

Министерство образования и науки Российской Федерации

---

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

**Приоритетный национальный проект «Образование»  
Национальный исследовательский университет**

*А.Л. ГЕЛЬГОР*

*А.И. ГОРЛОВ*

*Е.А. ПОПОВ*

# **МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки магистров “Техническая физика”*

Санкт-Петербург

Издательство политехнического университета

2012

УДК 621.37  
ББК 32.811.1  
Г 32

Рецензенты:

Кафедра радиопередающих устройств и средств подвижной связи СПбГУТ  
им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, зав. кафедрой д.т.н., профессор М. А. Сиверс

*Гельгор А.Л.* **Методы моделирования случайных величин и случайных процессов:** учеб. пособие / Гельгор А.Л., Горлов А.И., Попов Е.А. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. — 217 с.

Системный подход к имитационному моделированию предполагает изучение весьма большого числа вопросов, связанных с построением моделей реальных систем и процессов, проведением имитационных экспериментов и интерпретация результатов и др. В предлагаемом пособии изучаемый круг вопросов существенно сужен и ориентирован, главным образом, на изучение методов статистического имитационного моделирования, обеспечивающих формирование случайных объектов с заданными вероятностными свойствами.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по магистерской программе “Системы и сети радиосвязи и радиовещания” направления подготовки магистров “Инфокоммуникационные технологии и системы связи”. Оно может быть также использовано при обучении студентов направлений подготовки “Техническая физика”, “Радиотехника”.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития национального исследовательского университета “Модернизация и развитие политехнического университета как университета нового типа, интегрирующего мультидисциплинарные научные исследования и надотраслевые технологии мирового уровня с целью повышения конкурентоспособности национальной экономики”

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Гельгор А.Л., Горлов А.И., Попов Е.А., 2012  
© Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет, 2012

ISBN

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	5
1. Случайные объекты и их описание .....	8
1.1. Случайные события и их вероятности .....	8
1.1.1. Вероятность события .....	15
1.1.2. Условная вероятность .....	20
1.2. Случайные величины и их законы распределения .....	27
1.2.1. Интегральная функция распределения и плотность вероятности .....	29
1.2.2. Многомерные распределения .....	43
1.2.3. Условные законы распределения .....	50
1.3. Числовые характеристики случайных величин .....	59
1.3.1. Условные числовые характеристики .....	72
1.3.2. Числовые характеристики многомерных распределений .....	75
1.4. Основные статистические характеристики .....	78
1.5. Случайные процессы .....	86
1.5.1. Корреляционная функция и энергетический спектр случайных процессов .....	91
1.5.2. Эргодические процессы. Экспериментальное определение основных характеристик случайных процессов .....	100
Вопросы и задания к Главе 1 .....	116
2. Имитационное моделирование случайных величин и случайных процессов .....	118
2.1. Постановка задач имитационного моделирования .....	119
2.2. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения .....	122
2.2.1. Функциональные преобразования одномерных случайных величин .....	141
2.2.2. Методы моделирования вероятностных распределений .....	150

2.3. Моделирование и функциональные преобразования многомерных случайных величин .....	169
2.3.1. Моделирование многомерных случайных величин ..	169
2.3.2. Функциональные преобразования совокупности случайных величин .....	176
2.4. Моделирование случайных процессов .....	190
2.4.1. Моделирование марковских цепей .....	192
2.4.2. Моделирование марковских последовательностей	197
2.4.3. Моделирование гауссовских процессов с заданными корреляционными свойствами .....	201
Вопросы и задания к Главе 2 .....	214
Библиографический список .....	217

# ВВЕДЕНИЕ

Современная теория связи, а также многие радиотехнические направления в значительной степени опираются на вероятностные концепции. Это означает, что не только характеристики, описывающие работу телекоммуникационных систем, являются вероятностными: вероятность безотказной работы, вероятность ошибочной передачи, вероятность неудачного хэндовера и т. п., но также вероятностными (статистическими) являются критерии, на основании которых синтезируются оптимальные устройства обработки информации. В этой связи в соответствующих образовательных программах традиционно повышенное внимание уделяется изучению теории вероятностей и её приложений. Фактически, наряду с базовым курсом, где изучаются основные понятия теории вероятностей и математической статистики, предлагается ряд практически-ориентированных дисциплин, в которых производится “перевод” теоретико-вероятностных понятий на язык приложений и выявляются аспекты, необходимые для решения прикладных задач. Именно для такого — “повторного” изучения теории вероятностей и предназначено данное учебное пособие.

Целью предлагаемого учебного пособия является изучение методов моделирования случайных величин и случайных процессов.

В настоящее время имитационное моделирование (как часть фундаментального подхода к построению математических моделей) является, пожалуй, наиболее эффективным средством изучения физических и социально-экономических процессов, проверки работоспособности достаточно сложных устройств и систем, а также построения “тренажёрных” механизмов с их возможным включением в реальный контур функционирования. При этом, в связи с бурным развитием средств вычислительной техники, непрерывно возрастают технические возможности моделирования; то, что ещё десятилетие назад казалось нереализуемым или неоправданно затратным, нынче является обычной практикой и, возможно даже, предметом учебного изучения.

Системный подход к имитационному моделированию предполагает изучение весьма большого числа вопросов, связанных с построением моделей реальных систем и процессов, проведением имитационных экспериментов и интерпретация результатов и др. В предлагаемом пособии изуча-

емый круг вопросов существенно сужен и ориентирован, главным образом, на изучение методов *статистического имитационного моделирования*, обеспечивающих формирование случайных объектов с заданными вероятностными свойствами.

Пособие состоит из двух глав. В первой, “теоретической” главе рассматриваются основные понятия теории вероятности, математической статистики и теории случайных процессов. Несмотря на некоторую “обзорность”, авторы старались достаточно строго, но, в то же время, с большим количеством примеров излагать материал, не уклоняясь от аналитических выкладок (порой, достаточно серьёзных), особенно, когда они касаются практических примеров. Вне поля зрения, по причине их относительно меньшей практической значимости, оказались некоторые теоретико-вероятностные понятия, обычно рассматриваемые в учебной литературе, например, вероятностное пространство, характеристические функции, вероятностная сходимость и предельные теоремы. С другой стороны, значительное внимание уделено вопросам, которые, в силу их практической ориентации, как правило, редко попадают на страницы традиционных учебников. Например, это касается эргодичности процессов и подходов к получению их статистических оценок.

Вторая глава — “практическая”, и она посвящена изучению методов имитационного (программного) моделирования случайных объектов. Целью является получение возможности генерирования случайных величин и процессов с заданными вероятностными характеристиками. При этом изложение материала изначально ориентировано на то, что рассматриваемые методы по мере их изучения должны воплощаться в жизнь в рамках единого учебного курса.

Программная реализация описываемых методов моделирования возможна с использованием, пожалуй, любых средств вычислительной техники. Наряду с универсальными языками и средами программирования в настоящее время существует большое число специализированных пакетов, предназначенных для статистических исследований, в том числе, для целей имитационного моделирования. Однако реалии сегодняшнего дня таковы, что де-факто универсальной средой, причём, как для учебных, так и для профессиональных целей является система MATLAB, и иллюстрирующие “программные вставки” приводятся именно для этой системы.

В рамках учебного пособия, конечно, невозможно охватить не только все, но даже большую часть известных методов моделирования случайных величин с различными законами распределений и, тем более, различных классов случайных процессов. Поэтому основное внимание уделено методам формирования “базовых” распределений случайных величин — равномерного и гауссовского — и наиболее простым классам случайных процессов: марковских цепей и гауссовских процессов с заданными корреляционными свойствами.

В конце каждой главы предложен набор заданий, решение которых должно способствовать более глубокому пониманию изучаемого материала. Предлагаемый перечень невелик, поскольку предполагается, что в процессе изучения читатель активно работает с “толстыми” задачками [10–12].

Учебное пособие написано по материалам учебных дисциплин, преподаваемых авторами в течение многих лет на радиофизическом факультете Санкт-Петербургского государственного политехнического университета и предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки “Инфокоммуникационные технологии и системы связи”, “Радиотехника”, “Техническая физика”. Также оно может оказаться полезным тем, специалистам, чья профессиональная деятельность связана с изучением вероятностных объектов и явлений.

# 1. СЛУЧАЙНЫЕ ОБЪЕКТЫ И ИХ ОПИСАНИЕ

В данной главе рассматриваются основные понятия теории вероятности, математической статистики и теории случайных процессов, необходимые для их последующего использования в прикладных задачах. Предполагается, что читатель в достаточной степени уже знаком с изучаемым материалом. Это даёт возможность *не* следовать строго логическому построению и не включать в рассмотрение некоторые вопросы (вероятностное пространство, характеристические функции, вероятностная сходимость и предельные теоремы и др.), которые традиционно фигурируют в учебной литературе, но, всё же, имеют относительно меньшую практическую значимость. Несмотря на некоторую “обзорность”, изложение материала ведётся достаточно строго, с большим количеством примеров.

## 1.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

Первичным понятием теории вероятностей является *эксперимент*  $G$ , определяемый как комплекс условий, который может быть воспроизведён сколько угодно раз. Осуществление эксперимента приводит к *элементарному исходу*  $\omega$ , совокупность которых образует *множество (пространство) элементарных исходов*  $\Omega$ .

Например, во всем известной модели бросания стандартного игрального кубика можно определить (бесконечный) набор экспериментов, простейшим из которых является эксперимент  $G_1$ , представляющий собой однократное бросание кубика и фиксацию результата выпадения той или иной его грани. Если отождествить выпавшую грань с изображённым на ней числом точек (что, вообще говоря, не обязательно), то пространство элементарных исходов  $\Omega_1$  представляет собой шестиэлементное множество

$$\Omega_1 = \{\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 3, \omega_4 = 4, \omega_5 = 5, \omega_6 = 6\}.$$

Можно рассмотреть усложнённый эксперимент  $G_2$ , определяя его, например, как результат бросания двух кубиков и рассматривая в качестве элементарных исходов пары чисел, соответствующих граням. В этом случае пространство элементарных исходов  $\Omega_2$  содержит, очевидно, 36 элементов:

$$\Omega_2 = \{\omega_1 = (1, 1), \dots, \omega_6 = (1, 6), \omega_7 = (2, 1), \dots, \omega_{12} = (2, 6), \dots, \omega_{31} = (6, 1), \dots, \omega_{36} = (6, 6)\}.$$



Дальнейшее построение теоретико-вероятностных объектов связано, согласно предложенной в 1929 г. А. Н. Колмогоровым логической схеме, с привлечением понятий теории множеств. Вероятностное *событие*  $A$  понимается как любое подмножество пространства  $\Omega$ . В частности, имеют место достоверное событие  $A = \Omega$ , совпадающее со всем пространством элементарных исходов (кубик выпадет хоть какой-то гранью), и невозможное событие  $A = \emptyset$ , являющееся пустым множеством (шестигранный кубик выпадет седьмой гранью).

События, отличающиеся от достоверных и невозможных, называются *случайными* (вероятностными, стохастическими).

Например, для эксперимента  $G_2$  можно рассмотреть событие  $A_1$ , состоящее в том, что на гранях кубика выпадут одинаковые числа. Легко видеть, что такое событие представляет собой 6-элементное подмножество  $\Omega_2$   
 $A_1 = \{\omega_1 = (1, 1), \omega_8 = (2, 2), \omega_{15} = (3, 3), \omega_{22} = (4, 4), \omega_{29} = (5, 5), \omega_{36} = (6, 6)\}$ .

Для различных событий  $A$  и  $B$  определяется *алгебра событий*:

- Событие  $A$  является *частным случаем* (подсобытием) события  $B$  (обозначается  $A \subset B$ ), если при каждом осуществлении события  $A$  также осуществляется и событие  $B$ .

Например, событие  $A_2 = \{\omega_1 = (1, 1)\}$  является частным случаем события  $A_3$ , состоящего в том, что сумма выпавших граней является чётным числом.

Из приведённого определения следует, что любое случайное событие является частным случаем достоверного события:  $A \subset \Omega$ , а также, что невозможное событие  $\emptyset$  является частным случаем любого случайного события:  $\emptyset \subset A$ .

- *Объединением* (суммой) событий  $A$  и  $B$  называется такое событие  $C = A \cup B$ , которое происходит всякий раз, когда происходит одно из событий  $A$  или  $B$ . Для объединения событий часто используют обозначение арифметического сложения, т. е. пишут  $C = A + B$ .

Очевидны следующие свойства объединения событий:

$$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B;$$

$$A \cup \Omega = \Omega;$$

$$A \cup \emptyset = A.$$

- *Пересечением* (произведением) событий  $A$  и  $B$  называется такое событие  $C = A \cap B$ , которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события  $A$  и  $B$ . Для пересечения событий часто используют обозначение арифметического умножения, т. е. пишут  $C = A \cdot B$  или, короче,  $C = AB$ .

Также очевидны следующие свойства пересечения событий:

$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B;$$

$$A \cap \Omega = A;$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Введённые понятия объединения и пересечения обобщаются на произвольное конечное (а затем и счётное) число событий, т. е. можно рассматривать объекты

$$C = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

и

$$C = \bigcap_{k=1}^n A_k,$$

в которых слагаемые и множители обладают свойством коммутативности.

- События  $A$  и  $B$  называются *несовместными*, если их пересечение даёт пустое множество.

Если рассматривается объединение  $C = \bigcup_{k=1}^n A_k$  несовместных событий (т. е. для любых  $k$  и  $l$  справедливо  $A_k \cap A_l = \emptyset$ ), то говорят, что  $C$  подразделяется на частные случаи. Если дополнительно  $C$  совпадает с пространством  $\Omega$ , то  $A_1, \dots, A_n$  являются полной группой попарно несовместных событий.

- Событие  $B \equiv \bar{A}$ , состоящее в том, что событие  $A$  не происходит, называется дополнением (отрицанием) события  $A$ .

Легко видеть, что

$$A \cup \bar{A} = \Omega;$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

- *Разностью*  $C$  двух событий  $A$  и  $B$  ( $C = A \setminus B$ ) называется событие, которое происходит всякий раз, когда происходит событие  $A$  и не происходит событие  $B$ .

В зависимости от физической природы изучаемых объектов пространство элементарных исходов может быть конечным, счётным или несчётным. Примеры пространств  $\Omega$  для типичных теоретико-вероятностных схем (бросание монеты, игрального кубика, вытаскивание шаров из урн и т. п.) уже были представлены выше. Рассмотрим теперь примеры формирования пространства элементарных исходов и случайных событий применительно к типичным связным задачам.

**Передача двоичных данных с контролем на чётность.** Будем считать, что передача информации по каналу связи, в котором возможны ошибки, обеспечивается с помощью двоичных кодов с проверкой на чётность. Для этого на передающей стороне формируются  $K$ -элементные блоки двоичных символов, в которых  $K - 1$  символов являются информационными, а один символ, обычно, крайний — проверочным, значение которого устанавливается в 0 или 1 так, чтобы общее число единиц в блоке было бы чётным. Тогда на приёмной стороне проверка на чётность позволяет в некоторой степени повысить достоверность принимаемой информации, поскольку существует возможность обнаружения некоторых *ошибочных комбинаций*, а именно, тех комбинаций, в которых искажено *нечётное* количество символов.

Для определённости рассмотрим пример передачи трёх информационных сообщений — обозначим их  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — посредством трёхразрядных двоичных блоков (слов) 001, 011 и 100 соответственно, к которым добавляется четвёртый двоичный разряд, обеспечивающий чётное количество единиц в результирующем 4-разрядном блоке (кодовом слове). Таким образом, имеет место следующее соответствие между информационными сообщениями и кодовыми словами:

$$a \div 0011; b \div 0110; c \div 1001.$$

С учётом возможности возникновения ошибок при передаче сообщений по каналу связи, на приёмной стороне при приёме каждого кодового слова возможны три ситуации:

- кодовое слово может поступить без искажений входящих в него символов (состояние 1);

- в кодовом слове возможно нечётное число искажений символов (состояние 2);

- в кодовом слове возможно чётное число искажений символов (состояние 3).

При этом необходимо понимать, что переданное сообщение становится ошибочным при любом числе искажённых символов.

Рассмотрим эксперимент, заключающийся в последовательной передаче сообщений  $a$ ,  $b$  и  $c$ , а элементарными исходами будем считать распределение кодовых слов по состояниям, т. е. возможны ситуации, когда все три сообщения переданы без искажений; два сообщения переданы без искажений, а одно — с чётным числом искажений; одно сообщение передано правильно, одно — с чётным числом искажений, одно — с нечётным и т. д. Какие-либо “дополнительные” исходы, например, непоступление кодового слова в результате обрыва связи, считаются невозможными.

Нетрудно видеть, что пространство элементарных исходов для рассматриваемого эксперимента содержит 27 элементов, значения которых представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

**Значения элементарных исходов**

№	Состояние			№	Состояние			№	Состояние		
	1	2	3		1	2	3		1	2	3
1	$abc$			10	$a$	$bc$		19		$a$	$bc$
2		$abc$		11	$b$	$ac$		20		$b$	$ac$
3			$abc$	12	$c$	$ab$		21		$c$	$ab$
4	$ab$	$c$		13	$a$		$bc$	22	$a$	$b$	$c$
5	$ac$	$b$		14	$b$		$ac$	23	$a$	$c$	$b$
6	$bc$	$a$		15	$c$		$ab$	24	$b$	$a$	$c$
7	$ab$		$c$	16		$ab$	$c$	25	$b$	$c$	$a$
8	$ac$		$b$	17		$ac$	$b$	26	$c$	$a$	$b$
9	$bc$		$a$	18		$bc$	$a$	27	$c$	$b$	$a$

На представленном в табл. 1.1 пространстве элементарных исходов можно задать различные события. Например, событие  $A_1 = \{1\}$  отражает тот факт, что все составляющие сообщения,  $a$ , следовательно, целиком всё

сообщение приняты правильно. Событие  $A_2 = \{4\}$  означает, что сообщения  $a$  и  $b$  приняты правильно, а в сообщении  $c$  произошло нечётное число искажений символов.

Рассмотрим событие  $A_3$ , состоящее в том, что хоть раз срабатывает механизм контроля ошибок с проверкой на чётность, т. е. реализуются комбинации, содержащие состояние 2. Как следует из табл. 1.1, такое событие содержит следующие элементарные исходы:

$$A_3 = \{2, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\}.$$

Событие  $A_4$ , заключающееся в том, что механизм проверки на чётность ни разу не обнаруживает искажений в сообщении, состоит из элементов

$$A_4 = \{1, 3, 7, 8, 9, 13, 14, 15\}.$$

Событие  $A_5$ , отражающее тот факт, что ошибочное сообщение принимается как правильное (исказилось несколько символов таким образом, что в результате образовалось “правильное” кодовое слово) имеет вид

$$A_5 = \{3, 7, 8, 9, 13, 14, 15\}.$$

Множество

$A_6 = \{2, 3, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\}$  отражает событие, состоящее в том, что в переданном сообщении число искажённых кодовых слов окажется не менее двух.

Множество

$$A_7 = \{3, 13, 14, 15\}$$

содержит исходы события, связанного с тем, что число искажённых кодовых слов не менее двух, и в каждом искажённом слове содержится чётное количество искажённых символов.

Наконец, множество

$$A_8 = \{7, 8, 9\}$$

можно трактовать как событие, при котором искажено одно кодовое слово, и количество искажённых символов чётно.

В рассматриваемом эксперименте предполагалось однозначное распределение кодовых слов по состояниям, т. е., к примеру, элементарные исходы “сообщения  $a$ ,  $b$  приняты правильно, а  $c$  — ошибочно” и “сообщения  $a$ ,  $c$  приняты правильно, а  $b$  — ошибочно” различаются (это, соответственно, исходы 4 и 5). Возможны ситуации, при которых наблюдателя на приёмной стороне интересует распределение не самих кодовых слов по со-

стояниям, а лишь количество кодовых слов. Соответствующее 10-элементное пространство элементарных исходов представлено в табл. 1.2.

Таблица 1.2

**Значения элементарных исходов**

№	Состояние			№	Состояние			№	Состояние		
	1	2	3		1	2	3		1	2	3
1	3	0	0	5	2	0	1	9	0	1	2
2	0	3	0	6	1	2	0	10	1	1	1
3	0	0	3	7	1	0	2				
4	2	1	0	8	0	2	1				

Примером события для представленного в табл. 1.2 пространства  $\Omega$  является событие  $B_1$ , состоящее в том, что механизм контроля на чётность обнаруживает наличие искажений в принятом сообщении. Очевидно,

$$B_1 = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}.$$

Другим примером является событие  $B_2$ , состоящее в том, что искажение произошло только в одном кодовом слове. Легко видеть,

$$B_2 = \{4, 5\}.$$

Особенностью рассмотренного выше эксперимента является то, что для него число возможных элементарных исходов всегда конечно. Соответственно, все события такого эксперимента представляют собой конечные подмножества. Обратимся к примеру, когда пространство элементарных исходов представляет собой несчётное множество.

Пусть эксперимент состоит в наблюдении времени  $\tau$  безотказной работы какого-либо устройства, тогда в качестве пространства  $\Omega$ , т. е. всех теоретически возможных значений  $\tau$  может быть выбрано множество неотрицательных вещественных чисел. Конкретное значение  $t_1$  является одноэлементным подмножеством, т. е. событием, состоящим в том, что отказ в работе наступит точно в момент времени  $\tau = t_1$ . Неравенство  $\tau \geq t_1$  определяет многоэлементное несчётное подмножество, т. е. событие, определяющее отсутствие отказов в работе до момента  $t_1$ .

Отметим, что несчётность пространства  $\Omega$  обусловлена идеальностью рассматриваемого эксперимента, предполагающего сколь угодно высокую точность измерений в произвольные моменты времени. В реальных усло-

виях точность измерений, а также величина интервалов, через которые возможны последовательные измерения, ограничена, и пространство элементарных исходов становится счётным или, даже, конечным множеством, правда, с большим числом элементов.

Итак, случайные события определяются как подмножества пространства элементарных исходов, и действия над событиями представляют собой стандартные теоретико-множественные операции. Обратимся теперь к определению понятия вероятности событий.

### 1.1.1. Вероятность события

Вероятность  $P$  события  $A$  — это числовая функция (мера) соответствующего подмножества, которая задаётся аксиоматически посредством трёх условий.

1. Неотрицательность:  $P(A) \geq 0$ .
2. Условие нормировки:  $P(\Omega) = 1$ , т. е. вероятность достоверного события равна единице.
3. Аддитивность вероятности несовместных событий: если

$$A = \bigcup_k A_k$$

и для любых  $k \neq l$  справедливо  $A_k \cap A_l = \emptyset$ , то

$$P(A) = \sum_k P(A_k).$$

Такой аксиоматический подход к определению вероятности позволяет определять различные соответствия между событиями (и составляющими их элементарными исходами) и их вероятностными мерами или, как говорят, различные *распределения вероятностей*.

Общая схема построения вероятностей событий для экспериментов с конечным числом элементарных исходов имеет следующий вид.

Выписывается (фактически или умозрительно)  $N$ -элементное пространство элементарных исходов:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}.$$

и выбирается  $N$ -элементный набор неотрицательных чисел (вероятностей)  $p_1, p_2, \dots, p_N$ , удовлетворяющих условию нормировки, т. е. сумма которых равна единице:

$$\sum_{k=1}^N p_k = 1, \quad 0 \leq p_k \leq 1.$$

Далее определяются различные представляющие интерес события  $A_k$  как различные наборы входящих в  $\Omega$  элементарных исходов:

$$A_k = \{ \omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \dots, \omega_{k_n} \}.$$

Тогда вероятность  $P$  события  $A_k$  равна

$$P(A_k) = \sum_{j=1}^n p_{k_j},$$

где  $p_{k_j}$  — вероятность элементарного исхода  $\omega_{k_j}$ .

Исторически первой использовалась так называемая “классическая схема” или *равновероятное (равномерное дискретное) распределение*, при котором всем элементарным исходам соответствуют одинаковые вероятности:

$$p_k \equiv P(\omega_k) = \frac{1}{N}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.1.1)$$

В этой схеме вероятность любого события  $A$  определяется формулой

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{N}, \quad (1.1.2)$$

где  $\mu(A)$  — число элементарных исходов в множестве  $A$ .

Классическая схема связывается с традиционными игровыми задачами (бросание монеты, игрального кубика, выпадение карт из колоды и т. п.) и опирается на понятие “равновозможности” (равновероятности), которое является исходным, неопределяемым. Иногда предположение равновозможности объясняют тем, что реальные события (исходы) различаются признаками, не могущими влиять на исход испытаний.

Классическое определение вероятности позволяет найти численное значение вероятности события, однако его практическая значимость низка по той причине, что класс испытаний, удовлетворяющих условиям классической схемы, слишком ограничен. Чаще встречаются такие эксперименты, с которыми невозможно связать какие-либо конечные пространства  $\Omega$  с равновозможными элементарными исходами.

С другой стороны, определение вероятности по классической схеме можно распространить на некоторые задачи с бесконечными простран-



ствами  $\Omega$ , если считать соответствующие элементарные исходы равновероятными. В этом случае вводится *геометрическое* определение вероятности, когда  $\Omega$  представляет собой некоторую геометрическую область (линия, двумерная фигура, трёхмерное тело и т. п.), и эксперимент состоит в “бросании наугад” точки в такой области. Термин “бросание наугад” понимается в том смысле, что брошенная точка может попасть в любую точку  $\Omega$ , а вероятность  $P_G$  попадания в произвольную часть  $G$  исходной области  $\Omega$  пропорциональна “размеру”, или, правильнее, *мере*  $\mu(G)$  этой части и не зависит ни от формы  $G$ , ни от её расположения в  $\Omega$ :

$$P_G = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)}, \quad (1.1.3)$$

где  $\mu(\Omega)$  означает меру области  $\Omega$ : длину, площадь, объём и т. п.

Прежде, чем рассматривать дальнейшие свойства вероятности обратимся к статистическому толкованию вероятностных характеристик.

Теория вероятностей и математическая статистика являются родственными дисциплинами, предметами исследования которых являются в некотором роде взаимно-обратные задачи: если в теории вероятностей, как правило, необходимо, исходя из общих закономерностей, предсказать характеристики конкретного поведения объекта (среднее состояние, выбросы и др.), то целью математической статистики является, наоборот, построение общих закономерностей, описывающих объект, на основании анализа конкретного поведения.

В задачах статистического исследования отказываются от условий, положенных в основу определения вероятности по классической схеме, а именно: конечности пространства  $\Omega$  и равновероятности элементарных исходов. В то же время, длительные наблюдения за случайными событиями показывают, что для широкого класса явлений при постоянном комплексе условий и большом числе  $N$  испытаний почти постоянной (мало меняющейся в различных сериях испытаний) оказывается *относительная частота*  $m(A)$  события  $A$ :

$$m(A) = \frac{M}{N}, \quad (1.1.4)$$

где  $M$  — число появления события  $A$  в  $N$  независимых испытаниях. Таким образом, статистическое определение вероятности относится к тому событию  $A$ , которое удовлетворяет следующим условиям:

- существует, по крайней мере, принципиальная возможность проведения любого числа испытаний, в каждом из которых может либо появиться, либо не появиться изучаемое событие  $A$ ;

- в результате достаточно большого числа испытаний относительная частота события  $A$  почти для каждой большой серии испытаний лишь незначительно отклоняется от некоторой (вообще говоря, неизвестной) постоянной величины, которая и принимается за вероятность события  $A$ .

Далее понятие статистической вероятности будет рассмотрено чуть более подробнее.

Итак, понятие вероятности опирается на теоретико-множественные операции или, что эквивалентно, на теоретико-вероятностные операции суммы и пересечения событий, с которыми связаны формулы сложения и умножения вероятностей. Однако, прежде, чем привести эти формулы, необходимо обсудить важнейшее для теории вероятности понятие зависимости (или независимости) событий.

Вначале приведём простой, но практически важный пример. Пусть эксперимент состоит в случайном выборе символов (“букв”) из “правильного” источника, порождающего “осмысленные” тексты, т. е. такие последовательности символов, которые, хотя бы в некотором приближении удовлетворяют смысловым и грамматическим правилам какого-либо естественного языка. Для определённости будем рассматривать “технический” русский язык, алфавит которого состоит из 32 букв (буквы Е и Ё, а также Ъ и Ь не различаются, и дополнительной “буквой” является пробел между словами), и, таким образом, пространство элементарных исходов представляет собой конечное 32-элементное множество

$$\Omega = \{\omega_1 = 'А', \omega_2 = 'Б', \dots, \omega_{31} = 'Я', \omega_{32} = '—'\},$$

где ‘—’ обозначает пробел.

Распределение вероятностей появления отдельных букв может несколько отличаться, в зависимости от специфики источника (технический или художественный текст, проза или поэзия, различные авторы), однако в любом случае оно заметно неравномерное: существуют более вероятные и менее вероятные буквы.

В табл. 1.3 показан вариант распределения вероятностей (статистических частот встречаемости) появления отдельных букв русского языка, усреднённого по различным типам источников.

Таблица 1.3

**Вероятности встречаемости отдельных букв**

–	О	Е, Ё	А	И	Т	Н	С
0,175	0,090	0,072	0,062	0,062	0,053	0,053	0,045
Р	В	Л	К	М	Д	П	У
0,040	0,038	0,035	0,028	0,026	0,025	0,023	0,021
Я	Ы	З	Ь, Ь	Б	Г	Ч	Й
0,018	0,016	0,016	0,014	0,014	0,013	0,012	0,010
Х	Ж	Ю	Ш	Ц	Щ	Э	Ф
0,009	0,007	0,006	0,006	0,004	0,003	0,002	0,002

В рассмотренном эксперименте простейшие события заключаются в появлении отдельных букв источника, т. е. совпадают с элементарными исходами. Вероятности всех таких событий отличны от нуля и определяются согласно значениям, представленным в табл. 1.3.

Усложним эксперимент и будем теперь рассматривать события, состоящие в последовательном выборе двух букв. Пространство элементарных исходов этого эксперимента состоит из  $32^2 = 1\,024$  пар двухбуквенных сочетаний, так называемых *диграмм*:

$$\Omega = \{\omega_1 = \text{'АА'}, \omega_2 = \text{'АБ'}, \dots, \omega_{32} = \text{'А—'}, \omega_{33} = \text{'БА'}, \omega_{34} = \text{'ББ'}, \dots, \omega_{64} = \text{'Б—'}, \dots, \omega_{993} = \text{'—А'}, \omega_{994} = \text{'—Б'}, \dots, \omega_{1024} = \text{'— —'}\}.$$

Нетрудно видеть, что события в данном эксперименте являются произведением (пересечением) событий в предыдущем эксперименте.

Очевидно, что вероятности некоторых событий, например, появление диграммы ‘—Б’, равны нулю, поскольку в “правильном” русском языке нет слов, начинающихся с мягкого или твёрдого знака. С другой стороны, как следует из табл. 1.3, вероятности появления отдельных символов ‘—’ и ‘Б’ хотя и малы, но, всё же, отличны от нуля. Таким образом, можно сделать вывод о том, что *вероятность совместного события не равна произведению вероятностей составляющих элементарных событий*.

Данный пример иллюстрирует фундаментальное свойство случайных событий — свойство вероятностной зависимости, являющееся отражением физической картины мира, в котором все протекающие процессы в той или иной степени зависимы друг от друга. Определим вероятностную зависимость более строго с использованием понятия *условной вероятности*.

### 1.1.2. Условная вероятность

Пусть  $A$  и  $B$  — некоторые события в границах проводимого эксперимента,  $AB$  — произведение таких событий, а  $P(A)$ ,  $P(B)$  и  $P(AB)$  — соответствующие вероятности. Тогда *условная вероятность  $P(A/B)$  события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$* , по определению равна

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (1.1.5)$$

При этом, если  $P(A/B) = P(A)$ , т. е., если условная вероятность совпадает с безусловной, то события  $A$  и  $B$  называются *независимыми*.

