Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. И. МАДУНЦ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И ИХ СВОЙСТВА

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2013

УДК 517.21
ББК

Линейная алгебра. Квадратичные формы и их свойства: учеб. пособие / А. И. Мадунц – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 50 с.

Пособие содержит теоретическое изложение материала в соответствии с действующей программой по теме «Линейная алгебра. Квадратичные формы и их свойства», а также большое количество разобранных примеров и варианты расчетного задания.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области технической физики, электроники и наноэлектроники при изучении дисциплины «Линейная алгебра».

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN 978-5-7422-1845-6

1 БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Определение 1.1. *Пусть L — конечномерное линейное пространство над $\mathbb{R}$. Отображение $B(x, y)$, сопоставляющее каждой упорядоченной паре элементов x, y из L вещественное число, называется билинейной формой, заданной на L, если выполнены условия*

1. *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y, z \in L$ имеем $B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z)$ — линейность по первому аргументу,*

2. *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y, z \in L$ имеем $B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x, y) + \beta B(x, z)$ — линейность по второму аргументу.*

Определение 1.2. *Билинейная форма $B(x, y)$ называется симметрической, если $\forall x, y \in L$ имеем $B(x, y) = B(y, x)$.*

Теорема 1.1. *Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис L, $B(x, y)$ — билинейная форма на L. Тогда существует единственный набор вещественных чисел $b_{ij} (1 \le i, j \le n)$ такой, что при любых x и y имеем*

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j,$$

где x_i, y_j — координаты в базисе e векторов x и y соответственно. При этом $b_{ij} = B(e_i, e_j)$.

Доказательство. Разложим векторы x и y по базису e:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

По линейности $B(x, y)$ получаем

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} B(e_i, e_j) x_i y_j.$$

Осталось ввести обозначение $b_{ij} = B(e_i, e_j)$, и существование доказано.

Проверим единственность. Пусть

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j.$$

Подставив $x = e_i, y = e_j$, видим, что $b_{ij} = B(e_i, e_j)$.

Определение 1.3. *Матрица*

$$B = (b_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

где $b_{ij} = B(e_i, e_j)$, *называется матрицей билинейной формы* $B(x, y)$ *в базисе* e. *Представление билинейной формы как*

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j,$$

где x_i, y_j *— координаты в базисе* e *векторов* x *и* y *соответственно, называется общим видом билинейной формы.*

С использованием матрицы B билинейную форму можно записать следующим образом:

$$B(x, y) = x_e^T B y_e$$

(напомним, что через x_e и y_e обозначаются столбцы координат в базисе e векторов x и y соответственно).

Теорема 1.2. *Билинейная форма является симметрической тогда и только тогда, когда симметрична ее матрица.*

Доказательство. Если билинейная форма $B(x, y)$ является симметрической, то, в частности, $B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$, поэтому $b_{ij} = b_{ji}$, что и означает симметричность матрицы. Если же известно, что $b_{ij} = b_{ji}$, то

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^n b_{ji} y_j x_i = B(y, x).$$

Равносильность утверждений доказана.

Теорема 1.3. *Любая матрица* $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ *является матрицей некоторой билинейной формы в базисе* e.

Доказательство. Зададим функцию

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j,$$

где x_i, y_j — координаты в базисе e векторов x и y соответственно. Очевидно, что это билинейная форма, причем имеющая нужную матрицу.

Примеры.

1.1. $L = E$ — эвклидово пространство. Тогда скалярное произведение (x, y) — билинейная форма. Ее матрицей в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$ является матрица

$$B = (b_{ij})_{i,j=1}^n,$$

где $b_{ij} = (e_i, e_j)$ (так называемая матрица Грама). Данная билинейная форма симметрична.

1.2. L — трехмерное линейное пространство, (e_1, e_2, e_3) — его базис. Тогда функция

$$B(x, y) = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 6x_1y_3 + x_2y_2 - 7x_2y_3 + 5x_3y_1 + x_3y_2,$$

где $(x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T$ — столбцы координат в базисе e вектров x и y соответственно, является билинейной формой. Ее матрица в базисе e есть

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.4. *Матрицы B_e и B_f билинейной формы $B(x, y)$ в базисах e и f соответственно связаны соотношением*

$$B_f = C^T B_e C,$$

где C — матрица перехода от e к f.

Доказательство. Применяя известную формулу $f = eC$, а также теорему 1.1, имеем

$$b_{ij}^f = B(f_i, f_j) = \sum_{k,l=1}^n c_{ki}c_{lj}B(e_k, e_l) = \sum_{k,l=1}^n c_{ik}^T b_{kl}^e c_{lj} = (C^T B_e C)_{ij}.$$

Пример 1.3. Рассмотрим билинейную форму из примера 1.2. Пусть новый базис f связан с базисом e при помощи формул

$$\begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ f_2 = -e_1 + e_2 - 2e_3 \\ f_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Найдем матрицу билинейной формы $B(x, y)$ в базисе f.

Матрица перехода от e к f имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 8 & -1 & 13 \\ -13 & 0 & -13 \\ 2 & 4 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -35 & 3 \\ -26 & 39 & 0 \\ -22 & 42 & -14 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что тот же результат можно было получить другим способом, впрямую произведя замену координат. Действительно,

$$B(x, y) = 3x_{1e}y_{1e} - x_{1e}y_{2e} + 6x_{1e}y_{3e} + x_{2e}y_{2e} - 7x_{2e}y_{3e} + 5x_{3e}y_{1e} + x_{3e}y_{2e}.$$

Но $x_e = Cx_f$ и $y_e = Cy_f$, то есть

$$\begin{cases} x_{1e} = x_{1f} - x_{2f} - x_{3f} \\ x_{2e} = -x_{1f} + x_{2f} + 2x_{3f} \\ x_{3e} = x_{1f} - 2x_{2f} + x_{3f} \end{cases}, \begin{cases} y_{1e} = y_{1f} - y_{2f} - y_{3f} \\ y_{2e} = -y_{1f} + y_{2f} + 2y_{3f} \\ y_{3e} = y_{1f} - 2y_{2f} + y_{3f} \end{cases}.$$

Подставив эти выражения в формулу для $B(x, y)$ и приведя подобные, получаем

$$B(x, y) = 22x_{1f}y_{1f} - 35x_{1f}y_{2f} + 3x_{1f}y_{3f} - 26x_{2f}y_{1f} + 39x_{2e}y_{2f} -$$
$$-22x_{3f}y_{fe} + 42x_{3f}y_{2f} - 14x_{3f}y_{3f}.$$

2 КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Определение 2.1. *Пусть L — конечномерное линейное пространство над $\mathbb{R}$ и $A(x, y)$ — симметрическая билинейная форма, заданная на L. Отображение, сопоставляющее каждому элементу $x \in L$ вещественное число $A(x, x)$, называется квадратичной формой, заданной на L.*

В дальнейшем квадратичную форму так и будем обозначать $A(x, x)$, подразумевая, что она строится по некоторой симметрической билинейной форме $A(x, y)$ при $y = x$.

Определение 2.2. *Матрицей квадратичной формы называется матрица соответствующей ей билинейной формы.*

Очевидно, что матрицы квадратичной формы в различных базисах связаны той же формулой, что и в случае билинейной формы. Кроме того, аналогично билинейной форме, квадратичная форма записывается в виде

$$A(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x_e^T A x_e,$$

причем ее матрица по определению симметрична. В связи с последним свойством в сумме встречаются одинаковые слагаемые:

$$a_{ij} x_i x_j = a_{ji} x_j x_i.$$

Следовательно, приводя подобные, имеем

$$A(x, x) = \sum_{1 \le i \le n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j.$$

Заметим, что на практике удобно воспринимать квадратичную форму именно с точки зрения ее выражения через координаты аргумента, то есть как многочлен от n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, состоящий из слагаемых ровно второй степени.

Пример 2.1. Построить матрицу квадратичной формы

$$A(x, x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 7x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2.$$

Подразумевается, что перед нами формула, задающая значения квадратичной формы в трехмерном пространстве с фиксированным базисом,

x_1, x_2, x_3 — координаты вектора x в этом базисе, и матрицу квадратичной формы требуется найти в том же самом базисе.

Поскольку $a_{ij} = a_{ji}$, коэффициенты при смешанных произведениях следует делить на 2, так что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -7 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определение 2.3. *1. Квадратичная форма $A(x, x)$ называется положительно определенной, если $A(x, x) > 0$ при всех $x \neq \theta$.*

2. Квадратичная форма $A(x, x)$ называется отрицательно определенной, если $A(x, x) < 0$ при всех $x \neq \theta$.

3. Квадратичная форма $A(x, x)$ называется квазиположительно определенной, если $A(x, x) \geq 0$ при всех x и существует $x_0 \neq \theta$ такое, что $A(x_0, x_0) = 0$.

4. Квадратичная форма $A(x, x)$ называется квазиотрицательно определенной, если $A(x, x) \leq 0$ при всех x и существует $x_0 \neq \theta$ такое, что $A(x_0, x_0) = 0$.

5. Квадратичная форма $A(x, x)$ называется знакопеременной, если существует x_1 такое, что $A(x_1, x_1) > 0$, и существует x_2 такое, что $A(x_2, x_2) < 0$.

(Здесь и в дальнейшем θ — нейтральный элемент линейного пространства L).

Пример 2.2. В трехмерном пространстве квадратичная форма

$$A_1(x, x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2$$

положительно определена,

$$A_2(x, x) = x_1^2 + 5x_3^2$$

квазиположительно определена,

$$A_3(x, x) = x_1^2 - 5x_3^2$$

знакопеременна.

Заметим, что для квадратичной формы из примера 2.1 ответ на подобный вопрос неочевиден, поскольку в формуле, ее задающей, имеются не только квадраты переменных, но и смешанные произведения.

3 ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА

Подобно тому, как для линейного оператора одной из важнейших задач является нахождение базиса из собственных векторов, то есть того, в котором матрица оператора диагональна, для квадратичной формы тоже ищется базис, в котором ее матрица диагональна. Этот базис удобен тем, что в нем квадратичная форма принимает вид суммы квадратов

$$A(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Такой вид квадратичной формы называется каноническим видом, получившиеся коэффициенты при квадратах переменных — каноническими коэффициентами. Каноническим называется также и соответствующий базис. Процедура нахождения канонического базиса называется приведением квадратичной формы к каноническому виду.

