}f_1 + c_{22}f_2 + \cdots + c_{n2}f_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n = c_{1n}f_1 + c_{2n}f_2 + \cdots + c_{nn}f_n \end{cases}.$$

Определение 4.2. *Матрица $C_{f\to e} = (c_{ij})$ называется матрицей перехода от базиса f к базису e.*

Таким образом, в столбцах матрицы перехода от f к e стоят координаты векторов базиса e в базисе f, а связь базисов осуществляется по формуле $e = fC_{f\to e}$.

Теорема 4.1. *Связь координат одного и того же вектора в разных базисах осуществляется по формуле $x_f = C_{f\to e}x_e$.*

Доказательство. Имеется два разложения любого вектора:

$$x = ex_e = fx_f.$$

Поскольку $e = fC_{f\to e}$, то $fC_{f\to e}x_e = fx_f$, или $f(C_{f\to e}x_e - x_f) = \theta$, из чего по линейной независимости f легко следует, что $C_{f\to e}x_e - x_f = \mathbb{O}$.

Теорема 4.2. *Пусть C — матрица перехода от f к e. Тогда* $\det C \neq 0$.

Доказательство предоставляем читателю в качестве упражнения.

Задача 4.2. Пусть g — базис пространства L,

$$\begin{cases} e_1 &= & -g_1 + g_2 + 2g_3 - 4g_4 \\ e_2 &= & g_1 + 4g_2 + 5g_3 - 9g_4 \\ e_3 &= & 3g_1 - 2g_2 - 4g_3 + 7g_4 \\ e_4 &= & -g_1 - 2g_2 - 3g_3 + 6g_4 \\ f_1 &= & 5g_1 - g_2 - 3g_3 + 5g_4 \\ f_2 &= & g_1 + 2g_2 + 2g_3 - 4g_4 \\ f_3 &= & 9g_1 - g_2 - 5g_3 + 8g_4 \\ f_4 &= & 7g_1 - 2g_2 - 4g_3 + 6g_4 \end{cases}.$$

Требуется:

а). доказать, что e и f — базисы пространства L,

б). найти матрицы перехода от f к e и от e к f, проверить полученные результаты,

в). выписать формулы, выражающие элементы базиса e через элементы базиса f и элементы базиса f через элементы базиса e,

г). для базисов e, f, g выписать всевозможные формулы, выражающие координаты вектора в одном базисе через координаты того же вектора в другом базисе.

Решение. Переходя в формуле $f = eC_{e\to f}$ к координатам в базисе g, видим, что искомая матрица $C_{e\to f} = C$ — это решение матричного уравнения $f_g = e_g C$. Здесь f_g (соответственно e_g) — матрица, в столбцах которой стоят координаты векторов базиса f (соответственно e) в базисе g.

Решаем это уравнение (см. [3]):

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 3 & -1 & 5 & 1 & 9 & 7 \\ 1 & 4 & -2 & -2 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 & -3 & -3 & 2 & -5 & -4 \\ -4 & -9 & 7 & 6 & 5 & -4 & 8 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Итак, матрица перехода от e к f есть

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проверить этот результат можно с помощью перемножения матриц:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \\ -4 & -9 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -5 & -4 \\ 5 & -4 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

В процессе решения задачи подтвердилось, что e является базисом. Действительно, однородная система линейных уравнений с матрицей, состоящей из координат векторов e, имеет только нулевое решение. Чтобы убедиться в этом, достаточно в решенном матричном уравнении заменить матрицы, расположенные справа от вертикальной черты, нулевым столбцом. Значит, векторы e линейно независимы.

Для нахождения матрицы D перехода от f к e требуется аналогичным образом решить матричное уравнение $e_g = f_g D$. Его решение

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

можно получить также, найдя матрицу, обратную к C (см. [3]).

Выпишем явные формулы, выражающие элементы e через элементы f и элементы f через элементы e:

$$\begin{cases} f_1 &=& -e_1 + e_3 + e_4 \\ f_2 &=& 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ f_3 &=& e_1 + e_2 + 3f_3 \\ f_4 &=& -2e_1 - e_2 + e_3 - 3e_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1 &=& -f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_4 \\ e_2 &=& 4f_1 + \frac{5}{2}f_2 - 2f_3 - \frac{1}{2}f_4 \\ e_3 &=& -f_1 - f_2 + f_3 \\ e_4 &=& -2f_1 - \frac{3}{2}f_2 + f_3 - \frac{1}{2}f_4 \end{cases}.$$

Связь координат одного и того же вектора в базисах e и f осуществляется по формулам $x_e = Cx_f, x_f = Dx_e$. Распишем подробнее, например, вторую из них:

$$\begin{cases} x_{1f} &= -x_{1e} + 4x_{2e} - x_{3e} - 2x_{4e} \\ x_{2f} &= \frac{1}{2}x_{1e} + \frac{5}{2}x_{2e} - x_{3e} - \frac{3}{2}x_{4e} \\ x_{3f} &= -2x_{2e} + x_{3e} + x_{4e} \\ x_{4f} &= \frac{1}{2}x_{1e} - \frac{1}{2}x_{2e} - \frac{1}{2}x_{4e} \end{cases}.$$

Осталось выписать формулы, связывающие координаты в базисах e и f с координатами в базисе g. Для этого требуется найти соответствующие матрицы перехода. По определению этих матриц из условия сразу же получаем

$$A_{g\to e} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \\ -4 & -9 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_{1g} &= -x_{1e} + x_{2e} + 3x_{3e} - x_{4e} \\ x_{2g} &= x_{1e} + 4x_{2e} - 2x_{3e} - 2x_{4e} \\ x_{3g} &= 2x_{1e} + 5x_{2e} - 4x_{3e} - 3x_{4e} \\ x_{4g} &= -4x_{1e} - 9x_{2e} + 7x_{3e} + 6x_{4e} \end{cases}.$$

Аналогичным образом, ставя в столбцы коэффициенты разложения f по g, выписываем матрицу перехода $B_{g\to f}$. Матрицы же перехода от f и e к g ищутся как обратные к A и B.

5 Подпространства

Определение 5.1. *Подпространством линейного пространства L над K называется его подмножество, которое является линейным пространством над K относительно тех же самых операций.*

Теорема 5.1. *(Критерий подпространства). Пусть M — подмножество L. Тогда M является подпространством в том и только в том случае, когда сумма любых двух векторов из M и произведение любого вектора из M на число лежат в M.*

Доказательство. Если M — подпространство, оно является линейным пространством относительно тех же операций, и по определению, в частности, сумма любых двух векторов из M и произведение любого вектора из M на число лежат в M.

Теперь предположим, что сумма любых двух векторов из M и произведение любого вектора из M на число лежат в M. Требуется проверить, что для M выполнены все 8 аксиом из определения линейного пространства. Но они выполнены в L, следовательно, и в его подмножестве M. Осталось лишь убедиться, что в них фигурируют исключительно элементы, принадлежащие M. Нулевой вектор из аксиомы 3 можно представить как $\theta = 0v, v \in M$, поэтому $\theta \in M$. Обратный к $v \in M$ имеет вид $(-1)v$ и потому тоже лежит в M. Утверждение доказано.

Примеры.

5.1. Линейная оболочка любых фиксированных векторов пространства является подпространством.

5.2. Множество многочленов степени, не превосходящей n, где n — фиксированное натуральное число, является подпространством множества всех многочленов с операциями $f(X) + g(X)$ и $\alpha f(X)$.

5.3. Множество многочленов степени n не является подпространством множества всех многочленов с операциями $f(X) + g(X)$ и $\alpha f(X)$, поскольку сумма двух многочленов степени n, вообще говоря, не обязательно многочлен той же степени.

5.4. Множество положительных вещественных чисел является подмножеством множества всех вещественных чисел, является линейным пространством относительно введенных в задаче 8.1 операций, но не является подпространством линейного пространства вещественнных чисел с операциями $a + b$ и αa, поскольку операции в этих двух пространствах различны.