Поясним условную вероятность на примере статистического понятия вероятности.

Как уже говорилось, вероятностный (статистический) эксперимент  $G$  предполагает неизменный комплекс условий, и изначально, как правило, рассматриваются основные, *безусловные*, вероятности событий. Однако затем зачастую приходится учитывать дополнительные условия — наступление некоторого события из того же эксперимента, что можно условно трактовать как проведение некоторого другого эксперимента  $G'$  с изменённым комплексом условий. Естественно ожидать, что такое дополнение как-то изменит вероятности появления событий.

Пусть в эксперименте  $G$  в серии из  $N$  испытаний событие  $A_1$  наблюдалось  $M_1$  раз, а событие  $A_1A_2$  —  $M_2$  раз. Рассматривая событие  $A_1$  как дополнительное условие, получаем эксперимент  $G'$ , в рамках которого событие  $A_2$  проявилось  $M_2$  раз в серии из  $M_1$  испытаний. Следовательно, можно записать

$$P(A_2/A_1) = m_{G'}(A_2) = \frac{M_2}{M_1} = \frac{M_2}{N} \frac{N}{M_1} = \frac{m_G(A_1A_2)}{m_G(A_1)} = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)},$$

где  $m_G(A_1A_2) = M_2/N$  — относительная частота события  $A_1A_2$ ,  $m_G(A_1) = M_1/N$  — относительная частота события  $A_1$  в исходном эксперименте  $G$ , а  $m_{G'}(A_2) = M_2/M_1$  — относительная частота события  $A_2$  в эксперименте  $G'$ .

Проиллюстрируем значения условной вероятности для уже рассмотренного примера передачи кодовых слов. Пусть в эксперименте, представленном в табл. 1.2, рассматриваются безусловные события  $B_1$  и  $B_2$ , а также условное событие  $B_1/B_2$ , состоящее в том, что механизм контроля чётно-

сти обнаружил искажения в передаваемых символах, при условии, что такие искажения произошли только в одном кодовом слове. Поскольку элементарные исходы, составляющие события  $B_1$  и  $B_2$ , являются несовместными, вероятности этих событий, а также вероятность совместного события  $B_1B_2$  равна сумме вероятностей соответствующих элементарных исходов:

$$P(B_1) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8) + P(9) + P(10);$$

$$P(B_2) = P(4) + P(5);$$

$$P(B_1B_2) = P(4).$$

Тогда

$$P(B_1 / B_2) = \frac{P(B_1B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(4)}{P(4) + P(5)}.$$

Из физических соображений положим, что все элементарные исходы рассматриваемого эксперимента равновозможны и, следовательно, их вероятности равны  $1/10$ . В таком случае

$$P(B_1) = 6/10; P(B_2) = 2/10; P(B_1B_2) = 1/10; P(B_1 / B_2) = 1/2.$$

Теперь, опираясь на понятие условной вероятности, приведём формулы сложения и произведения вероятностей, а также формулу вычисления полной вероятности.

*Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что произошло первое:*

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2 / A_1) = P(A_2) P(A_1 / A_2). \quad (1.1.6)$$

Отсюда следует, что вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2) = P(A_2) P(A_1).$$

Обобщением (1.1.6) является формула для вычисления вероятности произведения нескольких событий:

$$P(A_1 \dots A_K) = P(A_1) P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 A_2) \dots P(A_K / A_1 A_2 \dots A_{K-1}). \quad (1.1.7)$$

*Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их произведения:*

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2). \quad (1.1.8)$$

Для вычисления вероятности суммы нескольких событий используется следующая общая формула:

$$\begin{aligned}
P(A_1 + A_2 + \dots + A_K) &= \sum_{i=1}^K P(A_i) - \sum_{j>i} P(A_i A_j) + \dots \\
&+ \sum_{k>j>i} P(A_i A_j A_k) - \sum_{l>k>j>i} P(A_i A_j A_k A_l) + \dots \dots
\end{aligned}
\tag{1.1.9}$$

В частности, для трёх событий

$$\begin{aligned}
P(A_1 + A_2 + A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - \\
&- P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3).
\end{aligned}$$

Если рассматриваемые события  $A_1 \dots A_K$  таковы, что каждые два из них несовместны, то получаем совокупность независимых событий, для которых вероятность суммы событий равна сумме вероятностей

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_K) = \sum_{i=1}^K P(A_i).
\tag{1.1.10}$$

Рассмотрим полную группу попарно несовместных событий  $B_1 \dots B_K$  и вероятностно связанное с этой группой некоторое событие  $A$ , т. е. событие  $A$  может наступить только совместно с одним из событий  $B_1 \dots B_K$ , что отражается совокупностью условных вероятностей  $P(A / B_1) \dots P(A / B_K)$ . Тогда при известных вероятностях  $P(B_1) \dots P(B_K)$  безусловная вероятность события  $A$  рассчитывается на основании *формулы полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{k=1}^K P(A / B_k) P(B_k).
\tag{1.1.11}$$

Предположим, что до проведения эксперимента наблюдателю по каким-либо причинам известны безусловные вероятности  $P(B_1) \dots P(B_K)$  — их в этой связи называют *априорными* (от лат. *a priori* — из предшествующего) — и условные вероятности  $P(A / B_1) \dots P(A / B_K)$ . Теперь, если при проведении эксперимента произошло событие  $A$ , то правомерно поставить вопрос: чему равна условная вероятность  $P(B_k / A)$  события  $B_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) при условии, что наступило событие  $A$ ? В подобных задачах события  $B_1 \dots B_K$  обычно называют *гипотезами*, а условные вероятности  $P(A / B_1) \dots P(A / B_K)$  — *апостериорными вероятностями гипотез* (от лат. *a posteriori* — из последующего).

Из формулы умножения вероятностей (1.1.6) следует, что

$$P(B_k / A) = \frac{P(A / B_k) P(B_k)}{P(A)},$$

тогда, используя формулу (1.1.11) полной вероятности, имеем

$$P(B_k / A) = \frac{P(A / B_k)P(B_k)}{\sum_{k=1}^K P(A / B_k)P(B_k)}, k = 1, \dots, K. \quad (1.1.12)$$

Выражение (1.1.12) известно как *формула Байеса*, её часто называют *формулой обратной вероятности*.

Приведённые выше соотношения позволяют выполнять расчёты характеристик надёжности различных технических схем. Напомним, что под *надёжностью* понимают свойство устройства (системы) сохранять значения установленных параметров функционирования в определённых пределах, соответствующих заданным режимам и условиям использования, технического обслуживания, хранения и транспортировки. Количественно надёжность какого-либо изделия, могущего находиться в одном из двух возможных состояний: работоспособном и отказном, характеризуется набором показателей, среди которых одним из главных является *вероятность безотказной работы за определённый временной промежуток*.

Рассмотрим вычисление вероятности безотказной работы для типичных технических схем (рис. 1.1).

При объединении элементов в какие-либо схемы различают *последовательное* (рис. 1.1, а), *параллельное* (рис. 1.1, б) и *смешанное* (рис. 1.1, в) соединения. Соединение называется последовательным, если отказ схемы происходит при отказе любого из составляющих её элемента. Соединение называется параллельным, если отказ схемы происходит только при отказе всех входящих в неё элементов. Смешанное соединение представляет собой различные комбинации последовательного и параллельного соединений.

Будем считать, что отказы различных элементов схемы происходят независимо, что обосновано из физических соображений. Тогда, если  $p_1, p_2, \dots, p_K$  — вероятности безотказной работы отдельных элементов, то вероятность  $p_{\text{пос}}$  безотказной работы последовательной схемы, очевидно, равна

$$p_{\text{пос}} = \prod_{k=1}^K p_k. \quad (1.1.13)$$

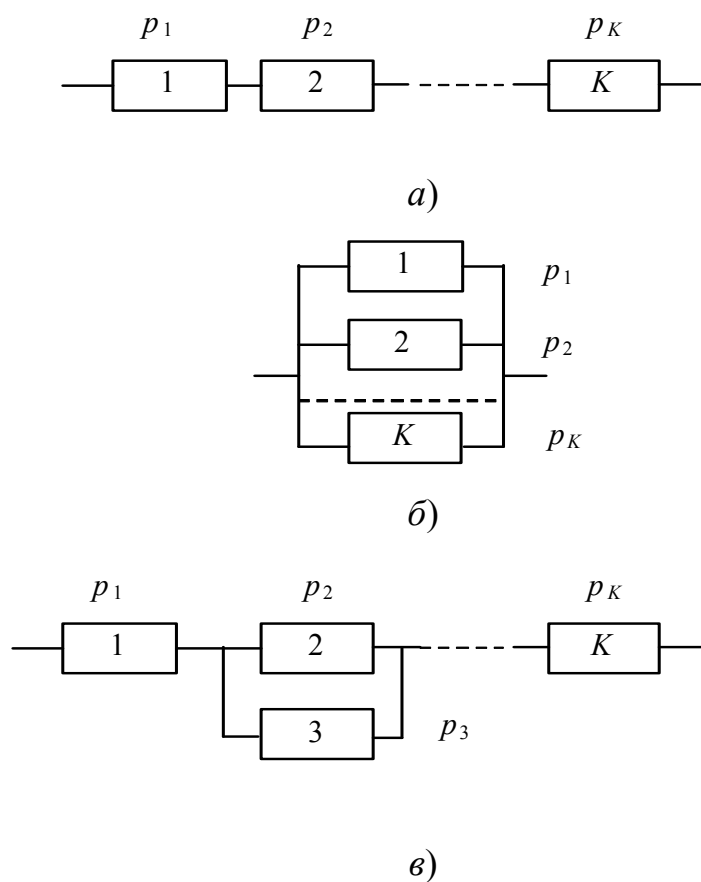


Рис. 1.1. Последовательное (а), параллельное (б) и смешанное (в) соединения элементов в схеме

Из (1.1.13) видно, что вероятность безотказной работы последовательной схемы всегда меньше (поскольку все  $p_k < 1$ ), чем вероятность отказа самого ненадёжного элемента, причём  $p_{\text{пос}}$  уменьшается при увеличении числа элементов в схеме.

Обратимся к параллельной схеме. Пусть  $A_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) — событие, состоящее в отказе  $k$ -го элемента, его вероятность равна  $1 - p_k$ . По определению, отказ параллельной схемы — событие  $A$  — происходит только при отказе всех её элементов:  $A = A_1 A_2 \dots A_K$ , и

$$P(A) = \prod_{k=1}^K (1 - p_k).$$

Безотказная работа есть событие, противоположное отказу, следовательно, вероятность  $p_{\text{пар}}$  безотказной работы параллельной схемы равна



$$p_{\text{пар}} = 1 - P(A) = 1 - \prod_{k=1}^K (1 - p_k). \quad (1.1.14)$$

Видно, что при увеличении числа параллельно соединённых элементов вероятность безотказной работы схемы возрастает, причём она превышает вероятность безотказной работы любого элемента, в том числе, самого надёжного.

На основании соотношений (1.1.13) и (1.1.14) можно рассчитывать вероятность безотказной работы для различных вариантов смешанных схем. Например, рассмотрим схему, представленную на рис. 1.2, в которой все ключи замыкаются независимо друг от друга, и вероятности безотказного замыкания ключей одинаковы и равны  $p_0$ .

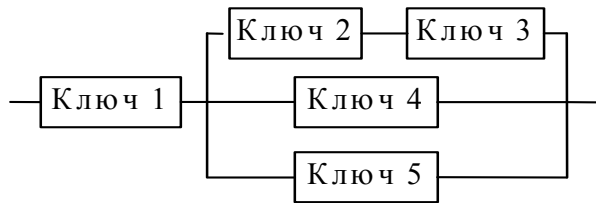


Рис. 1.2. Пример смешанного соединения элементов в схеме

Представленную на рис. 1.2 схему можно трактовать как последовательное соединение двух подсхем: первая подсхема — ключ 1; вторая подсхема — ключи 2, 3, 4 и 5. В свою очередь, последовательно соединённые ключи 2 и 3 образуют с ключами 4 и 5 параллельное соединение. Тогда имеем вероятности безотказной работы первой подсхемы  $p_0$  и второй подсхемы

$$1 - (1 - p_0)^2 (1 - p_0^2).$$

Отсюда вероятность  $p$  безотказной работы всей схемы равна

$$p = p_0 \left[ 1 - (1 - p_0)^2 (1 - p_0^2) \right].$$

В заключение данного раздела отметим, что следует различать понятия *попарной независимости* и *независимости в совокупности*.

Пусть имеется набор событий  $A_1 \dots A_K$ . Попарная независимость (не путать с попарной несовместностью) означает, что для любой пары  $A_i, A_j$  из этого набора справедливо соотношение

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

в то время как независимость в совокупности предполагает факторизацию совместных вероятностей для любых комбинаций событий, т. е. когда для любых  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$  выполняется равенство

$$P\left(\bigcap_{k=1}^r A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^r P(A_{i_k}),$$

где  $r = 2, 3, \dots, n$ .

Попарной независимости событий, вообще говоря, оказывается недостаточно для того, чтобы такие события оказались независимы в совокупности. Это показывают следующие примеры.

### Пример Бернштейна

На плоскость случайным образом бросается тетраэдр (правильный четырёхгранник), три грани которого покрашены в красный, синий и зелёный цвета, а на четвёртую грань произвольным образом нанесены все три цвета. Пусть событие  $A_1$  означает, что при бросании выпал красный цвет (с учётом разноцветной грани!), событие  $A_2$  — синий цвет, событие  $A_3$  — зелёный цвет. Поскольку каждый из трёх цветов содержится на двух гранях, очевидно,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Найдём вероятности пересечения любой пары введённых событий. Например, событие  $A_1 A_2$  заключается в том, что на выпавшей грани одновременно присутствуют красный и синий цвета. Легко видеть, что

$$P(A_1 A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2);$$

$$P(A_1 A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3);$$

$$P(A_2 A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3),$$

т. е. налицо попарная независимость событий. Однако если теперь рассмотреть единственно возможное произведение трёх событий, то, как не трудно видеть,

$$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

### Случайный выбор точки из единичного квадрата

Пусть  $(\xi_1, \xi_2)$  — координаты точки, случайным образом выбираемой из квадрата с единичной стороной (рис. 1.3).

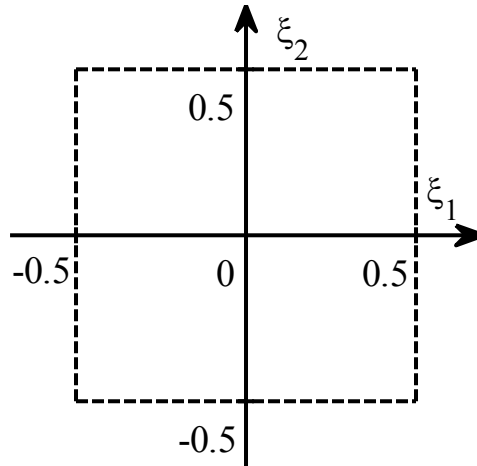


Рис. 1.3. Случайный выбор точки из единичного квадрата

Рассмотрим следующие события:

$$A_1 = \{\xi_1 \leq 0\}; \quad A_2 = \{\xi_2 \leq 0\}; \quad A_3 = \{\xi_1 \xi_2 \leq 0\}.$$

В данном случае, исходя из геометрических вероятностей, имеем:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}.$$

Далее, имеет место попарная независимость событий, так что

$$P(A_1 A_2) = P(A_2 A_3) = P(A_1 A_3) = \frac{1}{4}.$$

Однако, очевидно, что

$$P(A_1 A_2 A_3) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

т. е. говорить о независимости в совокупности не приходится.

## 1.2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Как уже было сказано, первичным понятием в теории вероятностей является эксперимент и порождаемое этим экспериментом множество элементарных исходов  $\Omega$ . Однако на практике, как правило, невозможно

обеспечить анализ случайных событий, отталкиваясь от самого начала, т. е. от построения подмножеств из множества  $\Omega$ , и приходится выстраивать дополнительное отображение, переводящее объекты вероятностного пространства в физически наблюдаемые значения. Другими словами, с практической точки зрения больший интерес представляют не сами случайные события, а их проявления в виде значений связанных с ними некоторых объектов, называемых *случайными величинами*.

Напомним, что элементарные исходы сами по себе не обязательно являются числовыми объектами: при бросании монета выпадает определённой стороной; игральный кубик — определённой гранью; при передаче кодовых слов искажаются логические символы и т.д. С математической и технической точек зрения представляется целесообразным связать со случайными событиями некоторую числовую функцию. Например, выпадающим сторонам монеты поставить в соответствие два различных числа (0 и 1); выпадающей грани кубика — число, соответствующее количеству “точек” или квадрат этого числа. Такая функция и называется случайной величиной. В зависимости от того, является ли пространство элементарных исходов конечным (счётным) или несчётным, случайная величина окажется дискретной или непрерывной. Кроме того, возможны ситуации, при которых возникают смешанные дискретно-непрерывные случайные величины.

Подчеркнём, что случайная величина — это числовая функция, отображающая объекты вероятностного пространства в область вещественных чисел (а в более общем случае — и в комплексную область). В теории вероятностей и её приложениях принято обозначать случайные величины символами греческого алфавита, а значения случайных величин — по возможности, соответствующими символами латинского алфавита. Так, значения случайных величин  $\xi(\omega)$ ,  $\eta(\omega)$ ,  $\zeta(\omega)$ , заданных для элементарных исходов  $\omega$ , обозначаются соответственно  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . В дальнейших записях случайных величин будем опускать зависимость от  $\omega$ , предполагая по умолчанию наличие какого-то вероятностного пространства.

Для полного описания случайной величины необходимо указать возможные значения, принимаемые случайной величиной, и вероятности таких значений. Соотношение, устанавливающее в той или иной форме зависимость между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется *законом распределения случайной величины*. В

наиболее универсальной форме закон распределения задаётся (интегральной) функцией распределения.

### 1.2.1. Интегральная функция распределения и плотность вероятности

Пусть  $x$  — произвольное число из множества возможных значений случайной величины (в общем случае — всей числовой оси). *Функцией распределения  $F_\xi(x)$  случайной величины  $\xi$  называется вероятность события, состоящего в том, что  $\xi$  окажется меньше<sup>1</sup>  $x$ :*

$$F_\xi(x) = P(\xi(\omega) < x).$$

Для иллюстрации нахождения функции распределения рассмотрим несколько классических примеров.

#### Бросание правильной монеты

В эксперименте по бросанию правильной монеты, т. е. монеты, выпадение сторон которой равновероятно, поставим в соответствие выпадающим сторонам числа  $-1$  и  $+1$ . Следовательно, задана дискретная случайная величина  $\xi$ , равновероятно принимающая значения  $x_1 = -1$  и  $x_2 = +1$ . Построим для такой случайной величины функцию распределения.

Очевидно, что, если рассматривать диапазон значений  $x < -1$ , то вероятность того, что  $\xi$  примет какое-нибудь возможное значение, равна нулю, и функция распределения  $F_\xi(x)$  на этом интервале имеет ненулевое значение (рис. 1.4).

Точка  $x = -1$  соответствует одному из двух возможных значений  $\xi$ , вероятность которого равна  $1/2$ , и этот факт отражается скачкообразным увеличением значения  $F_\xi(x)$  на величину  $1/2$ .

В диапазоне  $-1 < x < 1$  по-прежнему возможно лишь одно значение  $\xi$ , следовательно, функция распределения продолжает оставаться постоянной и равной  $1/2$ .

Точка  $x = 1$  соответствует появлению второго возможного значения случайной величины  $\xi$ , т. е. в этой точке возможны с вероятностью  $1/2$  и

---

<sup>1</sup> Некоторые авторы определяют интегральную функцию распределения через нестрогое неравенство:  $F_\xi(x) = P(\xi(\omega) \leq x)$ . Для непрерывных случайных величин это ни на что не влияет; для дискретных — влияет на свойство непрерывности слева. С физической точки зрения выбор знака неравенства несущественен.

значение  $x_1 = -1$ , и значение  $x_2 = 1$ . В силу независимости связанных с этими значениями элементарных исходов эксперимента, вероятности этих событий складываются, и значение функции распределения скачкообразно оказывается равным 1.

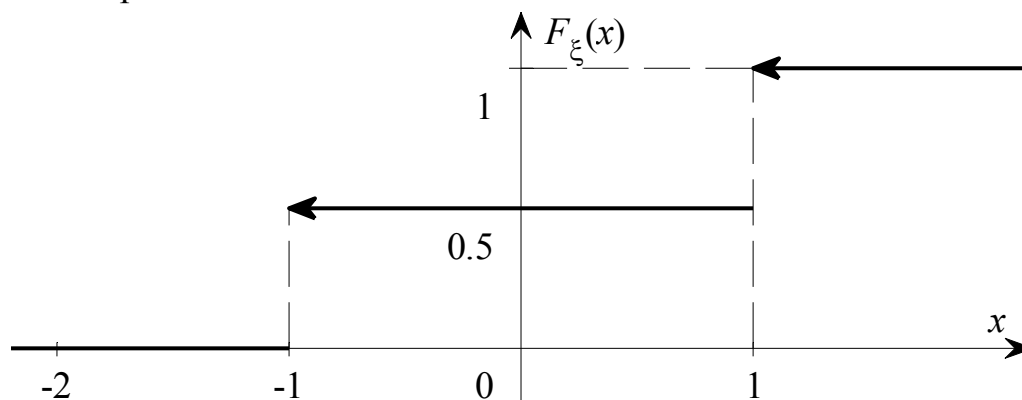


Рис. 1.4. Функция распределения для дискретной случайной величины, связанной с бросанием правильной монеты

Оставшийся диапазон  $x > 1$  не содержит каких-либо изменений возможных значений  $\xi$ , и, поэтому, функция распределения остаётся постоянной и равной 1 во всех точках этого диапазона.

Итак, функция распределения рассматриваемой случайной величины  $\xi$  равна

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ 1/2, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Представленный на рис. 1.4 вид  $F_{\xi}(x)$  отражает общие свойства интегральной функции распределения.

- Функция распределения определена на всей вещественной оси и является монотонно неубывающей функцией, т. е. если  $x_1 < x_2$ , то  $F_{\xi}(x_1) \leq F_{\xi}(x_2)$ .

- При  $x \rightarrow -\infty$  функция распределения стремится к нулю, а при  $x \rightarrow \infty$  — к единице.

- Функция распределения непрерывна слева. При наличии скачков этот факт обычно отражается посредством стрелок, идущих справа налево к месту разрыва. Однако в дальнейшем для упрощения вида графиков такие стрелки, как правило, будут опускаться. Из-за непрерывности  $F_{\xi}(x)$

слева приращения значений в точках разрыва следует относить к соседнему правому интервалу.

• Вероятность того, что случайная величина окажется внутри некоторого промежутка  $[a; b)$  равна разности значений функции распределения на концах этого промежутка:

$$P(\xi \in [a; b)) = F_\xi(b) - F_\xi(a). \quad (1.2.1)$$

### Бросание правильного игрального кубика

В эксперименте с двукратным бросанием игрального кубика каждой выпавшей грани поставим в соответствие число, отражающее количество точек на грани (от 1 до 6), и зададим случайную величину  $\xi = \max(i, j)$ ,  $i, j = 1, \dots, 6$ .

Легко видеть, что здесь  $\xi$  — дискретная величина, принимающая значения от 1 до 6 с вероятностями

$$P(\xi = i) = \frac{2i - 1}{36}.$$

Функция распределения такой случайной величины равна

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 1/36, & 1 < x \leq 2; \\ 4/36, & 2 < x \leq 3; \\ 9/36, & 3 < x \leq 4; \\ 16/36, & 4 < x \leq 5; \\ 25/36, & 5 < x \leq 6; \\ 1, & x > 6, \end{cases}$$

и её вид представлен на рис. 1.5.

Если ввести “функцию единичного скачка”,  $e(x)$  определяемую как

$$e(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

то интегральную функцию распределения любой дискретной случайной величины, принимающей  $m$  значений  $x_1, \dots, x_m$  с соответствующими вероятностями  $p_1, \dots, p_m$ , можно записать в виде

$$F_\xi(x) = \sum_{k=1}^m p_k e(x - x_k). \quad (1.2.2)$$

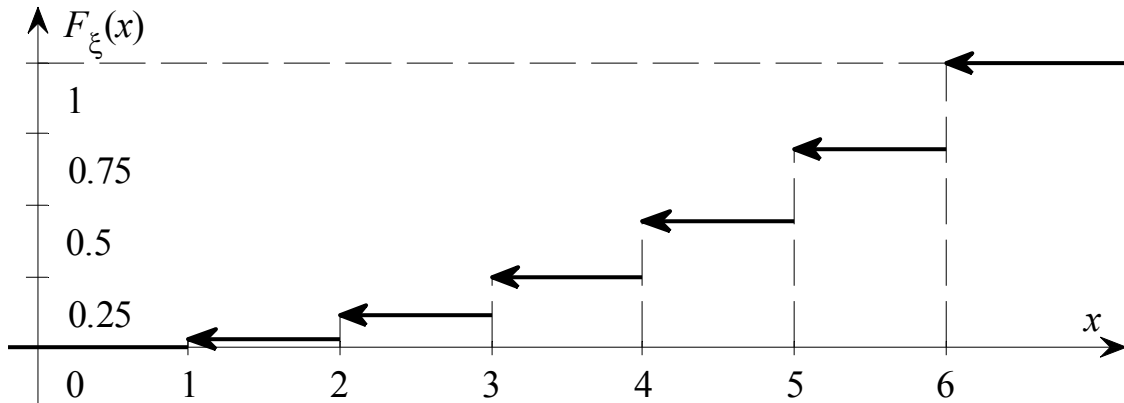


Рис. 1.5. Функция распределения для дискретной случайной величины, связанной с двукратным бросанием игрального кубика

Обратимся к примерам нахождения функции распределения для непрерывной случайной величины.

### Выбор точки из непрерывного интервала

Пусть  $\xi$  — координата точки, случайно и равновероятно выбираемой из отрезка  $[0; 1]$ . В данном случае вероятности событий определяются из геометрических соображений согласно (1.1.3). При этом мера  $\mu(G)$  “благоприятной” области представляет собой длину  $x$  отрезка, образованного от нуля выпавшей точкой, а мера  $\mu(\Omega)$  всего пространства элементарных исходов есть длина всего отрезка  $[0; 1]$ , т. е. единица.

При вычислении  $F_\xi(x)$  рассуждения аналогичны тем, что были приведены в дискретном случае.

В диапазоне  $x < 0$  отсутствуют исходы, дающие ненулевые вероятности появления точек с координатами из отрезка  $[0; 1]$ , следовательно, значение  $F_\xi(x)$  на этом диапазоне равно 0.

При каждом значении  $0 \leq x \leq 1$  функция распределения представляет собой просто длину  $x$  образуемого отрезка:  $F_\xi(x) = x$ .

Наконец, при  $x > 1$  координаты всех выпадаемых на отрезке  $[0; 1]$  точек заведомо окажутся меньше  $x$ , т. е. функция распределения имеет единичное значение. Таким образом, имеем (рис. 1.6):

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



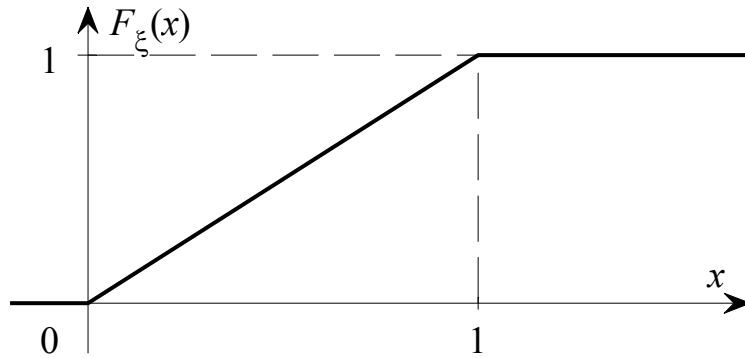


Рис. 1.6. Функция распределения для непрерывной случайной величины, связанной с выбором точки из отрезка

### Выбор точки из квадрата

Обобщим рассмотренный выше эксперимент на двумерный случай, т. е. будем рассматривать случайный выбор точки из плоского квадрата с единичной стороной (рис. 1.7, *a*).

Пусть  $u$  и  $v$  — координаты выпавшей точки, и рассмотрим случайную величину  $\xi = u + v$ . Значение функции распределения определяется площадью фигуры, образованной сторонами квадрата и линией

$$u + v = x,$$

отсекающей на координатных осях одинаковые отрезки, длиной  $x$ .

По-прежнему,  $F_\xi(x) = 0$  при  $x < 0$ .

При  $0 \leq x \leq 1$  образуется равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна  $x^2/2$ .

При  $1 < x \leq 2$  образуется фигура, площадь которой, как легко видеть, равна

$$1 - \frac{1}{2}(2 - x)^2.$$

При  $x > 2$  все выбираемые из квадрата точки оказываются ниже линии  $u + v = x$ , и, поэтому, функция распределения равна 1. Итак:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1 - \frac{1}{2}(2 - x)^2, & 1 \leq x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

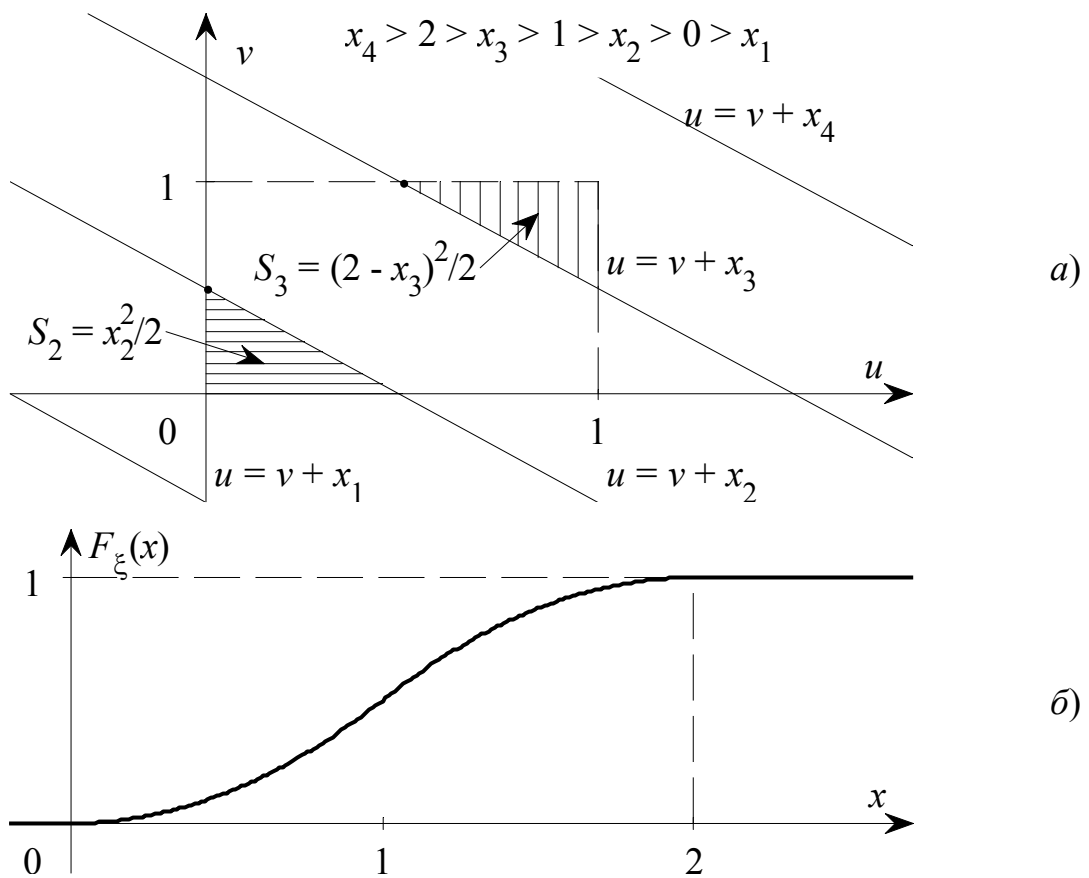


Рис. 1.7. Случайный выбор точки из квадрата (а) и связанная с этим экспериментом функция распределения (б)

Несмотря на то, что интегральная функция распределения является наиболее универсальной характеристикой, описывающей закон распределения случайной величины, на практике часто предпочитают оперировать с другой характеристикой, называемой *плотностью распределения вероятности значений случайной величины*, или, короче, плотностью распределения.