Теорема 3.1. *(Лагранжа). Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду.*

Доказательство. Доказательство теоремы Лагранжа состоит в подробном построении алгоритма, позволяющего для любой квадратичной формы найти канонический базис. Этот алгоритм называют методом Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Случай 1. Если квадратичная форма тождественно равна нулю, то она уже представлена в виде суммы квадратов с нулевыми коэффициентами.

Случай 2. Квадратичная форма — не тождественный ноль. Тогда существует хоть один ее ненулевой коэффициент. Ближайшая цель — добиться, чтобы ненулевым коэффициентом стал a_{11}.

а). Если существует $a_{ii} \neq 0$ (то есть имеется хоть один ненулевой коэффициент при квадрате переменной), то достаточно сделать перенумерацию переменных

$$\begin{cases} x_1 = x_i' \\ x_i = x_1' \\ x_j = x_j', j \neq 1, i \end{cases},$$

чтобы в новом базисе коэффициент при квадрате первой переменной был отличен от нуля (он будет равен a_{ii}). Заметим, что этой перенумерации переменных соответствует простейшая смена базиса, заключающаяся в аналогичной перенумерации его элементов.

b). Пусть все $a_{ii} = 0$. Значит, ненулевой коэффициент существует при некотором смешанном произведении, то есть имеется $a_{ij} \neq 0, i \neq j$. Сделаем следующую замену переменных:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = x'_i - x'_j \\ x_j = x'_i + x'_j \\ x_k = x'_k, k \neq i, j \end{array} \right. .$$

Тогда коэффициентом при ${x'_i}^2$ станет $a'_{ii} = a_{ij} \neq 0$, после чего переход к пункту (a) дает желаемый результат. Однако требуется проверить, что данная замена переменных корректна, то есть $x'_1, \dots, x'_n$ — действительно координаты вектора x в некотором базисе e'. Это верно, поскольку матрица, связывающая столбцы $(x_1, \dots, x_n)^T$ и $(x'_1, \dots, x'_n)^T$, является невырожденной.

Итак, можем считать, что $a_{11} \neq 0$. В этом случае

$$A(x, x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j =$$

$$= a_{11}(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \dots + 2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n) + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j =$$

$$= a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}x_ix_j$$

(мы вынесли за скобку a_{11} из всех слагаемых, содержащих x_1, и выделили полный квадрат, за счет чего коэффициенты при $x_ix_j, i, j \geq 2$ могли измениться). Осталось произвести корректно определенную замену (то есть замену с невырожденной матрицей)

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ x'_2 = x_2 \\ \dots\dots \\ x'_n = x_n \end{array} \right. ,$$

и квадратичная форма примет вид

$$A(x,x) = a_{11}{x'_1}^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}x'_i x'_j.$$

Первая переменная уже не фигурирует в смешанных произведениях, и ее мы больше менять не будем, а займемся суммой

$$\sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}x'_i x'_j,$$

которая задает квадратичную форму от $n-1$ переменной $x'_2, \ldots, x'_n$. С этой квадратичной формой проделываем ту же процедуру, что с исходной, и уменьшаем число переменных еще на единицу. Продолжая процесс, в итоге приходим к квадратичной форме от одной переменной, а она не может содержать смешанных произведений.

Задача 3.1. Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму

$$A(x,x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + \frac{1}{4}x_4^2 + 4x_1x_2 +$$
$$+6x_1x_3 + x_1x_4 + 10x_2x_3 + \frac{8}{5}x_2x_4 + 2x_3x_4,$$

записать матрицу квадратичной формы в исходном и результирующем базисах, а также результирующее преобразование координат.

Решение. Матрица квадратичной формы в исходном базисе

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 5 & \frac{4}{5} \\ 3 & 5 & 9 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Коэффициент при x_1^2 ненулевой, поэтому приведение к каноническому виду начинаем с выделения полного квадрата:

$$A(x,x) = (x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_1x_4) + 4x_2^2 + 10x_2x_3 + \frac{8}{5}x_2x_4 +$$
$$+9x_3^2 + 2x_3x_4 + \frac{1}{4}x_4^2 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_4)^2 - 4x_2^2 - 9x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2 - 12x_2x_3 - 2x_2x_4 -$$
$$-3x_3x_4 + 4x_2^2 + 10x_2x_3 + \frac{8}{5}x_2x_4 + 9x_3^2 + 2x_3x_4 + \frac{1}{4}x_4^2 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_4)^2 - 2x_2x_3 - \frac{2}{5}x_2x_4 - x_3x_4.$$

Итак, на первом этапе делаем замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ y_4 = x_4 \end{cases}.$$

Теперь $A(x,x) = y_1^2 - 2y_2y_3 - \frac{2}{5}y_2y_4 - y_3y_4$.

Первая переменная не входит в смешанные произведения, а для оставшихся все коэффициенты при квадратах нулевые. Поэтому требуется произвести замену

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - z_3 \\ y_3 = z_2 + z_3 \\ y_4 = z_4 \end{cases}$$

(хотя первую переменную не меняли, для единообразия записи меняем ее название). Таким образом,

$$A(x,x) = z_1^2 - 2(z_2^2 - z_3^2) - \frac{2}{5}(z_2z_4 - z_3z_4) - (z_2z_4 + z_3z_4) =$$
$$= z_1^2 - 2z_2^2 - \frac{7}{5}z_2z_4 + 2z_3^2 - \frac{3}{5}z_3z_4 =$$
$$= z_1^2 - 2(z_2 + \frac{7}{20}z_4)^2 + 2z_3^2 - \frac{3}{5}z_3z_4 + \frac{49}{200}z_4^2.$$

После замены

$$\begin{cases} u_1 = z_1 \\ u_2 = z_2 + \frac{7}{20}z_4 \\ u_3 = z_3 \\ u_4 = z_4 \end{cases}$$

имеем

$$A(x,x) = u_1^2 - 2u_2^2 + 2u_3^2 - \frac{3}{5}u_3u_4 + \frac{49}{200}u_4^2.$$

Наконец, последний раз выделяем полный квадрат:

$$A(x,x) = u_1^2 - 2u_2^2 + 2(u_3 - \frac{3}{20}u_4)^2 + \frac{1}{5}u_4^2,$$

и после очередной замены

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 \\ v_3 = u_3 - \frac{3}{20}u_4 \\ v_4 = u_4 \end{cases}$$

приходим к каноническому виду

$$A(x,x) = v_1^2 - 2v_2^2 + 2v_3^2 + \frac{1}{5}v_4^2.$$

Матрица квадратичной формы в результирующем базисе

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Осталось выписать результирующее преобразование координат:

$$\begin{cases} v_1 = u_1 = z_1 = y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ v_2 = u_2 = z_2 + \frac{7}{20}z_4 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{7}{20}y_4 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{7}{20}x_4 \\ v_3 = u_3 - \frac{3}{20}u_4 = z_3 - \frac{3}{20}z_4 = -\frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{3}{20}y_4 = \\ = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{20}x_4 \\ v_4 = u_4 = z_4 = y_4 = x_4 \end{cases}.$$

4 ЗАКОН ИНЕРЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Итак, в предыдущем параграфе доказано, что любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду

$$A(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Будем считать, что координаты перенумерованы так, что сперва идут положительные канонические коэффициенты, потом отрицательные, а в конце нулевые (если они есть). Таким образом, имеем

$$A(x,x) = \mu_1 x_1^2 + \cdots + \mu_s x_s^2 - \mu_{s+1} x_{s+1}^2 - \cdots - \mu_k x_k^2,$$

где все коэффициенты положительны и $s \leq k \leq n$. Теперь сделаем замену $x_i' = \sqrt{\mu_i} x_i, 1 \leq i \leq k$. В новом базисе квадратичная форма выражается через координаты аргумента еще проще:

$$A(x,x) = x_1'^2 + \cdots + x_s'^2 - x_{s+1}'^2 - \cdots - x_k'^2.$$

Данное представление называется нормальным видом квадратичной формы. Мы убедились, что любую квадратичную форму можно привести к нормальному виду.

Теорема 4.1. *(Закон инерции квадратичных форм.) Нормальный вид квадратичной формы не зависит от способа ее приведения к нормальному виду.*

Доказательство. Пусть квадратичная форма имеет нормальный вид в двух базисах:

$$A(x,x) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_k^2$$

в базисе e и

$$A(x,x) = x_1'^2 + \cdots + x_l'^2 - x_{l+1}'^2 - \cdots - x_m'^2$$

в базисе f (здесь $x_1, \ldots, x_n$ и $x_1', \ldots, x_n'$ — координаты вектора x в базисах e и f соответственно). Требуется проверить, что $l = s$ и $m = k$.

Чтобы доказать первое равенство, попробуем найти такой вектор x, для которого $x_1 = \cdots = x_s = 0$ и одновременно $x_{l+1}' = \cdots = x_n' = 0$.

Пусть C — матрица перехода от f к e. Тогда

$$\begin{cases} x_{l+1}' = c_{l+1\,1} x_1 + \cdots + c_{l+1\,n} x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = c_{n1} x_1 + \cdots + c_{nn} x_n \end{cases}.$$

Значит, требуемые условия выглядят так:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \dots\dots \\ x_s = 0 \\ c_{l+11}x_1 + \dots + c_{l+1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n1}x_1 + \dots + c_{nn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Имеем систему $s+n-l$ линейных однородных уравнений с n неизвестными $x_1, \dots, x_n$. Если $s+n-l < n$, то по теореме о решении однородной системы у нее обязательно есть ненулевое решение.

Итак, при $s < l$ существует ненулевой вектор x, для которого

$$A(x,x) = -x_{s+1}^2 - \dots - x_k^2 = x_1'^2 + \dots + x_l'^2.$$

Следовательно, $A(x,x) = 0$, то есть $x_1' = \dots = x_l' = 0$. Поскольку $x_{l+1}' = \dots = x_n' = 0$, все координаты вектора x оказались нулями, что противоречит его выбору. Значит, условие $s < l$ выполнено быть не может. Но из соображений симметрии условие $l < s$ тоже выполняться не может, поэтому $l = s$.