Определение 5.2. *Пусть M и N — подпространства линейного пространства L. Их суммой называется множество вида*

$$\{u + v, u \in M, v \in N\}.$$

Обозначается эта сумма $M + N$. По Теореме 5.1 легко видеть, что $M + N$ — подпространство пространства L.

Теорема 5.2. *Пусть M и N — подпространства пространства L. Тогда* $\dim(M + N) + \dim(M \cap N) = \dim M + \dim N$.

Доказательство. То, что $M \cap N$ является подпространством L, а также M и N, следует из Теоремы 5.1.

Пусть теперь $u_1, \ldots, u_r$ — базис $M \cap N$. Дополним его до базисов M и N: $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_m$— базис M, $u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s$ — базис N. Покажем, что $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_s$ — базис $M + N$, после чего утверждение теоремы станет очевидным.

Проверим линейную независимость данной системы векторов. Для этого составим их линейную комбинацию и приравняем ее к нулю:

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_s w_s = \theta.$$

Введем обозначения

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m = u \in M,$$
$$\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_s w_s = v \in N.$$

Имеем $u = -v \in M \cap N$. Следовательно, $u = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_r u_r$.

Из единственности разложения по $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_m$ (базису пространства M) получаем, что $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$. Таким образом, составленная линейная комбинация имеет вид

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_s w_s = \theta.$$

Поскольку $u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s$ линейно независимы, все коэффициенты данной комбинации нулевые. Значит, набор

$$u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_s$$

линейно независим.

Проверим, что он является системой образующих для $M + N$. Если $w \in M + N$, то $w = u + v, u \in M, v \in N$. Поэтому

$$u \in < u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_m >,$$
$$v \in < u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s >,$$
$$u + v \in < u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_s >,$$

что и завершает доказательство.

Замечание. Из доказательства видно, что в случае $M \cap N = \{\theta\}$ базис $M + N$ получается объединением базисов M и N.

Определение 5.3. *Говорят, что пространство L является прямой суммой своих подпространств M и N, если каждый вектор $w \in L$ единственным образом представляется в виде суммы*

$$w = u + v, u \in M, v \in N.$$

Обозначается этот факт $L = M \oplus N$. Единственность означает, что если $w = u_1 + v_1 = u_2 + v_2$, где $u_1, u_2 \in M, v_1, v_2 \in N$, то $u_1 = u_2, v_1 = v_2$.

Теорема 5.3. *Пусть M и N — подпространства L. Следующие условия равносильны:*

1. $L = M \oplus N$.
2. $L = M + N, M \cap N = \{\theta\}$.
3. *Объединение базисов M и N является базисом L.*

Доказательство. Сперва докажем, что из выполнения условия 1 следует выполнение условия 2.

То, что $L = M+N$, очевидно. Пусть $w \in M \cap N$. Тогда можно записать $\theta = w+(-w) = \theta+\theta; w, \theta \in M, -w, \theta \in N$. По определению прямой суммы $w = \theta$.

Тот факт, что из условия 2 следует условие 3, получается применением замечания к Теореме 5.2.

Осталось проверить, что из условия 3 следует условие 1. Итак, объединение базисов M и N является базисом L. Тогда

$$\dim(M + N) = \dim M + \dim N$$

и по Теореме 5.2 имеем $\dim(M \cap N) = 0$. Поэтому

$$M \cap N = \{\theta\}, M + N = L.$$

Требуется показать, что сумма прямая.

Пусть $w = u_1 + v_1 = u_2 + v_2$, где $u_1, u_2 \in M, v_1, v_2 \in N$. Легко видеть, что $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in M \cap N = \{\theta\}$, то есть $u_1 = u_2, v_1 = v_2$.

Примеры.

5.4. $L = V_3, M =< \bar{i}, \bar{j} >, N =< \bar{i}, \bar{k} >$. Тогда $V_3 = M + N$, однако сумма не является прямой.

5.5. $L = V_3, M =< \bar{i}, \bar{j} >, N =< \bar{k} >$. Тогда $V_3 = M \oplus N$.

6 Линейные операторы

Определение 6.1. *Пусть L_1, L_2 — линейные пространства. Линейным оператором, действующим из L_1 в L_2, называется отображение φ, сопоставляющее каждому элементу из L_1 некоторый элемент из L_2 и* *обладающее тем свойством, что при всех $u, v \in L_1, \alpha, \beta \in K$ выполнено тождество*

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v). \tag{2}$$

Таким образом, линейный оператор переводит элементы одного линейного пространства в элементы другого с сохранением структуры операций.

Примеры.

6.1. Нулевой оператор, действующий из L_1 в L_2 по формуле $\varphi(u) = \theta$. Выполнение тождества (2) очевидно.

6.2. Тождественный оператор, действующий из L в L по формуле $\varphi(u) = u$. Выполнение тождества (2) очевидно.

6.3. Оператор растяжения в λ раз, действующий из L в L по формуле $\varphi(u) = \lambda u$. Выполнение тождества (2) очевидно.

6.4. L_1 — пространство функций, непрерывно дифференцируемых на всей вещественной оси, L_2 — пространство функций, непрерывных на всей вещественной оси, оба пространства с операциями $f(x) + g(x)$ и $\alpha f(x)$, φ — оператор дифференцирования, то есть $\varphi(f) = f'$. Тождество (2) равносильно формуле $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

6.5. $L_1 = L_2$ — множество многочленов степени, не превосходящей n, с операциями $f(X) + g(X)$ и $\alpha f(X)$, φ — оператор дифференцирования, то есть $\varphi(f) = f'$.

6.6. $L_1 = \mathbb{R}^{n\times 1}$ — множество столбцов высоты n, $L_2 = \mathbb{R}^{m\times 1}$ — множество столбцов высоты m, φ — оператор умножения на фиксированную матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, то есть $\varphi(X) = AX$. Тождество (2) равносильно формуле $A(\alpha X + \beta Y) = \alpha AX + \beta AY$.

6.7. При $L = L_1 \oplus L_2$ можно ввести оператор $\varphi = Pr_{L_1}$ из L в L_1 проектирования на прямое слагаемое: если $u = v + w, v \in L_1, w \in L_2$, то $Pr_{L_1}u = v$. $\square$

На множестве линейных операторов из L_1 в L_2 вводятся операции сложения и умножения на число.

Определение 6.2. *Пусть L_1, L_2 — линейные пространства, φ_1, φ_2 — линейные операторы из L_1 в L_2. Суммой операторов φ_1 и φ_2 называется линейный оператор, обозначаемый $\varphi_1 + \varphi_2$ и действующий из L_1 в L_2 по формуле $(\varphi_1 + \varphi_2)(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$. Произведением линейного оператора φ_1 на число α называется линейный оператор, обозначаемый $\alpha\varphi_1$ и действующий из L_1 в L_2 по формуле $(\alpha\varphi_1)(u) = \alpha\varphi_1(u)$.*

Легко показать, что относительно операций сложения и умножения на число множество линейных операторов из L_1 в L_2 образует линейное пространство. В качестве нулевого элемента будет выступать нулевой оператор, в качестве обратного к φ оператор $(-1)\varphi$.

В некоторых случаях для линейных операторов вводят третью операцию — их перемножение.

Определение 6.3. *Пусть L_1, L_2, L_3 — линейные пространства, φ_1 — линейный оператор из L_2 в L_3, φ_2 — линейный оператор из L_1 в L_2. Произведением оператора φ_1 на оператор φ_2 называется линейный оператор, обозначаемый $\varphi_1\varphi_2$ и действующий из L_1 в L_3 по формуле*

$$(\varphi_1\varphi_2)(u) = \varphi_1(\varphi_2(u)).$$

Задача 6.1. Пусть

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3), \\ \varphi_1(x) &= (x_1 - x_2, 2x_3, -x_2 + 1), \\ \varphi_2(x) &= (x_1 - x_2, 2x_3, -x_2). \end{aligned}$$

Проверить, являются ли φ_1 и φ_2 линейными операторами.