Наиболее естественно плотность распределения  $w_\xi(x)$  возникает для непрерывных случайных величин и определяется как производная от интегральной функции распределения:

$$w_\xi(x) \equiv \frac{dF_\xi(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_\xi(x + \Delta x) - F_\xi(x)}{\Delta x}. \quad (1.2.3)$$

Термин “плотность распределения” становится понятным при рассмотрении вероятности появления значений непрерывной случайной величины в достаточно узких границах от  $x$  до  $x + \Delta x$ , когда можно записать

$$w_{\xi}(x) \approx \frac{F_{\xi}(x + \Delta x) - F_{\xi}(x)}{\Delta x}$$

или, учитывая (1.2.1),

$$w_{\xi}(x) \approx \frac{P(x \leq \xi < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Видно, что  $w_{\xi}(x)$  представляет собой отношение вероятности нахождения значения случайной величины внутри достаточно узкого интервала к длине этого интервала, т. е. вероятность в единичном интервале, или плотность вероятности.

Плотность  $w_{\xi}(x)$  как производная монотонно неубывающей функции является неотрицательной функцией:

$$w_{\xi}(x) \geq 0. \quad (1.2.4)$$

Интегрируя обе части (1.2.3) в пределах от  $-\infty$  до произвольного  $x$ , получаем формулу, выражающую интегральную функцию распределения через плотность:

$$F_{\xi}(x) \equiv P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x w_{\xi}(y) dy. \quad (1.2.5)$$

В частности, при  $x = +\infty$  получаем *условие нормировки плотности распределения*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}(x) dx = 1. \quad (1.2.6)$$

На основании (1.2.1) и (1.2.5) вероятность нахождения непрерывной случайной величины в интервале  $[a: b)$  вычисляется как

$$P(a \leq \xi < b) = \int_a^b w_{\xi}(x) dx. \quad (1.2.7)$$

Отметим, что условия (1.2.4) и (1.2.6) необходимы и достаточны для того, чтобы удовлетворяющая этим условиям произвольная функция могла быть плотностью распределения непрерывной случайной величины.

Зависимость  $w_{\xi}(x)$  может быть финитной или простирается в бесконечность (в одну или обе стороны), иметь один или несколько локальных максимумов. Значения  $x = x_{\max}$ , при которых достигается максимум, называются *модами*, поэтому распределения с несколькими максимумами часто

называют *полимодалными* (рис. 1.8, *а*) в противоположность *унимодалным* (рис. 1.8, *б*) распределениям с одним максимумом.

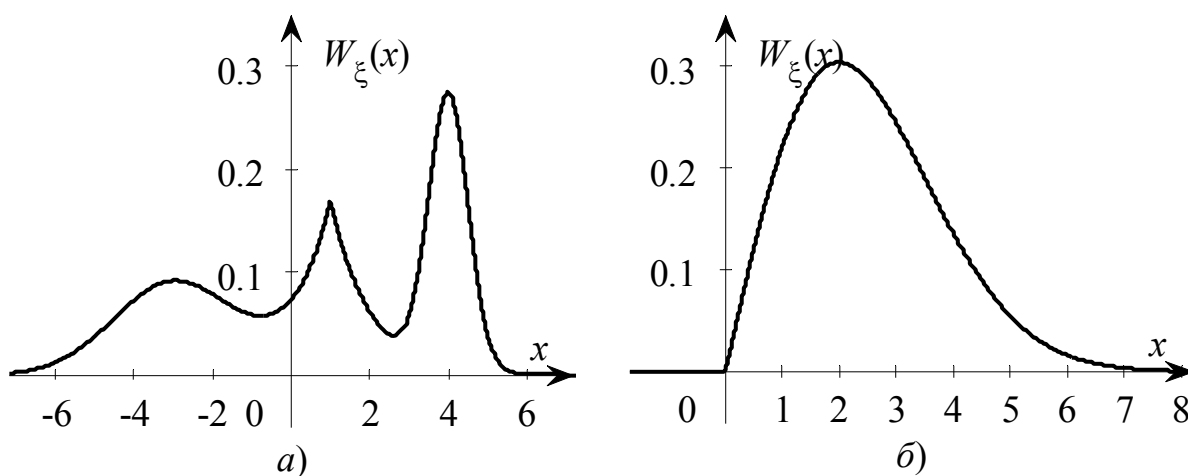


Рис. 1.8. Полимодалная (*а*) и унимодалная (*б*) плотности распределений

Точка на оси абсцисс, которая разделяет плотность вероятности на две части с одинаковой вероятностью, т. е. с одинаковыми площадями, называется *медианой* распределения.

Часто используемыми характеристиками распределения являются *квантили*.  $q$ -квантилью (квантилью, соответствующей вероятности, равной  $q$ ) называется такое значение  $x = x_q$ , при котором  $F_\xi(x_q) = q$ . Таким образом, при известном распределении  $w_\xi(x)$   $q$ -квантиль находится из интегрального соотношения

$$\int_{-\infty}^{x_q} w_\xi(x) dx = q. \quad (1.2.8)$$

Отсюда следует, что медиана является 0,5-квантилью.

Введение понятия плотности распределения для дискретной или смешанной случайной величины связано с некоторыми условностями, поскольку ступенчатая функция распределения недифференцируема и, строго говоря, понятие производной для неё лишено смысла. Выходом из создавшегося положения может служить привлечение дельта функции.

Напомним, что дельта-функция<sup>1</sup>  $\delta(x)$  является *обобщённой функцией*, возникающей как предельный элемент дельтаобразующей последовательности  $\{\delta(x, \sigma)\}$ :

<sup>1</sup> Дельта-функцию часто связывают с именем П. Дирака.

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \{ \delta(x, \sigma) \},$$

где  $\sigma$  — параметр (возможно, векторный), по которому осуществляется предельный переход.

Основные формальные свойства, определяющие дельта-функцию, состоят в следующем. Дельта-функция  $\delta(x - x_0)$  для любого вещественного  $x_0$  равна нулю при  $x \neq x_0$  и неограничена при  $x = x_0$ :

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0, \\ \infty, & x = x_0. \end{cases}$$

Интеграл от этой функции по промежутку  $[a; b]$ , содержащему значение  $x_0$ , конечен и равен единице:

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = 1.$$

Таким образом, дельта-функция описывает импульс, имеющий бесконечно малую продолжительность, бесконечно большую амплитуду и площадь, равную единице.

Кроме основных свойств дельта-функции часто придают дополнительные свойства, проистекающие из физических соображений: чётность  $\delta(x) = \delta(-x)$  и единичная средняя мощность

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \int_{-c/2}^{c/2} \delta^2(x) dx = 1.$$

Далее приведён ряд наиболее часто используемых дельтаобразующих последовательностей.

Последовательность прямоугольных импульсов единичной площади:

$$\delta(x, \tau) = \begin{cases} 1/\tau, & |x| \leq \tau/2; \\ 0, & |x| > \tau/2; \end{cases} \text{ при } \tau \rightarrow 0.$$

Последовательность гауссовских импульсов:

$$\delta(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \text{ при } \sigma \rightarrow 0.$$

Последовательность функций вида  $\sin(x)/x$ :

$$\delta(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\pi x} \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Последовательность колоколообразных импульсов:

$$\delta(x, \lambda) = \frac{1}{\pi\lambda} \frac{1}{1 + (x/\lambda)^2} \text{ при } \lambda \rightarrow 0.$$

Производные от дельта-функции определяются как пределы соответствующих производных от дельта-образующих последовательностей. Так например, используя преобразование Фурье последовательности гауссовских импульсов, можно записать следующее выражение для  $m$ -й производной дельта-функции:

$$\delta^{(m)}(x) = \frac{(-jx)^m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-jtx) dt, \quad m = 0, 1, \dots$$

При этом выполняется “фильтрующее” свойство дельта-функции и её производных:

$$\int_a^b g(x) \delta^{(m)}(x - x_0) dx = (-1)^m g^{(m)}(x_0).$$

Использование дельта-функции позволяет обосновать операции дифференцирования разрывных функций. В частности, дельта-функцию можно трактовать как производную от функции  $e(x)$  единичного скачка:

$$\delta(x) = \frac{de(x)}{dx}.$$

Тем самым, плотность вероятности дискретной величины, принимающей  $m$  значений  $x_1, \dots, x_m$  с соответствующими вероятностями  $p_1, \dots, p_m$ , по аналогии с (1.2.2) может быть записана в виде

$$w_{\xi}(x) = \sum_{k=1}^m p_k \delta(x - x_k). \quad (1.2.9)$$

Отметим, что плотность вероятности неслучайной (детерминированной) величины, принимающей с единичной вероятностью одно единственное значение  $x = c$ , равна

$$w_{\xi}(x) = \delta(x - c).$$

Условие нормировки для дискретной случайной величины, определяемой набором вероятностей  $p_1, \dots, p_m$ , записывается в виде суммы:

$$\sum_{k=1}^m p_k = 1. \quad (1.2.10)$$

Графически плотности распределения дискретных случайных величин изображаются в виде набора вертикальных отрезков, высоты которых пропорциональны вероятностям соответствующих значений (рис. 1.9).

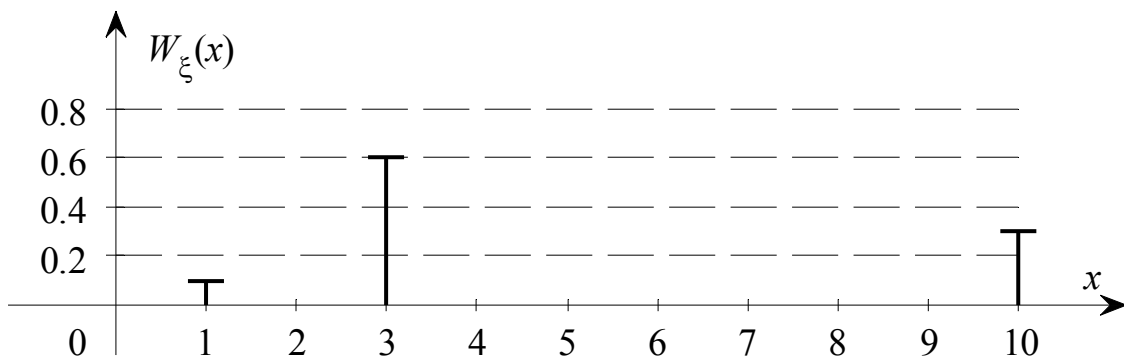


Рис. 1.9. Плотность вероятности дискретной случайной величины

Как уже было сказано, возможны случаи, при которых случайная величина содержит как непрерывную, так и дискретную составляющие:

$$w_{\xi}(x) = a_1 w(x) + a_2 \sum_{k=1}^L p_k \delta(x - x_k), \quad (1.2.11)$$

где неотрицательные весовые множители  $a_1$  и  $a_2$  в сумме составляют единицу:

$$a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_1 + a_2 = 1.$$

На рис. 1.10 показан типичный вид плотности вероятности и функции распределения смешанной случайной величины

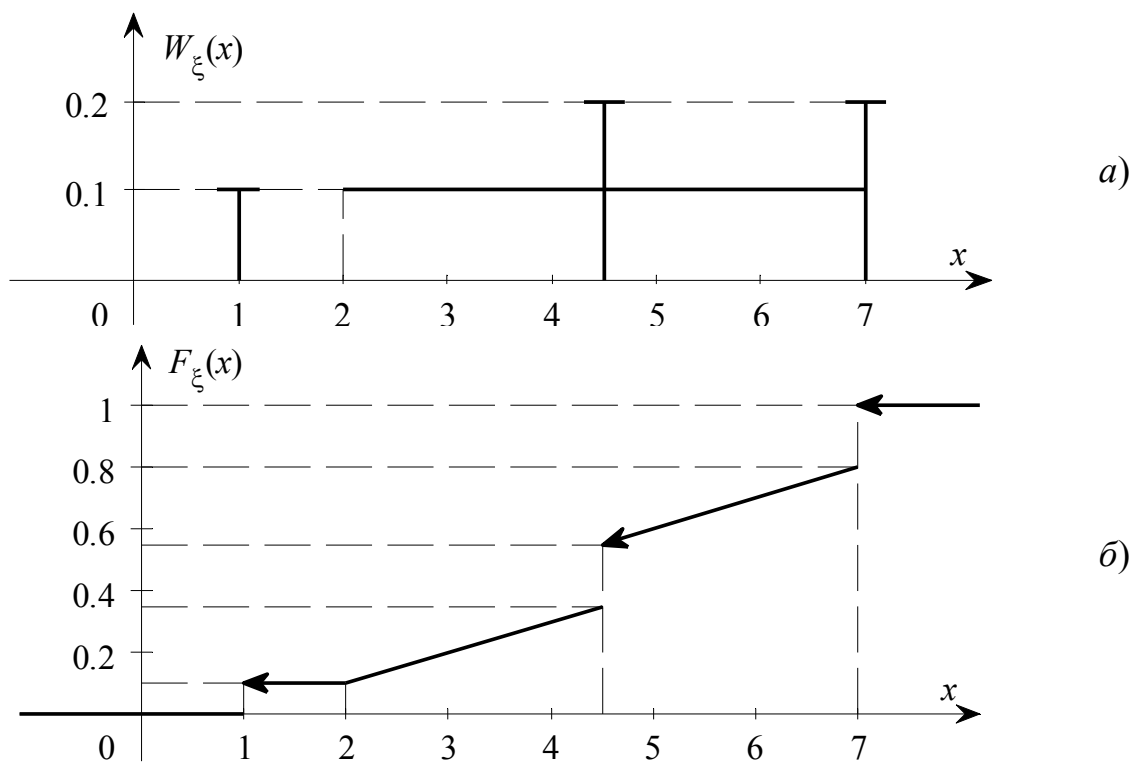


Рис. 1.10. Плотность вероятности (а) и функция распределения (б) смешанной случайной величины

Ниже в табл. 1.4 и 1.5 представлены распределения и некоторые характеристики наиболее употребимых дискретных и непрерывных случайных величин.

Таблица 1.4

**Распределения и характеристики дискретных случайных величин**

Закон распределения	Вероятности и значения	Моменты распределения
Равновероятный	$x_k = a + \Delta(k - 1),$ $\Delta = (b - a) / (m - 1),$ $p_k = 1 / m, k = 1, 2, \dots, m$	$\mathbf{E}[\xi] = (a + b) / 2,$ $\mathbf{D}[\xi] = (m^2 - 1) / 12,$ $m_r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b - a)(r + 1)},$ $r = 2, 3, \dots$
Биномиальный	$p_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k},$ $k = 0, 1, \dots, n; p —$ <p style="text-align: center;">вероятность элементарного исхода</p>	$\mathbf{E}[\xi] = np, \mathbf{D}[\xi] = np(p - 1),$ $\mu_{r+1} = p(1 - p) \left( nr\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp} \right),$ $r = 2, 3, \dots$
Пуассона	$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda), \lambda > 0,$ $k = 0, 1, \dots$	$\mathbf{E}[\xi] = \lambda, \mathbf{D}[\xi] = \lambda,$ $\mu_r = \lambda \sum_{k=0}^{r-2} C_{r-1}^k \mu_k, r = 2, 3, \dots,$ $\mu_0 = 1$
Геометрический	$p_k = p(1 - p)^{k-1},$ $k = 0, 1, \dots; p —$ <p style="text-align: center;">вероятность элементарного исхода</p>	$\mathbf{E}[\xi] = 1 / p, \mathbf{D}[\xi] = (1 - p) / p^2$
Гипергеометрический	$p_N(k) = \frac{C_M^k C_{L-M}^{N-k}}{C_L^N},$ $k = 0, 1, \dots, \min(L, N)$	$\mathbf{E}[\xi] = NM / L,$ $\mathbf{D}[\xi] = \frac{NM(L - M)(L - N)}{L^2(L - 1)}$



Таблица 1.5

## Распределения и характеристики непрерывных случайных величин

Закон распределения	Вероятности и значения	Моменты распределения
Равномерный	$w_{\xi}(x) = 1 / (b - a), a \leq x \leq b$	$E[\xi] = (a + b) / 2,$ $D[\xi] = (b - a)^2 / 12,$ $m_r[\xi] = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(r + 1)(b - a)},$ $r = 1, 2, \dots$
Нормальный (гауссовский)	$w_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times$ $\times \exp\left[-\frac{(x - a)^2}{2\sigma^2}\right]$	$E[\xi] = a, D[\xi] = \sigma^2,$ $\mu_{2r-1} = 0, \mu_{2r} = \frac{(2r)!}{r!} \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^r,$ $r = 1, 2, \dots$
Коши	$w_{\xi}(x) = \frac{b}{\pi(b^2 + (x - x_0)^2)},$ $b > 0$	Не существуют
Релеевский	$w_{\xi}(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$ $x \geq 0$	$E[\xi] = \sigma\sqrt{\pi/2},$ $D[\xi] = \sigma^2(2 - \pi/2)$
Арксинуса	$w_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}},  x  < c$	$E[\xi] = 0, D[\xi] = c^2 / 2$
Односторонний экспоненциальный	$w_{\xi}(x) = \lambda \exp(-\lambda x), x \geq 0$	$E[\xi] = 1 / \lambda, D[\xi] = 1 / \lambda^2,$ $m_r = r! / \lambda^r, r = 1, 2, \dots$
Лапласа (двухсторонний экспоненциальный)	$w_{\xi}(x) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda  x - \beta )$	$E[\xi] = \beta, D[\xi] = 2 / \lambda^2,$ $m_r = \sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{\beta^{r-2i} r!}{\lambda^{2i} (r - 2i)!},$ $r = 1, 2, \dots$

Окончание таблицы 1.5

Закон распределения	Вероятности и значения	Моменты распределения
Эрланга	$w_{\xi}(x) = \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \times$ $\times x^k \exp(-\lambda x), x > 0,$ $\lambda > 0, k = 0, 1, \dots$	$\mathbf{E}[\xi] = (k+1) / \lambda,$ $\mathbf{D}[\xi] = (k+1) / \lambda^2,$ $m_r = \lambda^{-r} \prod_{i=0}^{r-1} (k+i+1),$ $r = 1, 2, \dots$
Накагами	$w_{\xi}(x) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{a}\right)^m \times$ $\times x^{2m-1} \exp(-mx^2/a),$ $x \geq 0, a > 0, m \geq 1/2$	$\mathbf{E}[\xi] = \sqrt{c/m} \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m)},$ $\mathbf{D}[\xi] = c - \frac{c\Gamma^2(m+1/2)}{m\Gamma^2(m)},$ $m_r = \left(\frac{c}{m}\right)^{r/2} \frac{\Gamma(m+r/2)}{\Gamma(m)},$ $r = 1, 2, \dots$
Гамма-распределение	$w_{\xi}(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \times$ $\times x^{\alpha} \exp(-x/\beta), x > 0,$ $\alpha > -1, \beta > 0$	$\mathbf{E}[\xi] = \beta(\alpha+1),$ $\mathbf{D}[\xi] = \beta^2(\alpha+1),$ $m_{r+1} = (\alpha+r+1)\beta m_r,$ $r = 1, 2, \dots$
Бета-распределение	$w_{\xi}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times$ $\times x^{a-1} (1-x)^{b-1}, 0 < x < 1,$ $a > 0, b > 0$	$\mathbf{E}[\xi] = a(a+b),$ $\mathbf{D}[\xi] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)},$ $m_r = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+r)}$
Хи-квадрат	$w_{\xi}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \times$ $\times x^{n/2-1} \exp(-x/2), x > 0,$ $n = 1, 2, \dots$	$\mathbf{E}[\xi] = n, \mathbf{D}[\xi] = 2n,$ $m_r = n(n+2)\dots(n+2r-2),$ $r = 1, 2, \dots$

## 1.2.2. Многомерные распределения

Представленные выше соотношения касались закона распределения только одной случайной величины. На основании понятия вероятности совместных событий вводятся *совместные законы распределения случайных величин*. Так, совместная функция распределения  $F_{\xi\eta}^{(2)}(x, y)$  случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  как функция двух произвольных аргументов  $x$  и  $y$  представляет собой вероятность события, состоящего в том, что одновременно будут выполнены неравенства  $\xi < x$  и  $\eta < y$ :

$$F_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y). \quad (1.2.12)$$

В обозначении функции распределения нижний индекс показывает, к каким случайным величинам относится данный закон, а верхний индекс показывает (в скобках) количество совместно распределённых величин — в данном случае рассматривается двумерное распределение.

Если в (1.2.12) положить  $y = \infty$ , то имеем  $F_{\xi\eta}^{(2)}(x, \infty)$  — вероятность того, что  $\xi < x$  при любом значении  $\eta$ , т. е. одномерную функцию распределения  $\xi$ :

$$F_{\xi\eta}^{(2)}(x, \infty) = F_{\xi}^{(1)}(x).$$

При этом для одномерных распределений верхний индекс обычно опускают и пишут просто

$$F_{\xi\eta}^{(2)}(x, \infty) = F_{\xi}(x). \quad (1.2.13a)$$

Таким же образом

$$F_{\xi\eta}^{(2)}(\infty, y) = F_{\eta}(y). \quad (1.2.13б)$$

Из (1.2.12) также следуют свойства, аналогичные свойствам одномерных функций распределения:

$$F_{\xi\eta}^{(2)}(x, -\infty) = F_{\xi\eta}^{(2)}(-\infty, y) = 0, \quad F_{\xi\eta}^{(2)}(\infty, \infty) = 1.$$

Плотность вероятности  $w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y)$  для непрерывных случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  или, что эквивалентно, для непрерывной двумерной случайной величины  $(\xi, \eta)$  определяется как смешанная производная от функции распределения:

$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}^{(2)}(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (1.2.14)$$

Аналогично одномерному случаю, двумерная плотность вероятности  $w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y)$  представляет собой отношение вероятности нахождения значений случайных величин в элементарном квадрате к площади этого квадрата:

$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x) \approx \frac{P(x \leq \xi < x + \Delta x; y \leq \eta < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Точное нахождение вероятности того, что двумерная случайная величина  $(\xi, \eta)$  окажется внутри некоторой области  $S$  сводится, в общем случае к вычислению двумерного интеграла от совместной плотности вероятности по данной области:

$$P((\xi, \eta) \in S) = \int_S w_{\xi,\eta}^{(2)}(x, y) dx dy. \quad (1.2.15)$$

В частности, если  $S$  — прямоугольная область  $[a; b] \times [c; d]$ , то

$$P(a \leq \xi < b, c \leq \eta < d) = \int_a^b \int_c^d w_{\xi,\eta}^{(2)}(x, y) dx dy. \quad (1.2.15a)$$

Интегрирование двумерной плотности по всем значениям одной из случайных величин даёт в итоге одномерную плотность другой случайной величины.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) dy = w_{\xi}(x); \quad (1.2.16a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) dx = w_{\eta}(y). \quad (1.2.16b)$$

Такие одномерные распределения, полученные из многомерных, часто называют *маргинальными*.

### Двумерное нормальное распределение

Случайная двумерная величина  $(\xi, \eta)$  распределена нормально, если её двумерная плотность вероятности имеет следующий вид:

$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}2\pi\sqrt{1-r^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{(x-a_{\xi})^2}{\sigma_{\xi}^2} - 2r \frac{(x-a_{\xi})(y-a_{\eta})}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}} + \frac{(y-a_{\eta})^2}{\sigma_{\eta}^2} \right] \right\}. \quad (1.2.17)$$

Выражение (1.2.17) в действительности определяет многопараметрическое (содержащее 5 параметров) семейство двумерных плотностей, причём четыре параметра —  $a_\xi$ ,  $a_\eta$ ,  $\sigma_\xi$  и  $\sigma_\eta$  — определяют характеристики маргинальных одномерных распределений и лишь один —  $r$  (коэффициент корреляции, см. далее) — характеризует вероятностную зависимость случайных величин.

Согласно сказанному выше, одномерные законы распределений получаются из двумерного путём интегрирования по всем значениям “лишней” случайной величины. Поэтому имеем:

$$w_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left[-\frac{(x-a_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right]; \quad (1.2.18a)$$

$$w_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} \exp\left[-\frac{(y-a_\eta)^2}{2\sigma_\eta^2}\right]. \quad (1.2.18б)$$

Видно, что факторизация двумерного распределения, т. е. представление его в виде

$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) = w_\xi(x)w_\eta(y)$$

обеспечивается только при условии  $r = 0$ , когда величины  $\xi$  и  $\eta$  являются *некоррелированными*. Отсюда вытекает фундаментальное свойство нормальных случайных величин: для них понятия независимости и некоррелированности оказываются тождественными. Для других распределений это не так: из некоррелированности, вообще говоря, не следует независимость.

### **Двумерное равномерное распределение**

Любое равномерное распределение — и одномерное, и многомерное — описывает ситуацию, при которой равновозможны все значения из определённого диапазона. Для одномерного распределения (табл. 1.5) это означает, что плотность вероятности является константой, равной обратной длине интервала. Аналогично, плотность вероятности двумерного распределения является константой, заданной на плоскости, а её значение определяется объёмом соответствующего цилиндрического тела или прямоугольного параллелепипеда.

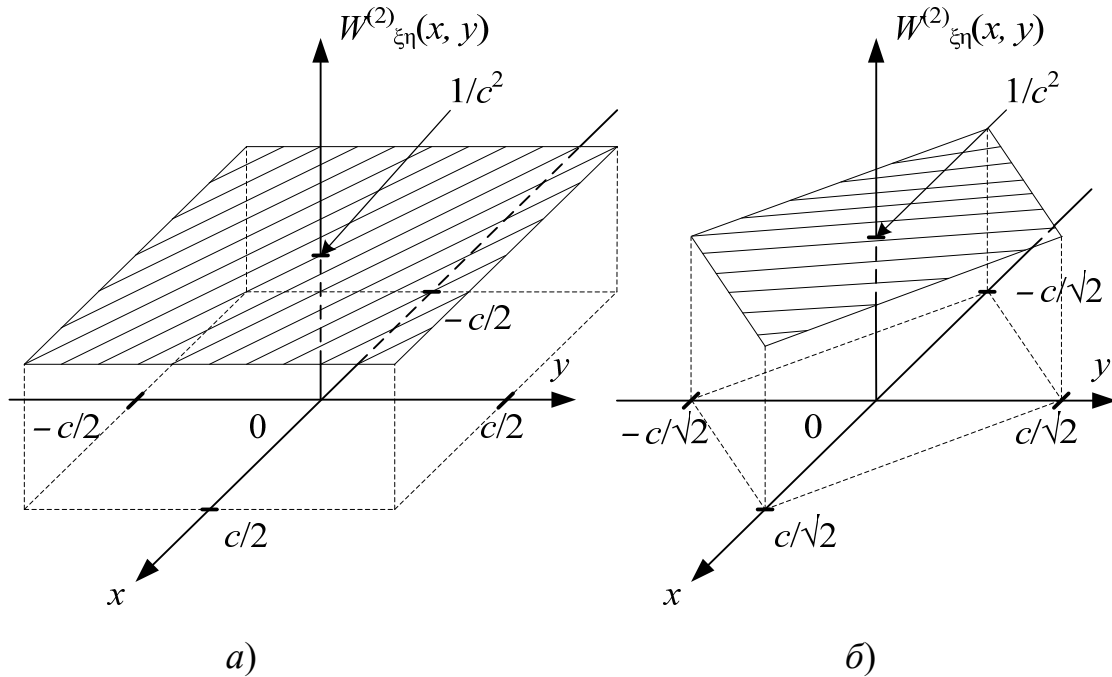


Рис. 1.11. Двумерное равномерное распределение

На рис. 1.11 представлены два варианта равномерного распределения двумерной случайной величины  $(\xi, \eta)$ , заданного на квадрате со стороной  $c$ , когда стороны квадрата параллельны координатным осям (рис. 1.11, а) и когда стороны квадрата расположены под углом  $45^\circ$  к координатным осям (рис. 1.11, б). Несмотря на то, что в обоих случаях плотность распределения имеет постоянное значение, равное  $1/c^2$ , представленные варианты распределения оказываются различными с точки зрения независимости величин  $\xi$  и  $\eta$ . Действительно, в случае параллельного расположения сторон квадрата, очевидно, имеем следующие маргинальные одномерные распределения:

$$w_\xi(x) = \int_{-c/2}^{c/2} w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) dy = 1/c, \quad x \in [-c/2; c/2];$$

$$w_\eta(y) = \int_{-c/2}^{c/2} w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) dx = 1/c, \quad y \in [-c/2; c/2],$$

т. е.

$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) = w_\xi(x)w_\eta(y),$$

и случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы.

Найдём одномерное распределение  $w_\xi(x)$  в случае “повёрнутого” квадрата (рис. 1.11, б). Имеем:

$$w_\xi(x) = \begin{cases} 1/c^2 \int_{-x-c/\sqrt{2}}^{x+c/\sqrt{2}} dy = (\sqrt{2}c + 2x)/c^2, & -c/2 \leq x < 0; \\ 1/c^2 \int_{x-c/\sqrt{2}}^{-x+c/\sqrt{2}} dy = (\sqrt{2}c - 2x)/c^2, & 0 \leq x \leq c/2, \end{cases}$$

или, объединяя оба промежутка,

$$w_\xi(x) = (\sqrt{2}c - 2|x|)/c^2, \quad -c/2 \leq x \leq c/2.$$

Аналогичным образом,

$$w_\eta(y) = (\sqrt{2}c - 2|y|)/c^2, \quad -c/2 \leq y \leq c/2.$$

Видно, что

$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) \neq w_\xi(x)w_\eta(y),$$

и случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  зависимы.

Обратимся к совместным дискретным распределениям. Пусть для дискретных величин  $\xi$  и  $\eta$ , принимающих (возможно, бесконечный) набор значений  $x_1, x_2, \dots$  и  $y_1, y_2, \dots$  соответственно, определён набор неотрицательных чисел  $\{p_{ij}\}$ , представляющих собой совместные вероятности

$$p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j), \quad (1.2.19)$$

подчиняющиеся, следовательно, условию нормировки:

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

Аналогично одномерному случаю можно условно записать совместную плотность вероятности дискретных случайных величин с помощью дельта-функций:

$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) = \sum_i \sum_j p_{ij} \delta(x - x_i) \delta(y - y_j). \quad (1.2.20)$$

Задание совместных вероятностей (1.2.19) означает задание и соответствующих маргинальных одномерных дискретных распределений, которые, аналогично непрерывному случаю, получаются путём суммирования по всем значениям одной из переменных. Часто, чтобы подчеркнуть это, вместо второй случайной величины ставят точку:

$$p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}; \quad (1.2.21a)$$

$$p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}. \quad (1.2.22б)$$

С двумерными распределениями, особенно, имеющими конечное число значений, удобно работать при помощи таблицы, представленной ниже.

$\eta \backslash \xi$	$x_1$	$x_2$	...	$x_M$	$\sum_m$
$y_1$	$p_{11}$	$p_{21}$	...	$p_{M1}$	$p_{\cdot 1}$
$y_2$	$p_{12}$	$p_{22}$	...	$p_{M2}$	$p_{\cdot 2}$
...	...	...	...	...	...
$y_N$	$p_{1N}$	$p_{2N}$	...	$p_{MN}$	$p_{\cdot N}$
$\sum_n$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	...	$p_{M\cdot}$	1

В крайнем правом столбце образуется маргинальный закон распределения случайной величины  $\eta$ , а в крайней нижней строке — закон распределения случайной величины  $\xi$ .