Теперь покажем, что $m = k$.

Выберем такой вектор x, для которого

$$x_1 = \dots = x_s = x_{k+1} = \dots = x_n = 0$$

и одновременно $x_{s+1}' = \dots = x_m' = 0$. При $s+n-k+m-s < n$, то есть при $m < k$, среди подобных x есть ненулевой. Далее рассуждаем в точности так, как при доказательстве первого равенства. $\square$

Заметим, что доказанная теорема означает следующее: в каноническом виде квадратичной формы количество положительных и отрицательных коэффициентов зависит только от самой квадратичной формы, а не от выбора базиса.

5 КЛАССИФИКАЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Закон инерции позволяет ввести удобные характеристики квадратичной формы, не зависящие от выбора базиса.

Определение 5.1. *Положительным индексом инерции r_+ квадратичной формы называется число ее положительных канонических коэффициентов, отрицательным r_- — число отрицательных канонических коэффициентов, индексом инерции r — число ненулевых канонических коэффициентов. Набор индексов инерции квадратичной формы называется ее сигнатурой. Квадратичные формы с одинаковой сигнатурой называются эквивалентными (принадлежащими одному классу эквивалентности).*

Пример 5.1. У квадратичной формы из задачи 3.1 имеем

$$r_+ = 3, r_- = 1, r = 4.$$

Квадратичная форма

$$B(x, x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 5x_4^2$$

ей эквивалентна.

Теорема 5.1.

1. *Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда $r_+ = n$.*
2. *Квадратичная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда $r_- = n$.*
3. *Квадратичная форма квазиположительно определена тогда и только тогда, когда $r_+ < n, r_- = 0$.*
4. *Квадратичная форма квазиотрицательно определена тогда и только тогда, когда $r_- < n, r_+ = 0$.*
5. *Квадратичная форма знакопеременна тогда и только тогда, когда $r_+ \geq 1, r_- \geq 1$.*

Доказательство. Начнем с первого утверждения.

Пусть квадратичная форма положительно определена и имеет нормальный вид $A(x, x) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_k^2$. Если $s < n$, то для ненулевого вектора x с первыми s нулевыми, а остальными единичными координатами имеем $A(x, x) \leq 0$, что противоречит положительной определенности.

В обратную же сторону первое утверждение очевидно, так как из представления квадратичной формы $A(x,x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ положительная определенность ясна.

Второе утверждение доказывается аналогично первому.

Перейдем к третьему утверждению.

Пусть квадратичная форма квазиположительно определена и имеет нормальный вид $A(x,x) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_k^2$. Если бы выполнялось условие $s = n$, она была бы положительно определена. Значит, $s < n$. Если $s < k$, то для вектора x с первыми s нулевыми, а остальными единичными координатами получаем $A(x,x) < 0$, что противоречит квазиположительной определенности.

Теперь пусть $r_+ < n, r_- = 0$, то есть

$$A(x,x) = x_1^2 + \cdots + x_k^2, k < n.$$

Это выражение не может быть отрицательным, причем для ненулевого вектора x с первыми k нулевыми, а остальными единичными координатами имеем $A(x,x) = 0$, что и дает квазиположительную определенность.

Четвертое утверждение доказывается аналогично третьему.

Осталось пятое утверждение.

Пусть квадратичная форма знакопеременна. Если $r_+ = 0$ или $r_- = 0$, то по уже доказанному квадратичная форма принадлежит к одному из четырех рассмотренных ранее типов. Следовательно,

$$r_+ \geq 1, r_- \geq 1.$$

Пусть теперь $r_+ \geq 1, r_- \geq 1$, то есть $1 \leq s < k$. Для вектора x с первыми s нулевыми, а остальными единичными координатами имеем $A(x,x) < 0$, а для вектора y с первыми s единичными, а остальными нулевыми координатами $A(y,y) > 0$, что и дает знакопеременность.

6 ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВМДУ МЕТОДОМ ЯКОБИ

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду очень удобен на практике, однако не всегда подходит для теоретиского использования из-за отсутствия формул, позволяющих сразу получать конечный результат. В связи с этим возникает потребность в других способах приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Сперва введем некоторые необходимые понятия.

Определение 6.1. *Для матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

угловым минором порядка $i (1 \le i \le n)$ *называется число*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}.$$

Определение 6.2. *Если в конечномерном линейном пространстве с базисом* $e_1, \dots, e_n$ *перешли к базису* $f_1, \dots, f_n$, *где*

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = c_{12}e_1 + e_2 \\ f_3 = c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + e_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + e_n \end{cases},$$

то говорят, что произведено треугольное преобразование базиса.

Заметим, что матрица треугольного преобразования треугольна.

Теорема 6.1. *(Якоби). Если для матрицы* A *квадратичной формы* $A(x, x)$ *в некотором базисе* $e_1, \dots, e_n$ *угловые миноры* $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$ *отличны от нуля, то существует единственное треугольное преобразование базиса, с помощью которого данная квадратичная форма приводится к каноническому виду. При этом канонические коэффициенты вычисляются по формулам* $\lambda_1 = \Delta_1, \lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, 2 \le j \le n$.

Доказательство. Поскольку элементы матрицы квадратичной формы в базисе f есть $A(f_i, f_j)$, требуется подобрать такие коэффициенты треугольного преобразования, что $A(f_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$. За счет симметричности достаточно потребовать выполнения условия $A(f_i, f_j) = 0$ при $i < j$. Проверим, что это условие равносильно следующему: $A(e_i, f_j) = 0$ при $i < j$.

Действительно, пусть $A(e_i, f_j) = 0$ при $i < j$. Тогда для любого $j \geq 2$ имеем

$$\begin{cases} A(f_1, f_j) = A(e_1, f_j) = 0 \\ A(f_2, f_j) = A(c_{12}e_1 + e_2, f_j) = c_{12}A(e_1, f_j) + A(e_2, f_j) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A(f_{j-1}, f_j) = c_{1j-1}A(e_1, f_j) + c_{2j-1}A(e_2, f_j) + \dots + A(e_{j-1}, f_j) = 0 \end{cases}.$$

Теперь пусть $A(f_i, f_j) = 0$ при $i < j$. Тогда для любого $j \geq 2$ имеем

$$\begin{cases} A(e_1, f_j) = A(f_1, f_j) = 0 \\ A(e_2, f_j) = A(f_2 - c_{12}e_1, f_j) = A(f_2, f_j) - c_{12}A(e_1, f_j) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A(e_{j-1}, f_j) = A(f_{j-1}, f_j) - \\ -c_{1j-1}A(e_1, f_j) - c_{2j-1}A(e_2, f_j) - \dots - c_{j-2j-1}A(e_{j-2}, f_j) = 0 \end{cases}.$$

Итак, равносильность условий доказана, поэтому далее ищем базис f, для которого $A(e_i, f_j) = 0$ при $i < j$. Но

$$\begin{cases} A(e_1, f_j) = A(e_1, c_{1j}e_1 + c_{2j}e_2 + \dots + e_j) = c_{1j}a_{11} + c_{2j}a_{12} + \dots + a_{1j} \\ A(e_2, f_j) = c_{1j}a_{21} + c_{2j}a_{22} + \dots + a_{2j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A(e_{j-1}, f_j) = c_{1j}a_{j-11} + c_{2j}a_{j-12} + \dots + a_{j-1j} \end{cases}$$

(напомним, что $a_{ij} = A(e_i, e_j)$).

Учитывая требование $A(e_i, f_j) = 0$ при $i < j$, получаем систему линейных уравнений для поиска неизвестных $c_{1j}, \dots, c_{j-1j}$:

$$\begin{cases} c_{1j}a_{11} + c_{2j}a_{12} + \dots + c_{j-1j}a_{1j-1} = -a_{1j} \\ c_{1j}a_{21} + c_{2j}a_{22} + \dots + c_{j-1j}a_{2j-1} = -a_{2j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{1j}a_{j-11} + c_{2j}a_{j-12} + \dots + c_{j-1j}a_{j-1j-1} = -a_{j-1j} \end{cases}.$$

Определителем данной системы является Δ_{j-1} — угловой минор порядка $j-1$ матрицы A. Он ненулевой, поэтому по теореме Крамера система имеет единственное решение, что и доказывает первое утверждение теоремы Якоби. Более того, теорема Крамера дает явные формулы для нахождения этого решения:

$$c_{ij} = \frac{\Delta_{ij-1}}{\Delta_{j-1}},$$

где Δ_{ij-1} — угловой минор с номером $j-1$, в который вместо столбца i подставили столбец $-(a_{1j} \dots a_{j-1j})^T$.

Преобразуем определитель Δ_{ij-1}: вынесем из i-го столбца -1, а затем будем передвигать данный столбец вправо на место $j-1$ (крайнее справа), меняя местами с соседним. Заметим, что эту процедуру придется проделать $j-1-i$ раз, причем каждый раз определитель меняет знак. В результате

$$\Delta_{ij-1} = (-1)^{j-i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j-11} & a_{j-12} & \dots & a_{j-1j} \end{vmatrix}$$

(здесь фигурируют столбцы с номерами от 1 до j, исключая номер i). Таким образом, последний определитель получается из определителя

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jj} \end{vmatrix}$$

путем вычеркивания j-й строки и i-го столбца и по определению является дополнительным минором с индексами j и i соответствующей матрицы. Учитывая, что

$$(-1)^{j-i} = (-1)^{j+i},$$

видим, что Δ_{ij-1} равно произведению $(-1)^{j+i}$ и дополнительного минора, то есть алгебраическому дополнению с индексами j и i. Обозначим его $A_{ji}^{\Delta_j}$. Итак, искомые коэффициенты треугольного преобразования базисов находятся по формуле

$$c_{ij} = \frac{A_{ji}^{\Delta_j}}{\Delta_{j-1}}$$

(напомним, что $1 \le i < j \le n$.)