Решение. Очевидно, что $L_1 = L_2$ — пространство строк длины 3. Возьмем $x = (0, 0, 0)$. Тогда

$$\varphi_1(2x) = (0, 0, 1) \neq 2\varphi_1(x) = (0, 0, 2).$$

Таким образом, формула не задает линейный оператор. Об этом можно было догадаться по виду формулы, так как у линейного оператора все слагаемые должны быть линейны — то есть ровно первой степени.

Исходя из этого, предполагаем, что вторая формула задает линейный оператор. Проверим это:

$$\varphi_2(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1 - (\alpha x_2 + \beta y_2), 2(\alpha x_3 + \beta y_3), -(\alpha x_2 + \beta y_2)) = \\ = \alpha\varphi_2(x) + \beta\varphi_2(y).$$

Следовательно, φ_2 — линейный оператор.

Задача 6.2. Пусть

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3), \\ \varphi_1(x) &= (2x_2, x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3), \\ \varphi_2(x) &= (x_1 - x_2, 2x_3, -x_2). \end{aligned}$$

Найти формулу, определяющую действие оператора $\varphi_1 + \varphi_1\varphi_2$.

Решение. Поскольку

$$(\varphi_1\varphi_2)(x) = \varphi_1(\varphi_2(x)) = \varphi_1((x_1 - x_2, 2x_3, -x_2)) = (4x_3, x_1, x_1 - 2x_2 - 2x_3),$$

то $(\varphi_1 + \varphi_1\varphi_2)(x) = (2x_2 + 4x_3, 2x_1 - x_3, 2x_1 - x_2 - x_3)$.

Определение 6.4. *Ядром* $\operatorname{Ker}\varphi$ *линейного оператора* φ *из* L_1 *в* L_2 *называется множество тех векторов* u *из* L_1*, для которых* $\varphi(u) = \theta$. *Образом* $\operatorname{Im}\varphi$ *этого линейного оператора называется множество тех векторов* v *из* L_2*, которые представимы в виде* $v = \varphi(u), u \in L_1$.

Таким образом, с точки зрения теории функций ядро — это множество нулей функции, а образ — множество ее значений.

Теорема 6.1. *Ядро линейного оператора является подпространством в* L_1*, а образ — в* L_2*, причем если* L_1 *конечномерно, то* $\operatorname{Ker}\varphi$ *и* $\operatorname{Im}\varphi$ *тоже конечномерны и верна формула* $\dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim L_1$.

Доказательство. Утверждение о подпространствах легко получается по Теореме 5.1 (критерию подпространства). Действительно, если $u_1, u_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \theta$. Следовательно, $\varphi(u_1 + u_2) = \theta$ и потому $u_1 + u_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$. Кроме того, для любого числа α имеем $\varphi(\alpha u_1) = \theta$ и потому $\alpha u_1 \in \operatorname{Ker}\varphi$. Аналогично доказывается, что подпространством является образ.

Теперь проверим формулу для размерностей. Пусть L_1 конечномерно, $\dim L_1 = n$. Проверим, что $\dim\operatorname{Im}\varphi \leqslant n$. Рассмотрим набор $w_1, \ldots, w_m$ линейно независимых элементов $\operatorname{Im}\varphi$. Каждый из них представляется в виде $w_i = \varphi(u_i), u_i \in L_1$. Утверждаем, что $u_1, \ldots, u_m$ линейно независимы. Для этого составим их линейную комбинацию и приравняем ее к нулю: $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m = \theta$. Применив к левой и правой частям оператор φ, получаем

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m = \theta.$$

По линейной независимости $w_1, \ldots, w_m$ имеем равенство нулю всех коэффициентов и потому линейную независимость $u_1, \ldots, u_m$. Следовательно, $m \leqslant n$, что и требовалось доказать.

Итак, ядро и образ в данном случае — конечномерные пространства. Пусть $w_1, \ldots, w_m$, где $w_i = \varphi(u_i), u_i \in L_1$ — базис образа, а $v_1, \ldots, v_s$ — базис ядра. Оказывается, в качестве базиса L_1 можно взять набор

$u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_s$. Если это так, формула, связывающая размерности, будет верна.

Проверим линейную независимость данного набора. Пусть

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s = \theta.$$

Применив к левой и правой частям оператор φ, получаем

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m = \theta,$$

из чего по линейной независимости $w_1, \dots, w_m$ следует равенство нулю всех α_i. Поэтому $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s = \theta$, из чего по линейной независимости $v_1, \dots, v_s$ следует равенство нулю всех β_j. Таким образом, все коэффициенты исходной линейной комбинации нулевые и набор линейно независим.

Докажем, что он является системой образующих. Выберем $u \in L_1$. Поскольку $\varphi(u) \in \operatorname{Im}\varphi$, то $\varphi(u) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m$. Для вектора $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$ получаем $\varphi(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m = \varphi(u)$. Следовательно, $\varphi(u - v) = \theta$ и $u - v$ — элемент ядра и раскладывается по соответствующему базису:

$$u - v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s.$$

Итак,

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s,$$

что в связи с произвольным выбором u дает требуемое утверждение.

Примеры. Найти ядро и образ каждого из операторов, описанных в примерах 6.1 – 6.7.

6.8. Для нулевого оператора $\operatorname{Ker}\varphi = L_1, \operatorname{Im}\varphi = \{\theta\}$.

6.9. Для тождественного оператора $\operatorname{Ker}\varphi = \{\theta\}, \operatorname{Im}\varphi = L$.

6.10. Для оператора умножения на λ при $\lambda \neq 0$ имеем $\operatorname{Ker}\varphi = \{\theta\}, \operatorname{Im}\varphi = L$, а при $\lambda = 0$ получаем нулевой оператор (см. пример 6.8).

6.11. L_1 — пространство функций, непрерывно дифференцируемых на всей вещественной оси, L_2 — пространство функций, непрерывных на всей вещественной оси, φ — оператор дифференцирования. Тогда $\operatorname{Ker}\varphi = \{f = c\}, \operatorname{Im}\varphi = L_2$.

6.12. $L_1 = L_2$ — множество многочленов степени, не превосходящей n, φ — оператор дифференцирования. Тогда $\operatorname{Ker}\varphi = \{f = c\}, \operatorname{Im}\varphi$ — многочлены степени, не превосходящей $n - 1$.

6.13. $L_1 = \mathbb{R}^{n\times 1}$, $L_2 = \mathbb{R}^{m\times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \varphi(X) = AX$. Тогда $\operatorname{Ker}\varphi$ — множество решений системы линейных однородных уравнений $AX = \mathbb{O}$, а $\operatorname{Im}\varphi$ — множество столбцов $Y \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ таких, что $Y = AX$. Последнее равенство можно переписать в виде $Y = x_1A_1 + \dots + x_nA_n$, где $A = (A_1 \dots A_n), X = (x_1, \dots, x_n)^T$. Таким образом, $Y \in \operatorname{Im}\varphi$ тогда и только тогда, когда $Y \in < A_1, \dots, A_n >$. Следовательно, $\operatorname{Im}\varphi = < A_1, \dots, A_n >$. Отметим, что базисом ядра данного оператора является фундаментальная система решений СЛОУ с матрицей A, а системой образующих образа оператора — столбцы матрицы A.

6.14. Если $L = L_1 \oplus L_2$, то $\operatorname{Ker} Pr_{L_1} = L_2, \operatorname{Im} Pr_{L_1} = L_1$.

7 Матрица линейного оператора. Обратный оператор

Определение 7.1. *Пусть φ — линейный оператор из конечномерного линейного пространства L_1 в конечномерное линейное пространство L_2, $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ — базис L_1, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ — базис L_2. Разложим элементы $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ пространства L_2 по базису f:*

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\ \varphi(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{m2}f_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m \end{cases}.$$

Матрицей оператора φ в базисах e и f называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в столбцах матрицы линейного оператора стоят координаты образов элементов базиса e в базисе f. Если φ действует из L в L, то его матрицу в базисах e и e называют матрицей этого оператора в базисе e.