В разд. 1.1 было введено фундаментальное для всей теории вероятности понятие вероятностной (статистической) независимости событий. Индикатором этого является тот факт, что вероятность совместного события равна произведению вероятностей отдельных событий. Это же понятие — вероятностной независимости — переносится и на случайные величины. При этом критерием независимости случайных величин является факторизация (т. е. представление в виде произведения) многомерного закона распределения. Так, для функции распределения двух независимых случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  справедливо соотношение

$$F_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) \equiv P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y) \equiv F_{\xi}(x)F_{\eta}(y), \quad (1.2.23)$$

которое в эквивалентной форме можно записать для соответствующих плотностей (в случае непрерывных величин):



$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) = w_{\xi}(x)w_{\eta}(y) \quad (1.2.24)$$

или дискретных совместных вероятностей (в случае дискретных величин):

$$p_{ij} \equiv P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j) \equiv p_{i \cdot} p_{\cdot j}. \quad (1.2.25)$$

Представленные выше характеристики закона распределения и соотношения вероятностной независимости обобщаются на произвольную совокупность случайных величин.

Для набора случайных величин  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  определяется совместная  $n$ -мерная функция распределения

$$F_{\xi_1 \dots \xi_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) \quad (1.2.26)$$

и совместная плотность вероятности либо в виде смешанной производной  $n$ -го порядка для непрерывных величин:

$$w_{\xi_1 \dots \xi_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\xi_1 \dots \xi_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}, \quad (1.2.27)$$

либо в виде дискретных совместных вероятностей (для дискретных величин):

$$w_{\xi_1 \dots \xi_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_n} p_{i_1 \dots i_n} \delta(x_1 - x_{i_1}^{(1)}) \dots \delta(x_n - x_{i_n}^{(n)}). \quad (1.2.28)$$

В двухиндексных обозначениях типа  $x_{i_j}^{(j)}$  верхний индекс  $j$  показывает<sup>1</sup> “привязку” к случайной величине  $\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , а нижний  $i_j$  — позицию элемента в каком-либо множестве возможных значений. Запись  $p_{i_1 \dots i_n}$  обозначает совместную вероятность:

$$p_{i_1 \dots i_n} = P(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \dots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}).$$

Для упрощения записи часто переходят к векторным обозначениям, вводя  $n$ -элементный случайный вектор

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

и вектор  $\mathbf{x}$  аргументов функции распределения:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Тогда (1.2.26) можно записать в виде

$$F_{\xi}^{(n)}(\mathbf{x}) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n).$$

<sup>1</sup> Не путать с обозначением мерности многомерной функции распределения.

Из  $n$ -мерной функции распределения можно получить  $r$ -мерные ( $r = 1, \dots, n - 1$ ) маргинальные функции распределения для любого  $r$ -элементного набора  $(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_r})$  случайных величин, составленного из любой комбинации исходной  $n$ -элементной совокупности  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Для этого следует все аргументы функции распределения, номера которых не представлены среди номеров  $r$ -элементного набора, устремить к  $+\infty$ . В частности, одномерная функция распределения  $F_{\xi_j}(x_j)$  случайной величины  $\xi_j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) равна

$$F_{\xi_j}(x_j) = F_0^{(n)}(c_1, c_2, \dots, c_n),$$

где

$$c_k = \begin{cases} +\infty, & k \neq j \\ x_j, & k = j \end{cases}.$$

Данное свойство обычно называют *условием согласованности*.

### 1.2.3. Условные законы распределения

Рассмотренные в предыдущих разделах законы распределения касались безусловных вероятностей событий. Однако, как уже было сказано, для адекватного представления математическими моделями реальных физических процессов необходимо учитывать вероятностную зависимость событий, вводя в рассмотрение условные вероятности (1.1.5). Следовательно, возникает необходимость описания случайных величин условными законами распределения вида

$$F_{\xi}(x / B) = P(\xi < x / B),$$

где  $B$  – некоторое событие, вообще говоря, влияющее на вероятность выполнения неравенства  $\xi < x$ . Например, при рассмотрении двумерной случайной величины  $(\xi, \eta)$  может оказаться, что на значения случайной величины  $\eta$  наложены какие-то ограничения (они имеют заранее заданные значения), и это, в общем случае, повлияет на вероятностные свойства  $\xi$ .

Пусть задана совместная плотность вероятности  $w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y)$  двумерной непрерывной случайной величины  $(\xi, \eta)$  и, кроме того, дополнительно случайная величина  $\eta$  заключена в диапазон значений

$$y \leq \eta < y + h, \quad h > 0.$$

Для получения выражения, описывающего условную функцию распределения, используем формулу условной вероятности:

$$P(\xi < x / y \leq \eta < y + h) = \frac{P(\xi < x, y \leq \eta < y + h)}{P(y \leq \eta < y + h)}.$$

Выразим стоящие в числителе и знаменателе вероятности через двумерную плотность  $w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y)$ :

$$P(\xi < x, y \leq \eta < y + h) = \int_{-\infty}^x \int_y^{y+h} w_{\xi\eta}^{(2)}(x', y') dy' dx';$$

$$P(y \leq \eta < y + h) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_y^{y+h} w_{\xi\eta}^{(2)}(x', y') dy'.$$

При стремлении  $h$  к нулю, с одной стороны, события  $y \leq \eta \leq y + h$  и  $\eta = y$  можно считать эквивалентными, а с другой — существует такое  $y^*$  внутри интервала  $[y; y + h]$ , что

$$F_{\xi}(x / \eta = y) = \lim_{h \rightarrow 0} P(\xi < x / y \leq \eta \leq y + h) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^x dx' w_{\xi\eta}^{(2)}(x', y^*) h}{\int_{-\infty}^{\infty} dx' w_{\xi\eta}^{(2)}(x', y^*) h} = \frac{\int_{-\infty}^x w_{\xi\eta}^{(2)}(x', y) dx'}{\int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi\eta}^{(2)}(x', y) dx'} = \frac{\int_{-\infty}^x w_{\xi\eta}^{(2)}(x', y) dx'}{w_{\eta}(y)}.$$

(1.2.29)

Отметим, что хотя (1.2.29) представляет собой одномерный закон распределения, но  $F_{\xi}(x / \eta = y)$  является функцией двух аргументов.

Если  $F_{\xi}(x / \eta = y)$  имеет частную производную по  $x$

$$\frac{\partial F_{\xi}(x / \eta = y)}{\partial x} = w_{\xi}(x / \eta = y), \quad (1.2.30)$$

то эта производная называется условной плотностью вероятности.

Условные функция распределения и плотность вероятности обладают всеми свойствами, присущими аналогичным безусловным характеристикам:  $F_{\xi}(x / \eta = y)$  является монотонно неубывающей функцией со значениями между 0 и 1;  $w_{\xi}(x / \eta = y)$  — неотрицательная функция, подчиняющаяся условию нормировки и т. д.

Дифференцируя (1.2.29) по  $x$ , находим

$$w_{\xi}(x / \eta = y) = \frac{w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y)}{w_{\eta}(y)}, \quad (1.2.31)$$

или

$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) = w_{\xi}(x / \eta = y)w_{\eta}(y). \quad (1.2.32)$$

Отсюда получаем выражение

$$w_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}(x / \eta = y)w_{\eta}(y) dy, \quad (1.2.33)$$

являющееся аналогом формулы полной вероятности для случайных величин (ср. с (1.1.11)).

Условные законы распределения  $F_{\xi}(x / \eta = y)$  и  $w_{\xi}(x / \eta = y)$  являются апостериорными в том смысле, что они дают информацию о возможных значениях  $\xi$  после того, как стало известно значение  $\eta$ , а безусловные плотности  $w_{\xi}(x)$  и  $w_{\eta}(y)$  — априорными. Пусть теперь каким-то образом известны “обратные” распределения: апостериорная условная плотность  $w_{\eta}(y / \xi = x)$  и априорная безусловная плотность  $w_{\xi}(x)$ , и требуется найти условную плотность  $w_{\xi}(x / \eta = y)$ .

Запишем двумерную плотность  $w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y)$  в виде произведения

$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) = w_{\eta}(y / \xi = x)w_{\xi}(x),$$

а безусловную плотность  $w_{\eta}(y)$  в виде

$$w_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\eta}(y / \xi = x)w_{\xi}(x) dx,$$

тогда

$$w_{\xi}(x / \eta = y) = \frac{w_{\eta}(y / \xi = x)w_{\xi}(x)}{w_{\eta}(y)} = \frac{w_{\eta}(y / \xi = x)w_{\xi}(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} w_{\eta}(y / \xi = x)w_{\xi}(x) dx} \quad (1.2.34)$$

является аналогом формулы Байеса для случайных величин (ср. с (1.1.12)).

В качестве примера рассмотрим нахождение условной плотности нормальной случайной величины. Подставляя (1.2.17) и (1.2.18) в (1.2.31), имеем

$$w_{\xi}(x/\eta=y) = \frac{1}{\sigma_{\xi}\sqrt{2\pi(1-r^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left( \frac{x-a_{\xi}}{\sigma_{\xi}} - r \frac{y-a_{\eta}}{\sigma_{\eta}} \right)^2 \right\}. \quad (1.2.35)$$

Когда  $r=0$ , случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, и, как видно из (1.2.35), условная плотность совпадает с безусловной. При  $r \rightarrow 1$  условная плотность стремится к дельта-функции:

$$w_{\xi}(x/\eta=y) \rightarrow \delta \left( \frac{x-a_{\xi}}{\sigma_{\xi}} - \frac{y-a_{\eta}}{\sigma_{\eta}} \right).$$

Это означает жёсткую связь значений величин  $\xi$  и  $\eta$ : при заданном  $y$  однозначно определено значение

$$x = a_{\xi} + \frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_{\eta}} (y - a_{\eta}).$$

Обратимся теперь к ситуациям, когда ограничивающее условие  $B$  выражено через исходную случайную величину  $\xi$ . Тогда условные законы распределения могут быть выражены через соответствующие безусловные законы распределения. Рассмотрим два случая, часто встречающиеся в практических задачах: ограничение значений слева (снизу) и ограничение значений интервалом.

Пусть  $B = \{\xi < a\}$ , где  $a$  — константа, причём

$$P(B) = P\{\xi < a\} \equiv F_{\xi}(a) \neq 0.$$

По определению условной функции распределения имеем:

$$F_{\xi}(x/B) = F_{\xi}(x/\xi < a) = P(\xi < x/\xi < a) = \frac{P(\xi < x, \xi < a)}{P(\xi < a)}.$$

Если  $x < a$ , то событие  $\xi < x$  является частным случаем события  $\xi < a$ :

$$(\xi < x) \subset (\xi < a),$$

и совместная вероятность равна вероятности отдельного события:

$$P(\xi < x, \xi < a) = P(\xi < x),$$

поэтому

$$F_{\xi}(x/B) = \frac{P(\xi < x)}{P(\xi < a)} = \frac{F_{\xi}(x)}{F_{\xi}(a)}.$$

Если же  $x \geq a$ , то, наоборот, событие  $\xi < a$  является частным случаем события  $\xi < x$ , так что

$$P(\xi < x, \xi < a) = P(\xi < a)$$

и

$$F_{\xi}(x/B) = \frac{P(\xi < a)}{P(\xi < a)} = 1.$$

Условную плотность вероятности находим путём дифференцирования:

$$w_{\xi}(x/\xi < a) = \begin{cases} \frac{w_{\xi}(x)}{F_{\xi}(a)} = \frac{w_{\xi}(x)}{\int_{-\infty}^a w_{\xi}(x) dx}, & x < a; \\ 0, & x \geq a. \end{cases} \quad (1.2.36)$$

Пусть теперь ограничивающее условие  $B$  является ограничением интервалом:  $B = \{a \leq \xi < b\}$ , где  $a$  и  $b$  — константы, для которых выполняется условие

$$P(B) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a) \neq 0.$$

По определению условной функции распределения имеем

$$F_{\xi}(x/B) = F_{\xi}(x/a \leq \xi < b) = \frac{P(\xi < x, a \leq \xi < b)}{P(a \leq \xi < b)}.$$

Когда  $x \geq b$ , событие  $a \leq \xi < b$  является частным случаем события  $\xi < x$ , так что

$$F_{\xi}(x/B) = \frac{P(a \leq \xi < b)}{P(a \leq \xi < b)} = 1.$$

Когда  $a \leq x < b$ , совместное событие  $(\xi < x, a \leq \xi < b)$  эквивалентно событию  $a \leq \xi < x$ , и

$$F_{\xi}(x/B) = \frac{P(a \leq \xi < x)}{P(a \leq \xi < b)} = \frac{F_{\xi}(x) - F_{\xi}(a)}{F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)}.$$

Наконец, когда  $x < a$ , события  $\xi < x$  и  $a \leq \xi < b$  являются несовместными, поэтому

$$F_{\xi}(x/B) = 0.$$

Из найденной функции распределения находим плотность распределения:

$$w_{\xi}(x / a \leq \xi < b) = \begin{cases} \frac{w_{\xi}(x)}{F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)}, & a \leq x < b; \\ 0, & x < a, x \geq b. \end{cases} \quad (1.2.37)$$

Схематичный вид условных функции распределения и плотности вероятности при наличии ограничений показан на рис. 1.12.

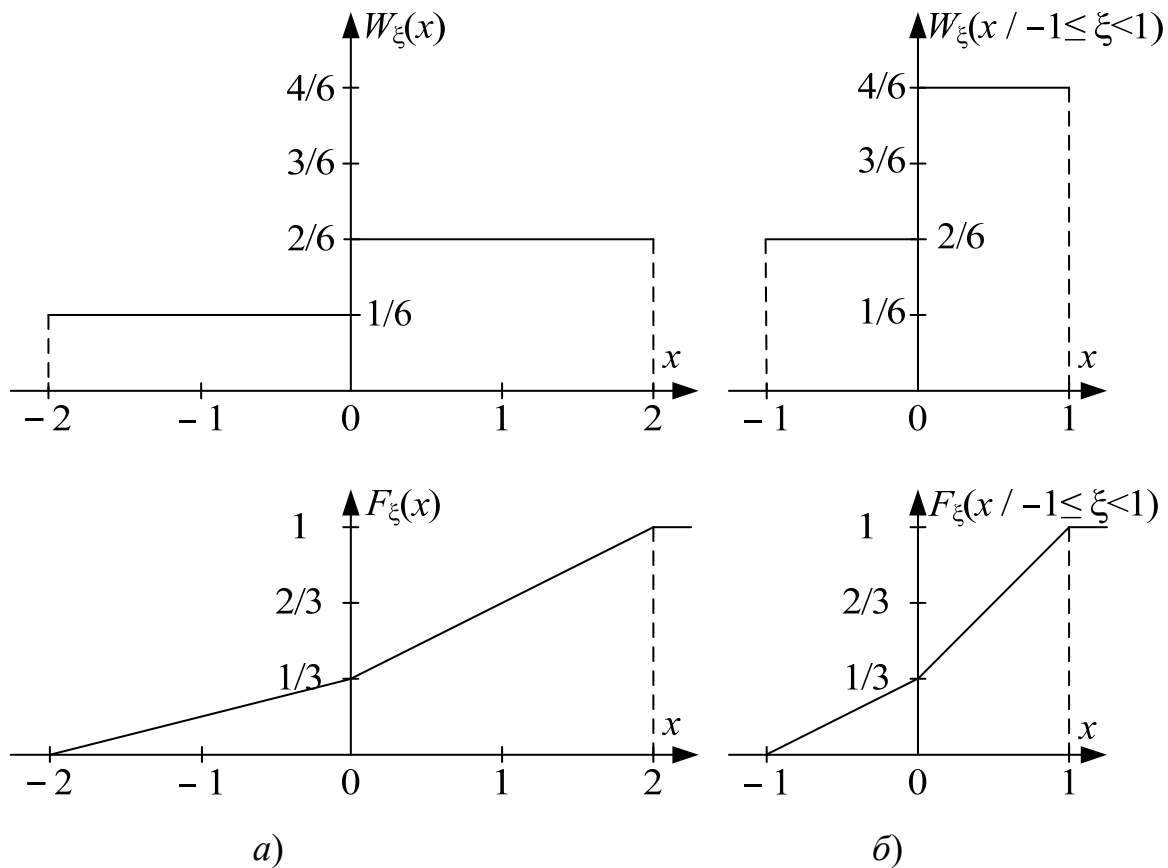


Рис. 1.12. Вид безусловных (а) и условных (б) функций распределения и плотности вероятности

Найдём, к примеру, условный закон распределения случайной величины  $\xi$ , полученной из симметричного распределения Лапласа

$$w_{\lambda}(x) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda |x|), \quad (1.2.38)$$

когда её значения ограничены диапазоном

$$-a\sigma_{\lambda} \leq x \leq a\sigma_{\lambda}, \quad a > 0,$$

где  $\sigma_{\lambda}^2$  — дисперсия лапласовского распределения, равная  $2/\lambda^2$ .

Функция распределения  $\lambda$  есть

$$F_{\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp(\lambda x), & x \leq 0; \\ 1 - \frac{1}{2} \exp(-\lambda x), & x > 0, \end{cases}$$

отсюда разность, стоящая в знаменателе (1.2.37), равна  $1 - \exp(-a\sqrt{2})$ .

Таким образом,

$$w_{\xi}(x / -a\sigma_{\xi} \leq \xi < a\sigma_{\xi}) = \begin{cases} \frac{\lambda \exp(-\lambda |x|)}{2(1 - \exp(-a\sqrt{2}))}, & -a\sqrt{2}/\lambda \leq x < a\sqrt{2}/\lambda; \\ 0, & x < -a\sqrt{2}/\lambda, x \geq a\sqrt{2}/\lambda \end{cases} \quad (1.2.39)$$

и

$$F_{\xi}(x / -a\sigma_{\xi} \leq \xi < a\sigma_{\xi}) = \begin{cases} 0, & x \leq -a\sqrt{2}/\lambda; \\ \frac{\exp(\lambda x) - \exp(-a\sqrt{2})}{2(1 - \exp(-a\sqrt{2}))}, & -a\sqrt{2}/\lambda < x \leq 0; \\ \frac{1}{2} + \frac{1 - \exp(-\lambda x)}{2(1 - \exp(-a\sqrt{2}))}, & 0 < x \leq a\sqrt{2}/\lambda; \\ 1, & x > a\sqrt{2}/\lambda, \end{cases} \quad (1.2.40)$$

т. е. возникает усечённое двухстороннее экспоненциальное распределение.

Рассмотрим вычисление условных распределений для дискретных случайных величин принимающих, для определённости, конечное число значений. Пусть задана совокупность (1.2.19) совместных вероятностей  $\{p_{ij}\}$ ,  $i = 1, \dots, M$ ;  $j = 1, \dots, N$ , по которым могут быть найдены соответствующие одномерные распределения. На основании (1.1.5) запишем условную вероятность  $p_{i/\eta}$  того, что случайная величина  $\xi$  примет одно из возможных значений  $x_i$  при условии, что случайная величина  $\eta$  приняла определённое значение  $\eta = y_j$ :

$$p_{i/\eta} \equiv P(x_i / \eta = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}. \quad (1.2.41a)$$



Аналогично, вероятность  $p_{j/\xi}$  того, что случайная величина  $\eta$  примет одно из возможных значений  $y_j$  при условии, что случайная величина  $\xi$  приняла определённое значение  $\xi = x_i$ , равна

$$p_{j/\xi} \equiv P(y_j / \xi = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} = \frac{p_{ij}}{\sum_j p_{ij}}. \quad (1.2.41б)$$

Ряд условных распределений (1.2.41) обладает свойствами обычных распределений, в частности, для него справедливо условие нормировки:

$$\sum_{j=1}^N p_{j/\xi} = \frac{1}{p_{i\cdot}} \sum_{j=1}^N p_{ij} = \frac{p_{i\cdot}}{p_{i\cdot}} = 1$$

и аналогично для  $p_{i/\eta}$ .

Пусть, например, задана следующая совокупность дискретных величин:

$\eta \backslash \xi$	-2	0	1	3	$\sum_i$
-1	0,00	0,10	0,10	0,00	0,20
0	0,10	0,05	0,00	0,00	0,15
2	0,05	0,15	0,15	0,20	0,55
4	0,10	0,00	0,00	0,00	0,10
$\sum_j$	0,25	0,30	0,25	0,20	1,00

Одномерные распределения:

$\xi$	-2	0	1	3
$p_i$	0,25	0,30	0,25	0,20

и

$\eta$	-1	0	2	4
$p_j$	0,20	0,15	0,55	0,10

Отсюда, например, условные вероятности  $\xi$  при условии, что  $\eta = -1$ :

$$P(\xi = -2 / \eta = -1) = \frac{0}{0,2} = 0; \quad P(\xi = 0 / \eta = -1) = \frac{0,1}{0,2} = 0,5;$$

$$P(\xi = 1 / \eta = -1) = \frac{0,1}{0,2} = 0,5; \quad P(\xi = 3 / \eta = -1) = \frac{0}{0,2} = 0.$$

Совокупность всех условных вероятностей часто записывают в виде матрицы  $\mathbf{P}(\xi / \eta)$ , которая в данном случае имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}(\xi / \eta) = \begin{pmatrix} P(x_1 / y_1) & P(x_2 / y_1) & P(x_3 / y_1) & P(x_4 / y_1) \\ P(x_1 / y_2) & P(x_2 / y_2) & P(x_3 / y_2) & P(x_4 / y_2) \\ P(x_1 / y_3) & P(x_2 / y_3) & P(x_3 / y_3) & P(x_4 / y_3) \\ P(x_1 / y_4) & P(x_2 / y_4) & P(x_3 / y_4) & P(x_4 / y_4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,000 & 0,500 & 0,500 & 0,000 \\ 0,667 & 0,333 & 0,000 & 0,000 \\ 0,091 & 0,273 & 0,273 & 0,363 \\ 1,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \end{pmatrix}.$$

Сумма элементов, стоящих в каждой строке матрицы, равна единице, поэтому такая матрица называется *стохастической*.

Отметим один сугубо вычислительный нюанс: при работе с десятичными дробями вследствие округления может оказаться, что сумма условных распределений  $\{p_{i/\eta}\}$  или  $\{p_{j/\xi}\}$  в точности не равна единице, отличаясь, например, в третьем или четвёртом знаке. Такой эффект становится особенно заметен при многошаговых расчётах с использованием средств вычислительной техники. Одним из способов решения этой проблемы является изменение на каком-либо этапе вычислений значений одной или нескольких вероятностей в “нужную” сторону<sup>1</sup>. При этом проверка условия нормировки по отношению к различным вероятностям должна быть достаточно частой.

---

<sup>1</sup> При этом, однако, существует опасность замены малых, но ненулевых значений нулевыми, что может привести к гораздо более тяжёлым последствиям.

### 1.3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Закон распределения в виде интегральной функции или плотности распределения хотя и представляет полную вероятностную картину возможных значений случайной величины и качественную оценку некоторых характеристик (например, унимодальность, финитность и т. п.), но, всё же, не даёт количественных значений, по которым распределения могут быть сравнены как между собой, так и по части использования их для решения определённых практических задач.

С другой стороны, в ряде случаев не обязательно знать полностью закон распределения, достаточно иметь ряд параметров, характеризующих случайную величину с различных точек зрения. Так, например, при расчёте какой-либо радиотехнической схемы не пользуются законами распределения электрических параметров элементов схемы; в справочниках обычно указываются их “типичные”, номинальные значения и пределы возможных отклонений реальных значений от номинальных.

В теории вероятностей и её приложениях числовыми характеристиками случайной величины служат *моменты распределения*, подразделяющиеся на два класса: *начальные моменты* и *центральные моменты*.

Для непрерывной случайной величины  $\xi$  начальный момент распределения  $k$ -го порядка  $m_k$  определяется выражением

$$m_k[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k w_{\xi}(x) dx \quad (1.3.1)$$

в предположении, что несобственный интеграл сходится (есть распределения, например, распределение Коши, для которых некоторые или даже все моменты не существуют). Геометрически, что полезно при визуальной качественной оценке графиков распределений,  $m_k$  можно трактовать как моменты инерции соответствующих порядков плоской фигуры, образованной осью абсцисс и кривой плотности вероятности.

Если случайная величина  $\xi$  дискретна и принимает, возможно, бесконечный набор значений  $x_1, x_2, \dots$  с соответствующими вероятностями  $p_1, p_2, \dots$ , то её  $k$ -й начальный момент равен

$$m_k[\xi] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i \quad (1.3.2)$$

в предположении, что ряд сходится абсолютно.

Отметим, что если для какого-то распределения существует момент  $k$ -го порядка, то это обеспечивает существование всех моментов порядков  $n < k$ . Если же не существует момент  $k$ -го порядка, то не существуют и все моменты порядков  $r > k$ .

Простейшая числовая характеристика случайной величины — начальный момент распределения первого порядка  $m_1$ , определяющий абсциссу центра тяжести упомянутой плоской фигуры, который называется *математическим ожиданием* или *средним значением случайной величины*. Для математического ожидания часто вводят специальное обозначение<sup>1</sup>  $\mathbf{E}[\xi]$ . В соответствии с (1.3.1) и (1.3.2),

$$\mathbf{E}[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x w_{\xi}(x) dx \quad (1.3.3)$$

для непрерывной случайной величины и

$$\mathbf{E}[\xi] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad (1.3.4)$$

для дискретной случайной величины.

Перечислим основные свойства математического ожидания.

- Математическое ожидание имеет размерность самой случайной величины.
- Математическое ожидание детерминированной (неслучайной) величины равно этой величине.
- Если от исходной случайной величины  $\xi$  перейти к случайной величине  $\eta = c\xi$ , где  $c$  — детерминированная константа, то эта константа может быть вынесена за знак математического ожидания:

$$\mathbf{E}[\eta] = \mathbf{E}[c\xi] = c\mathbf{E}[\xi].$$

- Математическое ожидание суммы (разности) случайных величин равно сумме (разности) их математических ожиданий:

$$\mathbf{E}[\xi_1 \pm \xi_2] = \mathbf{E}[\xi_1] \pm \mathbf{E}[\xi_2].$$

---

<sup>1</sup> E — начальная буква английского слова *expectation* — ожидание.

Это свойство обобщается на произвольное число слагаемых.

• Математическое ожидание произведения *независимых* случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$\mathbf{E}[\xi_1 \xi_2] = \mathbf{E}[\xi_1] \mathbf{E}[\xi_2].$$

Это свойство обобщается на произвольное число слагаемых.

Как уже было сказано, математическое ожидание характеризует расположение центра графика плотности вероятности  $w_\xi(x)$ . *Медианой* распределения называется такое значение  $x_{\text{med}}$ , которое делит пополам площадь под кривой плотности вероятности. Другими словами, медиана есть корень уравнения

$$F_\xi(x_{\text{med}}) = \frac{1}{2}. \quad (1.3.5)$$

Математическое ожидание может не существовать, в то время как медиана существует всегда, причём, может быть неоднозначно определённой, например, для дискретных и смешанных распределений. Если существует интервал значений  $(\alpha; \beta)$ , на котором  $F_\xi(x) = 1/2$ , то медианой такого распределения может быть объявлена любая точка из этого интервала.

Если медиана характеризует положение центра графика  $w_\xi(x)$ , то поведение других частей графика плотности распределения можно количественно описать с помощью квантилей. *Квантиль*  $r$ -го порядка  $x_{\text{quan},r}$  есть корень уравнения

$$F_\xi(x_{\text{quan},r}) = r, \quad 0 < r < 1. \quad (1.3.6)$$

Очевидно, медиана является квантилью порядка  $1/2$ .

Медиана дискретного распределения имеет тот же смысл, что и для непрерывного: это значение случайной величины, для которого функция распределения равна  $1/2$ . Однако может оказаться, что такого значения (из возможного дискретного набора) не существует. В этом случае медиана, строго говоря, не определена, но иногда для практических целей выбирают “квазимедиану” как ближайшее (справа или слева) к “истинной” медиане возможное значение.

Третьей характеристикой, описывающей особенности закона распределения случайной величины, является уже упомянутая в разд. 1.2.1 *мода*  $x_m$  — точка локального максимума плотности вероятности. При этом,

в зависимости от наличия одного или нескольких таких максимумов, распределение оказывается унимодальным или полимодальным.

При определении моды дискретного распределения составляется *ранжированный ряд*, т. е. все возможные значения  $x_k$  располагают в порядке возрастания. Тогда некоторое значение  $x_\mu$  будет модой, если для соответствующих вероятностей выполняются условия

$$P_\mu > P_{\mu-1}, P_\mu > P_{\mu+1}. \quad (1.3.7)$$

На рис. 1.13 иллюстрируются соотношения между математическим ожиданием, медианой и модой распределения непрерывной случайной величины. Для унимодального и симметричного закона распределения все три показателя совпадают; разница проявляется в случае асимметричных и полимодальных распределений.

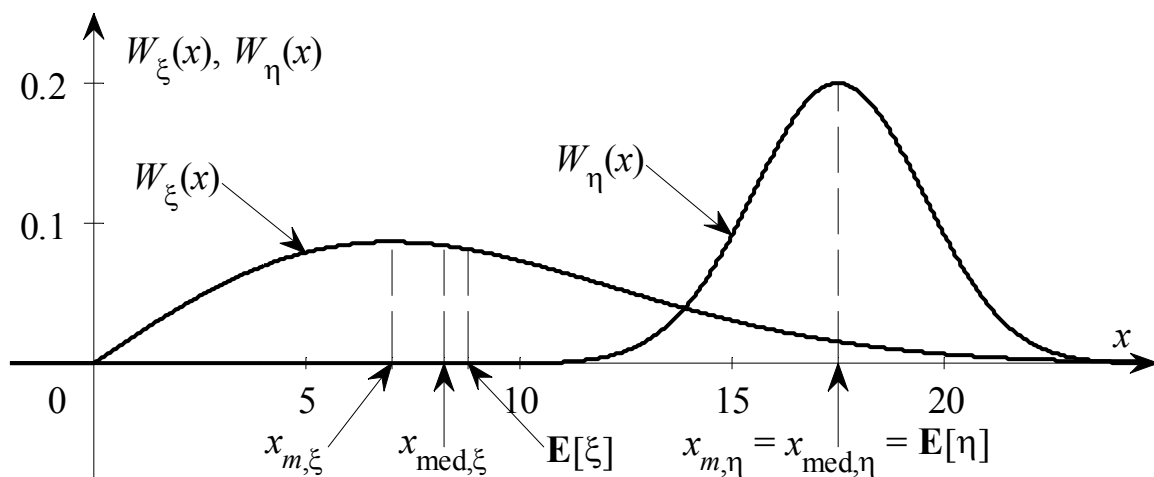


Рис. 1.13. Соотношения между математическим ожиданием, медианой и модой для непрерывного распределения

Плотность вероятности имеет положительную *асимметрию*, если мода предшествует медиане, при этом большая часть распределения оказывается справа, а более крутой спад — слева. Наоборот, асимметрия отрицательна, если мода располагается за медианой, тогда большая часть распределения оказывается слева, а более крутой спад — справа.

Из соотношений (1.3.3) и (1.3.4) видно, что для симметричных распределений математическое ожидание, а также все моменты нечётных порядков равны нулю. Если же это не так, то всегда можно перейти к *центрированной* случайной величине (обозначаемой кружком сверху)

$$\overset{0}{\xi} = \xi - \mathbf{E}[\xi], \quad (1.3.8)$$

имеющей, очевидно, нулевое среднее.

По аналогии с (1.3.1) и (1.3.2) введём центральные моменты  $k$ -го порядка  $\mu_k$ , представляющие собой начальные моменты центрированной случайной величины:

$$\mu_k[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}[\xi])^k w_{\xi}(x) dx \quad (1.3.9)$$

для непрерывного и

$$\mu_k[\xi] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathbf{E}[\xi])^k p_i \quad (1.3.10)$$

для дискретного случаев.

Среди центральных моментов наиболее часто используется центральный момент второго порядка  $\mu_2$ , называемый *дисперсией* и обозначаемый как  $\mathbf{D}[\xi]$ :

$$\mathbf{D}[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}[\xi])^2 w_{\xi}(x) dx \quad (1.3.11)$$

для непрерывной случайной величины и

$$\mathbf{D}[\xi] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathbf{E}[\xi])^2 p_i \quad (1.3.12)$$

для дискретной случайной величины.