Теперь найдем канонические коэффициенты.

$$\lambda_j = A(f_j, f_j) = A(c_{1j}e_1 + c_{2j}e_2 + \cdots + e_j, f_j) = A(e_j, f_j) =$$
$$= A(e_j, c_{1j}e_1 + c_{2j}e_2 + \cdots + e_j) = c_{1j}a_{j1} + c_{2j}a_{j2} + \cdots + a_{jj} =$$
$$= \frac{a_{j1}A_{j1}^{\Delta_j} + a_{j2}A_{j2}^{\Delta_j} + \cdots + a_{jj}A_{jj}^{\Delta_j}}{\Delta_{j-1}} = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}$$

(мы воспользовались формулой разложения определителя Δ_j по строке j).

Теорема доказана полностью.

7 КРИТЕРИЙ СИЛЬВЕСТРА

В разделе 5 было показано, что по каноническому виду квадратичной формы легко определить, будет ли она положительно или отрицательно определеной. Однако приведение к каноническому виду — довольно трудоемкая задача, поэтому удобно пользоваться критерием, позволяющим ответить на вопрос о знакоопределенности, используя произвольный вид квадратичной формы.

Теорема 7.1. *(Критерий Сильвестра). Пусть $A(x, x)$ — квадратичная форма, имеющая матрицу A в некотором базисе e, и пусть $\Delta_i (1 \le i \le n)$ — угловые миноры этой матрицы.*

1. *Для того, чтобы $A(x, x)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры были положительны.*

2. *Для того, чтобы $A(x, x)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, причем $\Delta_1 < 0$.*

Доказательство. Пусть квадратичная форма является положительно или отрицательно определенной. Докажем, что в этом случае все угловые миноры отличны от нуля.

Если некоторый минор $\Delta_l = 0$, то система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1l}x_l = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{l1}x_1 + \dots + a_{ll}x_l = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение $x_1^{(0)}, \dots, x_l^{(0)}$. Домножим первое уравнение на $x_1^{(0)}$, второе на $x_2^{(0)}$ и так далее, результаты сложим. Получается, что

$$\sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}x_i^{(0)}x_j^{(0)} = 0.$$

Теперь возьмем вектор $x^{(0)}$ с координатами $(x_1^{(0)}, \dots, x_l^{(0)}, 0, \dots, 0)$. Он ненулевой, и для него $A(x^{(0)}, x^{(0)}) = 0$. Это противоречит как положительной, так и отрицательной определенности.

Итак, для положительно или отрицательно определенной квадратичной формы все угловые миноры ненулевые. Следовательно, можно применить метод Якоби для нахождения канонических коэффициентов:

$$\lambda_1 = \Delta_1, \lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, 2 \le j \le n.$$

В случае положительно определенной квадратичной формы все канонические коэффициенты положительны, поэтому

$$\Delta_1 = \lambda_1 > 0, \Delta_2 = \lambda_2\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n = \lambda_n\Delta_{n-1} > 0.$$

В случае отрицательно определенной квадратичной формы все канонические коэффициенты отрицательны, следовательно,

$$\Delta_1 = \lambda_1 < 0, \Delta_2 = \lambda_2\Delta_1 > 0$$

и так далее с чередованием знаков.

Итак, в одну сторону оба утверждения теоремы верны.

Пусть теперь все угловые миноры положительны. Значит, применим метод Якоби, включая формулы для нахождения канонических коэффициентов. С помощью данных формул легко получить положительность всех этих коэффициентов. Аналогично доказывается второе утверждение.

Задача 7.1. По критерию Сильвестра проверить, является ли квадратичная форма из задачи 3.1 знакоопределенной.

Решение. Матрица этой квадратичной формы в исходном базисе

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 5 & \frac{4}{5} \\ 3 & 5 & 9 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

Дальше угловые миноры можно не считать, поскольку результат уже не соответствует ни первому, ни второму случаю критерия Сильвестра. Итак, квадратичная форма не является знакоопределенной, что согласуется с результатом примера 5.1: $r_+ = 3, r_- = 1$, так что форма знакопеременная.

8 КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ В ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этом пункте мы будем рассматривать квадратичные и билинейные формы в эвклидовом пространстве E размерности n, и основной задачей будет не просто привести квадратичную форму к каноническому виду, а сделать это при помощи ортогонального преобразования. Напомним, что ортогональное преобразование отличается тем, что переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис, и это существенно, например, в геометрических приложениях.

Задача 8.1. Пусть квадратичная форма из задачи 3.1 определена в эвклидовом пространстве. Проверить, является ли преобразование Лагранжа ортогональным.

Решение. Формула преобразования координат методом Лагранжа в примере 3.1 получилась следующей:

$$\begin{cases} v_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ v_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{7}{20}x_4 \\ v_3 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{20}x_4 \\ v_4 = x_4 \end{cases}.$$

Таким образом, матрица перехода от результирующего базиса к исходному есть

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{20} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Длина ее первой строки не равна единице, поэтому матрица не является ортогональной. Следовательно, не ортогонально и преобразование.

Теорема 8.1. *Пусть $B(x, y)$ — симметрическая билинейная форма в эвклидовом пространстве E размерности n. Тогда существует такой набор чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и такой ортонормированный базис, что в этом базисе общий вид билинейной формы есть $B(x, y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \cdots + \lambda_n x_n y_n$ (здесь $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ — коордитаты в данном базисе векторов x и y соответственно).*

Доказательство. Прежде всего покажем, что существует самосопряженный линейный оператор φ, действующий из E в E, для которого $B(x, y) = (\varphi(x), y)$ (в правой части равенства внешние скобки означают скалярное произведение).

Пусть в некотором ортонормированном базисе e общий вид билинейной формы есть

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j,$$

где x_i, y_j — координаты в базисе e векторов x и y соответственно. Построим линейный оператор ϕ, имеющий в базисе e матрицу

$$B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}.$$

Тогда $(\varphi(x))_e = Bx_e$ и

$$(\varphi(x), y) = (Bx_e)^T y_e = x_e^T B y_e = B(x, y).$$

Итак, нужный оператор построен, причем поскольку его матрица в ортонормированном базисе симметрическая, он самосопряжен.

Известно, что у самосопряженного линейного оператора существует ортонормированный базис $f = (f_1, \ldots, f_n)$ из собственных векторов. Таким образом,

$$\varphi(x) = \lambda_1 x_1' f_1 + \cdots + \lambda_n x_n' f_n,$$

где $x'_1, \dots, x'_n$ — координаты вектора x в базисе f. Значит,

$$B(x,y) = (\varphi(x), y) =$$
$$= (\lambda_1 x'_1 f_1 + \dots + \lambda_n x'_n f_n, y'_1 f_1 + \dots + y'_n f_n) = \lambda_1 x'_1 y'_1 + \dots + \lambda_n x'_n y'_n$$

(здесь $y'_1, \dots, y'_n$ — координаты вектора y в базисе f).

В результате мы не только построили необходимые набор чисел и базис, но и обнаружили, что базис состоит из собственных векторов оператора ϕ, а набор чисел — из его же собственных чисел.

Следствие 1. Для любой квадратичной формы в эвклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором она имеет канонический вид.

Доказательство. Для доказательства достаточно вспомнить, что квадратичная форма получается из симметрической билинейной формы при равных между собой аргументах.

Следствие 2. Пусть $A(x,x)$ — квадратичная форма, заданная в эвклидовом пространстве и имеющая в некотором ортонормированном базисе e матрицу A. Тогда в ортонормированном базисе $f = eC$, где C — матрица, состоящая из ортонормированных собственных столбцов матрицы A, квадратичная форма имеет канонический вид

$$A(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2,$$

причем $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A.

Доказательство. Согласно теореме 8.1, построим самосопряженный линейный оператор $\varphi(x)$, матрицей которого в ортонормированном базисе e является A. Пусть f — ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — его собственные числа. Тогда f является каноническим базисом квадратичной формы и $\varphi(f_i) = \lambda_i f_i$. Перейдя к координатам в базисе e, имеем

$$A(f_i)_e = \lambda_i (f_i)_e.$$

Таким образом, $(f_i)_e$ — ортонормированные собственные столбцы матрицы A, а λ_i — ее собственные числа. Осталось вспомнить, что в столбцах матрицы перехода от e к f стоят координаты векторов базиса f в базисе e, то есть $C_{e \to f} = ((f_1)_e, \dots, (f_n)_e)$.

Задача 8.2 Для уравнения поверхности второго порядка

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz - 4x - 4y + 16z + 8 = 0$$

а). выделив квадратичную форму, найти ортогональное преобразование координат, приводящее ее к каноническому виду,

б). используя найденное преобразование и параллельный перенос, привести уравнение поверхности к каноническому виду, записать соответствующее преобразование координат, определить тип поверхности.

Решение. Квадратичная форма состоит из слагаемых второй степени и имеет вид

$$f(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz.$$

Ее матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения искомого преобразования координат необходимо найти ее собственные числа и собственные столбцы, поэтому составляем характеристический многочлен

$$\chi(t) = \det \begin{pmatrix} 5-t & -4 & -2 \\ -4 & 5-t & -2 \\ -2 & -2 & 8-t \end{pmatrix} = -t(t-9)^2.$$

Собственных числа два: $t_1 = 0$ кратности 1 и $t_2 = 9$ кратности 2.

Собственные столбцы, соответствующие собственному числу 0, являются ненулевыми решениями системы $AX = \mathbb{O}$. Решаем ее:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, собственные столбцы имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = 2c \\ x_2 = 2c \\ x_3 = c \end{cases}, c \neq 0.$$

Для матрицы искомого преобразования требуются собственные столбцы единичной длины, а

$$|(2c, 2c, c)| = \sqrt{4c^2 + 4c^2 + c^2} = 3|c|.$$

Поэтому выберем $c = \frac{1}{3}$ и $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T$.

Теперь ищем собственные столбцы, соответствующие собственному числу 9:

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, собственные столбцы имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = -2c_1 - 2c_2 \end{cases},$$

где c_1, c_2 не обращаются в ноль одновременно. Фундаментальная совокупность решений дает два столбца:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T \text{ и } Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T.$$

Однако они не ортогональны друг другу. Поэтому следует привести их к ортогональной системе по методу Грама-Шмидта:

$$Z_1 = Y_1, Z_2 = Y_2 - \alpha Y_1,$$

где $\alpha = \frac{(Y_1, Y_2)}{(Y_1, Y_1)} = \frac{4}{5}$. Таким образом,

$$Z_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}^T.$$

Получившиеся два столбца ортогональны друг другу, но не нормированы. Чтобы отнормировать их, требуется поделить каждый на его длину:

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^T, X_3 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}^T.$$

Для контроля за правильностью вычислений легко проверить, что X_2 и X_3 получились ортогональными X_1: $(X_1, X_2) = (X_1, X_3) = 0$.