Важным свойством матрицы линейного оператора является то, что с ее помощью по координатам исходного вектора можно узнать координаты образа.

Теорема 7.1. *Пусть φ — линейный оператор из конечномерного линейного пространства L_1 в конечномерное линейное пространство L_2, $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ — базис L_1, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ — базис L_2, A — матрица оператора φ в базисах e и f. Тогда для любого вектора $u \in L_1$ имеем $(\varphi(u))_f = Au_e$.*

Доказательство. Разложим u по базису: $u = u_1e_1 + \dots + u_ne_n$. Тогда

$$\varphi(u) = u_1\varphi(e_1) + \dots + u_n\varphi(e_n),$$

а

$$(\varphi(u))_f = u_1(\varphi(e_1))_f + \dots + u_n(\varphi(e_n))_f = Au_e$$

(мы использовали определение матрицы оператора).

Задача 7.1. Построить матрицу линейного оператора p поворота пространства геометрических векторов вокруг оси OX против часовой стрелки на угол $\pi/2$ в базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Решение. Очевидно, что $p(\overline{i}) = \overline{j}, p(\overline{j}) = -\overline{i}, p(\overline{k}) = \overline{k}$. Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для любого вектора $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ координаты $p(\overline{a})$ равны

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}.$$

Теорема 7.2. *(Об изменении матрицы оператора при перемене базиса). Пусть φ — линейный оператор из конечномерного линейного пространства L в L, $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ — базисы L, A — матрица данного оператора в базисе e, B — матрица данного оператора в базисе f, C — матрица перехода от f к e. Тогда*

$$A = C^{-1}BC.$$

Доказательство. По Теореме 7.1 имеем $(\varphi(u))_f = Bu_f$. Но по Теореме 4.1 верно соотношение $u_f = Cu_e$. Таким образом,

$$(\varphi(u))_f = (BC)u_e.$$

Учитывая, что $(\varphi(u))_f = C(\varphi(u))_e = (CA)u_e$, получаем

$$(BC - CA)u_e = \theta.$$

Поскольку u произвольно, $BC = CA$, то есть $A = C^{-1}BC$.

Определение 7.2. *Пусть φ – линейный оператор, действующий из L в L. Линейный оператор ψ, действующий из L в L, назывется обратным к φ, если $\forall x \in L$ имеем $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = x$. Линейный оператор, имеющий обратный, называется обратимым.*

Замечание. Линейный оператор, обратный к φ, обычно обозначают φ^{-1}.

Теорема 7.3. *Следующие условия равносильны:*

1. *φ обратим,*
2. *$\operatorname{Im}\varphi = L$,*
3. *$\operatorname{Ker}\varphi = \{\theta\}$,*
4. *$\det A \neq 0$ (здесь A — матрица данного оператора в некотором базисе).*

Доказательство. Сперва проверим, что из первого условия следует второе. Действительно, из теории отображений известно, что у отображения, действующего из X в Y, существует обратное тогда и только тогда, когда оно биективно. В частности, множество его значений совпадает с Y.

То, что второе условие теоремы равносильно третьему, легко следует из формулы Теоремы 6.1

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim L.$$

Теперь получим равносильность третьего и четвертого условий. Нулевое ядро означает, что $\varphi(x) = \theta \Leftrightarrow x = \theta$. Перейдя в этой формуле к координатам, имеем $AX = \mathbb{O} \Leftrightarrow X = \mathbb{O}$, что по теории линейных систем равносильно утверждению $\det A \neq 0$.

И, наконец, проверим, что из второго, третьего и четвертого условий следует первое.

Биективность отображения φ получается из условия $\operatorname{Im}\varphi = L$ и цепочки равносильных равенств

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow \varphi(x-y) = \theta \Leftrightarrow x - y \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow x = y.$$

Следовательно, обратное отображение (обозначим его ψ) существует. Осталось проверить, что оно является линейным оператором, то есть $\psi(\alpha x + \beta y) = \alpha\psi(x) + \beta\psi(y)$. Поскольку $\operatorname{Im}\varphi = L$, имеем $x = \varphi(u)$ и $y = \varphi(v)$. Следовательно,

$$\psi(\alpha x+\beta y) = \psi(\alpha\varphi(u)+\beta\varphi(v)) = \psi(\varphi(\alpha u+\beta v) = \alpha u+\beta v = \alpha\psi(x)+\beta\psi(y).$$

Примеры.

7.1. Для нулевого оператора обратного не существует (за исключением случая нулевого пространства).

7.2. Тождественный оператор совпадает со своим обратным.

7.3. L — множество многочленов степени, не превосходящей n, φ — оператор дифференцирования. Тогда $\operatorname{Ker}\varphi = \{f = c\} \neq \theta$, поэтому обратного оператора не существует.

7.4. $L = \mathbb{R}^{n\times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \varphi(X) = AX$. Матрицей этого оператора в стандартном базисе является матрица A. Таким образом, оператор обратим в том и только том случае, когда $\det A \neq 0$, причем обратный оператор — это оператор домножения слева на обратную матрицу.

7.5. Для оператора поворота пространства геометрических векторов вокруг оси OX против часовой стрелки на угол $\pi/2$ обратный — оператор поворота вокруг оси OX по часовой стрелки на угол $\pi/2$.

8 Собственные числа и собственные векторы

В этом пункте L — конечномерное линейное пространство размерности n и φ — линейный оператор, действующий из L в L. Самый простой тип подобного оператора — это оператор растяжения в λ раз. Одним из важнейших вопросов теории линейных операторов является следующий: можно ли найти такое число λ и такой ненулевой вектор x, на который произвольный оператор φ будет действовать как оператор растяжения в λ раз?

Определение 8.1. *Число λ называется собственным числом оператора φ, если существует ненулевой вектор x такой, что $\varphi(x) = \lambda x$. Век-*

тор x при этом называется собственным вектором оператора φ, соответствующим собственному числу λ.

Примеры.

8.1. Для нулевого оператора единственным собственным числом является число 0, а собственным вектором — любой ненулевой вектор пространства, поскольку оператор действует на любой вектор, умножая его на 0.

8.2. Для тождественного оператора единственным собственным числом является число 1, а собственным вектором — любой ненулевой вектор пространства, поскольку оператор действует на любой вектор, умножая его на 1.

8.3. Для оператора поворота пространства V_2 относительно начала координат на угол $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, собственных чисел и собственных векторов нет, поскольку ни один ненулевой вектор под действием этого оператора не сохраняет своего направления.

Определение 8.2. *Характеристическим многочленом оператора φ называется многочлен $\chi(t) = \det(A - tE)$, где A — матрица оператора φ в некотором базисе, E — единичная матрица порядка n, а t — переменная.*

Заметим, что поскольку оператор φ действует из L в L, его матрица является квадратной порядка n и определение корректно. Кроме того, если линейное пространство определено над $\mathbb{R}$, то $\chi(t)$ рассматривается как многочлен над $\mathbb{R}$ и под его корнями подразумеваются вещественные корни, если же пространство определено над $\mathbb{C}$, то и $\chi(t)$ рассматривается как многочлен над $\mathbb{C}$.

Характеристический многочлен используется для нахождения собственных чисел благодаря следующей теореме.

Теорема 8.1. *Характеристический многочлен имеет степень n и не зависит от выбора базиса. Корни характеристического многочлена, и только они, являются собственными числами линейного оператора.*

Доказательство. Пусть φ — линейный оператор из L в L, e и f — базисы L, A — матрица данного оператора в базисе e, B — его матрица в базисе f, C — матрица перехода от f к e. По Теореме 7.2 имеем

$$A = C^{-1}BC.$$

Следовательно,

$$\det(A - tE) = \det(C^{-1}BC - C^{-1}tEC) =$$
$$= \det C^{-1} \det(B - tE) \det C = \det(B - tE)$$

(мы использовали свойства определителя). Итак, характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. Что касается степени этого многочлена, при помощи определения определителя легко видеть, что старший член имеет вид $(-1)^n t^n$.