Перечислим основные свойства дисперсии.

- Дисперсия имеет размерность квадрата размерности случайной величины.
- Дисперсия неотрицательна, причём  $\mathbf{D}[\xi] = 0$  тогда и только тогда, когда  $\xi$  является неслучайной величиной.
- Постоянный множитель выносится в квадрате за знак дисперсии: если  $\eta = c\xi$ , то

$$\mathbf{D}[\eta] = \mathbf{D}[c\xi] = c^2 \mathbf{D}[\xi].$$

- Постоянное слагаемое не влияет на значение дисперсии: если  $\eta = c + \xi$ , то

$$\mathbf{D}[\eta] = \mathbf{D}[c + \xi] = \mathbf{D}[\xi].$$

- Если случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы<sup>1</sup>, то дисперсия суммы или разности этих величин равна сумме дисперсий:

$$\mathbf{D}[\xi_1 \pm \xi_2] = \mathbf{D}[\xi_1] + \mathbf{D}[\xi_2].$$

Дисперсия характеризует меру разброса (концентрации) значений случайной величины относительно её математического ожидания. Поскольку дисперсия  $\mathbf{D}[\xi] = \sigma_\xi^2$  имеет размерность квадрата случайной величины, часто используют *среднеквадратическое отклонение* (СКО)  $\sigma_\xi$ , имеющее размерность самой случайной величины  $\xi$ .

Количественно степень концентрации плотности вероятности  $w_\xi(x)$  в окрестности математического ожидания  $\mathbf{E}[\xi]$  характеризуется *неравенством Чебышева*: для любого  $\varepsilon > 0$

$$P(|\xi - \mathbf{E}[\xi]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{D}[\xi]}{\varepsilon^2}, \quad (1.3.13)$$

откуда следует, что

$$P(\mathbf{E}[\xi] - \varepsilon \leq \xi \leq \mathbf{E}[\xi] + \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}[\xi]}{\varepsilon^2}.$$

Отметим, что хотя неравенство Чебышева часто используется в теоретических рассуждениях, его практическое применение затруднительно, поскольку оно даёт слишком низкую точность.

Центральный и начальный моменты второго порядка связаны соотношением, которое непосредственно следует из (1.3.11) или (1.3.12):

$$\mathbf{D}[\xi] = \mathbf{E}[\xi^2] - \mathbf{E}^2[\xi] \quad (1.3.14)$$

и которое является “рабочим” при нахождении дисперсии.

Выше уже говорилось о том, что при несовпадении моды и медианы распределение имеет асимметричный вид. Для количественной оценки асимметричности и сглаженности (заострённости) распределения вводят *коэффициент асимметрии*

$$k_{\text{as}} = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mathbf{D}^3[\xi]}} \quad (1.3.15)$$

---

<sup>1</sup> В действительности для выполнения свойства аддитивности дисперсии вместо независимости достаточно требование некоррелированности случайных величин (см. далее).



и коэффициент эксцесса

$$k_{\text{ex}} = \frac{\mu_4}{\mathbf{D}^2[\xi]} - 3. \quad (1.3.16)$$

Нулевое значение  $k_{\text{as}}$  означает, что распределение симметрично; в противном случае имеет место асимметрия.

Значение коэффициента эксцесса “привязано” к нормальному распределению, для которого  $k_{\text{ex}} = 0$ . Если  $k_{\text{ex}} > 0$  то плотность распределения в окрестностях моды имеет более высокую и более острую вершину, чем плотность нормального распределения с такими же средним и дисперсией. Значение  $k_{\text{ex}} < 0$  указывает на более плоский характер вершины по сравнению с аналогичным нормальным распределением.

Найдём числовые характеристики для некоторых непрерывных и дискретных одномерных распределений<sup>1</sup>.

### **Равномерное распределение**

Непрерывное равномерное распределение описывает ситуацию, при которой равновозможны любые значения из определённого диапазона. Использование такого распределение целесообразно в тех случаях, когда априори ничего не известно о возможных значениях либо сознательно отказываются от априорной информации в целях, например, упрощения реализации устройств обработки сигналов.

Для случайной величины  $\xi$ , распределённой по равномерному закону

$$w_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a, x > b, \end{cases} \quad (1.3.17)$$

обозначаемому как  $U(a, b)$ , математическое ожидание

$$\mathbf{E}[\xi] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}, \quad (1.3.18)$$

дисперсия

---

<sup>1</sup> Вычисление моментов распределений по определяющим формулам вида (1.3.1) или (1.3.2) не всегда целесообразно, поскольку приходится иметь дело с достаточно сложными и громоздкими суммами и интегралами; существуют гораздо более эффективные способы, например, на основе производящих функций.

$$\mathbf{D}[\xi] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (1.3.19)$$

Также нетрудно найти значение начального момента произвольного порядка:

$$m_k[\xi] = \int_a^b \frac{x^k}{b-a} dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.3.20)$$

Медиана равномерного распределения совпадает с математическим ожиданием, а, поскольку распределение “предельно плоское”, в качестве моды может быть выбрано любое значение из промежутка  $[a; b]$ .

Коэффициент асимметрии равен нулю:

$$k_{\text{ас}} = \frac{12^{3/2}}{(b-a)^3} \frac{1}{b-a} \int_a^b \left( x - \frac{b+a}{2} \right)^3 dx = \frac{12^{3/2}}{(b-a)^4} \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} y^3 dy = 0,$$

а коэффициент эксцесса

$$\begin{aligned} k_{\text{ex}} &= \frac{12^2}{(b-a)^4} \frac{1}{b-a} \int_a^b \left( x - \frac{b+a}{2} \right)^4 dx - 3 = \frac{12^2}{(b-a)^5} \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} y^4 dy - 3 = \\ &= \frac{12^2}{(b-a)^5} \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{b-a}{2} \right)^5 - \left( -\frac{b-a}{2} \right)^5 \right] - 3 = -\frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Равномерное распределение  $U(0, 1)$  называется *стандартным равномерным распределением*, оно, как будет показано далее, во многих случаях является исходным для получения других распределений и конструирования соответствующих датчиков случайных чисел.

### **Равновероятное (дискретное равномерное) распределение**

Равновероятное распределение, также обозначаемое  $U(a, b)$ , является дискретным аналогом непрерывного равномерного распределения и описывает ситуацию, при которой равновозможны, вообще говоря, любые  $m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) значений случайной величины  $\xi$  из указанного диапазона.

Рассмотрим частный, но наиболее распространённый на практике случай эквидистантных значений  $x_k$ :

$$x_k = a + \Delta(k-1), \quad \Delta = \frac{b-a}{m-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (1.3.21)$$

принимаемых с одинаковой вероятностью

$$p_k = \frac{1}{m}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Математическое ожидание

$$\mathbf{E}[\xi] = \sum_{k=1}^m \frac{a + \Delta(k-1)}{m} = \frac{a+b}{2},$$

дисперсия

$$\mathbf{D}[\xi] = \sum_{k=1}^m \frac{(a + \Delta(k-1))^2}{m} - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{m^2-1}{12}. \quad (1.3.22)$$

Медиана распределения совпадает с математическим ожиданием, но мода не существует, поскольку в соотношениях (1.3.7) фигурируют строгие неравенства.

При нахождении коэффициента асимметрии

$$k_{\text{as}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left( a + \frac{b-a}{m-a}(k-1) - \frac{a+b}{2} \right)^3 = \frac{(b-a)^3}{8m(m-1)^3} \sum_{k=1}^m (2k-m-1)^3 \quad (1.3.23)$$

нетрудно видеть, что суммируются одинаковые по величине и противоположные по знаку значения, так что

$$k_{\text{as}} = 0.$$

Вычисление коэффициента эксцесса приводит к следующему значению:

$$k_{\text{ex}} = -\frac{6(m^2+1)}{5(m^2-1)}. \quad (1.3.24)$$

Заметим, что, как и следовало ожидать, при  $m \rightarrow \infty$  характеристики равновероятного распределения совпадают с аналогичными характеристиками для равномерного распределения.

### **Биномиальное распределение**

Биномиальное распределение (его ещё называют распределением Бернулли) возникает при определении вероятности заданного числа испытаний в последовательной цепочке независимых испытаний (схеме Бернулли). В связных задачах биномиальное распределение используется, например, для описания искажений сигналов или логических символов при передаче их по каналу с независимыми ошибками.

Вероятность  $p_n(k)$  того, что в схеме из  $n$  последовательных независимых испытаний окажется ровно  $k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) “успехов”, т. е. интересующих наблюдателя исходов, равна

$$p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (1.3.25)$$

где  $p$  — вероятность одиночного исхода, а

$$C_n^k \equiv \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

являются биномиальными коэффициентами. Биномиальное распределение с параметрами  $n$  и  $p$  обычно обозначают  $B(n, p)$ .

Найдём математическое ожидание:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\xi] &= \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)! p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \\ &= np \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)! p^{m-1} (1-p)^{n-1-m}}{m!(n-1-m)!}. \end{aligned}$$

Стоящие в сумме слагаемые представляют собой вероятности того, что в последовательности из  $(n-1)$  испытания окажется  $m$  ( $m = 0, 1, \dots, n-1$ ) исходов, и, очевидно, сумма всех таких вероятностей равна единице. Таким образом,

$$\mathbf{E}[\xi] = np. \quad (1.3.26)$$

При вычислении дисперсии

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[\xi] &= \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - (np)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{kn! p^k (1-p)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} - (np)^2 = \\ &= np \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(m+1)(n-1)! p^m (1-p)^{n-m-1}}{m!(n-m-1)!} - (np)^2 = \\ &= np \sum_{m=0}^{n-1} \frac{m(n-1)! p^m (1-p)^{n-1-m}}{m!(n-1-m)!} + np(1-p) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)! p^m (1-p)^{n-1-m}}{m!(n-1-m)!} - (np)^2 \end{aligned}$$

учтём, что получившаяся первая сумма представляет собой математическое ожидание  $np$ , а вторая — сумму всех вероятностей. Тогда

$$\mathbf{D}[\xi] = (np)^2 + np(1-p) - (np)^2 = np(1-p). \quad (1.3.27)$$

Биномиальное распределение при  $p = 0,5$  симметрично, и чем больше  $p$  отлично от  $0,5$ , тем больше асимметрия. В общем случае коэффициент асимметрии

$$k_{\text{ас}} = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}, \quad (1.3.28)$$

коэффициент эксцесса

$$k_{\text{ex}} = \frac{1-6(1-p)}{np(1-p)}. \quad (1.3.29)$$

Медиана и мода распределения близки к математическому ожиданию, но, во-первых, они должны быть целочисленными значениями ( $np$ , вообще говоря, нецелое), а во-вторых, зависят от чётности или нечётности числа  $n$  испытаний. Мода равна

$$\lceil (n+1)p \rceil,$$

а медиана выбирается одним из значений

$$\lceil np \rceil - 1, \lceil np \rceil, \lceil np \rceil + 1,$$

где квадратные скобки  $\lceil \rceil$  означают округление вверх (в сторону  $+\infty$ ).

Укажем также, что центральные моменты биномиального распределения связаны следующим рекуррентно-дифференциальным соотношением [7]:

$$\mu_{r+1} = p(1-p) \left( nr\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp} \right), \quad r = 2, 3, \dots \quad (1.3.30)$$

### Пуассоновское распределение

Дискретное параметрическое пуассоновское распределение используется в теории массового обслуживания, когда требуется обеспечить эффективный механизм обслуживания на основе очереди заявок, для моделирования различных потоков редких событий, например, для оценки надёжности радиоэлектронной аппаратуры и в других теоретико-вероятностных приложениях. Кроме того, это распределение является аппроксимирующим в схеме Бернулли при малых значениях вероятности единичного исхода, позволяя обойтись без вычисления биномиальных коэффициентов больших порядков.

Вероятность  $p_k$  того, что случайная величина  $\xi$  примет целое неотрицательное значение  $k$  определяется выражением

$$p_k \equiv P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3.31)$$

где  $\lambda > 0$  — параметр распределения.

Имеем:

$$\mathbf{E}[\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) = \lambda \exp(-\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \exp(-\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}.$$

Возникшая бесконечная сумма представляет собой степенное разложение экспоненты, поэтому

$$\mathbf{E}[\xi] = \lambda. \quad (1.3.32)$$

Аналогичным образом вычисляется дисперсия:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[\xi] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) - \lambda^2 = \lambda \exp(-\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \\ &= \lambda \exp(-\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)\lambda^m}{m!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \end{aligned} \quad (1.3.33)$$

Видно, что математическое ожидание и дисперсия для пуассоновского распределения совпадают.

Конфигурация распределения существенно зависит от значения параметра  $\lambda$ . Так, при  $\lambda = 0,5$  распределение монотонно убывает; при  $\lambda = 2$  возникает плоская вершина; при  $\lambda = 3,5$  имеет место экстремум.

Пуассоновское распределение имеет моду  $\lfloor \lambda \rfloor$  (округление в сторону  $-\infty$ ); медианы, строго говоря, не существует.

Коэффициент асимметрии

$$k_{\text{ас}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad (1.3.34)$$

коэффициент эксцесса

$$k_{\text{ex}} = \frac{1}{\lambda}. \quad (1.3.35)$$

### Нормальное распределение

Нормальное (гауссовское) распределение занимает среди других законов особое положение в связи с его фундаментальным значением и в теории, и на практике. Впервые об этом законе упоминается ещё в работах А. Муавра в 1730 г. как аппроксимирующем распределении в схеме Бернулли, когда вероятность единичного исхода близка к  $1/2$ . Впоследствии этот закон распределения исследовался в работах П.-С. Лапласа и, особенно, К.-Ф. Гаусса при разработке им теории измерений и ошибок, за что и получил его имя. Особое положение нормального распределения обусловлено тем, что оно является предельным (результатирующим) для многих

других законов при асимптотическом поведении, и это порождает целые классы теоретико-вероятностных задач: законы больших чисел, предельные теоремы и др.

Плотность вероятности (1.2.18) нормального распределения, обозначаемого как  $N(a, \sigma_\xi^2)$ , является двухпараметрической функцией:

$$w_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left[-\frac{(x - a_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right].$$

Вычисление математического ожидания и дисперсии согласно (1.3.3) и (1.3.10) показывает, что

$$\mathbf{E}[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left[-(x - a_\xi)^2 / 2\sigma_\xi^2\right] dx = a \quad (1.3.36)$$

и

$$\mathbf{D}[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - a_\xi)^2}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left[-(x - a_\xi)^2 / 2\sigma_\xi^2\right] dx = \sigma_\xi^2, \quad (1.3.37)$$

т. е. параметры распределения непосредственно являются математическим ожиданием и дисперсией. Распределение  $N(0, 1)$  называется *стандартным нормальным распределением*.

Отметим, что для нормального распределения медиана и мода совпадают с математическим ожиданием, коэффициенты асимметрии и эксцесса, а также все центральные моменты нечётных порядков равны нулю. Центральные моменты чётных порядков равны

$$\mu_{2r} = \frac{(2r)!}{r!} \left(\frac{\sigma_\xi^2}{2}\right)^r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (1.3.38)$$

### Распределение Коши

Распределение Коши

$$w_\xi(x) = \frac{b}{\pi(b^2 + (x - x_0)^2)}, \quad b > 0 \quad (1.3.39)$$

является примером непрерывного распределения, для которого не существуют моменты, поскольку несобственный интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^k}{(b^2 + (x - x_0)^2)} dx$$

расходится<sup>1</sup> для  $k = 1, 2, \dots$ .

Распределение Коши обозначают  $C(x_0, b)$ , где  $x_0$  — параметр сдвига, которому равны и медиана, и мода, а  $b > 0$  — параметр масштаба, определяющий “остроту” вершины. Распределение  $C(0, 1)$  называется *стандартным распределением Коши*.

### 1.3.1. Условные числовые характеристики

Наличие условных распределений порождает условные числовые характеристики случайных величин. Вычисление условных моментов аналогично вычислению безусловных моментов с той лишь разницей, что в качестве законов распределения фигурируют условные плотности или условные дискретные вероятности.

Условным математическим ожиданием  $\mathbf{E}[\xi / \eta = y]$  непрерывной случайной величины  $\xi$  при условии, что случайная величина  $\eta$  приняла значение  $\eta = y$ , называется функция

$$\mathbf{E}[\xi / \eta = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x w_{\xi}(x / \eta = y) dx. \quad (1.3.40)$$

Выражение (1.3.40) можно переписать, выразив условное математическое ожидание через двумерное распределение:

$$\mathbf{E}[\xi / \eta = y] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) dx}{w_{\eta}(y)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) dx}. \quad (1.3.41)$$

Условная дисперсия определяется выражением

$$\mathbf{D}[\xi / \eta = y] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}[\xi / \eta = y])^2 w_{\xi}(x / \eta = y) dx =$$

---

<sup>1</sup> Ситуацию можно несколько выправить, рассматривая, например, для математического ожидания интеграл в смысле главного значения, что даёт  $\mathbf{E}[\xi] = x_0$ . Дисперсия при этом всё равно равна бесконечности.



$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}[\xi / \eta = y])^2 w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) dx}. \quad (1.3.42)$$

Отметим, что при вычислении условной дисперсии фигурирует как условное распределение, так и условное математическое ожидание, а также на то, что, в отличие от безусловных характеристик, условные моменты являются функциями, а не скалярами.

Аналогичным образом определяются и другие условные моменты.

Например, для двумерного нормального распределения (1.2.17) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\xi / \eta = y] &= \frac{1}{\sigma_{\xi} \sqrt{2\pi(1-r^2)}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} x \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[ (x - a_{\xi}) / \sigma_{\xi} - r(y - a_{\eta}) / \sigma_{\eta} \right]^2 \right\} dx = \\ &= a_{\xi} + r(y - a_{\eta}) \sigma_{\xi} / \sigma_{\eta}, \end{aligned} \quad (1.3.43)$$

т. е. линейную зависимость от  $y$ . При  $r = 0$ , а также когда  $y = a_{\eta}$  условное математическое ожидание совпадает с безусловным.

Условная дисперсия равна

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[\xi / \eta = y] &= \frac{1}{\sigma_{\xi} \sqrt{2\pi(1-r^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( x - (a_{\xi} + r(y - a_{\eta}) \sigma_{\xi} / \sigma_{\eta}) \right)^2 \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[ (x - a_{\xi}) / \sigma_{\xi} - r(y - a_{\eta}) / \sigma_{\eta} \right]^2 \right\} dx = \sigma_{\xi}^2 (1-r^2). \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

Видно, что условная дисперсия нормальной случайной величины не зависит от того, какое значение приняла другая нормальная величина, а определяется лишь параметром  $r$  вероятностной связи между ними. При  $r = 0$  условная дисперсия совпадает с безусловной.

Для дискретных случайных величин условные характеристики вычисляются по формулам, аналогичным (1.3.40) и (1.3.42) на основании выражений (1.2.41) для условных распределений:

$$\mathbf{E}[\xi / \eta = y_j] = \sum_i x_i P(\xi = x_i / \eta = y_j); \quad (1.3.45)$$

$$\mathbf{D}[\xi / \eta = y_j] = \sum_i (x_i - \mathbf{E}[\xi / \eta = y_j])^2 P(\xi = x_i / \eta = y_j). \quad (1.3.46)$$

Так, для рассмотренного в разд. 1.2.3 примера имеем четыре значения условного математического ожидания случайной величины  $\xi$ :

$$\mathbf{E}[\xi / \eta = -1] = -2 \cdot 0 + 0 \cdot 0,500 + 1 \cdot 0,500 + 3 \cdot 0 = 0,500;$$

$$\mathbf{E}[\xi / \eta = 0] = -2 \cdot 0,667 + 0 \cdot 0,333 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = -1,334;$$

$$\mathbf{E}[\xi / \eta = 2] = -2 \cdot 0,091 + 0 \cdot 0,273 + 1 \cdot 0,273 + 3 \cdot 0,363 = 1,180;$$

$$\mathbf{E}[\xi / \eta = 4] = -2 \cdot 1,000 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = -2,000.$$

Условное математическое ожидание  $\mathbf{E}[\xi / \eta = y]$  называется *регрессией* случайной величины  $\xi$  на случайной величине  $\eta$ . График зависимости  $\mathbf{E}[\xi / \eta = y]$  от  $y$  называется *линией регрессии* или *кривой регрессии*. Для рассмотренного примера “линия” регрессии представляет собой ломаную (рис. 1.14).

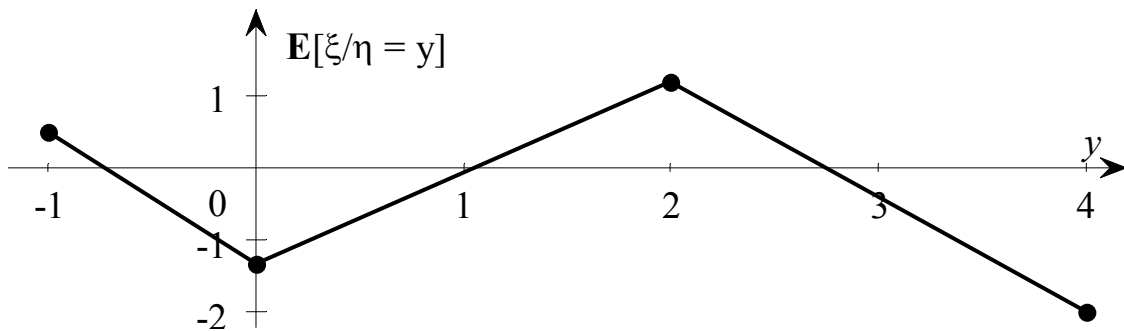


Рис. 1.14. Линия регрессии для дискретного распределения

Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то условное математическое ожидание совпадает с безусловным, а линия регрессии оказывается горизонтальной.

Регрессия обладает тем замечательным свойством, что она лучше любого другого преобразования “предсказывает” значение  $\xi$  при известном  $\eta$ , т. е. из всех преобразований  $g(y)$ , именно на регрессии  $\mathbf{E}[\xi / \eta = y]$  минимизируется среднеквадратическая разность

$$\mathbf{E}[(\xi - g(y))^2].$$

Умножая обе части (1.3.40) на  $w_\eta(y)$  и интегрируя по всем значения  $y$ , получаем формулу “двойного усреднения” для вычисления безусловного математического ожидания:

$$\mathbf{E}[\xi] = \mathbf{E}_\eta [\mathbf{E}[\xi / \eta = y]]. \quad (1.3.47)$$

### 1.3.2. Числовые характеристики многомерных распределений

При рассмотрении параметров двумерного нормального распределения уже говорилось о коэффициенте корреляции  $r$  как о параметре, количественно описывающем меру вероятностной связи между случайными величинами. В данном разделе будет кратко рассмотрен общий подход к введению таких характеристик.

Многомерные законы распределения (см. разд. 1.2.2), являющиеся функциями многих переменных, чаще всего неудобны в практическом применении и, к тому же, для своего определения (хотя бы приближённого) требуют огромного объёма экспериментальных данных. В большинстве приложений вместо самих законов распределения можно обойтись лишь набором важнейших числовых характеристик.

В общем случае, если имеется совокупность  $n$  непрерывных случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , совместная плотность вероятности которых  $w_{\xi_1 \dots \xi_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ , то математическое ожидание случайной величины  $\xi_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) определяется выражением

$$\mathbf{E}[\xi_k] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_k w_{\xi_1 \dots \xi_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (1.3.48)$$

а дисперсия — выражением

$$\mathbf{D}[\xi_k] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_k - \mathbf{E}[\xi_k])^2 w_{\xi_1 \dots \xi_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (1.3.49)$$

Таким образом, для  $n$ -мерного распределения могут быть найдены  $n$ , вообще говоря, различных математических ожиданий и  $n$  различных дисперсий — одномерных числовых характеристик. Отметим, что для их нахождения необязательно вычислять именно интегралы (1.3.48) и (1.3.49); можно сначала определить соответствующие одномерные распределения (или суммы для дискретных распределений), а затем найти требуемые числовые

характеристики посредством одномерного интегрирования (суммирования).

Более важными и интересными с точки зрения вероятностных связей в рассматриваемой совокупности являются смешанные характеристики (моменты) распределений.

Смешанный центральный момент второго порядка  $\mu_{11}[\xi_j, \xi_k]$  двух случайных величин  $\xi_j$  и  $\xi_k$  называемый также *ковариацией*, равен

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{jk} &\equiv \mu_{11}[\xi_j, \xi_k] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mathbf{E}[\xi_j])(x_k - \mathbf{E}[\xi_k]) w_{\xi_1 \dots \xi_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (1.3.50)$$

Видно, что при  $k = j$  ковариация совпадает с дисперсиями соответствующих величин.

Часто для количественной оценки вероятностной связи двух случайных величин  $\xi_j$  и  $\xi_k$  вместо ковариации используют *корреляцию*  $K_{jk}$  — смешанный начальный момент второго порядка:

$$K_{jk} \equiv m_{11}[\xi_j, \xi_k] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k w_{\xi_1 \dots \xi_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (1.3.51)$$

Безразмерный параметр

$$r_{jk} = \frac{\mu_{11}[\xi_j, \xi_k]}{\sqrt{\mathbf{D}[\xi_j] \mathbf{D}[\xi_k]}}, \quad (1.3.52)$$

принимаяющий значения в диапазоне  $[-1; +1]$ , называется *коэффициентом корреляции* случайных величин  $\xi_j$  и  $\xi_k$ . Именно этот параметр фигурирует в двумерном нормальном распределении в качестве меры вероятностной связи.

Если модуль коэффициента корреляции равен единице, то, как нетрудно показать, между случайными величинами  $\xi_j$  и  $\xi_k$  существует линейная зависимость:

$$\xi = \pm \frac{\sqrt{\mathbf{D}[\xi]}}{\sqrt{\mathbf{D}[\eta]}} (\eta - \mathbf{E}[\eta]) + \mathbf{E}[\xi].$$

И ковариация, и корреляция, и коэффициент корреляции являются количественными характеристиками, по сути, одного явления — вероятностной зависимости и различаются лишь своими значениями. Зачастую, в ли-

тературе они фигурируют под одними названиями и обозначениями, поэтому, во избежание недоразумений и числовых ошибок следует, по контексту, аккуратно их идентифицировать.

Ковариации  $\text{Cov}_{jk}$  образуют *ковариационную (корреляционную) матрицу* размерности  $n \times n$ :

$$\mathbf{Cov} = \begin{pmatrix} \text{Cov}_{11} & \text{Cov}_{12} & \cdots & \text{Cov}_{1n} \\ \text{Cov}_{21} & \text{Cov}_{22} & \cdots & \text{Cov}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{Cov}_{n1} & \text{Cov}_{n2} & \cdots & \text{Cov}_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.3.53)$$

Поскольку  $\text{Cov}_{jk} = \text{Cov}_{kj}$ , ковариационная матрица симметрична относительно главной диагонали, на которой расположены дисперсии.

Если случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  попарно некоррелированы, т. е.  $\text{Cov}_{jk} = 0$  при  $j \neq k$ , то ковариационная матрица принимает диагональный вид:

$$\mathbf{Cov} = \begin{pmatrix} \text{Cov}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \text{Cov}_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \text{Cov}_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.3.53a)$$

Отметим, однако, что попарная некоррелированность случайных величин, вообще говоря, *не означает их независимость*, хотя в частных случаях, например, многомерного нормального, а также некоторых распределений, полученных на его основе, понятия некоррелированности и независимости тождественны.

Кроме моментов первого и второго порядков для совокупности  $n$  случайных величин могут быть определены моменты любого порядка, например, начальный момент

$$m_{k_1 \dots k_n} [\xi_1, \dots, \xi_n] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} w_{\xi_1 \dots \xi_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (1.3.54)$$

где  $k_j$  — любые положительные целые числа, включая нуль.

Помимо упомянутых выше числовых характеристик  $n$ -элементной совокупности  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — математических ожиданий, ковариаций и др. — нередко рассматриваются условные характеристики. Так, условное мате-

математическое ожидание  $E[\xi_1 / x_2, \dots, x_n]$  одной из случайной величин, например  $\xi_1$ , при условии, что все остальные величины  $\xi_2, \dots, \xi_n$  приняли определённые значения  $x_2, \dots, x_n$ , равна

$$E[\xi_1 / x_2, \dots, x_n] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 w(x_1 / \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n) dx_1, \quad (1.3.55)$$

где  $w(x_1 / \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n)$  — соответствующая условная плотность.

Условное математическое ожидание (1.3.55), аналогично одномерному случаю, называется регрессией  $\xi_1$  на совокупности  $\xi_2, \dots, \xi_n$  и определяет некоторую  $n$ -мерную поверхность. Регрессия называется *линейной*, если такая поверхность является гиперплоскостью, т. е. описывается линейной формой:

$$E[\xi_1 / x_2, \dots, x_n] = c_1 + \sum_{i=2}^n c_i x_i, \quad (1.3.56)$$

где  $c_1, \dots, c_n$  — постоянные коэффициенты.

## 1.4. ОСНОВНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В предыдущих разделах изучались *вероятностные* характеристики случайных величин, порождённые некоторым, возможно, скрытым вероятностным пространством, когда на множестве элементарных исходов рассматриваются события с определёнными вероятностями, конструируются различные случайные величины, рассматриваются их числовые характеристики и т. д. Ключевым положением при данном подходе является постулирование некоторого известного вероятностного распределения, т. е. привлечение некоторой вероятностной модели, адекватность которой обеспечивается какими-то дополнительными соображениями. В некоторых случаях такой подход оказывается приемлемым, например, использование нормального распределения для описания процесса, являющегося результатом суммарного воздействия большого числа отдельных независимых процессов; при отсутствии априорной информации о каком-то параметре целесообразно привлечь равномерное распределение; потоки редких событий достаточно хорошо описываются пуассоновским распределением и др. Однако при решении разнообразных практических задач такая ситуация является, скорее исключением, чем правилом, и, зачастую, выбор адекват-

ного модельного распределения затруднителен. В этой связи возникают задачи *статистического* описания явлений, когда на основе анализа доступных экспериментальных данных требуется получить по-возможности полное вероятностное описание изучаемого явления или объекта.

Круг задач современной математической статистики чрезвычайно широк: от математических до социально-экономических наук. Применительно к технике вообще и, в частности, радиотехнике и связи можно указать следующие основные классы задач.

*Оценка неизвестного закона распределения.* В результате независимых наблюдений (измерений) случайной величины  $\xi$  получен набор её значений

$$\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(M)}). \quad (1.4.1)$$

Требуется оценить неизвестную функцию распределения или плотность вероятности, если известно, что  $\xi$  — непрерывная случайная величина. Эта задача обобщается на многомерные распределения.

*Оценка неизвестных параметров закона распределения.* Пусть на основании физических или других соображений выбрано некоторое модельное распределение, содержащее один или более параметров, значения которых неизвестны. На основании наблюдений требуется оценить значения этих параметров. Отметим, что задачу оценки параметров можно формулировать вне связи с функцией распределения, когда требуется определить физические характеристики объекта, например, амплитуду или частоту радиосигнала, а сам закон распределения не особо важен.

*Статистическая проверка гипотез.* Пусть наблюдаемые значения случайной величины  $\xi$  связаны с тем, что источник, породивший эти значения, может находиться в двух или более состояниях, называемых *гипотезами*. Требуется определить, в каком состоянии, т. е. какой гипотезой порождены наблюдаемые значения.

*Регрессионный анализ.* При изучении вероятностной связи между двумя случайными величинами  $\xi$  и  $\eta$  по результатам наблюдений за парами значений  $(x^{(1)}, y^{(1)})$ , ...,  $(x^{(M)}, y^{(M)})$  предполагается, что одна из них, например,  $\xi$  имеет некоторое распределение при фиксированном значении другой, так что для условных среднего и дисперсии справедливы соотношения

$$E[\xi / \eta = y] = f(y, \mathbf{b}), \quad D[\xi / \eta = y] = \sigma^2 g^2(y),$$

где  $\mathbf{b}$  — совокупность неизвестных параметров, определяющих функцию  $f$ , а  $g$  — известная функция, которая, в частности, может быть тождественно равна единице. Выбор модели регрессии состоит в выборе функциональной зависимости  $f$  от  $y$  и параметров  $\mathbf{b}$ .