Искомая матрица преобразования координат, составленная из столбцов X_1, X_2, X_3, имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

а само преобразование координат выглядит так:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{4}{3\sqrt{5}}z_1 \\ y = \frac{2}{3}x_1 + \frac{5}{3\sqrt{5}}z_1 \\ z = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{2}{3\sqrt{5}}z_1 \end{cases}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение и приводя подобные, получаем уравнение

$$9y_1^2 + 9z_1^2 - \frac{36}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}z_1 + 8 = 0.$$

Оно согласуется с утверждением следствия теоремы 8.1 о том, что каноническими коэффициентами исследуемой квадратичной формы являются собственные числа матрицы A, то есть $0, 9, 9$. Итак, мы осуществили первый шаг приведения уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду — ортогональное преобразование, то есть поворот осей, после которого в уравнении исчезают смешанные произведения. Направления новых осей в старом базисе задаются столбцами координат X_1, X_2, X_3.

Теперь приступим к параллельному переносу. Для этого в уравнении по каждой переменной необходимо выделить полный квадрат:

$$9(y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 + 9(z_1 - \frac{2}{3\sqrt{5}})^2 = 0$$

или, после сокращения на 9 и введения новых переменных,

$$y_2^2 + z_2^2 = 0,$$

где

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \\ z_2 = z_1 - \frac{2}{3\sqrt{5}} \end{cases}.$$

В итоге выяснилось, что заданная фигура — прямая

$$\begin{cases} x_2 = t \\ y_2 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

то есть ось $O'X_2$. Общее преобразование координат получается подстановкой одного преобразования в другое и имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}(y_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}) - \frac{4}{3\sqrt{5}}(z_2 + \frac{2}{3\sqrt{5}}) = \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{4}{3\sqrt{5}}z_2 + \frac{2}{9} \\ y = \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3\sqrt{5}}(z_2 + \frac{2}{3\sqrt{5}}) = \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3\sqrt{5}}z_2 + \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}(y_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}) - \frac{2}{3\sqrt{5}}(z_2 + \frac{2}{3\sqrt{5}}) = \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{2}{3\sqrt{5}}z_2 - \frac{8}{9} \end{cases}.$$

Координаты нового центра в первоначальной системе координат $O'(\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -\frac{8}{9})$, а векторы с координатами

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}-4 & 5 & -2\end{pmatrix}^T$$

задают направления новых осей.

Список литературы.

1. **Ильин В. А., Поздняк Э. Г.** Линейная алгебра. М.: Наука, 1974.

2. **Мадунц А. И.** Линейная алгебра. Линейные пространства. Линейные операторы. Спб.: СПбГТУ, 2001.

3. **Мадунц А. И.** Линейная алгебра. Системы линейных уравнений. Определители. Спб.: СПбГТУ, 2001.

4. **Полищук В. И.** Методические указания по курсу лекций "Высшая математика". Самостоятельная подготовка линейной алгебры и аналитической геометрии. /ЛЭТИ. Л., 1982.

5. **Тихомиров С. Р.** Сборник задач по линейной алгебре (банк вариантов). Издание СПбГТУ, 1995.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ.

1. а). Проверить, образует ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов a и b и произведение любого элемента a на любое вещественное число α.

б). В случае положительного ответа проверить, является ли пространство конечномерным. Если да, то найти его базис и размерность.

2. Пусть g — базис пространства L. Требуется:

а). доказать, что e и f — базисы пространства L,

б). найти матрицы перехода от f к e и от e к f, проверить полученные результаты,

в). выписать формулы, выражающие элементы базиса e через элементы базиса f и элементы базиса f через элементы базиса e,

г). для базисов e, f, g выписать всевозможные формулы, выражающие координаты вектора в одном базисе через координаты того же вектора в другом базисе.

3. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Проверить, являются ли линейными операторами следующие преобразования.

4. Пусть

$$x = (x_1, x_2, x_3), \varphi_1(x) = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3), \varphi_2(x) = (x_2, 2x_3, x_1).$$

Найти формулу, определяющую действие указанного в задаче оператора, и матрицу этого оператора.

5. Найти собственные числа и координаты собственных векторов линейного оператора, имеющего в некотором базисе заданную матрицу. Если существует базис пространства, состоящий из собственных векторов данного оператора, требуется также составить матрицу оператора в этом базисе.

6. Направляющий вектор $\overline{a}$ задает некоторое одномерное подпространство L_1 линейного пространства $\mathbb{R}^3$, а линейное однородное уравнение — двумерное подпространство L_2 того же пространства. Требуется:

а). построить матрицы A операторов проектирования на L_1 параллельно L_2 и B проектирования на L_2 параллельно L_1,

б). доказать, что $AB = BA = \mathbb{O}, A^2 = A, B^2 = B, A + B = E$,

в). найти ядро, образ, собственные числа и собственные векторы каждого оператора,

г). выяснить, на какие компаненты распадается вектор $\overline{b} = (1, 1, 1)^T$ при разложении пространства в прямую сумму $L_1 \oplus L_2$.

7. Провести процесс ортогонализации Грама-Шмидта с заданной системой векторов.

8. Требуется:

а). привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа, выписать соответствующее преобразование координат, а также матрицы квадратичной формы в исходном и в результирующем базисах, проверить, является ли преобразование координат ортогональным,

б). с помощью критерия Сильвестра проверить, является ли квадратичная форма знакоопределенной,

в). классифицировать ее с использованием индексов инерции.

9. Для уравнения поверхности второго порядка требуется:

а). выделив квадратичную форму, найти ортогональное преобразование координат, приводящее ее к каноническому виду,

б). используя найденное преобразование и параллельный перенос, привести уравнение поверхности к каноническому виду, записать соответствующее преобразование координат, определить тип поверхности, сделать чертеж в старой системе координат.

Вариант 1.

1. Множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел. Сумма $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$, произведение на число $\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.

2.
$$\begin{cases} e_1 = -5g_1 - 2g_2 - g_4 \\ e_2 = 2g_1 + g_2 + g_3 \\ e_3 = -4g_1 - g_2 + 3g_3 - g_4 \\ e_4 = 6g_1 + 2g_2 - g_3 + g_4 \\ f_1 = 9g_1 + 2g_2 - 6g_3 + 2g_4 \\ f_2 = 11g_1 + 3g_2 - 6g_3 + 2g_4 \\ f_3 = -3g_1 - g_2 - g_4 \\ f_4 = 10g_1 + 4g_2 + g_3 + 2g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (x_2 - 1, x_3, x_1), \varphi_2(x) = (x_2 - 4x_1, x_3, -x_1)$.

4. $\varphi_1(2\varphi_2(x))$.

5.
$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. $(-2, 3, 1); 5x + 3y + 2z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}^T.$
8. $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_3x_4 - 4x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_5x_6 + x_6^2$.
9. $3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4y + 4z + 4xz - 2yz = 0$.

Вариант 2.

1. Множество упорядоченных наборов из n положительных чисел. Сумма $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1y_1, \ldots, x_ny_n)$, произведение на число $\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$.

2.
$$\begin{cases} e_1 = g_1 + 3g_2 - 5g_3 + g_4 \\ e_2 = -g_1 + 2g_2 - 2g_3 \\ e_3 = g_1 - g_3 - 4g_4 \\ e_4 = 2g_1 - g_2 + 2g_3 - g_4 \\ f_1 = 4g_1 - g_2 + 2g_3 - 3g_4 \\ f_2 = -g_1 + g_2 + 2g_3 + 7g_4 \\ f_3 = -g_1 + 3g_2 - 8g_3 - g_4 \\ f_4 = -2g_2 + 5g_3 - 2g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (x_2 - x_1, 6x_3, 3x_1), \varphi_2(x) = (x_2 - 4x_1, x_3, -x_1^2)$.
4. $\varphi_2(-\varphi_1(x))$.
5.
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. $(4, -1, 2); x - y - 2z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 9 & -10 & 8 & 10 \end{pmatrix}^T.$
8. $x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4$.
9. $y^2 + 2z^2 + 4xy + 4yz - 4x - 2y - 5 = 0$.

Вариант 3.

1. Множество сходящихся последовательностей $a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$. Сумма $a + b = \{a_n + b_n\}$, произведение на число $\alpha a = \{\alpha a_n\}$.

2.
$$\begin{cases} e_1 = g_1 - 2g_2 + 3g_3 - 5g_4 \\ e_2 = -4g_1 + 3g_2 - g_3 + g_4 \\ e_3 = -3g_1 + g_2 + g_4 \\ e_4 = 3g_1 - 2g_2 + 2g_3 - 4g_4 \\ f_1 = 10g_1 - 5g_2 + 2g_3 - 4g_4 \\ f_2 = 5g_1 - 2g_2 - g_3 + 2g_4 \\ f_3 = 8g_1 - 7g_2 + 6g_3 - 10g_4 \\ f_4 = 3g_1 - 6g_2 + 7g_3 - 10g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (x_2 - x_1 + 3x_3, -9x_3x_2, 3x_1), \varphi_2(x) = (x_2 - x_3, 2x_1, 7x_2 - x_1)$.
4. $-\varphi_2((3\varphi_1 - \varphi_2)(x))$.
5.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. $(3, -2, 0); x + y - 4z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 1 & 6 \end{pmatrix}^T.$
8. $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$.
9. $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$.

Вариант 4.

1. Множество треугольных матриц размерности n на n. Сумма $A+B$, произведение на число αA.

2.
$$\begin{cases} e_1 = 2g_1 - 2g_2 + g_3 - 4g_4 \\ e_2 = 2g_1 - g_2 + 2g_3 - 5g_4 \\ e_3 = 2g_2 + g_3 + 2g_4 \\ e_4 = g_1 - g_2 + g_3 - 3g_4 \\ f_1 = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \\ f_2 = 7g_1 - 8g_2 + 2g_3 - 10g_4 \\ f_3 = 11g_1 - 9g_2 + 4g_3 - 11g_4 \\ f_4 = 3g_1 - 4g_2 + g_3 - 6g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (x_2 + x_1 + 3x_3, -9x_3 + x_2, 3x_1)$,
$\varphi_2(x) = (x_2 - x_3, 2x_1, 7x_2 - x_1 - 4)$.
4. $-3\varphi_2((4\varphi_2 - 5\varphi_1)(x))$.