Теперь докажем утверждение о собственных числах. Число λ — собственное число тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор x, для которого $\varphi(x) = \lambda x$. Переходя к координатам в базисе e, имеем следующее равносильное условие: существует ненулевой столбец x_e, для которого $Ax_e = \lambda x_e$, или $(A - \lambda E)x_e = \mathbb{O}$. Это верно в том и только в том случае, когда $\det(A - \lambda E) = 0$ (см. [3]), то есть λ — корень характеристического многочлена. □

Приведем еще три важных теоремы, касающихся собственных векторов.

Теорема 8.2. *Множество всех собственных векторов линейного оператора, соответствующих фиксированному собственному числу, вместе с нулевым вектором составляют линейное пространство.*

Доказательство предоставляем читателю в качестве упражнения.

Теорема 8.3. *Для того, чтобы матрица линейного оператора в данном базисе была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базисные векторы были собственными векторами этого оператора. На диагонали матрицы линейного оператора в базисе из собственных векторов стоят собственные числа данного оператора.*

Доказательство. Как первое, так и второе утверждения моментально следуют из определения матрицы линейного оператора.

Теорема 8.4. *Пусть собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ оператора φ различны. Тогда отвечающие им собственные векторы $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, наше утверждение неверно и данные векторы линейно зависимы. Тогда существуют их нулевые линейные комбинации с ненулевыми коэффициентами. Выберем среди них ту, в которой количество ненулевых коэффициентов наименьшее:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = \theta, \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \dots, \alpha_m \neq 0, m \geq 2.$$

Применив к левой и правой частям φ, получаем новое равенство:

$$\lambda_1 \alpha_1 x_1 + \lambda_2 \alpha_2 x_2 \dots + \lambda_m \alpha_m x_m = \theta$$

(мы воспользовались определением собственного вектора). Домножив первое равенство на λ_1 и вычтя результат из второго, имеем

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_2 x_2 \dots + (\lambda_m - \lambda_1)\alpha_m x_m = \theta.$$

Это линейная комбинация исходных векторов, она равна нулю, причем число ненулевых коэффициентов в ней меньше, чем в начально выбранной, что приводит к противоречию.

Задача 8.1. Найти собственные числа и координаты собственных векторов линейного оператора, имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если существует базис пространства, состоящий из собственных векторов данного оператора, требуется также составить матрицу оператора в этом базисе.

Решение. Вычислим характеристический многочлен

$$\chi(t) = \det \begin{pmatrix} 5-t & 6 & -3 \\ -1 & -t & 1 \\ 1 & 2 & -1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 4t^2 - 2t - 4 = -(t-2)(t^2 - 2t - 2).$$

Корни характеристического многочлена

$$t_1 = 2, t_2 = 1 + \sqrt{3}, t_3 = 1 - \sqrt{3}.$$

Координаты собственных векторов, соответствующих собственному числу 2, являются ненулевыми решениями системы $AX = 2X$, то есть $(A - 2E)X = \mathbb{O}$.

Решаем ее:

$$\begin{pmatrix} 5-2 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, координаты собственных векторов

$$\begin{cases} x_1 &= & -2c \\ x_2 &= & c \\ x_3 &= & 0 \end{cases}, c \neq 0.$$

Координаты собственных векторов, соответствующих собственному числу $1+\sqrt{3}$, являются ненулевыми решениями системы

$$(A-(1+\sqrt{3})E)X = \mathbb{O}.$$

Решаем ее:

$$\begin{pmatrix} 4-\sqrt{3} & 6 & -3 \\ -1 & -1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 & -2-\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6-3\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 2+\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, координаты собственных векторов

$$\begin{cases} x_1 &= & (6+3\sqrt{3})c \\ x_2 &= & -(2+\sqrt{3})c \\ x_3 &= & c \end{cases}, c \neq 0.$$

Аналогично для собственного числа $1-\sqrt{3}$ координаты собственных векторов

$$\begin{cases} x_1 &= & (6-3\sqrt{3})c \\ x_2 &= & -(2-\sqrt{3})c \\ x_3 &= & c \end{cases}, c \neq 0.$$

Поскольку мы получили три различных собственных числа, по Теореме 8.4 отвечающие им три собственных вектора, взятых по одному для каждого собственного числа, линейно независимы и, следовательно, составляют базис. В этом базисе матрица исходного оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если A — квадратная матрица порядка n, то под собственными числами и собственными столбцами A подразумеваются собственные числа и собственные векторы оператора, действующего из $K^{n\times 1}$ в $K^{n\times 1}$ по формуле $\varphi(X) = AX$.

9 Эвклидовы и унитарные пространства

Определение 9.1. *Линейное пространство E над $\mathbb{R}$ в совокупности с правилом, которое сопоставляет любым двум векторам $x, y \in E$ вещественное число, обозначаемое (x, y), называется эвклидовым пространством, если выполняются следующие условия:*

1. *$\forall x, y \in E$ имеем $(x, y) = (y, x)$ — симметричность,*
2. *$\forall x, y, z \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ — линейность,*
3. *$\forall x \in E$ имеем $(x, x) \geq 0$ — положительная определенность,*
4. *$(x, x) = 0$ только при $x = \theta$ — невырожденность.*

В этом случае функция (x, y) называется скалярным произведением.

Примеры.
9.1. $E = V_3$, скалярное произведение стандартное.
9.2. $E = \mathbb{R}^{n\times 1}$, скалярное произведение $(X, Y) = X^T Y$.
9.3. E — пространство вещественных функций, интегрируемых на отрезке $(0; 1)$, скалярное произведение

$$(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Определение 9.2. *Линейное пространство U над $\mathbb{C}$ в совокупности с правилом, которое сопоставляет любым двум векторам $x, y \in U$ комплексное число, обозначаемое (x, y), называется унитарным пространством, если выполняются следующие условия:*

1. *$\forall x, y \in U$ имеем $(x, y) = \overline{(y, x)}$ — кососимметричность,*

2. *$\forall x, y, z \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имеем $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ — линейность,*

3. *$\forall x \in U$ имеем $(x, x) \geq 0$ — положительная определенность,*

4. *$(x, x) = 0$ только при $x = \theta$ — невырожденность.*

В этом случае функция (x, y) называется скалярным произведением.

Надчеркивание означает здесь комплексное сопряжение.

Заметим, что из условия 1 следует, что $(x, x) = \overline{(x, x)}$, то есть $(x, x) \in \mathbb{R}$, а из условий 1 и 2 легко получается формула

$$(z, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}(z, x) + \overline{\beta}(z, y).$$

Пример 9.4. $U = \mathbb{C}^{n \times 1}$, скалярное произведение $(X, Y) = X^T \overline{Y}$. □

Всюду в дальнейшем через E будем обозначать конечномерное эвклидово пространство, через U — конечномерное унитарное пространство, а через L — конечномерное эвклидово или унитарное пространство. Если не уточняется, о котором из двух идет речь, значит, утверждение верно для обоих.

Определение 9.3. *Векторы $x, y \in L$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.*

Определение 9.4. *Нормой (длиной) вектора $x \in L$ называется число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.*

Определение 9.5. *Расстоянием между векторами $x \in L$ и $y \in L$ называется число $d(x, y) = \|x - y\|$.*

Определение 9.6. *Вектор $x \in L$ называется нормированным, если его норма $\|x\| = 1$.*

Заметим, что в случае пространства геометрических векторов с обычным скалярным произведением эти понятия совпадают с введенными в курсе геометрии.

Теорема 9.1. *(Неравенство Коши-Буняковского). Для всех $x, y \in L$ имеем $|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|$.*

Доказательство. Рассмотрим более сложный случай унитарного пространства (чтобы получить доказательство для эвклидова пространства, достаточно заменить всюду комплексные числа вещественными).