*Дисперсионный анализ.* Метод, направленный для выявления систематических различий между результатами непосредственных измерений, выполненных при изменяющихся условиях. Обычно используется *двухфакторная модель*, предполагающая учёт систематических (первый фактор) и случайных (второй фактор) ошибок в определении измеряемых параметров.

В математической статистике наблюдаемый  $M$ -элементный набор независимых значений (1.4.1) называется *выборочной совокупностью* или, короче, *выборкой*, в то время как весь возможный набор наблюдаемых значений — *генеральной совокупностью*. Выборка называется *репрезентативной*, если она в определённом смысле достаточно полно описывает генеральную совокупность. Признаками полного описания являются:

- достаточный объём выборки ( $M \gg 1$ ), чтобы в ней могли проявиться те закономерности, что присущи генеральной совокупности (количественный признак);
- правильный способ построения выборки, когда каждый элемент имеет одинаковый шанс быть выбранным (качественный признак).

Из выборки  $x$  можно получить *вариационный ряд*, расположив наблюдаемые значения в порядке их возрастания, так что

$$x^{(i)} \geq x^{(j)}, \quad i > j,$$

При этом порядковый номер выборочного значения в вариационном ряде называется *рангом* этого выборочного значения. Отдельный  $k$ -й член вариационного ряда называется  *$k$ -й порядковой статистикой*. Примерами порядковых статистик являются минимальный

$$x_{\min} = \min \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$$

и максимальный

$$x_{\max} = \max \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$$

элементы выборки, *выборочная медиана*



$$x_{\text{med}} = \begin{cases} (x_{M/2} + x_{M/2+1}) / 2, & M \text{ чётно}; \\ x_{(M+1)/2}, & M \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Кратко рассмотрим основные подходы при решении задач математической статистики.

Если для количественного описания закона распределения теоретической случайной величины  $\xi$  служит интегральная функция распределения  $F_{\xi}(x)$ , то для получения статистической оценки закона распределения служит её статистический аналог — *эмпирическая функция распределения* (ЭФР)  $F^*(x)$ , которая строится следующим образом. Для каждого  $x$  во всём (возможно, бесконечном) диапазоне значений случайной величины  $\xi$  вычисляется случайная величина  $v(x)$  — число выборочных значений, не превосходящих  $x$ . Тогда ЭФР есть случайная величина, определяемая как

$$F^*(x) = \frac{v(x)}{M} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M e(x - x^{(k)}). \quad (1.4.2)$$

Функция  $F^*(x)$  — разрывная, ступенчатая (даже для непрерывной  $\xi$ ), равная нулю левее  $x_{\min}$  и единице правее  $x_{\max}$ . Теоретически она имеет  $M$  скачков, величина каждого из которых равна  $1/M$ . Однако может оказаться, что одно и то же значение наблюдалось несколько раз, поэтому соответствующие скачки сливаются в один укрупнённый, так что общее число скачков равно числу *различных* наблюдений в выборке.

Хотя  $F^*(x)$  и является статистическим аналогом  $F_{\xi}(x)$ , но для конкретной выборки они не совпадают, хотя и близки друг с другом при больших  $M$ . Показывается, что  $F^*(x)$  сходится к  $F_{\xi}(x)$  по вероятности при увеличении объёма выборки, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P(|F^*(x) - F_{\xi}(x)| < \varepsilon) = 1.$$

Перечислим основные свойства ЭФР.

- Случайная величина  $MF^*(x)$  подчиняется биномиальному распределению  $B(M, F_{\xi}(x))$ .
- Математическое ожидание ЭФР равно теоретической функции распределения:

$$\mathbf{E}[F^*(x)] = F_{\xi}(x). \quad (1.4.3)$$

Оценки, обладающие тем свойством, что их математическое ожидание совпадает с оцениваемой теоретической характеристикой, называются *несмещёнными*.

- Дисперсия ЭФР равна

$$\mathbf{D}[F^*(x)] = \frac{F_\xi(x)(1 - F_\xi(x))}{M}. \quad (1.4.4)$$

Видно, что дисперсия ЭФР стремится к нулю с увеличением объёма выборки; это свойство статистических оценок называется *состоятельностью*.

- В диапазоне значений  $x$ , где теоретическая функция распределения  $F_\xi(x)$  отлична от нуля и единицы, случайная величина

$$\sqrt{M} (F^*(x) - F_\xi(x))$$

имеет асимптотически (т. е. при больших  $M$ ) нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией  $F_\xi(x)(1 - F_\xi(x))$ .

Итак, ЭФР — это удобный способ представления статистических данных, позволяющий делать выводы о распределении наблюдаемой случайной величины. Существуют и другие способы наглядного представления экспериментальных данных, в частности, использование *гистограммы*.

Построение гистограммы основано на группировании наблюдений при больших объёмах выборки, когда область возможных значений случайной величины разбивается на  $L$  непересекающихся интервалов, и группируются выборочные значения, попавшие в один и тот же интервал. Длины интервалов необязательно должны быть одинаковы, тем не менее, на практике обычно выбирают эквидистантные интервалы между минимальным и максимальным значениями выборки. Пусть в  $r$ -м интервале

$$\Delta_r = \{x_r; x_{r+1}\}, r = 1, \dots, L,$$

оказалось  $n_r$  наблюдаемых значений, так что относительная частота попадания в этот интервал равна  $n_r/M$ . Далее строят последовательность прилегающих друг к другу прямоугольников, основания которых равны длине интервалов, а высоты — пропорциональны величине  $n_r/(M\Delta_r)$ . Полученная таким образом ступенчатая функция

$$w^*(x) = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^L \frac{n_r}{\Delta_r} \text{rect}(x, x_r, x_{r+1}) \quad (1.4.5)$$

называется гистограммой распределения. В выражении (1.4.5)

$$\text{rect}(x, a, b) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a, x > b; \end{cases}$$

представляет собой функцию прямоугольного окна. При больших  $M$  и достаточном числе интервалов гистограмма будет хорошей аппроксимацией плотности распределения и, тем самым, является её статистическим аналогом.

При фиксированном  $M$  актуален вопрос о числе интервалов разбиения: при большом  $L$  и, следовательно, малых длинах интервалов гистограмма может иметь большое количество локальных максимумов, искажающее истинный характер распределения; с другой стороны, при малом числе интервалов гистограмма может оказаться слишком “грубым” инструментом, не отражающим основные особенности закона распределения. В статистике рекомендуется выбирать значение  $L$  равным кубическому корню из объёма выборки:

$$L = \left\lfloor \sqrt[3]{M} \right\rfloor. \quad (1.4.6)$$

Отметим, что хотя площадь прямоугольника, построенного на отдельном интервале, приближается при возрастании  $M$  к истинной вероятности, заключённой в пределах данного интервала, но значение гистограммы, т. е. высота прямоугольника, не сходится к соответствующему значению плотности вероятности.

Как было указано в разд. 1.3, зачастую для описания явлений или поведения объекта требуется знание не самого закона распределения, а его числовых характеристик — моментов. Исходя из этого, статистические свойства выборки можно характеризовать не только ЭФР или гистограммой, но и *выборочными моментами*.

Ещё раз подчеркнём, что выборочная совокупность и её функциональные преобразования (статистики) являются случайными величинами, в то время как моменты генеральной совокупности, т. е. теоретического распределения, являются постоянными. Моменты генеральной совокупности по-прежнему обозначаются  $m_k$  (начальные) или  $\mu_k$  (центральные), а их статистические аналоги будем обозначать дополнительной звёздочкой:  $m_k^*$  или  $\mu_k^*$ .

Выборочный начальный момент  $k$ -го порядка представляет собой среднее арифметическое  $k$ -х степеней выборочных значений:

$$m_k^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x^{(i)})^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4.7)$$

В частности, *выборочное среднее*, являющееся статистическим аналогом математического ожидания генеральной совокупности, представляет собой просто арифметическое среднее выборочных значений:

$$m_1^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x^{(i)}. \quad (1.4.8)$$

Математическое ожидание выборочного среднего совпадает с истинным математическим ожиданием:

$$\mathbf{E}[m_1^*] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{E}[x^{(i)}] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{E}[\xi] = \mathbf{E}[\xi],$$

т. е. является несмещённой оценкой, а дисперсия равна

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[m_1^*] &= \mathbf{E}\left[\left(m_1^* - \mathbf{E}[m_1^*]\right)^2\right] = \mathbf{E}\left[\left(m_1^*\right)^2\right] - \left(\mathbf{E}[\xi]\right)^2 = \\ &= \mathbf{E}\left[\frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M x^{(i)} x^{(j)}\right] - \left(\mathbf{E}[\xi]\right)^2 = \frac{1}{M} \mathbf{D}[\xi]. \end{aligned}$$

Видно, что дисперсия выборочного среднего стремится к нулю (при конечности дисперсии самой генеральной совокупности) с увеличением объёма выборки, так что выборочное среднее — состоятельная оценка.

Нетрудно показать, что выборочное среднее является асимптотически нормальной оценкой, т. е. при больших объёмах выборки

$$m_1^* \in N(\mathbf{E}[\xi], \mathbf{D}[\xi] / M).$$

Разность  $x^{(k)} - m_1^*$  представляет собой отклонение выборочного значения от выборочного среднего, и на его основе вычисляются выборочные центральные моменты  $k$ -го порядка:

$$\mu_k^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x^{(i)} - m_1^*)^k \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.4.9)$$

Так, выборочный центральный момент второго порядка

$$\mu_2^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x^{(i)} - m_1^*)^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x^{(i)})^2 - (m_1^*)^2, \quad (1.4.10)$$

называемый *выборочной дисперсией*, является статистическим аналогом дисперсии генеральной совокупности как мера рассеяния выборочных значений относительно выборочного среднего.

Математическое ожидание выборочного среднего

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mu_2^*] &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{E}[(x^{(i)})^2] - \frac{1}{M^2} \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M x^{(i)} x^{(j)}\right] = \mathbf{E}[\xi^2] - \\ & - \frac{1}{M^2} \left( M \mathbf{E}[\xi^2] + (M^2 - M) (\mathbf{E}[\xi])^2 \right) = \frac{M-1}{M} \mathbf{D}[\xi] \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

не совпадает с дисперсией генеральной совокупности (хотя мало от неё отличается при больших  $M$ ), следовательно, такая оценка является смещённой. Для того, чтобы иметь нулевое смещение часто вместо выборочной дисперсии используют её несмещённый аналог

$$S^2 = \frac{M}{M-1} \sum_{i=1}^M (x^{(i)} - m_1^*)^2. \quad (1.4.12)$$

Дисперсия выборочной дисперсии, как нетрудно показать, равна

$$\mathbf{D}[\mu_2^*] = \frac{\mu_4[\xi] - \mu_2^2[\xi]}{M} - \frac{2\mu_4[\xi] - 4\mu_2^2[\xi]}{M^2} + \frac{\mu_4[\xi] - 3\mu_2^2[\xi]}{M^3},$$

откуда следует её состоятельность. При больших  $M$  в выражении (1.4.12) превалирует первое слагаемое, так что можно считать, что дисперсия выборочной дисперсии определяется выражением

$$\mathbf{D}[\mu_2^*] \approx \frac{\mu_4[\xi] - \mu_2^2[\xi]}{M}. \quad (1.4.13)$$

Наряду с построением ЭФР или гистограммы для оценивания неизвестного закона распределения используют *метод ядерных оценок*, при котором в качестве аппроксимации плотности распределения  $w_\xi(x)$  на основе анализа выборки  $\mathbf{x}$  рассматривается функция

$$f_M(x, \mathbf{x}) = \frac{1}{M a_M} \sum_{k=1}^M K\left(\frac{x - x^{(k)}}{a_m}\right), \quad (1.4.14)$$

где  $\{a_m\}$  — стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} a_m = 0, \quad a_m > 0,$$

а  $K(z)$  — весовая (ядерная) функция, удовлетворяющая ряду естественных ограничений при оценивании плотности вероятности:

$$0 \leq K(z) < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} K(z) dz = 1, \lim_{|z| \rightarrow \infty} zK(z) = 0.$$

Можно показать, что при таких условиях в любой точке непрерывности плотности распределения оценка (1.4.14) сходится к  $w_{\xi}(x)$  в среднеквадратическом:

$$\mathbf{E} \left[ \left( f_M(x, \mathbf{x}) - w_{\xi}(x) \right)^2 \right]_{M \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

## 1.5. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайным процессом (случайной функцией) называется случайная величина  $\xi(\omega, t, \alpha, \beta, \dots)$ , которая помимо основного аргумента  $\omega$  — элементарного исхода — содержит дополнительные аргументы (параметры)  $t, \alpha, \beta, \dots$ , одним из которых, как правило, является время  $t$ . Другими словами, случайный процесс при фиксировании всех аргументов кроме  $\omega$  является случайной величиной, принимающей значения из разрешённого набора. С другой стороны, это означает, что в неизменных условиях вероятностного эксперимента каждая реализация элементарного исхода  $\omega = \omega_k$  порождает неслучайную (детерминированную) функцию

$$\xi^{(k)}(t, \alpha, \beta, \dots) = \xi(\omega_k, t, \alpha, \beta, \dots),$$

называемую *реализацией случайного процесса*. Таким образом, случайный процесс можно рассматривать как совокупность всех его возможных реализаций (рис. 1.15) на некотором, возможно, бесконечном временном интервале.

Поскольку случайный процесс при фиксированных значениях параметров представляет собой случайные величины, для его описания (задания) применяются те же вероятностные характеристики, что и для самих случайных величин, т. е. законы распределения в той или иной форме. Однако такие характеристики оказываются, вообще говоря, зависящими от параметров, в частности, от времени.

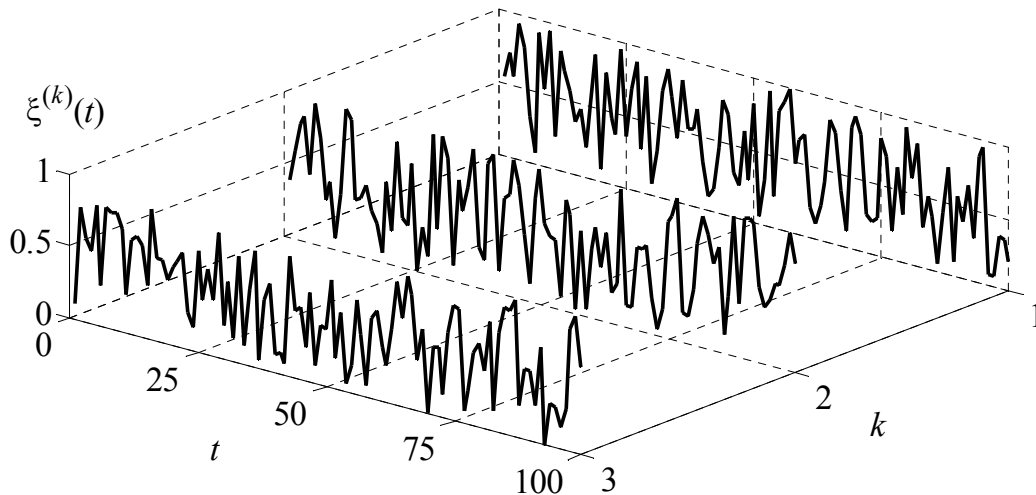


Рис. 1.15. Случайный процесс как совокупность реализаций

Например, рассматривая процесс в момент времени (во временном сечении)  $t = t_1$ , можно изучать одномерную функцию распределения

$$F_{\xi}(x_1, t_1) = P(\xi(x_1) < t_1)$$

или плотность распределения

$$w_{\xi}(x_1, t_1) = \frac{\partial F_{\xi}(x_1, t_1)}{\partial x_1}$$

для модельных процессов (гауссовских, пуассоновских и др.), содержащих два аргумента. В условиях априорно неизвестного распределения можно провести статистический анализ, получив на основе выборки

$$\mathbf{x}_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(M)})$$

эмпирическую функцию распределения и выборочные моменты. При этом вычисление указанных характеристик в другой момент времени  $t = t_2$  может привести к отличающимся результатам.

Одномерный закон распределения является простейшей характеристикой случайного процесса, дающей представление о процессе лишь в отдельные моменты времени, но не указывающей, например, как значения  $\xi(t_1)$  в момент времени  $t_1$  влияют на дальнейшее поведение процесса. Можно сказать, что одномерный закон распределения характеризует процесс “статически” и не даёт представления о динамике его развития. Следовательно, для повышения “информативности” описания случайного процесса необходимо рассматривать совместные (многомерные) законы распределения, получаемые в различных временных сечениях.

Так, для двух различных моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  можно рассмотреть совместную функцию распределения

$$F_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\xi(x_1) < t_1, \xi(x_2) < t_2)$$

или совместную плотность вероятности

$$w_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial F_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

являющиеся функциями четырёх аргументов. Статистический анализ в этом случае проводится на основе выборки, содержащей пары значений

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left( (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}), \dots, (x_1^{(M)}, x_2^{(M)}) \right).$$

В общем случае на временных сечениях  $t_1, \dots, t_n$  рассматриваются  $n$ -мерные законы распределения

$$F_{\xi}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(\xi(x_1) < t_1, \dots, \xi(x_n) < t_n),$$

$$w_{\xi}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial F_{\xi}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

или статистическая выборка, содержащая  $n$ -элементные наборы

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \left( (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}), \dots, (x_1^{(M)}, \dots, x_n^{(M)}) \right).$$

Совокупностью конечномерных распределений можно охарактеризовать как непрерывные, так и дискретные (по значениям и времени) процессы. В том случае, когда временные сечения рассматриваются на дискретных отсчётах, случайные процессы принято называть *случайными последовательностями*. Как не парадоксально, но в настоящее время именно случайные последовательности являются более общим понятием, поскольку современные методы цифровой обработки сигналов подразумевают работу с дискретизированными значениями, даже если исходное сообщение являлось непрерывным по своей природе.

Последовательность конечномерных законов распределения, например, функций распределения  $F_{\xi}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , по мере увеличения  $n$  всё более полно характеризует процесс, причём в силу условия согласованности (см. разд. 1.2.2) функция распределения  $n$ -го порядка содержит полную информацию обо всех функциях распределения порядка  $k < n$ . Обратное, вообще говоря, не верно: восстановить закон распределе-



ния  $n$ -го порядка даже зная все распределения более низких порядков — невозможно. Однако существуют некоторые классы процессов, составляющие исключение из этого общего правила.

Заметим сначала, что для детерминированного (неслучайного) процесса  $s(t)$  многомерный закон распределения представляет собой произведение дельта-функций:

$$w_s^{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n \delta(x_k - s_k), \quad (1.5.1)$$

где  $s_k = s(t_k)$ .

Далее, используя условное распределение, нетрудно получить выражение для  $n$ -мерного закона распределения квазидетерминированного процесса, т. е. процесса, который задаётся детерминированной функцией, содержащей случайные параметры. Рассмотрим простейший случай, когда имеется один случайный параметр  $\gamma$ , описываемый плотностью  $w_\gamma(c)$ .

Пусть известно значение  $s_1 = s(t_1, \gamma)$  сигнала в начальный момент времени  $t_1$ . Обозначим через  $Q$  функцию, обратную функции  $s$  относительно параметра  $\gamma$ :

$$\gamma = Q(t_1, s_1).$$

Тогда в произвольные последующие моменты времени  $t_k \neq t_1$  имеем следующие детерминированные значения:

$$s_k = s[t_k, Q(t_1, s_1)].$$

Если теперь  $w_s(x, t)$  — одномерная плотность вероятности рассматриваемого процесса, то по правилу умножения вероятностей и с учётом (1.5.1)

$$\begin{aligned} w_s^{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) &= w_s(x_1, t_1) w_s^{(n-1)}(x_2, \dots, x_n; t_2, \dots, t_n / x_1, t_1) = \\ &= w_s(x_1, t_1) \prod_{k=2}^n \delta(x_k - s_k). \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Можно показать, что одномерная плотность вероятности  $w_s(x, t)$  процесса  $s(t)$  связана с плотностью вероятности  $w_\gamma(c)$  случайного параметра  $\gamma$  следующим выражением:

$$w_s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_\gamma(c) \exp[ju(s(t, c) - x)] dc du.$$

Если говорить о собственно случайных (недетерминированных) процессах, для которых вся вероятностная информация содержится в одно-

мерном распределении, то простейшим примером является модель *процесса с независимыми значениями*, для которого отсчётные значения  $\xi_k = \xi(t_k)$  в любые моменты времени представляют собой взаимно независимые случайные величины. Следовательно, любое многомерное распределение таких процессов факторизуется, т. е. представляет собой произведение одномерных распределений, аналогично (1.5.1).

Предельная простота модели процесса с независимыми значениями делает её неадекватной любым реальным физическим процессам. Несмотря на это, в настоящее время она активно используется в теоретических исследованиях (особенно в модификации — модели *процесса с некоррелированными значениями*), поскольку позволяет получить в замкнутой форме решение многих задач, связанных с обработкой сигналов.

Гораздо более адекватной реальным физическим процессам является модель *процесса с независимыми приращениями*. Процесс  $\xi(t)$ , описываемый такой моделью, обладает тем свойством, что для любых моментов времени

$$t_i < t_j \leq t_k < t_n$$

случайные величины  $\xi(t_j) - \xi(t_i)$  и  $\xi(t_n) - \xi(t_k)$  оказываются независимыми. Любое конечномерное распределение процесса с независимыми приращениями определяется одномерным распределением приращений, т. е. двумерным распределением самого процесса.

Наконец, классом процессов, полное вероятностное описание которых даётся распределениями меньших порядков, являются широко используемые в задачах связи и управления *марковские процессы*.

Марковский процесс — это процесс без последствия: его развитие после определённого временного значения  $t_0$  не зависит от значений в предшествующие моменты  $t < t_0$ . Аналитически условие отсутствия последствия может быть записано через условное распределение. Например, при зависимости только от одного предыдущего отсчёта

$$w_\xi(x_n, t_n / x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1}) = w_\xi(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (1.5.3)$$

Тогда, на основе “цепочки” условных вероятностей

$$w_\xi^{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w_\xi(x_1, t_1) w_\xi(x_2, t_2 / x_1, t_1) \times \\ \times w_\xi(x_3, t_3 / x_1, x_2; t_1, t_2) \cdots w_\xi(x_n, t_n / x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1})$$

находим условие факторизации многомерного распределения марковского процесса:

$$w_{\xi}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w_{\xi}(x_1, t_1) \prod_{k=2}^n w_{\xi}(x_k, t_k / x_{k-1}, t_{k-1}). \quad (1.5.4)$$

В настоящее время имеется обширная литература, посвящённая теории марковских процессов, и её изложение в рамках данного пособия вряд ли целесообразно. Некоторые свойства и особенности марковских процессов будут приведены во второй главе при рассмотрении методов моделирования таких процессов.

Как уже говорилось, вероятностные или статистические характеристики случайного процесса оказываются зависящими от тех временных сечений, в которых они построены, и сдвиг во временных аргументах на какую-либо величину  $\tau$  приводит к распределению

$$w_{\xi}^{(n)}(x_1, t_1 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau),$$

вообще говоря, отличающемся от изначального. В этой связи выделяют специальный класс случайных процессов, называемых *стационарными*, которые с позиции вероятностного описания оказываются “нечувствительными” к подобным возмущениям.

В теории различают стационарность в узком и широком смыслах. Случайный процесс называется *стационарным в узком смысле (строго стационарным)*, если *все* его многомерные распределения не зависят от произвольного временного сдвига, т. е. если для произвольного  $\tau$  выполняется условие

$$w_{\xi}^{(n)}(x_1, t_1 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau) = w_{\xi}^{(n)}(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n). \quad (1.5.5)$$

Однако на практике задачи, связанные с анализом совместных распределений порядков  $n = 3$  и выше, встречаются крайне редко, поэтому с практической точки зрения требование инвариантности распределений к произвольному временному сдвигу достаточно ограничить одно- и двумерными распределениями. Такие процессы называют *стационарными в широком смысле (слабо стационарными)*.

### 1.5.1. Корреляционная функция и энергетический спектр случайных процессов

Следствием стационарности является то, что одномерные характеристики (закон распределения, моменты) от времени вообще не зависят, а

двумерные оказываются зависящими лишь от разности временных аргументов  $\tau = t_1 - t_2$ . В частности, *ковариационная функция*

$$b_{\xi}(t_1, t_2) = \mu_{11}[\xi(t_1), \xi(t_2)] = \mathbf{E}[\xi(t_1)\xi(t_2)] - \mathbf{E}[\xi(t_1)]\mathbf{E}[\xi(t_2)].$$

Ковариационная функция случайного процесса  $\xi(t)$  обладает свойством симметричности

$$b_{\xi}(t_1, t_2) = b_{\xi}(t_2, t_1),$$

а также свойством неотрицательной знакоопределённости, состоящим в том, что для произвольных временных отсчётов  $t_1, \dots, t_n$  и произвольного набора вещественных чисел  $c_1, \dots, c_n$  справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{\xi}(t_k, t_l) c_k c_l \geq 0.$$

Другими словами, ковариационная функция является симметричным ядром неотрицательно определённой квадратичной формы.

Для корреляционной функции справедливо неравенство Коши — Буныковского:

$$b_{\xi}^2(t_1, t_2) \leq \mathbf{E}[\xi^2(t_1)] \mathbf{E}[\xi^2(t_2)].$$

Для стационарного процесса выражение для корреляционной функции принимает вид

$$b_{\xi}(\tau) = \mathbf{E}[\xi(t)\xi(t+\tau)] - m_{\xi}^2, \quad (1.5.6)$$

где  $m_{\xi}$  — не зависящее от времени математическое ожидание процесса. В выражении (1.5.6) первое слагаемое обычно называют *корреляционной функцией*:

$$R_{\xi}(\tau) = \mathbf{E}[\xi(t)\xi(t+\tau)]; \quad (1.5.7)$$

при нулевом среднем ковариационная и корреляционная функции процесса совпадают. В дальнейшем термины “ковариационная функция” и “корреляционная функция” часто будут использоваться как синонимы.

При нулевом значении аргумента ковариационная функция стационарного процесса имеет максимальное значение, равное дисперсии:

$$b_{\xi}(0) = \mathbf{D}[\xi(t)].$$

Нормированную на дисперсию ковариационную функцию

$$r_{\xi}(\tau) = \frac{\mathbf{E}[\xi(t)\xi(t+\tau)] - m_{\xi}^2}{\mathbf{D}[\xi(t)]} = \frac{R_{\xi}(\tau) - m_{\xi}^2}{b_{\xi}(0)} \quad (1.5.8)$$

называют *коэффициентом корреляции*.

Анализируя корреляционную функцию стационарного процесса, можно определить *время (интервал) корреляции*  $T_{\text{корр}}$  — временной разности между отсчётами, которые можно считать практически некоррелированными:

$$T_{\text{корр}} = \frac{1}{b(0)} \int_0^{\infty} b(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} r(\tau) d\tau. \quad (1.5.9)$$

Отметим, что в литературе встречаются и другие способы определения времени корреляции, отличные от (1.5.9). В частности, для монотонно убывающих функций  $r(\tau)$  время корреляции часто определяют по уменьшению значения относительно максимума в два раза или в  $e$  раз.

Рассмотрим некоторые примеры модельных случайных процессов и определим их ковариационные (корреляционные) функции.

### Пуассоновский процесс

Пуассоновский процесс  $\pi(t)$  — целочисленный процесс с независимыми приращениями (рис. 1.16), для которого вероятности  $p_k$  отдельных значений определяются выражением

$$p_k = P(\pi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t), \quad (1.5.10)$$

где  $\lambda > 0$  — параметр пуассоновского процесса, имеющий размерность, обратную времени. Обычно считают, что пуассоновский процесс начинается из нуля:  $\pi(t) = 0$ .

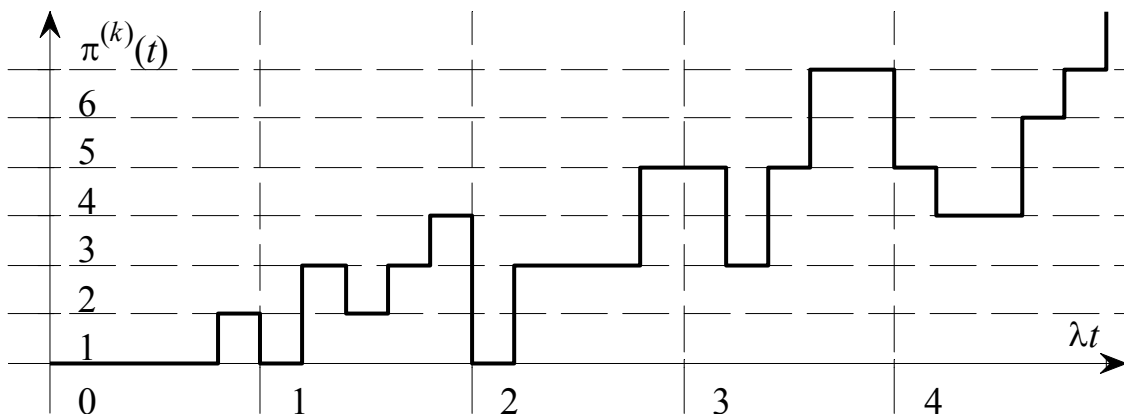


Рис. 1.16. Реализация пуассоновского процесса

Математическое ожидание пуассоновского процесса

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\pi(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t) = \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{k!} = \\ &= \exp(-\lambda t) \exp(\lambda t) \lambda t = \lambda t,\end{aligned}$$

и его зависимость от времени указывает на нестационарность процесса.

Вычисление дисперсии проводится аналогичным образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[\pi(t)] &= \mathbf{E}[\pi^2(t)] - \mathbf{E}^2[\pi(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t) - (\lambda t)^2 = \\ &= \lambda t \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \lambda t \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - (\lambda t)^2 = \lambda t.\end{aligned}$$

Равенство математического ожидания и дисперсии — отличительный признак пуассоновского процесса.

Найдём корреляционную функцию

$$b_{\pi}(t_1, t_2) = \mathbf{E}[\pi(t_1)\pi(t_2)] - \mathbf{E}[\pi(t_1)]\mathbf{E}[\pi(t_2)].$$

При  $t_1 \leq t_2$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\pi(t_1)\pi(t_2)] &\equiv \mathbf{E}[\pi(t_1)(\pi(t_2) - \pi(t_1) + \pi(t_1))] = \\ &= \mathbf{E}[\pi(t_1)(\pi(t_2) - \pi(t_1))] + \mathbf{E}[\pi^2(t_1)],\end{aligned}$$

а условие независимости приращений позволяет факторизовать математическое ожидание:

$$\mathbf{E}[\pi(t_1)(\pi(t_2) - \pi(t_1))] = \mathbf{E}[\pi(t_1)]\mathbf{E}[\pi(t_2) - \pi(t_1)] = \lambda t_1 \lambda (t_2 - t_1).$$

Таким образом,

$$b_{\pi}(t_1, t_2) = \lambda t_1.$$

Аналогично, при  $t_2 \leq t_1$

$$\mathbf{E}[\pi(t_1)\pi(t_2)] \equiv \mathbf{E}[(\pi(t_1) - \pi(t_2) + \pi(t_2))\pi(t_2)]$$

и

$$b_{\pi}(t_1, t_2) = \lambda t_1.$$

Объединяя оба случая, получаем

$$b_{\pi}(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2). \quad (1.5.11)$$

Пуассоновский процесс является в некотором роде элементарным (базовым) процессом; многие стационарные процессы образуются в результате преобразования пуассоновского процесса.

## Телеграфный сигнал

Телеграфным сигналом называют процессы, имеющие вид “случайной прямоугольной волны” (рис. 1.17).