5.
$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$
6. $(-2, 1, 2); x - 3y + 3z = 0.$
7. $u_1 = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 5 & 8 \end{pmatrix}^T.$
8. $4x_1^2 - 8x_2x_3 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 6x_4x_5 + 3x_5^2.$
9. $x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz - 2yz - 4x + 5y + 5z + 13 = 0.$

Вариант 5.

1. Множество невырожденных матриц размерности n на n. Сумма $A + B$, произведение на число αA.
2.
$$\begin{cases} e_1 = g_1 - g_2 - 4g_4 \\ e_2 = -g_1 + 2g_2 + g_3 - 5g_4 \\ e_3 = 3g_1 - g_2 + 2g_3 \\ e_4 = g_1 + 2g_2 - g_3 + g_4 \\ f_1 = 3g_1 + 7g_2 + 6g_3 - 10g_4 \\ f_2 = -7g_1 - 5g_2 + 8g_3 + 6g_4 \\ f_3 = 4g_1 - 3g_2 + 9g_3 + g_4 \\ f_4 = 2g_1 + 5g_2 - 5g_3 - 5g_4 \end{cases}.$$
3. $\varphi_1(x) = (-4x_2 + 3x_1 + x_3, -9x_2 + x_3, x_1), \varphi_2(x) = (x_2 - x_3, 2x_1^3, 7x_2 - x_1).$
4. $\varphi_2((\varphi_2 - \varphi_1)(x)) + \varphi_1((\varphi_1 - \varphi_2)(x)).$
5.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
6. $(1, 2, 3); 4x - 3y + z = 0.$
7. $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 & -4 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 7 & 11 & -9 & -7 \end{pmatrix}^T.$
8. $4x_1^2 - 8x_2x_3 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 6x_4x_5 + 3x_5^2.$
9. $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz + 2x - 6y + 2z = 0.$

Вариант 6.

1. Множество невырожденных матриц размерности n на n. Сумма AB, произведение на число αA.

2.
$$\begin{cases} e_1 = g_1 + 2g_2 + 3g_3 + 4g_4 \\ e_2 = 2g_1 + 3g_2 + g_3 + 2g_4 \\ e_3 = g_1 + g_2 + g_3 - g_4 \\ e_4 = g_1 - 2g_3 - 6g_4 \\ f_1 = 6g_1 + 8g_2 + 9g_3 + 4g_4 \\ f_2 = 5g_1 + 8g_2 + 8g_3 + 9g_4 \\ f_3 = 6g_1 + 9g_2 + 6g_3 + 7g_4 \\ f_4 = 9g_1 + 10g_2 - 7g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (-4x_2 + 3x_1 + x_3, -9x_2 + x_3, x_1)$,
$\varphi_2(x) = (-2x_2 - x_1, 2x_3 - x_2, 7x_2 - 7x_1)$.

4. $(\varphi_2 - \varphi_1)(x) + \varphi_1((\varphi_1 + \varphi_2)(x))$.

5.
$$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

6. $(-5, -2, 3); x + 3y + 4z = 0$.

7. $u_1 = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 & -4 \end{pmatrix}^T$,
$u_3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -7 & 4 \end{pmatrix}^T$.

8. $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_4^2 + 12x_4x_5$.

9. $2x^2 + 5y^2 + 11z^2 - 20xy + 16yz + 4xz - 24x - 6y - 6z - 18 = 0$.

Вариант 7.

1. Множество матриц размерности n на n с положительными элементами. Сумма AB, произведение матрицы $A = (a_{ij})$ на число α есть (a_{ij}^{α}).

2.
$$\begin{cases} e_1 = g_1 + 3g_2 + g_3 - 2g_4 \\ e_2 = -g_1 + g_2 + g_3 - g_4 \\ e_3 = 3g_1 + 4g_2 - g_3 - 2g_4 \\ e_4 = g_1 + 2g_2 - 3g_3 - 3g_4 \\ f_1 = g_1 + 3g_3 + 2g_4 \\ f_2 = 3g_2 - 2g_4 \\ f_3 = 5g_1 + 4g_2 + 5g_3 + 2g_4 \\ f_4 = -g_1 + 9g_3 + 3g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (7x_2 + 2x_1 + 4x_3, -9x_1 + x_3, 2x_3)$,
$\varphi_2(x) = (-2x_2 - x_1x_2x_3, 2x_3 - x_2, 7x_2 - 7x_1)$.
4. $(2\varphi_2 - 3\varphi_1)(x) + \varphi_2((\varphi_1 + \varphi_2)(x))$.
5.
$$\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$
6. $(1, -1, 1); 4x + 2y - z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -5 & 7 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}^T$,
$u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T$.
8. $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - 4x_1x_3 + 2x_3x_4$.
9. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2xz - 2x = 0$.

Вариант 8.

1. Множество многочленов степени, превосходящей 3, от переменной x. Сумма $f(x)g(x)$, произведение на число $f(x)^\alpha$.
2.
$$\begin{cases} e_1 = -3g_1 - 4g_2 - g_4 \\ e_2 = g_1 + 3g_2 + g_3 \\ e_3 = 6g_1 + 10g_2 + g_3 + 2g_4 \\ e_4 = g_1 - g_2 - g_3 + g_4 \\ f_1 = -8g_1 - 9g_2 + g_3 - 4g_4 \\ f_2 = 2g_1 + 4g_2 + g_3 + g_4 \\ f_3 = 7g_1 + 11g_2 + g_3 + 3g_4 \\ f_4 = -10g_1 - 11g_2 + g_3 - 6g_4 \end{cases}.$$
3. $\varphi_1(x) = (7x_1 + 2x_2 - 8x_3, -9x_2 + 2x_3, 2x_3 - x_1)$,
$\varphi_2(x) = (-2\sin(x_2) - x_3, 2x_3 - x_2, 7x_2 - 7x_1)$.
4. $(2\varphi_2^2 - 3\varphi_1^2)(x)$.
5.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
6. $(4, 2, -1); x - y + z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T$,
$u_3 = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 10 & 2 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T$.

8. $9x_1^2+8x_2x_3+5x_2^2+5x_3^2+8x_4^2-4x_2x_4+4x_3x_4$.
9. $x^2+2y^2-3z^2+12xy-4yz-8xz+14x+16y-12z+33=0$.

Вариант 9.

1. Множество отрицательных чисел. Сумма $-|a||b|$, произведение на число $-|a|^\alpha$.

2.
$$\begin{cases} e_1=g_1+g_3-2g_4\\ e_2=-2g_1+g_2+g_4\\ e_3=g_1-2g_2+g_3-g_4\\ e_4=g_2-g_3+g_4\\ f_1=-g_1+4g_2-g_4\\ f_2=g_1-g_2-2g_3+3g_4\\ f_3=-4g_1+6g_2+5g_3-6g_4\\ f_4=-2g_1+g_2+4g_3-5g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x)=(7x_1+2e^{x_2}-8x_3,-9x_2+2x_3,2x_3-x_1)$,
$\varphi_2(x)=(-2x_2+x_3,2x_3+x_2,7x_2-7x_1)$.

4. $(2\varphi_2+6\varphi_1^2)(x)$.

5.
$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. $(1,-1,3); x+3y+z=0$.

7. $u_1=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 5 & 0\end{pmatrix}^T, u_2=\begin{pmatrix}-7 & 4 & 8 & 1\end{pmatrix}^T$,
$u_3=\begin{pmatrix}3 & 9 & -1 & 3\end{pmatrix}^T, u_4=\begin{pmatrix}8 & 9 & -9 & -8\end{pmatrix}^T$.

8. $8x_1x_2+2x_1x_4+2x_2x_4+8x_3x_4$.

9. $3x^2-2y^2-z^2+4xy-12yz+8xz+18x-12y-6z=0$.

Вариант 10.

1. Множество целых чисел. Сумма $a+b$, произведение на число α — целая часть αa.

2.
$$\begin{cases} e_1 = g_1 + 3g_2 + 2g_3 - g_4 \\ e_2 = 2g_1 + g_2 + 3g_3 + 2g_4 \\ e_3 = -2g_1 - g_3 - 3g_4 \\ e_4 = 4g_1 + g_2 + g_3 + 5g_4 \\ f_1 = -g_1 - 4g_2 - 4g_3 + 2g_4 \\ f_2 = -5g_1 - 6g_2 + 5g_3 - 3g_4 \\ f_3 = 8g_1 + 11g_2 + 2g_3 + 3g_4 \\ f_4 = -5g_1 - 9g_2 - 4g_3 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (7x_1 + 2x_2 + 6x_3, -9x_1 + 3x_3, 2x_3 - x_1)$,
$\varphi_2(x) = (-2x_2 + x_3, 2x_3 + x_2, 7x_2 - 7e^{x_1})$.
4. $(2\varphi_2^3 + 6\varphi_1)(x)$.
5.
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. $(-1, 3, -3); 2x - y - 2z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T$,
$u_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}^T$.
8. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$.
9. $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz - 10x + 4y + 6 = 0$.

Вариант 11.

1. Множество векторов трехмерного пространства, координаты которых — целые числа. Сумма $\overline{a} + \overline{b}$, произведение на число $\alpha\overline{a}$.

2.
$$\begin{cases} e_1 = g_1 - 3g_2 - 3g_3 - 4g_4 \\ e_2 = -g_1 + g_2 - g_3 + g_4 \\ e_3 = -g_1 - 5g_2 + 4g_3 - 3g_4 \\ e_4 = -3g_1 + g_2 + 2g_3 + 2g_4 \\ f_1 = -g_1 + 11g_2 - 5g_3 + 7g_4 \\ f_2 = 2g_2 + 3g_3 + 4g_4 \\ f_3 = -2g_1 - 8g_2 - 4g_3 - 9g_4 \\ f_4 = 5g_1 + 7g_2 + 10g_3 + 10g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (-x_1 - x_2 - x_3, 19\cos(x_1) + 3x_3, 2x_3 - x_1)$,
$\varphi_2(x) = (-2x_2 + x_3, 2x_3 + 3x_2, 11x_2 + 66x_1)$.