Составим функцию произвольного комплексного аргумента z:

$$f(z) = (zx - y, zx - y).$$

Из определения унитарного пространства следует, что $f(z) \geq 0, z \in \mathbb{C}$. Но по свойствам скалярного произведения

$$f(z) = (x, x)|z|^2 - ((x, y)z + \overline{(x, y)z}) + (y, y).$$

Запишем комплексное число (x, y) в показательной форме: $(x, y) = |(x, y)|e^{i\alpha}$, и выберем $z = te^{-i\alpha}, t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f(z) = (x, x)t^2 - 2|(x, y)|t + (y, y)$$

— квадратный трехчлен, не меняющий знака. Поэтому его дискриминант $d = 4|(x, y)|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$ не может быть положительным, что и дает требуемое утверждение.

Примеры (см. примеры 9.2, 9.3, 9.4).

9.5. Для $E = \mathbb{R}^{n\times 1}$ неравенство Коши-Буняковского имеет вид

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

9.6. Для эвклидова пространства функций, интегрируемых на отрезке $(0; 1)$, неравенство Коши-Буняковского имеет вид

$$(\int_0^1 f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 g^2(x)dx.$$

9.7. Для $U = \mathbb{C}^{n\times 1}$ неравенство Коши-Буняковского имеет вид

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2.$$

10 Процесс ортогонализации. Ортонормированные базисы (ОНБ)

В эвклидовом пространстве, помимо двух обычных для линейного пространства операций, вводится третья — скалярное произведение. В связи с этим возникают новые понятия — ортогональность и нормированность.

Определение 10.1. *Система ненулевых векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$ называется ортогональной, если все они попарно ортогональны друг другу.*

Определение 10.2. *Система векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$ называется нормированной, если все они нормированы.*

Определение 10.3. *Система векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$ называется ортонормированной, если она ортогональна и нормирована.*

Теорема 10.1. *Ортогональная система линейно независима.*

Доказательство. Пусть система векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ортогональна. Составим их произвольную линейную комбинацию, равную нулевому вектору: $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m = \theta$. Умножив левую и правую части данного равенства скалярно на u_1 и воспользовавшись ортогональностью, получаем, что $\alpha_1 = 0$. Аналогично доказывается равенство нулю оставшихся коэффициентов. Итак, система линейно независима. □

Часто, особенно в геометрических приложениях, ортогональная система удобнее просто линейно независимой (подобно тому, как прямоугольная система координат удобнее косоугольной). Поэтому важной задачей является построение по линейно независимой системе ортогональной.

Теорема 10.2. *(Грама-Шмидта). Пусть $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m \in L$ — линейно независимая система. Тогда существует ортогональная система $v_1, v_2, \ldots, v_m$ такая, что*

$$v_1 \in < u_1 >, v_2 \in < u_1, u_2 >, \ldots, v_m \in < u_1, u_2, \ldots, u_m > .$$

Доказательство. Искать требуемые векторы будем в следующем виде:

$$\begin{cases} v_1 & = & u_1 \\ v_2 & = & \alpha_{21}v_1 + u_2 \\ v_3 & = & \alpha_{31}v_1 + \alpha_{32}v_2 + u_3 \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_m & = & \alpha_{m1}v_1 + \alpha_{m2}v_2 + \dots + \alpha_{mm-1}v_{m-1} + u_m \end{cases}.$$

Следует найти коэффициенты $\alpha_{ij}, 1 \le j < i \le m$, дающие ортогональную систему.

Применим индукцию по количеству векторов. В случае $m = 1$ достаточно взять $v_1 = u_1$. Теперь полагаем, что при $m = k$ утверждение верно, то есть нашлись подходящие коэффициенты $\alpha_{ij}, 1 \le j < i \le k$. Осталось построить

$$v_{k+1} = \alpha_{k+11}v_1 + \alpha_{k+12}v_2 + \dots + \alpha_{k+1k}v_k + u_{k+1},$$

ортогональное $v_1, \dots, v_k$. Домножая последнее равенство скалярно на v_1 и учитывая индукционное предположение, видим, что требование ортогональности v_{k+1} и v_1 равносильно условию

$$0 = \alpha_{k+11}(v_1, v_1) + (u_{k+1}, v_1),$$

то есть следует выбрать $\alpha_{k+11} = -\frac{(u_{k+1},v_1)}{(v_1,v_1)}$. Аналогично, домножая на $v_2, \dots, v_k$, получаем искомые формулы для всех коэффициентов:

$$\alpha_{ij} = -\frac{(u_i, v_j)}{(v_j, v_j)}, 1 \le j < i \le k + 1.$$

Проверим, что полученный вектор не может оказаться нулевым. Пусть $v_{k+1} = \theta$. Тогда

$$\theta = \alpha_{k+11}v_1 + \alpha_{k+12}v_2 + \dots + \alpha_{k+1k}v_k + u_{k+1},$$

то есть

$$u_{k+1} \in < v_1, \dots, v_k > \subset < u_1, \dots, u_k >,$$

что противоречит линейной независимости исходной системы. □

Построение с помощью данной теоремы по произвольной системе линейно независимых векторов ортогональной системы называется процессом ортогонализации Грама-Шмидта.

Задача 10.1. Провести процесс ортогонализации Грама-Шмидта с системой

$$u_1 = \begin{pmatrix}-7 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix}-9 & 1 & -5 & 7\end{pmatrix}^T,$$
$$u_3 = \begin{pmatrix}1 & -4 & 6 & 7\end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix}9 & -7 & 11 & -1\end{pmatrix}^T.$$

Решение. Применим формулы: $v_1 = u_1, v_2 = a_{21}v_1 + u_2$, где

$$\alpha_{21} = -\frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} = -\frac{63 + 1 - 15 + 35}{49 + 1 + 9 + 25} = -1.$$

Следовательно,

$$v_2 = -v_1 + u_2 = \begin{pmatrix}-2 & 0 & -8 & 2\end{pmatrix}^T.$$

Далее, $v_3 = \alpha_{31}v_1 + \alpha_{32}v_2 + u_3$, где

$$\alpha_{31} = -\frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)} = -\frac{-7 - 4 + 18 + 35}{49 + 1 + 9 + 25} = -\frac{1}{2},$$
$$\alpha_{32} = -\frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)} = -\frac{-2 - 48 + 14}{4 + 64 + 4} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$v_3 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + u_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}7 & -9 & 1 & 11\end{pmatrix}^T.$$

И, наконец, $v_4 = \alpha_{41}v_1 + \alpha_{42}v_2 + \alpha_{43}v_3 + u_4$, где

$$\alpha_{41} = -\frac{(u_4, v_1)}{(v_1, v_1)} = -\frac{-63 - 7 + 33 - 5}{49 + 1 + 9 + 25} = \frac{1}{2},$$
$$\alpha_{42} = -\frac{(u_4, v_2)}{(v_2, v_2)} = -\frac{-18 - 88 - 2}{4 + 64 + 4} = \frac{3}{2},$$
$$\alpha_{43} = -\frac{(u_4, v_3)}{(v_3, v_3)} = -2\frac{63 + 63 + 11 - 11}{49 + 81 + 1 + 121} = -1,$$

то есть

$$v_4 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2 - v_3 + u_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0 & -1\end{pmatrix}^T.$$

Определение 10.4. *Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ конечномерного эвклидова или унитарного пространства называется ортонормированным, если он является ортонормированной системой.*

Теорема 10.3. *В конечномерном эвклидовом или унитарном пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — произвольный базис данного пространства. Проведем с ним процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получив соответствующие $v_1, \ldots, v_n$. Они линейно независимы по Теореме 10.1, причем их количество равно размерности пространства. Следовательно, это базис. Осталось отнормировать его, поделив каждый вектор на собственную норму.