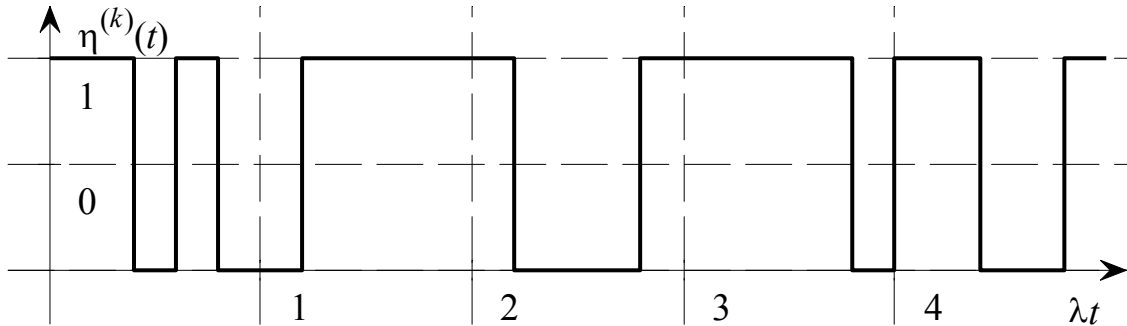


Рис. 1.17. Реализация телеграфного сигнала

Зададим телеграфный сигнал  $\eta(t)$  следующим образом:

$$\eta(t) = \alpha(-1)^{\pi(t)}, \quad (1.5.12)$$

где  $\pi(t)$  — рассмотренный выше пуассоновский процесс, а  $\alpha$  — независимый от  $\pi(t)$  случайный параметр, принимающий равновероятно значения  $\pm 1$ :

$$P(\alpha = +1) = P(\alpha = -1) = \frac{1}{2}.$$

Эти условия (равновероятность противоположных значений и независимость от  $\pi(t)$ ), очевидно, обеспечивают нулевое математическое ожидание телеграфного сигнала.

Корреляционная функция

$$b_{\eta}(t_1, t_2) = \mathbf{E}[\alpha^2] \mathbf{E}[(-1)^{\pi(t_1)+\pi(t_2)}] = \mathbf{E}[(-1)^{\pi(t_1)+\pi(t_2)}].$$

При  $t_1 \leq t_2$

$$b_{\eta}(t_1, t_2) = \mathbf{E}[(-1)^{\pi(t_2)+\pi(t_1)}] = \mathbf{E}[(-1)^{\pi(t_2)-\pi(t_1)}].$$

Для вычисления математического ожидания учтём, что вероятность значений  $\pm 1$  определяется временем  $t_2 - t_1$  приращения процесса  $\pi(t_2) - \pi(t_1)$  и равна

$$\lambda^k (t_2 - t_1)^k / k!.$$

Тогда

$$b_{\eta}(t_1, t_2) = \exp[-\lambda(t_2 - t_1)] \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda t_2 - \lambda t_1)^k}{k!} = \exp[-2\lambda(t_2 - t_1)].$$

Аналогично при  $t_2 \leq t_1$

$$\begin{aligned} b_{\eta}(t_1, t_2) &= \mathbf{E} \left[ (-1)^{\pi(t_1) - \pi(t_2)} \right] = \\ &= \exp[-\lambda(t_1 - t_2)] \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda t_1 - \lambda t_2)^k}{k!} = \exp[-2\lambda(t_1 - t_2)]. \end{aligned}$$

Введя разностный временной аргумент  $\tau = t_1 - t_2$ , запишем

$$b_{\eta}(t_1, t_2) = b_{\eta}(t_1 - t_2) = \exp(-2\lambda |t_1 - t_2|) = \exp(-2\lambda |\tau|). \quad (1.5.13)$$

При  $\tau = 0$  получаем дисперсию процесса:

$$\mathbf{D}[\eta(t)] = 1.$$

Независимость математического ожидания и дисперсии от времени, а также тот факт, что корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов, определяют стационарность в широком смысле телеграфного сигнала.

Интервал корреляции такого стационарного процесса согласно (1.5.9) равен  $1/(2\lambda)$ .

### Случайное гармоническое колебание

Случайное гармоническое колебание — это квазидетерминированный процесс вида

$$\xi(t) = \alpha \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

у которого детерминированная частота  $\omega_0$ , а амплитуда  $\alpha$  и начальная фаза  $\varphi$  — не зависящие друг от друга случайные параметры (рис. 1.18).

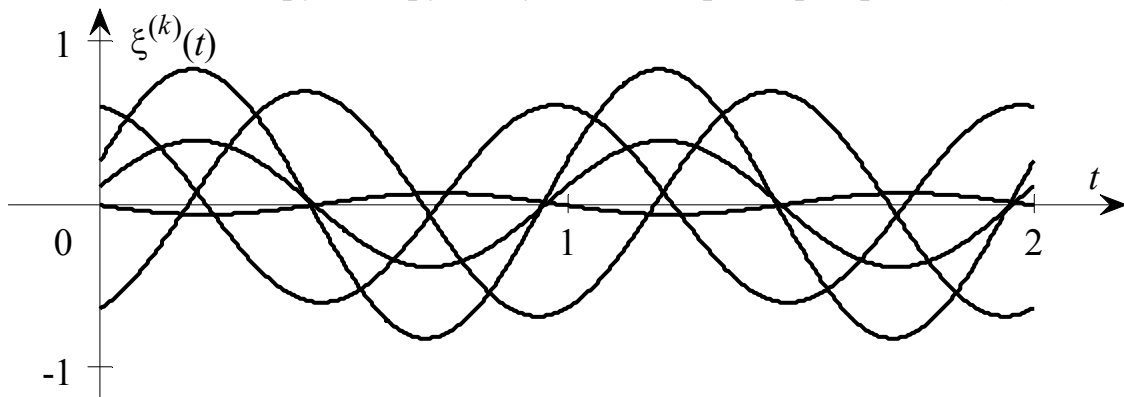


Рис. 1.18. Реализации случайного гармонического колебания



Найдём условия, при которых процесс  $\xi(t)$  является стационарным в широком смысле.

Математическое ожидание

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\xi(t)] &= \mathbf{E}[\alpha] \mathbf{E}[\cos(\omega_0 t + \varphi)] = \\ &= \mathbf{E}[\alpha] (\mathbf{E}[\cos \omega_0 t] \mathbf{E}[\cos \varphi] - \mathbf{E}[\sin \omega_0 t] \mathbf{E}[\sin \varphi]) \end{aligned}$$

при ненулевом  $\mathbf{E}[\alpha]$  не будет зависеть от времени только в случае, когда

$$\mathbf{E}[\cos \varphi] = \mathbf{E}[\sin \varphi] = 0.$$

Удовлетворить этому условию можно, если предположить, что фаза имеет равномерное распределение на периоде изменения синуса или косинуса, например, на интервале  $[0; 2\pi)$ , что соответствует физическому смыслу:

$$\mathbf{E}[\cos \varphi] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \mathbf{E}[\sin \varphi].$$

При этом корреляционная функция с учётом равномерного распределения начальной фазы

$$\begin{aligned} R_\xi(\tau) &= \mathbf{E}[\alpha^2] \mathbf{E}[\cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0(t + \tau) + \varphi)] = \\ &= \mathbf{E}[\alpha^2] \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi) + \cos(\omega_0 \tau)] d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}[\alpha^2] \cos(\omega_0 \tau) \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

зависит только от разности временных аргументов, что и является признаком стационарности, хотя бы в широком смысле, рассматриваемого процесса.

Интервал корреляции значений случайного гармонического колебания равен бесконечности, что говорит о жёсткой вероятностной связи между любыми отсчётами в любой реализации процесса.

Корреляционная функция представляет собой вероятностную характеристику связи отсчётов случайного процесса во временной области. Удивителен тот факт, что корреляционная функция оказывается однозначно связана с характеристикой процесса в спектральной области, где основными объектами изучения являются Фурье-образы.

Как известно [8], Фурье-анализ часто и весьма успешно применяется при изучении детерминированных процессов: ряды Фурье — для периодических; интеграл Фурье — для непериодических сигналов. Возникает есте-

ственное желание иметь столь же эффективный математический аппарат для изучения случайных процессов, однако его непосредственное использование затруднительно, поскольку нет гарантии, что все реализации процесса удовлетворят условиям применимости Фурье-анализа, например, условию абсолютной интегрируемости всех реализаций. В этой связи возникает необходимость построения такой математической конструкции, которая, с одной стороны, была бы корректна по отношению ко всему ансамблю реализаций процесса, а с другой — соответствовала бы тем физическим операциям, которым подвергается процесс при анализе или синтезе в реальной аппаратуре. Такая математическая конструкция называется *энергетическим спектром случайного процесса*.

Математически конструкция энергетического спектра строится следующим образом. Из всей совокупности реализаций случайного процесса  $\xi(t)$  выбирается произвольная  $k$ -я реализация  $\xi^{(k)}(t)$ , которая затем усечается на некотором конечном интервале наблюдения  $T$ . Для определённости будем считать, что усечение симметрично, так что усечённая  $k$ -я реализация  $\xi_T^{(k)}(t)$  равна

$$\xi_T^{(k)}(t) = \begin{cases} \xi^{(k)}(t), & |t| \leq T/2; \\ 0, & |t| > T/2. \end{cases}$$

Усечение реализации обеспечивает её абсолютную интегрируемость, поэтому правомочно рассмотреть спектр (преобразование Фурье)  $S_T^{(k)}(\omega)$  усечённой реализации<sup>1</sup>:

$$S_T^{(k)}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \xi_T^{(k)}(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

$S_T^{(k)}(\omega)$  является случайной комплексной функцией, она физически неизмеряема; реальный физический смысл имеет квадрат её модуля, отнесённый к интервалу наблюдения:

$$G_T^{(k)}(\omega) = \frac{1}{T} |S_T^{(k)}(\omega)|^2.$$

---

<sup>1</sup> Обозначение  $\omega$  для спектральной компоненты не следует путать с обозначением элементарного исхода.

Если  $\xi_T^{(k)}(t)$  — напряжение или ток, фиксируемые на нагрузке сопротивлением 1 Ом, то  $G_T^{(k)}(\omega)$  — это спектральная плотность мощности, отнесенная к полосе  $\Delta F = 1/T$  Гц.

Далее, естественным желанием было бы определить результирующую спектральную характеристику предельным переходом

$$\lim_{T \rightarrow \infty} G_T^{(k)}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| S_T^{(k)}(\omega) \right|^2,$$

но, к сожалению, нельзя утверждать, что этот предел сходится к какой-либо неслучайной величине. Поэтому следующим необходимым действием является усреднение  $G_T^{(k)}(\omega)$  по всем реализациям процесса:

$$G_T(\omega) = \mathbf{E} \left[ G_T^{(k)}(\omega) \right],$$

после чего уже становится правомерной желаемая операция предельного перехода с получением энергетического спектра  $G(\omega)$  — усреднённой по всему ансамблю реализаций спектральной характеристики процесса:

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbf{E} \left[ \left| S_T^{(k)}(\omega) \right|^2 \right]. \quad (1.5.15)$$

Подчеркнём, что  $G(\omega)$  даёт лишь усреднённую картину распределения энергии процесса по спектральным составляющим и никак не учитывает фазовую структуру спектров отдельных реализаций.

Фундаментальным свойством является однозначная связь между энергетическим спектром  $G(\omega)$  стационарного процесса и его корреляционной функцией  $b(\tau)$  в виде пары преобразований Фурье:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau; \\ b(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

Соотношения (1.5.16) принято называть *теоремой Винера — Хинчина*.

Например, для модели телеграфного сигнала с корреляционной функцией из (1.5.16) имеем энергетический спектр

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\lambda |\tau|) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \frac{4\lambda}{\omega^2 + 4\lambda^2}. \quad (1.5.17)$$

### 1.5.2. Эргодические процессы. Экспериментальное определение основных характеристик случайных процессов

При теоретическом исследовании случайных процессов обычно оперируют с ансамблем реализаций, в частности, получение большинства вероятностных характеристик осуществляется посредством усреднения по ансамблю. Например, при построении конструкции энергетического спектра ключевой является операция усреднения по ансамблю величин  $G_T^{(k)}(\omega)$ . Однако на практике за ограниченный промежуток времени, как правило, можно получить лишь одну реализацию, и то усечённую. В этой связи ставится вопрос о возможности работы с аналогами “ансамблевых” характеристик, но полученных на основе временного усреднения по одной реализации. Для этих целей в теории случайных процессов выделяют специальный класс стационарных процессов, называемых *эргодическими*, которые обладают свойством идентичности характеристик, полученных усреднением по ансамблю и по времени. Более строго эргодичность определяют по отношению к конкретным вероятностным характеристикам.

#### Эргодичность по отношению к математическому ожиданию

Пусть стационарный процесс  $\xi(t)$ , характеризуемый математическим ожиданием  $\mathbf{E}[\xi(t)] = m_\xi$  и корреляционной функцией

$$R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_1 - t_2) \equiv R_\xi(\tau) = \mathbf{E}\left[(\xi(t) - m_\xi)(\xi(t - \tau) - m_\xi)\right],$$

наблюдается на временном интервале длительности  $T$ , и  $x(t)$  — наблюдаемая реализация. Тогда  $\xi(t)$  называется *эргодическим по отношению к среднему (математическому ожиданию)*, если

$$m_t \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x w_\xi(x) dx \equiv m_\xi. \quad (1.5.18)$$

Здесь, как обычно в теоретико-вероятностных приложениях, предельный переход и интеграл понимаются в среднеквадратичном смысле, т. е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt - m_\xi \right)^2 \right] = 0.$$

Фигурирующее в (1.5.18) временное среднее  $m_t$  практически недостижимо, поскольку для его определения требуется бесконечный интервал наблюдений, а на практике, как уже говорилось, доступно наблюдение

лишь за усечённой реализацией. Поэтому практический интерес представляет оценка временного среднего

$$m_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (1.5.19)$$

полученная на конечном интервале, которая, очевидно, является несмещённой и (по определению) состоятельной оценкой математического ожидания.

Найдём условия, при которых стационарный случайный процесс является эргодическим по отношению к своему среднему. Для этого распишем дисперсию оценки  $m_T$ , представив квадрат интеграла в виде двойного интеграла:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[m_T] &= \mathbf{E} \left[ (m_T - m_\xi)^2 \right] = \mathbf{E} \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt - m_\xi \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \mathbf{E} \left[ (x(t_1) - m_\xi)(x(t_2) - m_\xi) \right] dt_1 dt_2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T b_\xi(t_1 - t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

В силу симметричности корреляционной функции интеграл по квадрату  $[0; T] \times [0; T]$  равен удвоенному интегралу по треугольной области (рис. 1.19, где стрелками указано прохождение области). Тогда, переходя от переменных  $(t_1, t_2)$  к переменным  $(t_1, \tau = t_1 - t_2)$ , имеем

$$\mathbf{D}[m_T] = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^{t_1} b_\xi(\tau) d\tau dt_1,$$

и после интегрирования по частям получаем

$$\mathbf{D}[m_T] = \frac{2}{T^2} \left( T \int_0^T b_\xi(\tau) d\tau - \int_0^T \tau b_\xi(\tau) d\tau \right) = \frac{2}{T} \int_0^T \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right) b_\xi(\tau) d\tau.$$

Таким образом, эргодичность процесса относительно своего среднего, определяемая нулевой дисперсией оценки  $m_T$ , эквивалентна условию

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right) b_\xi(\tau) d\tau = 0, \quad (1.5.20)$$

определяемому видом корреляционной функции.

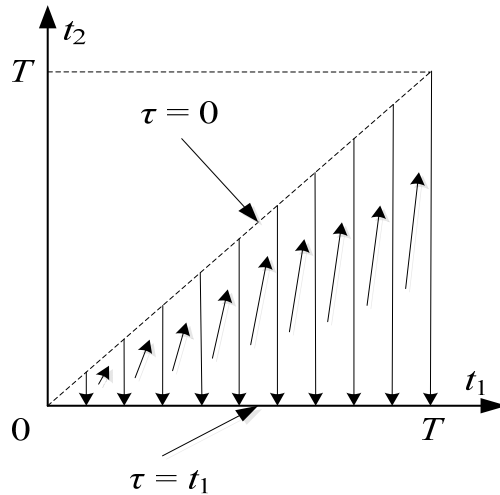


Рис. 1.19. К определению области интегрирования

Например, для корреляционной функции (1.5.13) телеграфного сигнала дисперсия оценки  $m_T$ , т. е. фигурирующий в (1.5.20) интеграл равен

$$\mathbf{D}[m_T] = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) b_\xi(\tau) d\tau = 2 \frac{2\lambda T + \exp(-2\lambda T) - 1}{(2\lambda T)^2}, \quad (1.5.21)$$

так что при  $T \rightarrow \infty$  обеспечивается выполнение условия эргодичности.

Из соотношения (1.5.20) вытекают *достаточные условия эргодичности относительно математического ожидания*, в частности,

$$\frac{1}{T} \int_0^T b_\xi(\tau) d\tau \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (1.5.22)$$

и совсем простое

$$b_\xi(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0. \quad (1.5.23)$$

Так, в рассмотренном выше примере корреляционная функция случайного гармонического колебания удовлетворяет достаточному условию (1.5.22):

$$\mathbf{E}[\alpha^2] \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega_0 \tau) d\tau = \mathbf{E}[\alpha^2] \frac{1}{T} (\sin \omega_0 T - 1) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0,$$

на основании чего можно утверждать об эргодичности такого процесса.

### Эргодичность по отношению к дисперсии

Пусть по усечённой реализации  $\xi_T(t)$  требуется оценить дисперсию стационарного процесса  $\sigma_\xi^2$ . При этом следует, вообще говоря, различать два случая:

• математическое ожидание  $m_\xi$  процесса известно, тогда оценкой дисперсии является

$$\sigma_{1T}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_\xi)^2 dt, \quad (1.5.24a)$$

• математическое ожидание процесса неизвестно, и используется его оценка  $m_T$ , вычисленная по усечённой реализации, тогда оценкой дисперсии является

$$\sigma_{2T}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_T)^2 dt. \quad (1.5.24б)$$

Назовём стационарный процесс  $\xi(t)$  эргодическим по отношению к дисперсии, если

$$\sigma_{1t}^2 \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_\xi)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^2 w_\xi(x) dx \equiv \sigma_\xi^2 \quad (1.5.25a)$$

или

$$\sigma_{2t}^2 \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_T)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_T)^2 w_\xi(x) dx \equiv \hat{\sigma}_\xi^2. \quad (1.5.25б)$$

Рассмотрим статистические свойства оценок (1.5.25). Вычисляя математическое ожидание от обеих частей (1.5.25a), убеждаемся, что эта оценка — несмещённая при любом значении  $T$ :

$$\mathbf{E}[\sigma_{1T}^2] = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}[(x(t) - m_\xi)^2] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{D}[\xi(t)] dt = \mathbf{D}[\xi(t)] \equiv \sigma_\xi^2.$$

Дисперсия такой оценки равна

$$\mathbf{D}[\sigma_{1T}^2] = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \mathbf{E}[(x(t_1) - m_\xi)^2 (x(t_2) - m_\xi)^2] dt_1 dt_2 - \sigma_\xi^2. \quad (1.5.26)$$

Вычисление (1.5.26) для произвольного стационарного процесса представляется затруднительным, поэтому ограничимся случаем гауссовских процессов, для которых, как нетрудно показать [7],

$$\mathbf{E}[\xi^2(t)\xi^2(t+\tau)] = \sigma_\xi^4 + (2R_\xi^2(\tau) + 2\sigma_\xi^2 + 4R_\xi) m_\xi^2 + m_\xi^4. \quad (1.5.27)$$

Тогда, подставив (1.5.27) в (1.5.26), получим

$$\mathbf{D}[\sigma_{1T}^2] = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^T b_\xi^2(t_1 - t_2) dt_1 dt_2,$$

т. е. выражение, по форме идентичное дисперсии оценки  $m_T$  с той лишь разницей, что подынтегральное выражение представляет собой не корреляционную функцию, а её квадрат. Отсюда, требуя состоятельность оценки  $\mathbf{D}[\sigma_{1T}^2]$ , можно сразу выписать критерий эргодичности процесса по отношению к дисперсии:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) b_\xi^2(\tau) d\tau = 0, \quad (1.5.28)$$

и достаточное условие

$$\frac{1}{T} \int_0^T b_\xi^2(\tau) d\tau \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (1.5.29)$$

(достаточное условие (1.5.23) по-прежнему в силе). Также из (1.5.28) следует выражение для оценки  $\sigma_{1T}^2$  при больших интервалах наблюдения:

$$\mathbf{D}[\sigma_{1T}^2] \approx \frac{4}{T} \int_0^T b_\xi^2(\tau) d\tau. \quad (1.5.30)$$

Итак, использование несмещённой состоятельной оценки (1.5.25а) обеспечивает эргодичность процесса по отношению к своей дисперсии, если корреляционная функция удовлетворяет критерию (1.5.28).

Нетрудно показать, что аналогичный результат (обеспечение эргодичности) достигается и при использовании оценки (1.5.25б) с той лишь особенностью, что она оказывается смещённой. Действительно:

$$\begin{aligned} \sigma_{2T}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_\xi + m_\xi - m_T)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_\xi)^2 dt - (m_T - m_\xi)^2 = \\ &= \sigma_{2T}^2 - (m_T - m_\xi)^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\mathbf{E}[\sigma_{2T}^2] = \mathbf{E}[\sigma_{1T}^2] - \mathbf{E}[(m_T - m_\xi)^2] = \sigma_\xi^2 - \mathbf{D}[m_T].$$

### **Эргодичность по отношению к корреляционной функции**

При оценивании корреляционной функции, как и при оценивании дисперсии, необходимо различать два случая: когда математическое ожидание  $m_\xi$  известно и когда оно неизвестно, и используется его оценка  $m_T$ .

Пусть математическое ожидание процесса известно, тогда выберем в качестве оценки корреляционной функции величину



$$b_T(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} (x(t) - m_\xi)(x(t+\tau) - m_\xi) dt, & 0 \leq \tau \leq T; \\ 0, & \tau > T. \end{cases} \quad (1.5.31a)$$

Процесс  $\xi(t)$  называется *эргодическим по отношению к корреляционной функции*, если

$$\begin{aligned} b_t(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} (x(t) - m_\xi)(x(t+\tau) - m_\xi) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m_\xi)(x(t+\tau) - m_\xi) w_\xi^{(2)}(x_1, x_2, \tau) dx \equiv b_\xi(\tau). \end{aligned} \quad (1.5.32)$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию оценки корреляционной функции. Имеем на интервале  $0 \leq |\tau| \leq T$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[b_T(\tau)] &= \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} \mathbf{E}[(x(t) - m_\xi)(x(t+\tau) - m_\xi)] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} b_\xi(\tau) dt = \frac{T-\tau}{T} b_\xi(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) b_\xi(\tau). \end{aligned} \quad (1.5.33)$$

Видно, что оценка  $b_T(\tau)$  смещённая, хотя и асимптотически несмещённая при  $T \rightarrow \infty$ . В этой связи интерес представляет модифицированная несмещённая при произвольном конечном  $T$  оценка корреляционной функции<sup>1</sup>

$$b_T^*(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} (x(t) - m_\xi)(x(t+\tau) - m_\xi) dt, & 0 \leq \tau \leq T; \\ 0, & \tau > T. \end{cases} \quad (1.5.31б)$$

Вычислим дисперсию оценки  $b_T(\tau)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[b_T(\tau)] &= \mathbf{E}\left[(b_T(\tau) - \mathbf{E}[b_T(\tau)])^2\right] = \\ &= \mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} [(x(t) - m_\xi)(x(t+\tau) - m_\xi)] dt - b_\xi(\tau)\right)^2\right] = \frac{1}{T^2} \int_0^{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \left\{ \mathbf{E}[(x(t_1) - m_\xi) \times \right. \\ &\quad \left. \times (x(t_1 + \tau) - m_\xi)(x(t_2) - m_\xi)(x(t_2 + \tau) - m_\xi)] - b_\xi^2(\tau) \right\} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Оценке  $b_T^*(\tau)$ , однако, присущ ряд недостатков: она имеет заметно большую, по сравнению с  $b_T(\tau)$ , дисперсию; кроме того, она не является знакоопределённой, что затрудняет её использование при ортогональных представлениях процессов.

Как и в случае (1.5.26), дальнейшая конкретизация  $\mathbf{D}[b_T(\tau)]$  возможна лишь применительно к частным видам процессов, для которых известно выражение моментной функции четвёртого порядка. В частности, можно показать, что для гауссовского стационарного процесса

$$\mathbf{D}[b_T(\tau)] = \frac{1}{T^2} \int_0^{T-\tau} \int_0^{T-\tau} (b_\xi^2(t_2 - t_1) + b_\xi(t_2 - t_1 + \tau)b_\xi(t_2 - t_1 - \tau)) dt_1 dt_2. \quad (1.5.34)$$

Перейдя к новым переменным  $t = t_2 - t_1$ ,  $s = t_1$  (рис. 1.20), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[b_T(\tau)] &= \frac{1}{T^2} \int_{-T+\tau}^0 (b_\xi^2(t) + b_\xi(t + \tau)b_\xi(t - \tau)) dt \int_{-t}^{T-\tau} ds + \\ &+ \frac{1}{T^2} \int_0^{T-\tau} (b_\xi^2(t) + b_\xi(t + \tau)b_\xi(t - \tau)) dt \int_0^{T-\tau-t} ds = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T+\tau}^{T-\tau} \left(1 - \frac{\tau + |t|}{T}\right) (b_\xi^2(t) + b_\xi(t + \tau)b_\xi(t - \tau)) dt. \end{aligned} \quad (1.5.35)$$

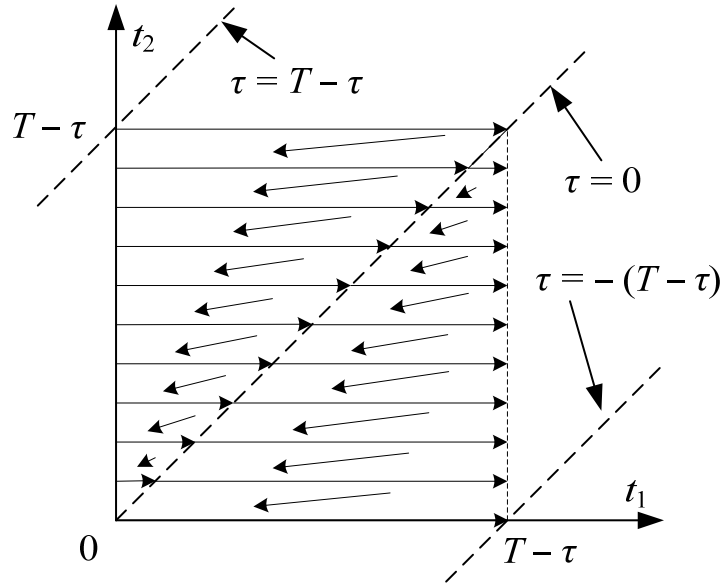


Рис. 1.20. Области интегрирования

Таким образом, критерий эргодичности стационарного гауссовского процесса по отношению к своей корреляционной функции имеет следующий вид:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T+\tau}^{T-\tau} \left(1 - \frac{\tau + |t|}{T}\right) (b_\xi^2(t) + b_\xi(t + \tau)b_\xi(t - \tau)) dt = 0. \quad (1.5.36)$$

Достаточным условием такой эргодичности является

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T+\tau}^{T-\tau} (b_{\xi}^2(t) + b_{\xi}(t+\tau)b_{\xi}(t-\tau)) dt = 0. \quad (1.5.37)$$

Из (1.5.35) также следует выражение для приближённого значения дисперсии оценки:

$$\mathbf{D}[b_T(\tau)] \approx \frac{1}{T} \int_{-T+\tau}^{T-\tau} (b_{\xi}^2(t) + b_{\xi}(t+\tau)b_{\xi}(t-\tau)) dt. \quad (1.5.35a)$$

Итак, при больших значениях  $T$  математическое ожидание оценки  $b_T(\tau)$  практически равно истинной корреляционной функции  $b_{\xi}(\tau)$ , а её дисперсия пропорциональна  $1/T$ , так что при выполнении критерия (1.5.36) асимптотически несмещённая и состоятельная оценка (1.5.31) обеспечивает эргодичность по отношению к корреляционной функции.

Например, для гауссовского стационарного процесса с корреляционной функцией вида

$$b_{\xi}(\tau) = \sigma_0^2 \exp(-\tau^2 / \tau_0^2) \quad (1.5.36)$$

дисперсия оценки, вычисленная согласно (1.5.35), равна

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[b_T(\tau)] &= 2\sigma_0^2\beta \left[ 1 + \exp(-2\alpha^2 / \beta^2) \right] \times \\ &\times \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} (1 - \alpha) \operatorname{erf}(\sqrt{2}(1 - \alpha) / \beta) + \frac{\beta}{4} (\exp[-2(1 - \alpha)^2 / \beta^2] - 1) \right), \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

где для удобства введены параметры  $\alpha = \tau/T$ ,  $\beta = \tau_0/T$ , а  $\operatorname{erf}(z)$  — табулированная функция

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt.$$

На рис. 1.21 показано семейство зависимостей нормированной (на дисперсию самого процесса) дисперсии оценки корреляционной функции (1.5.37) от нормированного (на величину интервала наблюдения  $T$ ) времени при различных значениях параметра  $\beta$ . Видно, что с ростом  $\beta$ , т. е. с увеличением степени “размытости” корреляционной функции, дисперсия оценки корреляционной функции возрастает; наоборот, “островершинной” корреляционной функции соответствуют меньшие значения дисперсии оценки.

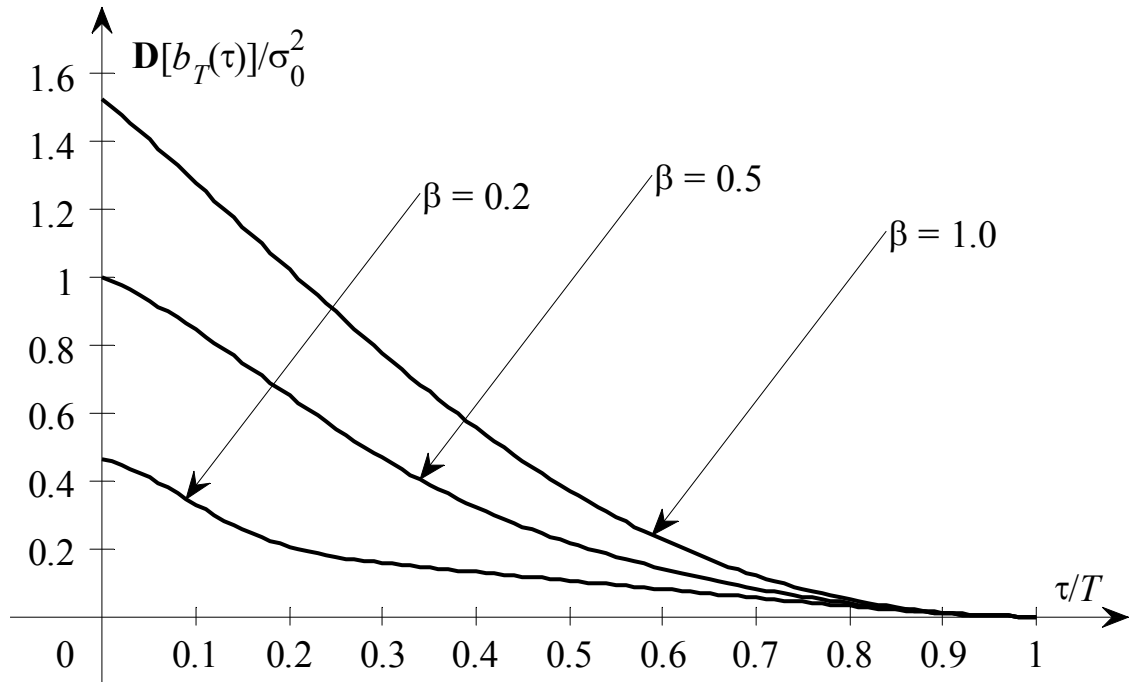


Рис. 1.21. Дисперсия оценки  $b_T(\tau)$

В том случае, когда математическое ожидание  $m_\xi$  процесса неизвестно, и используется его оценка  $m_T$  в качестве оценки корреляционной функции используется

$$b_{1T}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} (x(t) - m_T)(x(t + \tau) - m_T) dt, & 0 \leq \tau \leq T; \\ 0, & \tau > T. \end{cases} \quad (1.5.38)$$

При этом для математического ожидания и дисперсии оценки получаются выражения, аналогичные (1.5.33) и (1.5.35) соответственно, из которых следует, что оценка  $b_{1T}(\tau)$  – обладает большим смещением и большей дисперсией, чем  $b_T(\tau)$ .