4. $(2\varphi_2 + 6\varphi_1)(\varphi_1(x))$.
5.
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
6. $(1, -1, -2); 4x - y + 2z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 7 & -9 & 60 & 112 \end{pmatrix}^T.$
8. $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_3x_4 + x_4^2 - 4x_5^2$.
9. $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 8xz - 4xy - 4yz - 12x - 12y + 6z = 0$.

Вариант 12.

1. Множество векторов трехмерного пространства, каждый из которых коллинеарен одной из осей. Сумма $\overline{a} + \overline{b}$, произведение на число $\alpha\overline{a}$.
2.
$$\begin{cases} e_1 = g_1 - 5g_2 - g_3 - 2g_4 \\ e_2 = 4g_1 - 3g_2 + 6g_3 + g_4 \\ e_3 = 3g_1 - 6g_2 + g_3 - 2g_4 \\ e_4 = g_1 + 2g_2 + 3g_3 + g_4 \\ f_1 = g_1 + 5g_2 + g_3 + g_4 \\ f_2 = -4g_1 - g_2 - 4g_3 + 2g_4 \\ f_3 = -2g_1 + 4g_2 + 3g_4 \\ f_4 = g_1 + 3g_2 + g_3 \end{cases}.$$
3. $\varphi_1(x) = (-\ln(x_1) - x_2 - x_3, 19x_1 + 33x_3, x_3 - x_1)$,
$\varphi_2(x) = (x_2 + x_3, x_3 + x_2, x_2 + x_1)$.
4. $(-\varphi_2 + 3\varphi_1)(2\varphi_1(x))$.
5.
$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
6. $(-2, 1, -2); 3x + y - 3z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 & 9 \end{pmatrix}^T.$
8. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$.

9. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$.

Вариант 13.

1. Множество векторов на плоскости, каждый из которых коллинеарен одной из осей. Сумма $\overline{a}+\overline{b}$, произведение на число $\alpha\overline{a}$.

2.
$$\begin{cases} e_1=2g_1+g_2+3g_3+g_4 \\ e_2=g_1+3g_2-2g_3+2g_4 \\ e_3=3g_1+5g_2+g_3+4g_4 \\ e_4=g_1+2g_2+4g_3-3g_4 \\ f_1=5g_1+11g_2+8g_3-6g_4 \\ f_2=g_1+6g_2-3g_3-g_4 \\ f_3=-5g_1+g_2-12g_3-6g_4 \\ f_4=-2g_1+3g_2-10g_3+g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x)=(-\ln|x_1|+x_2-x_3, 19x_1+33x_3, x_3-x_1)$,
$\varphi_2(x)=(x_2+x_3, x_3^2+x_2, x_2+x_1)$.

4. $(-2\varphi_2+4\varphi_1)(2\varphi_2(x))$.

5.
$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. $(3,1,1); x-y-z=0$.

7. $u_1=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4 & -5\end{pmatrix}^T, u_2=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 7 & 8\end{pmatrix}^T$,
$u_3=\begin{pmatrix}-7 & 4 & 3 & 8\end{pmatrix}^T, u_4=\begin{pmatrix}13 & 1 & -1 & 12\end{pmatrix}^T$.

8. $2x_1x_2-6x_2x_3-6x_3x_4+2x_1x_4$.

9. $6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0$.

Вариант 14.

1. Множество векторов трехмерного пространства, являющихся линейными комбинациями трех фиксированных векторов. Сумма $\overline{a}+\overline{b}$, произведение на число $\alpha\overline{a}$.

2.
$$\begin{cases} e_1 = -g_2 + g_3 - g_4 \\ e_2 = g_1 - 2g_2 + 2g_3 + g_4 \\ e_3 = g_1 - g_2 + 2g_3 + 3g_4 \\ e_4 = -g_1 - 2g_3 - 2g_4 \\ f_1 = 2g_1 - 5g_2 + 7g_3 - 6g_4 \\ f_2 = -2g_1 + 3g_2 - 4g_3 - g_4 \\ f_3 = 5g_1 - 6g_2 + 6g_3 + 12g_4 \\ f_4 = -2g_1 + 5g_2 - 6g_3 + 4g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (-x_2 - x_3, -x_1 - x_3, -x_3 - x_1), \varphi_2(x) = (3x_2 + 4x_3, 5x_3 + 6x_2, 7x_2 + 8x_1)$.

4. $(\varphi_2^2 + \varphi_1)(\varphi_2(x))$.

5.
$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. $(1, 3, 1); 5x - 2y + 2z = 0$.

7. $u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & -5 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 9 & 12 \end{pmatrix}^T.$

8. $x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_3x_4 + 2x_1x_4$.

9. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$.

Вариант 15.

1. Множество четных функций, определенных на $[-1; 1]$. Сумма $f(x)+g(x)$, произведение на число $\alpha f(x)$.

2.
$$\begin{cases} e_1 = -g_1 + 2g_2 - g_3 + 2g_4 \\ e_2 = -4g_1 - g_2 + g_4 \\ e_3 = -2g_2 + 2g_3 - g_4 \\ e_4 = g_1 - 5g_2 + 3g_3 + g_4 \\ f_1 = -2g_1 + 5g_2 - 2g_3 \\ f_2 = -g_1 - 8g_2 + 3g_3 - g_4 \\ f_3 = 7g_1 + 2g_2 + g_3 - g_4 \\ f_4 = -3g_1 - 2g_2 - g_3 + 4g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (-x_2 - x_3, 0, -x_3 - x_1), \varphi_2(x) = (3x_2x_3, 5x_3 + 6x_2, 7x_2 + 8x_1)$.

4. $(\varphi_2 + \varphi_1^2)(\varphi_2(x))$.

5.

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. $(4,-1,-3); x-3y+2z=0.$
7. $u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 & 10 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -3 & 4 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & -7 \end{pmatrix}^T.$
8. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_3x_4 + 2x_1x_4.$
9. $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0.$

Вариант 16.

1. Множество четных функций, определенных на $[-1;1]$. Сумма $f(x)g(x)$, произведение на число $\alpha f(x)$.

2.

$$\begin{cases} e_1 = 2g_1 + g_3 + 2g_4 \\ e_2 = -3g_1 + g_2 + g_3 - g_4 \\ e_3 = -4g_1 + 2g_2 + g_3 - 2g_4 \\ e_4 = -5g_1 + 2g_2 + 2g_3 - g_4 \\ f_1 = -10g_1 + 7g_2 + 2g_3 - 8g_4 \\ f_2 = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \\ f_3 = -11g_1 + 11g_2 + 4g_3 - 9g_4 \\ f_4 = -6g_1 + 3g_2 + g_3 - 4g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (-x_2 - x_3, x_1x_2x_3, -x_3 - x_1), \varphi_2(x) = (3x_2 + 11x_3, 5x_3 + 6x_2, 0).$
4. $(\varphi_2 + \varphi_1)(\varphi_2^2(x)).$
5.

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. $(-5,-3,-2); 2x-3y-z=0.$
7. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 10 & -9 \end{pmatrix}^T.$
8. $8x_1x_2 + 2x_3x_4 + 2x_1x_4 + 8x_2x_4.$
9. $7y^2 - 7z^2 - 8xy + 8xz + 8x + 14y - 28z - 21 = 0.$

Вариант 17.

1. Множество нечетных функций, определенных на $[-1;1]$. Сумма $f(x)+g(x)$, произведение на число $\alpha f(x)$.

2.

$$\begin{cases} e_1 = g_1 - g_2 + g_3 + 2g_4 \\ e_2 = 3g_1 + 2g_2 - g_4 \\ e_3 = -g_1 + g_2 - 5g_3 + 2g_4 \\ e_4 = g_1 - 4g_3 - g_4 \\ f_1 = 3g_1 + 6g_2 - 10g_3 + 7g_4 \\ f_2 = 4g_1 + 9g_2 + g_3 - 3g_4 \\ f_3 = 2g_1 - 5g_2 - 5g_3 + 5g_4 \\ f_4 = -7g_1 + 8g_2 + 6g_3 - 5g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (x_1+1, x_2+1, x_3+1), \varphi_2(x) = (0, 5x_3 + 77x_2, 0)$.

4. $\varphi_1(\varphi_2^2(x))$.

5.

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. $(-1,-3,-4); 5x + 2y - 3z = 0$.

7. $u_1 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 1 & 6 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T.$

8. $8x_1^2 - x_1x_2 + 2x_3^2 + 2x_1x_4 + 8x_2x_4$.

9. $(x+1)(y+1)(z+1) - xyz = 0$.

Вариант 18.

1. Множество нечетных функций, определенных на $[-1;1]$. Сумма $f(x)g(x)$, произведение на число $\alpha f(x)$.

2.

$$\begin{cases} e_1 = -6g_1 - 2g_2 + g_4 \\ e_2 = -g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \\ e_3 = 2g_1 + g_2 + 3g_3 + 2g_4 \\ e_4 = 4g_1 + 3g_2 + 2g_3 + g_4 \\ f_1 = -7g_1 + 10g_3 + 9g_4 \\ f_2 = 7g_1 + 6g_2 + 9g_3 + 6g_4 \\ f_3 = 9g_1 + 8g_2 + 8g_3 + 5g_4 \\ f_4 = 4g_1 + 9g_2 + 8g_3 + 6g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2, x_3), \varphi_2(x) = (0, 5x_3 + 77x_2 - 5, 0)$.
4. $3\varphi_1(-2\varphi_2^2(x))$.
5.
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$
6. $(4, -3, 1); x + 2y + 3z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 & 10 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -14 & 8 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}^T.$
8. $3x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_3^2 + 2x_1x_4 - 4x_2x_4$.
9. $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz + 10x + 10y + 10z + 15 = 0$.

Вариант 19.