Теорема 10.4. *Любую ортонормированную систему векторов конечномерного эвклидового или унитарного пространства можно дополнить до ортонормированного базиса этого пространства.*

Доказательство. Заметим лишь, что данную систему можно дополнить до произвольного базиса, а потом провести процесс ортогонализации Грама-Шмидта, который не поменяет исходной, уже ортогональной системы. Далее следует отнормировать результат.

Примеры.

10.1. В трехмерном пространстве геометрических векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ составляют ортонормированный базис. Разумеется, он не единственен — любая тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов являются ортонормированным базисом. Такие базисы обычно и рассматриваются в геометрии. Не ортонормированные базисы значительно менее удобны.

10.2. В пространстве столбцов высоты n стандартный базис

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

является ортонормированным. □

Заметим, что многие формулы имеют наиболее простой вид именно в ортонормированном базисе, поэтому для эвклидова пространства задача построения ортонормированного базиса — одна из важнейших.

11 Матрица Грама. Ортогональные преобразования

Определение 11.1. *Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ — базис L. Матрицей Грама, соответствующей этому базису, называется матрица*

$$G = \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \dots & (u_1, u_n) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & \dots & (u_2, u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_n, u_1) & (u_n, u_2) & \dots & (u_n, u_n) \end{pmatrix}.$$

Пример 11.1. Для ортонормированного базиса матрица Грама единичная.

Теорема 11.1. *Для всех $x, y \in L$ имеем $(x, y) = x_u^T G \overline{y_u}$.*

Доказательство. Цепочка тождеств

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_{iu} u_i, \sum_{j=1}^{n} y_{ju} u_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{iu} \overline{y_{ju}} (u_i, u_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{iu} g_{ij} \overline{y_{ju}}$$

доказывает наше утверждение. □

Заметим, что в случае ортонормированного базиса формула упрощается: $(x, y) = x_u^T \overline{y_u}$. Более того, легко видеть, что если скалярное произведение произвольных векторов считается по данной формуле, то базис u ортонормирован.

Теорема 11.2. *Пусть G_u — матрица Грама базиса u, а G_e — матрица Грама базиса e. Тогда $G_e = C^T G_u \overline{C}$, где C — матрица перехода от u к e.*

Доказательство. По Теореме 11.1 имеем $(x, y) = x_u^T G_u \overline{y_u} = x_e^T G_e \overline{y_e}$. При этом $x_u = C x_e, y_u = C y_e$. Таким образом, $x_e^T (C^T G_u \overline{C} - G_e) \overline{y_e} = \mathbb{O}$. Необходимая формула следует из произвольности x и y.

Определение 11.2. *Матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется ортогональной, если $A^{-1} = A^T$.*

Последнее условие равносильно равенству $AA^T = A^T A = E$, где E — единичная матрица, а это означает, что строки матрицы A (как и ее столбцы) составляют ортонормированную систему. Легко проверить также, что если A — ортогональная матрица, то A^{-1} тоже ортогональна. Доказательство оставляем читателю в качестве упражнения.

Определение 11.3. *Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется унитарной, если $A^{-1} = \overline{A}^T$.*

Пример 11.2. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ортогональна, так как длина каждой ее строки равна $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = 1$, произведение первой и второй строк $\frac{2}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9} = 0$, произведение первой и третьей строк $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{4}{9} = 0$, произведение второй и третьей строк $\frac{4}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9} = 0$.

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

не является ортогональной, так как длина ее первой строки равна

$$\sqrt{1+4+9} \neq 1.$$

Определение 11.4. *Преобразование базисов и координат конечномерного эвклидова пространства E, происходящее при помощи ортогональной матрицы перехода от базиса к базису, называется ортогональным.*

Определение 11.5. *Преобразование базисов и координат конечномерного унитарного пространства U, происходящее при помощи унитарной матрицы перехода от базиса к базису, называется унитарным.*

Теорема 11.3. *В конечномерном эвклидовом (соответственно унитарном) пространстве преобразование, переводящее ОНБ в ОНБ, ортогонально (соответственно унитарно). Если один из базисов является ортонормированным и преобразование базисов ортогонально для эвклидова и унитарно для унитарного пространств, то второй базис тоже является ортонормированным.*

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ и $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированные базисы, C — матрица перехода от u к e, E — единичная матрица. Тогда

$$E = G_e = C^T G_u \overline{C} = C^T E \overline{C} = C^T \overline{C},$$

что и означает ортогональность или унитарность C.

Теперь пусть $u_1, \ldots, u_n$ — ортонормированный базис, причем матрица C перехода от u к e ортогональна. Тогда

$$G_e = C^T G_u \overline{C} = C^T E \overline{C} = C^T \overline{C} = E.$$

Следовательно, базис e ортонормирован.

Пример 11.3. Преобразование базисов и координат, произведенное с помощью матрицы перехода A из примера 11.2, является ортогональным и переводит ОНБ в ОНБ, а произведенное с помощью матрицы B — не является ортогональным.

12 Базис из собственных векторов. Ортогональное дополнение. Сопряженный оператор

Как было сказано выше, одной из важнейших задач теории линейных операторов является задача нахождения собственных векторов и собственных чисел операторов. Усложним ее, а именно попытаемся найти базис линейного пространства, состоящий из собственных векторов заданного линейного оператора. В этом базисе матрица линейного оператора приобретет наиболее простой вид — она будет диагональной с собственными числами на диагонали, и вдоль каждой координатной оси оператор будет действовать как растяжение. Требуется ответить на вопрос, для каких операторов подобный базис существует.

Прежде всего приведем примеры, показывающие, что не для каждого линейного оператора ответ положителен.

Примеры.

12.1. φ — оператор поворота геометрических векторов на плоскости на угол α относительно начала координат. В стандартном базисе $\overline{i}, \overline{j}$ его матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

характеристический многочлен равен $t^2 - 2\cos\alpha t + 1$ и не имеет вещественных корней при $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, нет и собственных векторов. Заметим, что если б мы рассматривали унитарное, а не эвклидово пространство, то нашли бы как собственные числа, так и собственные векторы.

12.2. В двумерном пространстве L оператор φ действует на базисные векторы e_1, e_1 следующим образом: $\varphi(e_1) = 2e_1, \varphi(e_2) = e_1 + 2e_2$. Имеется единственное собственное число 2, ему соответствуют собственные векторы вида $ce_1, c \neq 0$. Любая пара из них линейно зависима, поэтому базиса построить невозможно. $\square$

Прежде, чем проводить дальнейшие исследования, введем некоторые новые понятия.

Определение 12.1. *Пусть $P \subset L$. Ортогональным дополнением множества P называется множество векторов из L, ортогональных всем элементам P.*

Обозначать ортогональное дополнение P будем $P^{\perp}$. Таким образом, $P^{\perp} = \{x \in L : \forall y \in P \ (x, y) = 0\}$. Из невырожденности скалярного произведения легко следует соотношение $P \cap P^{\perp} = \{\theta\}$.

Пример 12.2. Пусть $E = V_3, P = \overline{n} = (A, B, C)$ состоит из одного ненулевого вектора. Тогда

$$P^{\perp} = \{\bar{b} \in E : \ (\bar{b}, \overline{n}) = 0\} = \{\bar{b} = (x, y, z) \in E : \ Ax + By + Cz = 0\}.$$

Таким образом, $P^{\perp}$ — множество векторов, лежащих в плоскости с нормалью $\overline{n}$.

Теорема 12.1. *Ортогональное дополнение произвольного множества P является подпространством. Если P — подпространство, то*

$$L = P \oplus P^{\perp}.$$

Доказательство. По Теореме 5.1 для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что если $x_1, x_2 \in P^{\perp}, \alpha \in K$, то

$$x_1 + x_2, \alpha x_1 \in P^{\perp}.$$

Но $\forall y \in P$ имеем $(x_1, y) = 0, (x_2, y) = 0$, поэтому $\forall y \in P$ выполнено соотношение $(x_1 + x_2, y) = 0, (\alpha x_1, y) = 0$, что и требовалось получить.