1. Множество дифференцируемых функций, определенных на $[-1; 1]$. Сумма $f(x) + g(x)$, произведение на число $\alpha f(x)$.
2.
$$\begin{cases} e_1 = -4g_1 + 2g_2 + 2g_3 + 3g_4 \\ e_2 = g_1 - g_3 - 3g_4 \\ e_3 = g_1 - g_2 - 3g_3 - 4g_4 \\ e_4 = -5g_1 + 3g_2 + 2g_3 + g_4 \\ f_1 = -10g_1 + 7g_2 + 6g_3 + 3g_4 \\ f_2 = -10g_1 + 6g_2 + 7g_3 + 8g_4 \\ f_3 = 2g_1 - g_2 + 2g_3 + 5g_4 \\ f_4 = -4g_1 + 2g_2 + 5g_3 + 10g_4 \end{cases}.$$
3. $\varphi_1(x) = (2x_1 - 4x_2 + 6x_3, -8x_1 + 10x_2, 12x_3)$,
$\varphi_2(x) = (e^{x_1x_2x_3}, 5x_3 + 77x_2, 0)$.
4. $3\varphi_2(-2\varphi_1^2(x))$.
5.
$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
6. $(2, -1, 2); 3x + 5y = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 & -9 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} -7 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 7 & 7 \end{pmatrix}^T.$
8. $4x_2^2 - 8x_1x_3 + x_3^2 + 2x_1x_4 - 4x_2x_4 - x_4^2$.

9. $y^2 + 2z^2 + 4xy + 4yz - 4x - 2y - 5 = 0$.

Вариант 20.

1. Множество дифференцируемых функций, определенных на $[-1; 1]$. Сумма $f(x)g(x)$, произведение на число $\alpha f(x)$.

2.
$$\begin{cases} e_1 = -10g_1 - 6g_2 + 2g_3 + g_4 \\ e_2 = 4g_1 + 3g_2 - g_3 \\ e_3 = -3g_1 - g_2 + g_4 \\ e_4 = g_1 - g_2 + g_3 - g_4 \\ f_1 = -4g_1 - 2g_2 + g_3 + g_4 \\ f_2 = 9g_1 + 8g_2 - 4g_3 + g_4 \\ f_3 = 11g_1 + 10g_2 - 6g_3 + g_4 \\ f_4 = -11g_1 - 7g_2 + 3g_3 + g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (12x_1 - 10x_2 + 8x_3, -6x_1 + 4x_2, 2x_3), \varphi_2(x) = (e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3})$.

4. $3\varphi_2^3(x)$.

5.
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. $(3, -1, 2); x - 2y - 2z = 0$.

7. $u_1 = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 & 7 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 7 & -7 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -4 & 5 \end{pmatrix}^T.$

8. $x_2^2 - 8x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_1x_4 + x_2x_4 + 6x_4^2$.

9. $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 36xy + 24xz + 12yz - 49 = 0$.

Вариант 21.

1. Множество дифференцируемых функций, определенных на $[-1; 1]$. Сумма $f(x)g(x)$, произведение на число $f(x)^\alpha$.

2.
$$\begin{cases} e_1 = 2g_1 - g_2 - 3g_3 - 3g_4 \\ e_2 = 4g_1 + 3g_2 - 2g_3 - g_4 \\ e_3 = g_1 - g_2 - g_3 + g_4 \\ e_4 = 3g_1 + g_2 - 2g_3 + g_4 \\ f_1 = 3g_1 - 2g_3 \\ f_2 = g_2 + 2g_3 + 3g_4 \\ f_3 = -g_2 + 3g_3 + 9g_4 \\ f_4 = 4g_1 + 5g_2 + 2g_3 + 5g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (2x_1 - 110x_2 + x_3, -4x_1 + 6x_2, 5x_3)$,
$\varphi_2(x) = (10^{x_1}, 2^{x_2}, 4^{x_3})$.
4. $(5\varphi_2^2 - \varphi_1)(x)$.
5.
$$\begin{pmatrix} 11 & -2 & 4 \\ 15 & 0 & 10 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. $(1, -1, 0); 3x - y - z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 & -1 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}^T.$
8. $2x_2^2 - x_2x_3 + 4x_3^2 + x_1x_4 + x_2x_4 - 6x_4^2$.
9. $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z = 6$.

Вариант 22.

1. Множество нечетных функций, определенных на $[-1; 1]$. Сумма $f(x) + g(x)$, произведение на число $f(x)^\alpha$.
2.
$$\begin{cases} e_1 = -5g_1 + g_2 + g_3 + 3g_4 \\ e_2 = -2g_1 - g_3 + 2g_4 \\ e_3 = -g_1 - 4g_2 + g_3 \\ e_4 = 2g_1 - g_2 + 2g_3 - g_4 \\ f_1 = -8g_1 - g_2 - g_3 + 3g_4 \\ f_2 = -2g_1 - 3g_2 + 4g_3 - g_4 \\ f_3 = 5g_1 - 2g_2 - 2g_4 \\ f_4 = 2g_1 + 7g_2 - g_3 + g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (x_1 + 110x_2 - x_3, -4x_1 + x_2, -5x_3)$,
$\varphi_2(x) = (\sin(x_1), \sin(x_2), x_3)$.

4. $(5\varphi_1^2 - \varphi_2)(x)$.
5.
$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$
6. $(-3, 1, -2); -3x - 4y - 2z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 9 & 2 \end{pmatrix}^T.$
8. $2x_2^2 - x_1x_3 + x_3^2 + x_1x_4 + 4x_2x_4 - 6x_4^2$.
9. $x^2 + y^2 + z^2 + 4(xy + xz + yz) + 10(x + y + z) + 15 = 0$.

Вариант 23.

1. Множество векторов трехмерного пространства, координаты которых — рациональные числа. Сумма $\overline{a} + \overline{b}$, произведение на число $\alpha\overline{a}$.
2.
$$\begin{cases} e_1 = g_1 - g_2 + g_3 - g_4 \\ e_2 = 3g_2 + g_3 + g_4 \\ e_3 = -g_1 - 4g_2 - 3g_3 \\ e_4 = 2g_1 + 10g_2 + 6g_3 + g_4 \\ f_1 = -6g_1 - 11g_2 - 10g_3 + g_4 \\ f_2 = g_1 + 4g_2 + 2g_3 + g_4 \\ f_3 = -4g_1 - 9g_2 - 8g_3 + g_4 \\ f_4 = 3g_1 + 11g_2 + 7g_3 + g_4 \end{cases}.$$
3. $\varphi_1(x) = (2x_1 - 13x_2 + x_3, -7x_1 + x_2, x_1)$,
$\varphi_2(x) = (10^{x_1}, x_2, \cos(x_3))$.
4. $(3\varphi_1^2(-\varphi_2))(x)$.
5.
$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 28 & 7 & 21 \\ -20 & -5 & -15 \end{pmatrix}.$$
6. $(3, -9, 2); 5x + 2y - 2z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 & 8 \end{pmatrix}^T,$
$u_3 = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 8 & -9 \end{pmatrix}^T.$
8. $x_1^2 - x_1x_2 + x_3^2 + 6x_1x_4 + 4x_2x_4 - 6x_4^2$.
9. $17x^2 + 14y^2 + 14z^2 - 4xy - 4xz - 8yz - 8 = 0$.

Вариант 24.

1. Множество многочленов степени, превосходящей 0, от переменной x. Сумма $f(x)+g(x)$, произведение на число $\alpha f(x)$.

2.

$$\begin{cases} e_1 = 3g_1 + 4g_2 - 3g_3 + g_4 \\ e_2 = -g_1 - 3g_2 + 5g_3 + g_4 \\ e_3 = -g_2 + 2g_3 + g_4 \\ e_4 = g_1 + 2g_2 - 2g_3 \\ f_1 = -3g_2 + 3g_3 + 2g_4 \\ f_2 = 4g_1 + 2g_2 + 5g_3 + 4g_4 \\ f_3 = 9g_1 + 11g_2 - 6g_3 + 4g_4 \\ f_4 = -5g_1 - 8g_2 + 5g_3 - g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (2x_1 - x_3, -x_1 + 88x_2, 5x_1)$,
$\varphi_2(x) = (x_1, x_1, 4^{x_3})$.

4. $(\varphi_2^3(2\varphi_1))(x)$.

5.

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -1 & 12 & 3 \\ 1 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. $(3, -1, 0); x - 2y = 0$.

7. $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 & -1 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 10 & 3 \end{pmatrix}^T$,
$u_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & -10 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 11 & 1 \end{pmatrix}^T$.

8. $x_1^2 - x_1x_2 + 6x_2^2 - 6x_1x_4 + 4x_2x_4 - 6x_4^2$.

9. $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy - 16xz + 20yz + 60x - 12y + 12z = 0$.

Вариант 25.

1. Множество векторов трехмерного пространства, являющихся линейными комбинациями трех фиксированных векторов. Сумма $\overline{a}-\overline{b}$, произведение на число $\alpha\overline{a}$.

2.
$$\begin{cases} e_1 = 2g_1 - 3g_2 + g_4 \\ e_2 = g_1 - 3g_3 + 2g_4 \\ e_3 = g_1 - 2g_2 - g_3 + g_4 \\ e_4 = -g_2 - 2g_3 \\ f_1 = 8g_1 - 8g_2 - 10g_3 + 9g_4 \\ f_2 = 5g_2 - 6g_2 - 9g_3 + 6g_4 \\ f_3 = 9g_2 - 4g_2 + 7g_3 + 7g_4 \\ f_4 = 8g_1 - 9g_2 + 6g_4 \end{cases}.$$

3. $\varphi_1(x) = (22x_1 - 10x_2 - x_3, -4x_1 + 7x_2, 5x_2)$,
$\varphi_2(x) = (\cos(x_2), 2^{x_2}, 4^{x_3})$.
4. $(5\varphi_2^2(\varphi_1))(x)$.
5.
$$\begin{pmatrix} -7 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ -8 & 16 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. $(0, -1, 2); x - 2z = 0$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 5 & 7 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 & 9 \end{pmatrix}^T$,
$u_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}^T, u_4 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -8 & 9 \end{pmatrix}^T$.
8. $x_1^2 - 8x_1x_2 + 6x_3^2 + 4x_1x_4 + 2x_2x_4 - 6x_4^2$.
9. $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$.

ОГЛАВЛЕНИЕ