Теперь P — подпространство. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — его ортонормированный базис. Дополним этот базис до ортонормированного базиса всего пространства: $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ — ОНБ L. Значит, $e_{k+1}, \dots, e_n$ ортогональны $e_1, \dots, e_k$, а потому и их линейной оболочке P. Таким образом, $e_{k+1}, \dots, e_n \in P^\perp$ и $< e_{k+1}, \dots, e_n > \in P^\perp$. Но

$$L = < e_1, \dots, e_k > \oplus < e_{k+1}, \dots, e_n > = P \oplus < e_{k+1}, \dots, e_n > \subset P \oplus P^\perp \subset L,$$

поэтому $L = P \oplus P^\perp$ (то, что данная сумма прямая, следует из условия $P \cap P^\perp = \{\theta\}$).

Определение 12.2. *Пусть φ — линейный оператор из L в L. Линейный оператор φ^*, действующий из L в L, называют сопряженным к φ, если для всех $x, y \in L$ имеем $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$.*

Пример 12.3. Сопряженный к нулевому оператору — нулевой, к тождественному — тождественный.

Теорема 12.2. *Для любого линейного оператора, действующего из L в L, существует единственный сопряженный.*

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис L, а A — матрица оператора φ в этом базисе. Тогда

$$(\varphi(x), y) = (Ax_e)^T \overline{y_e} = x_e^T A^T \overline{y_e}.$$

Построим линейный оператор φ^*, имеющий в базисе $e_1, \dots, e_n$ матрицу $\overline{A}^T$. Поскольку $(x, \varphi^*(y)) = x_e^T A^T \overline{y_e}$, он является сопряженным к φ.

Теперь проверим единственность. Пусть φ_1^*, φ_2^* — сопряженные к φ. Тогда $(\varphi(x), y) = (x, \varphi_1^*(y)) = (x, \varphi_2^*(y))$, поэтому $(x, \varphi_1^*(y) - \varphi_2^*(y)) = 0$, то есть

$$\varphi_1^*(y) - \varphi_2^*(y) \in L^\perp = \{\theta\}.$$

Итак, операторы совпали. □

Заметим, что мы заодно получили и формулу для матрицы сопряженного оператора в ортонормированном базисе: $A^* = \overline{A}^T$. В случае эвклидова пространства комплексное сопряжение не обязательно (оно не меняет матрицы с вещественными элементами).

13 Самоопряженные, ортогональные, унитарные операторы

Определение 13.1. *Линейный оператор φ, действующий из L в L, называется самосопряженным, если он равен своему сопряженному.*

Таким образом, для эвклидова пространства в ОНБ матрица самосопряженного оператора симметрическая. В частности, нулевой и тождественный операторы являются самосопряженными.

Теорема 13.1. *Если линейный оператор φ, действующий из L в L, самосопряжен, то все корни его характеристического многочлена вещественны и собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.*

Доказательство. Пусть e — ОНБ L, A — матрица нашего оператора в этом базисе, λ — корень характеристического многочлена (возможно, комплексный), X — собственный столбец матрицы A, соответствующий λ. Тогда в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ имеем

$$(AX, X) = \lambda(X, X) = \lambda\|X\|^2,$$

и в то же время $(AX, X) = (X, AX) = \overline{\lambda}\|X\|^2$. Следовательно, $\overline{\lambda} = \lambda$, то есть $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теперь пусть λ_1, λ_2 — различные собственные числа (мы уже знаем, что они вещественны), x_1, x_2 — соответствующие им собственные векторы. В этом случае

$$\lambda_1(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), x_2) = (x_1, \varphi(x_2)) = \lambda_2(x_1, x_2),$$

что и дает условие $(x_1, x_2) = 0$.

Теорема 13.2. *Для любого самосопряженного оператора φ, действующего из L в L, существует базис из собственных векторов.*

Доказательство. Используем индукцию по размерности пространства.

В случае одномерного пространства любой линейный оператор является оператором умножения на число, поэтому все ненулевые векторы собственные.

Пусть теперь в пространстве размерности меньше n для любого самосопряженного оператора существует базис из собственных векторов, и пусть самосопряженный оператор φ действует из L в L, причем L имеет размерность n. Обозначим через λ_1 один из корней его характеристического многочлена (по Теореме 13.1 таковой существует и вещественен), через x_1 — соответствующий нормированный собственный вектор, а также введем обозначение $P =< x_1 >$. По Теореме 12.1 имеем $L = P \oplus P^{\perp}$, причем $\dim P^{\perp} = n-1$. Докажем, что оператор φ отображает векторы из $P^{\perp}$ в векторы из $P^{\perp}$.

Возьмем $x \in P^{\perp}$, то есть обладающий свойством $(x, x_1) = 0$. Следовательно,

$$(\varphi(x), x_1) = (x, \varphi(x_1)) = \lambda_1(x, x_1) = 0$$

и $\varphi(x) \in P^{\perp}$. Поэтому можно ввести линейный оператор φ_1, действующий из $P^{\perp}$ в $P^{\perp}$ по той же формуле, что и φ. Он самосопряжен, и по индукционному предположению для него существует ортонормированный базис из собственных векторов $x_2, \ldots, x_n$. Они очевидным образом являются также собственными векторами исходного оператора, причем ортогональны x_1. Поэтому $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — базис из собственных векторов исходного оператора.

Определение 13.2. *Линейный оператор, действующий из E в E, называется ортогональным, если сопряженный к нему совпадает с обратным.*

Таким образом, в ОНБ матрица ортогонального оператора ортогональна.

Теорема 13.3. *Следующие условия равносильны:*

1. *Линейный оператор φ, действующий из E в E, ортогонален,*
2. *$\forall x, y$ имеем $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ (оператор сохраняет скалярное произведение),*
3. *$\forall x$ имеем $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ (оператор сохраняет норму),*
4. *$\forall x, y$ имеем $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$ (оператор сохраняет расстояние).*

Доказательство. Сперва проверим, что из первого условия следует второе. Условие 1 означает, что $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^{-1}(y))$. Таким образом,

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, \varphi^{-1}(\varphi(y))) = (x, y).$$

Теперь из второго условия выведем третье:

$$\|\varphi(x)\|^2 = (\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x) = \|x\|^2.$$

Из третьего – четвертое:

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = \|\varphi(x-y)\| = \|x-y\| = d(x, y).$$

И, наконец, из четвертого – первое.

Прежде всего необходимо проверить, что для линейного оператора φ существует обратный, то есть, например (см. Теорему 7.3), что ядро его состоит только из нулевого вектора. Пусть $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, тогда $\varphi(x) = \theta$. По условию 4 имеем

$$d(x, x) = d(\varphi(x), \varphi(x)) = d(\theta, \theta) = 0,$$

то есть $\operatorname{Ker}\varphi = \{\theta\}$. Итак, обратный оператор φ^{-1} существует.

Поскольку

$$d^2(\varphi(x), \varphi(y)) = (\varphi(x), \varphi(x)) + (\varphi(y), \varphi(y)) - 2(\varphi(x), \varphi(y)),$$
$$d^2(x, y) = (x, x) + (y, y) - 2(x, y)$$

и эти величины равны, имеем $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$. Следовательно, если $z = \varphi^{-1}(y)$, то $(\varphi(x), y) = (\varphi(x), \varphi(z)) = (x, z) = (x, \varphi^{-1}(y))$, что и дает ортогональность оператора.

Список литературы.

1. **Гельфанд И. М.** Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.

2. **Ильин В. А., Поздняк Э. Г.** Линейная алгебра. М.: Наука, 1974.

3. **Мадунц А. И.** Линейная алгебра. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений. Спб.: СПбГТУ, 2003.

4. **Полищук В. И.** Методические указания по курсу лекций "Высшая математика". Самостоятельная подготовка линейной алгебры и аналитической геометрии. /ЛЭТИ. Л., 1982.

5. **Тихомиров С. Р.** Сборник задач по линейной алгебре (банк вариантов). Издание СПбГТУ, 1995.

ОГЛАВЛЕНИЕ