### Эргодичность по отношению к энергетическому спектру

Энергетический спектр и корреляционная функция стационарного процесса однозначно связаны между собой, согласно теореме Винера — Хинчина, парой преобразований Фурье, т. е. содержат одинаковую информацию о случайном процессе. Однако, оказывается, что точность их экспериментального определения оказывается различной.

Теоретическая конструкция энергетического спектра  $G(\omega)$  процесса определяется (1.5.15) и содержит две практически нереализуемые операции: усреднение по ансамблю реализаций и предельный переход. Попыта-

емся приблизиться к этой конструкции, заменяя указанные операции временным усреднением.

Пусть, как обычно, на интервале длительностью  $T$  наблюдается реализация  $x(t)$ . Тогда спектр (преобразование Фурье)  $S_T(\omega)$  наблюдаемой реализации есть

$$S_T(\omega) = \int_0^T x(t) \exp(-j\omega t) dt .$$

Тогда характеристика

$$G_T(\omega) = \frac{1}{T} |S_T(\omega)|^2 ,$$

часто называемой *периодограммой*, имеет физический смысл спектральной плотности мощности наблюдаемой реализации, отнесённой к полосе  $\Delta F = 1/T$  Гц.

По аналогии с изложенным выше, примем  $G_T(\omega)$  за оценку истинного энергетического спектра  $G(\omega)$ , надеясь, что она окажется (хотя бы) асимптотически несмещённой и состоятельной.

Прежде всего, найдём связь между оценками  $G_T(\omega)$  энергетического спектра и  $b_T(\tau)$  корреляционной функции. Запишем

$$\frac{1}{T} |S_T(\omega)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T x(t_1) x(t_2) \exp[-j\omega(t_1 - t_2)] dt_1 dt_2 .$$

Сделаем замену переменных, перейдя от переменных  $t_1, t_2$  к переменным  $\tau = t_1 - t_2, s = t_2$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} |S_T(\omega)|^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-j\omega\tau) \left( \int_0^{T-\tau} x(s) x(s+\tau) ds \right) d\tau + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{-T}^0 \exp(-j\omega\tau) \left( \int_{-\tau}^T x(s) x(s+\tau) ds \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-j\omega\tau) \left( \int_0^{T-t} x(s) x(s+\tau) ds \right) d\tau + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{-T}^0 \exp(-j\omega\tau) \left( \int_0^{T+\tau} x(s) x(s-\tau) ds \right) d\tau . \end{aligned}$$

В получившемся соотношении внутренние интегралы представляют собой ни что иное, как  $b_T(\tau)$ , являющуюся чётной функцией. Тогда можно утверждать, что

$$G_T(\omega) = \int_{-T}^T b_T(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad (1.5.39a)$$

и

$$b_T(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_T(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega, \quad (1.5.39б)$$

т. е. оценка корреляционной функции (выборочная корреляционная функция) и оценка энергетического спектра (периодограмма) связаны между собой парой преобразования Фурье.

Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной функции  $G_T(\omega)$ . С учётом (1.5.33)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[G_T(\omega)] &= \int_{-T}^T \mathbf{E}[b_T(\tau)] \exp(-j\omega\tau) d\tau = \\ &= \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) b_\xi(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.5.40)$$

Тогда при условии конечности интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau| b_\xi(\tau) d\tau$$

при  $T \rightarrow \infty$  получается соотношение (1.5.16). Таким образом,  $G_T(\omega)$  — асимптотически несмещённая оценка энергетического спектра процесса  $\xi(t)$ .

При нахождении дисперсии

$$\mathbf{D}[G_T(\omega)] = \mathbf{E}[G_T^2(\omega)] - \mathbf{E}^2[G_T(\omega)]$$

ограничимся, как обычно, классом стационарных гауссовских процессов. При этом, для упрощения записи будем считать, что математическое ожидание процесса  $\xi(t)$  равно нулю. Как будет видно далее, такое допущение не меняет сути результата. Имеем

$$\mathbf{E}[G_T^2(\omega)] = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \mathbf{E}[x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)] \times$$

$$\times \exp[-j\omega(t_1 - t_2 + t_3 - t_4)] dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.$$

Фигурирующая в записанном четырёхмерном интеграле моментная функция четвёртого порядка для гауссовского процесса выражается через его корреляционную функцию следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)] &= b_\xi(t_1 - t_2)b_\xi(t_3 - t_4) + \\ &+ b_\xi(t_1 - t_3)b_\xi(t_2 - t_4) + b_\xi(t_1 - t_4)b_\xi(t_2 - t_3). \end{aligned} \quad (1.5.41)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[G_T^2(\omega)] &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T [b_\xi(t_1 - t_2)b_\xi(t_3 - t_4) + b_\xi(t_1 - t_3)b_\xi(t_2 - t_4) + \\ &+ b_\xi(t_1 - t_4)b_\xi(t_2 - t_3)] \times \exp[-j\omega(t_1 - t_2 + t_3 - t_4)] dt_1 dt_2 dt_3 dt_4. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[G_T(\omega)] &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \mathbf{E}[x(t_1)x(t_2)] \exp[-j\omega(t_1 - t_2)] dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T b_\xi(t_1 - t_2) \exp[-j\omega(t_1 - t_2)] dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

получаем

$$\mathbf{E}[G_T^2(\omega)] = 2\mathbf{E}^2[G_T(\omega)] + \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T \int_0^T b_\xi(t_1 - t_2) \exp[-j\omega(t_1 + t_2)] dt_1 dt_2 \right|^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[G_T(\omega)] &= \mathbf{E}^2[G_T(\omega)] + \\ &+ \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T \int_0^T b_\xi(t_1 - t_2) \exp[-j\omega(t_1 + t_2)] dt_1 dt_2 \right|^2. \end{aligned} \quad (1.5.42)$$

Из полученного соотношения (1.5.42) следует, что при  $T \rightarrow \infty$  дисперсия оценки энергетического спектра не стремится к нулю, т. е.  $G_T(\omega)$  не является состоятельной оценкой и, следовательно, для неё эргодическое свойство не имеет места, несмотря на то, что процесс является эргодическим по отношению к корреляционной функции.

Полученный результат имеет общий характер для преобразования Фурье: *если имеется состоятельная оценка некоторой вероятностной*

характеристики, то её преобразование Фурье не является состоятельной оценкой для преобразования Фурье этой характеристики.

Рассмотрим основные особенности практического подхода к оценке энергетического спектра при наблюдении одной реализации.

Будем исходить из того, что ввиду конечности своей дисперсии периодограмма  $G_T(\omega)$  признаётся неудовлетворительной для практического использования: её значения на фиксированной частоте  $\omega$  будут сильно изменяться от одной реализации к другой. Примем в качестве оценки энергетического спектра математическое ожидание периодограммы, вычисляемое на основании (1.5.40), которое можно трактовать как преобразование Фурье от произведения  $b_\xi(\tau) f(\tau)$  корреляционной функции  $b_\xi(\tau)$  на *корреляционное окно*

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T, & |\tau| \leq T; \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases} \quad (1.5.43)$$

Выразим  $b_\xi(\tau)$  через энергетический спектр  $G_\xi(\omega)$ , согласно формулам Винера — Хинчина, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[G_T(\omega)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) b_\xi(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(\omega_1) \exp(-j\omega_1\tau) d\omega_1 \right) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования, заменяя  $\omega_1 = y - \omega$  и учитывая симметричность энергетического спектра, получаем

$$\mathbf{E}[G_T(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) G_\xi(\omega - y) dy, \quad (1.5.44)$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau$$

представляет собой преобразование Фурье корреляционного окна. Математическое ожидание периодограммы соответствует как бы просматриванию истинного энергетического спектра  $G_\xi(\omega)$  через “окно”  $F(\omega)$ ; поэтому  $F(\omega)$  называют *спектральным окном*.



Корреляционным окнам длительностью  $T$  соответствуют спектральные окна, у которых основной лепесток имеет ширину  $2\pi\gamma/T$ , где значение  $\gamma$  близко к единице, так что при достаточно больших  $T$  спектральное окно превращается в “узкую щель”, в пределах которой плавно меняющийся энергетический спектр  $G_\xi(\omega)$  можно считать постоянным. Так, для корреляционного окна вида (1.5.43), называемого *окном Бартлета*, спектральное окно имеет вид

$$F(\omega) = T \frac{\sin^2(\omega T / 2)}{(\omega T / 2)^2}, \quad (1.5.45)$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[G_T(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T \frac{\sin^2(yT / 2)}{(yT / 2)^2} G_\xi(\omega - y) dy \approx \\ &\approx G_\xi(\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T \frac{\sin^2(yT / 2)}{(yT / 2)^2} dy = G_\xi(\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, при использовании корреляционных (или спектральных) окон математическое ожидание периодограммы стремится с ростом  $T$  к истинному значению энергетического спектра.

Рассмотрим, каким образом практически осуществить выполнение операции математического ожидания (т. е. усреднение по ансамблю) периодограммы  $G_T(\omega)$ .

Разделим весь интервал наблюдения  $[0; T]$  на определённое число  $K$  подынтервалов одинаковой длины  $\Delta = T/K$  и будем трактовать отрезки  $x^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, \dots, K$  единой реализации  $x(t)$  на каждом подынтервале как совокупность единого ансамбля. Далее, для каждого отрезка  $x^{(k)}(t)$  найдём оценку корреляционной функции

$$b_\Delta^{(k)}(\tau) = \frac{1}{\Delta} \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta-\tau} x(t)x(t+\tau)dt, \quad k = 1, \dots, K, \quad \tau \geq 0,$$

и периодограмму

$$G_\Delta^{(k)}(\omega) = \int_{-\Delta}^{\Delta} b_\Delta^{(k)}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad k = 1, \dots, K,$$

после чего получим усреднённую (“сглаженную”) периодограмму  $G_T^*(\omega)$ , являющуюся практическим аналогом характеристики (1.5.40):

$$G_T^*(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K G_{\Delta}^{(k)}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \int_{-\Delta}^{\Delta} b_{\Delta}^{(k)}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K b_{\Delta}^{(k)}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \int_{-\Delta}^{\Delta} b_T^*(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad (1.5.46)$$

где

$$b_T^*(\tau) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{\Delta} \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta-\tau} x(t)x(t+\tau) dt$$

представляет собой усреднённую (“сглаженную”) оценку корреляционной функции. Математические ожидания усреднённых характеристик равны

$$\mathbf{E}[b_T^*(\tau)] = (1 - |\tau|/T) b_{\xi}(\tau)$$

и

$$\mathbf{E}[G_T^*(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \frac{\sin^2(y\Delta/2)}{(y\Delta/2)^2} G_{\xi}(\omega - y) dy,$$

т. е. математическое ожидание усреднённой периодограммы эквивалентно сглаживанию истинного энергетического спектра с помощью спектрального окна

$$F(\omega) = \Delta \frac{\sin^2(\omega\Delta/2)}{(\omega\Delta/2)^2}$$

или эквивалентного корреляционного окна

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/\Delta, & |\tau| \leq \Delta; \\ 0, & |\tau| > \Delta. \end{cases}$$

Отметим, что использование окна Бартлета не является единственно возможным. В табл 1.6 представлены наиболее часто используемые в литературе и на практике спектральные и корреляционные окна.

Таблица 1.6

**Примеры корреляционных и спектральных окон**

Тип окна	Корреляционное окно $f(\tau)$	Спектральное окно $F(\omega)$
Бартлета	$\begin{cases} 1 -  \tau /\Delta, &  \tau  \leq \Delta; \\ 0, &  \tau  > \Delta. \end{cases}$	$\Delta \frac{\sin^2(\omega\Delta/2)}{(\omega\Delta/2)^2}$

Окончание таблицы 1.6

Тип окна	Корреляционное окно $f(\tau)$	Спектральное окно $F(\omega)$
Хэмминга	$\begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos(\pi\tau / \Delta), &  \tau  \leq \Delta; \\ 0, &  \tau  > \Delta. \end{cases}$	$\Delta \frac{\sin(\omega\Delta)}{\omega\Delta} \times \frac{1,08 - 0,16(\omega\Delta / \pi)^2}{1 - (\omega\Delta / \pi)^2}$
Парзена	$\begin{cases} 1 - 6 \tau ^2 / \Delta^2 + 6 \tau ^3 / \Delta^3, &  \tau  \leq \Delta / 2; \\ 2(1 -  \tau  / \Delta)^3, & \Delta / 2 <  \tau  \leq \Delta \\ 0, &  \tau  > \Delta. \end{cases}$	$\frac{3\Delta \sin^4(\omega\Delta / 4)}{4 (\omega\Delta / 4)^4}$
Тьюки	$\begin{cases} [1 + \cos(\pi\tau / \Delta)] / 2, &  \tau  \leq \Delta; \\ 0, &  \tau  > \Delta. \end{cases}$	$\Delta \frac{\sin(\omega\Delta)}{\omega\Delta} \times \frac{1}{1 - (\omega\Delta / \pi)^2}$

## ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 1

1.1. Найти случайное событие  $X$  из соотношения

$$(\overline{X \cup A}) \cup (\overline{X \cup \bar{A}}) = B.$$

1.2. Возможно ли, чтобы для трёх событий  $A$ ,  $B$  и  $C$  имели место следующие вероятности:

$$P(A) = 0,85; P(B) = 0,9; P(C) = 0,95;$$
$$P(AB) = 0,7; P(BC) = 0,7; P(ABC) = 0,7?$$

1.3. По каналу связи передаются  $k$  сообщений, содержащих соответственно  $n_1, n_2, \dots, n_k$  двоичных символов. При передаче каждый символ искажается независимо от других с вероятностью  $p$ . При кодировании сообщений применяется код, исправляющий ошибки в одном или двух символах. Найти вероятность того, что хотя бы одно из  $k$  сообщений будет ошибочным.

1.4. Для какой случайной величины средний квадрат совпадает с квадратом среднего?

1.5. Среднее значение и дисперсия равномерно распределённой случайной величины равны соответственно 5 и 10. Найти наибольшее и наименьшее значения этой случайной величины.

1.6. В квадрат с вершинами  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  наудачу брошена точка, и пусть  $(\xi, \eta)$  — её случайные координаты.

а) Найти вероятность того, что корни уравнения  $x^2 + \xi x + \eta = 0$  являются вещественными числами, а также вероятность того, что эти корни одинаковы.

б) Найти вероятность пересечения событий, состоящих в выполнении неравенств  $\xi + \eta \leq 1$  и  $\xi\eta \leq 2/9$ .

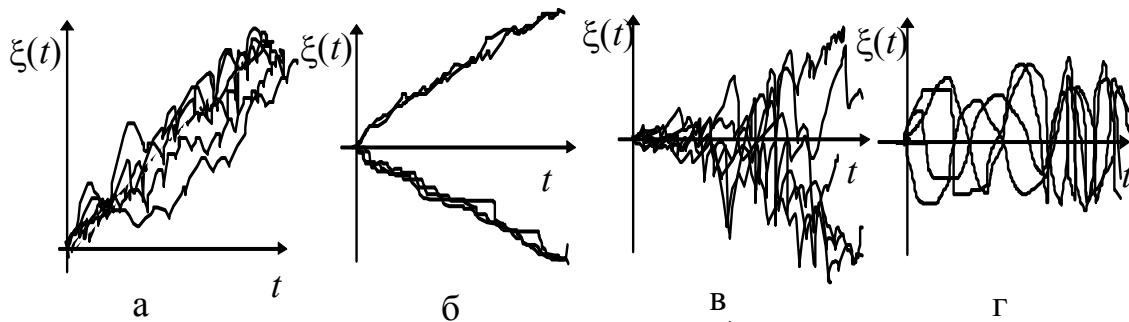
в) Найти вероятность попадания точки в круг, вписанный в указанный квадрат.

1.7. Координаты двух случайных точек на прямой независимы и равномерно распределены на отрезке  $[0,1]$ . Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между точками.

1.8. Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — совместно гауссовские величины с одинаковыми дисперсиями. Зависимы ли случайные величины  $\xi + \eta$  и  $\xi - \eta$ ?

1.9. Найти коэффициент корреляции величин  $\xi$  и  $\xi^n$ , если  $\xi$  — гауссовская случайная величина с нулевым средним.

1.10. Какой из изображённых ансамблей реализаций отвечает стационарному в широком смысле процессу?



1.11. Совместная плотность вероятности случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ :  
 а) равномерна в круге радиуса  $R$  с центром в начале координат и равна нулю за его пределами;

б) имеет вид правильного конуса с центром в начале координат.

Зависимы и коррелированы ли величины  $\xi$  и  $\eta$ ? Каков их коэффициент корреляции?

1.12. Пусть  $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  — выборка из равномерного на интервале  $[a; b]$  распределения, и пусть  $\xi_1 = \min \mathbf{x}$ ,  $\xi_2 = \max \mathbf{x}$ . Найти совместную плотность распределения случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , математическое ожидание и дисперсию каждой из величин, а также ковариацию  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

1.13. Найти дисперсию суммы из  $n$  выборочных значений, взятых из стационарного случайного процесса с корреляционной функцией  $b(\tau) = \sigma^2 \exp(-\gamma|\tau|)$ , взятых с интервалом времени  $\Delta\tau$ .

1.14. Случайный процесс  $\xi(t)$  представляет собой сумму стационарного гауссовского случайного процесса  $n(t)$  и детерминированного процесса вида  $s(t) = (-1)^{[t]}$ , где  $[t]$  — целая часть от  $t$ . Является ли процесс  $\xi(t)$  стационарным? Найти плотность вероятности процесса  $\xi(t)$ . Является ли он стационарным? Что изменится, если  $s(t) = (-1)^{[t+\beta]}$ , где  $\beta$  — случайная величина, равномерно распределённая на интервале  $[0; 1]$ .

## ГЛАВА 2. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В предыдущей главе рассматривались, главным образом, теоретические подходы к описанию вероятностных объектов. Данная глава посвящена прикладной составляющей теоретико-вероятностных разделов — имитационному моделированию случайных величин и процессов. При этом изложение материала изначально ориентировано на то, что рассматриваемые методы по мере их изучения должны воплощаться в жизнь в рамках единого учебного курса.

Программная реализация описываемых методов моделирования возможна с использованием, пожалуй, любых средств вычислительной техники: от простейшего микропроцессорного набора, программируемого на ассемблере, до современных, в том числе, параллельных архитектур (что, собственно, подтверждено многими десятилетиями развития этого научного направления). Наряду с универсальными языками и средами программирования в настоящее время существует большое число специализированных пакетов, предназначенных для статистических исследований, в том числе, для целей имитационного моделирования. Однако реалии таковы, что де-факто универсальной средой, причём, как для учебных, так и для профессиональных целей является система MATLAB<sup>1</sup>, и иллюстрирующие “программные вставки” приводятся именно для этой системы.

В рамках учебного пособия, конечно, невозможно охватить не только все, но даже большую часть известных методов моделирования случайных величин с различными законами распределений и, тем более, различных классов случайных процессов. Поэтому основное внимание уделено методам формирования “базовых” распределений случайных величин — равномерного и гауссовского и наиболее простых классов случайных процес-

---

<sup>1</sup> MATLAB (MATrix LABoratory) — высокоуровневый интерпретируемый язык программирования, разработанный Кливом Моулером (Cleve Moler), а также одноимённый пакет прикладных программ, предназначенный для решения инженерных задач в различных научно-технических областях.

сов: марковских цепей и гауссовских процессов с заданными корреляционными свойствами.

## 2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Использование моделей для решения разнообразных связанных задач (равно как и для большинства задач естествознания) обусловлено набором очевидных причин: экономия временных и материальных ресурсов, имитация “критических” режимов, что в условиях реальной эксплуатации может быть небезопасно для исследуемого объекта, возможность дистанционного тренинга и др. Отметим, что имитационное моделирование может быть реализовано в самом изучаемом физическом объекте, причём, как в автономном самодостаточном виде, так и с частичным или даже полным задействованием реальных особенностей объекта.

В настоящее время без моделирования не обходится ни один этап жизненного цикла проектирования и эксплуатации радиоэлектронных средств и средств связи. Разработаны универсальные и специализированные пакеты прикладных программ, обеспечивающие прогноз о принципиальной работоспособности (или наоборот) проектируемого объекта, позволяющие оценить его потенциально возможные характеристики, установить зависимость таких характеристик от различных параметров, установить наилучшие значения параметров и т. д.

Существует достаточно большое число определений понятия “имитационная модель”, каждое из которых в наибольшей степени соответствует специфике решаемой задачи или класса задач, но в любом случае корректное определение модели должно содержать следующие составляющие.

- Исходный физический объект исследования (оригинал). Объектом может быть радиоэлектронное устройство, телекоммуникационная или информационная система, какое-либо явление, протекающее в границах изучаемого объекта.

- Модель исследуемого физического объекта, содержащая в себе набор отличительных признаков объекта, причём модель заведомо не может содержать *все* признаки объекта, т. е. модель не тождественна объекту.

- Инструмент исследования (исследуемая система), определяющий требования к точности и сложности модели.
- Набор знаний (информация), появляющийся в результате проведения исследований.

Важным условием применимости моделей для решения какой-либо практической задачи является достоверность получаемых с их помощью результатов, что, в свою очередь, во многом определяется адекватностью созданной модели и корректностью интерпретации результатов моделирования. При этом, пожалуй, основной сложностью при формулировке цели и задач имитационного моделирования является преодоление противоречий между полнотой и точностью прогноза, с одной стороны, и затратами на его получение — с другой.

Для построения моделей, обеспечивающих заданную точность, необходимо согласовывать системные представления различных элементов модели, т. е. описывать их с помощью единой системы понятий, например, вводить единое временное или спектральное представление сигналов, определять формат представления данных (вещественный или целый, количество разрядов, выделяемых для представления данных). Кроме того, в целях минимизации затрат на моделирование желательно выбирать методы моделирования, соответствующие возможностям исследуемой системы — по быстрдействию, ресурсам и др.

Согласование системных представлений является важной частью формирования имитационной модели, что в дальнейшем обеспечивает корректную интерпретацию результатов моделирования. Возможности интерпретации — соотнесение модели с объектом — определяются общностью лежащих в основе модели формализованных закономерностей, а также прикладным аспектом моделирования: правилами соотнесения модели с объектом применительно к конкретным задачам.

Целью имитационного моделирования в радиотехнике, связи, управлении и других смежных науках является воспроизведение в цифровых устройствах (цифровых вычислителях) случайных процессов, являющихся математическими моделями, которыми описываются различные физические явления при формировании, передаче, распространении, приёме и обработке сигналов. При этом воспроизведение в цифровых устройствах процесса  $x(t)$  с непрерывным временем, строго говоря, невозможно ввиду



дискретной сущности операций цифровой обработки. Однако такой процесс можно с любой наперёд заданной точностью заменить соответствующим процессом с дискретным временем, т. е. последовательностью дискретных отсчётов  $x_k = x(k\Delta t)$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , где  $\Delta t$  — некоторым образом выбранный интервал (шаг) дискретизации.

Введём набор базовых понятий, используемых при имитационном моделировании сигналов и систем.

*Непрерывный сигнал*  $x(t)$  — вещественная или комплексная функция непрерывной вещественной переменной  $t$ , в качестве которой обычно выступает физическое время. Иногда в качестве аргумента фигурируют какие-либо иные физические объекты, например, пространственная координата; такие сигналы называют *полями*.

*Дискретный сигнал*  $x[k]$  — последовательность вещественных или комплексных чисел, определённая для целочисленных значений  $k$ .

Непрерывный сигнал  $x(t)$ , равномерно дискретизируемый с шагом  $\Delta t$  секунд, порождает дискретный сигнал  $x[k] = x(k\Delta t)$ . Для отличия обозначений непрерывных и дискретных сигналов используются соответственно круглые ( ) и квадратные [ ] скобки.

Следует, вообще говоря, различать понятия дискретный и *цифровой* сигнал. Дискретный сигнал, хотя и рассматривается лишь в фиксированные моменты времени, но может принимать весь континуум возможных значений, в то время как цифровой сигнал, например, полученный с выхода аналого-цифрового преобразователя (АЦП) может принимать лишь конечное число значений — так называемых *разрешённых уровней*. Однако разрядность современных АЦП такова, что количество разрешённых уровней очень велико, и в дальнейшем понятия дискретного и цифрового сигнала, если это специально не оговорено, будем отождествлять.

Современный подход к решению многих радиотехнических и инфокоммуникационных задач, связанных, в конечном итоге, с обработкой сигналов (а в более общем случае — с обработкой информации) во многом опирается на методы имитационного моделирования, предполагающие использование реализаций процессов с различными, в том числе, вероятностными свойствами. В этой связи необходимо уметь формировать случайные величины с различными законами распределения, а также случайные процессы с заданными корреляционными характеристиками.

## 2.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Традиционным способом реализации случайных объектов с заданными вероятностными характеристиками является генерирование некоторого, как правило, весьма небольшого набора базовых (стандартных) статистик, называемых *датчиками случайных чисел*, а далее — их последующее функциональное преобразование, обеспечивающее пользователю широкий выбор одно- и многомерных распределений. Выделение каких-то распределений в категорию базовых может быть достаточно условным, что определяется, с одной стороны спецификой решаемых задач, а с другой — особенностями используемого программно-аппаратного комплекса.

Исходным “материалом” для формирования в цифровых устройствах случайных величин с различными законами распределения, как правило, служат равномерно распределённые на интервале  $[0; 1]$  случайные числа, генерируемые либо специальным физическим датчиком, либо программным (алгоритмическим) способом. При этом программный способ реализации приводит к тому, что получаемые числа, строго говоря, нельзя назвать случайными, так как при каждой реализации алгоритма формирования будут получаться (если не предпринимать дополнительных операций) идентичные последовательности чисел. Поэтому числа, получаемые при использовании программных генераторов, называют *псевдослучайными*, понимая под этим термином тот факт, что статистические свойства последовательностей таких чисел близки к статистическим свойствам “истинных” случайных последовательностей. Степень близости или, наоборот, заметного отклонения устанавливается с помощью специальных статистических “инструментов”.

Кроме того, к алгоритмам формирования (псевдо)случайных чисел предъявляется ряд дополнительных требований, связанных с эффективностью их функционирования: число операций, требуемое для получения одного числа не должно быть сильно большим; программа должна быть способна генерировать протяжённые серии с заданными свойствами и др. Указанные особенности могут не сильно сказываться при реализации алгоритмов средствами универсальной вычислительной техники (хотя в любом случае желательно иметь эффективные решения), однако в тех ситуа-

циях, когда имитационные модели реализуются в специализированных цифровых устройствах с ограниченными ресурсами (по быстродействию, по доступному объёму памяти, по энергопотреблению и др.), актуальность подобных требований резко возрастает.

Наряду с “универсальной” базовой статистикой — равномерным на интервале  $[0; 1]$  распределением к базовым статистикам обычно относят также дискретное равномерное (т. е. равновероятное появление целочисленных значений в заданном диапазоне), а также нормальное (гауссовское) распределение.

В основе большинства программных методов получения псевдослучайных чисел лежит целочисленная арифметика. При этом в силу ограниченности разрядной сетки, используемой для представления целых чисел в том или ином формате, в цифровых устройствах возможно оперировать лишь с  $M = 2^n$  возможными значениями целых чисел  $z_k$  ( $k = 1, \dots, M$ ), где  $n$  — число доступных двоичных разрядов. Тогда вещественное число  $x$ , лежащее в интервале  $[0; 1]$ , получается посредством переформатирования  $z_k$ , т. е. представления их в определённом формате вещественных чисел, например, с плавающей точкой, и деления на  $M$ .

Предположим, что для достижения определённых целей имеет место программная реализация какого-либо метода получения равномерно распределённых на интервале  $[0; 1]$  чисел. В этом случае правомерен следующий вопрос: насколько сгенерированные псевдослучайные числа далеки или близки к “истинным” случайным числам<sup>1</sup>? В терминах математической статистики это означает формулирование *статистической гипотезы* о том, что сгенерированный набор чисел представляет собой выборку из генеральной совокупности с равномерным на интервале  $[0; 1]$  распределением. Для подтверждения или опровержения статистических гипотез про-

---

<sup>1</sup> В действительности понятие “истинного” случайного числа является туманным, и, в некоторой степени, даже табуированным; в теории вероятностей и математической статистике стараются избегать попыток прояснения этого вопроса. Приведём высказывание Д. Лемера: “Случайная последовательность является смутным понятием, олицетворяющим идею последовательности, в которой каждый элемент является непредсказуемым для непосвящённых и значения которой проходят определённое количество проверок, традиционных у статистиков и отчасти зависящих от пользователей, которым предложена последовательность”.

водят различные *тесты*, основанные на *статистических критериях*, позволяющих на основании количественных показателей вынести решение в пользу или против выдвигаемой гипотезы.

Сколь-нибудь подробное изложение теории проверки статистических гипотез не входит в содержание данной книги, поэтому просто ограничимся перечислением основных терминов и понятий. Для более глубокого понимания излагаемых вопросов существует обширная литература с различным уровнем требований, предъявляемых к математической подготовке читателя, например, [3, 4].

Смысл всех статистических тестов состоит в проверке соответствия (“согласия”) статистических (выборочных) характеристик их теоретическим аналогам. При этом конструируется *статистика критерия* — количественный показатель расхождения выборочных и теоретических характеристик. Далее весь диапазон  $X$  возможных значений статистики критерия разбивается на две непересекающиеся области  $X_1$  и  $X_2$ : одна из них, например,  $X_1$ , называется *областью принятия гипотезы*, а другая —  $X_2$  — *областью отклонения гипотезы* или, как её чаще называют, *критической областью*. Тогда решение о принятии или отвержении проверяемой гипотезы основывается на том, в какую область попало значение статистики критерия для данной выборки.

В процессе проверки гипотезы можно прийти к правильному решению или совершить ошибку, причём ошибки могут быть двух видов: *ошибка первого рода* — отклонение проверяемой гипотезы, когда в действительности она верна, и *ошибка второго рода* — принятие решения в пользу проверяемой гипотезы, когда в действительности она не верна. “Последствия” принятия решения в пользу той или гипотезы оцениваются соответствующими вероятностями: вероятностью  $\alpha$  ошибки первого рода — её также называют *уровнем значимости критерия* и вероятностью  $\beta$  ошибки второго рода, не имеющей какого-то общепринятого названия, но с которой связана другая, гораздо более употребляемая характеристика — *мощность критерия*, равная  $1 - \beta$ .

Естественным желанием является такое проведение теста, при котором сводятся к минимуму вероятности ошибок обоих типов. К сожалению, при конечном объёме выборки такое желание неосуществимо; можно лишь удовлетвориться подходом, при котором фиксируется достаточно малая

вероятность  $\alpha$  ошибки первого рода (обычно порядка  $10^{-2} \dots 10^{-3}$ ) и выбирается такая критическая область  $X_2$ , для которой вероятность  $\beta$  ошибки второго рода минимальна.

Например, для выявления “согласия” эмпирической функции распределения  $F^*(x)$ , построенной по  $L$ -элементной выборке

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_L),$$

теоретической (гипотетической) функции распределения  $F_\xi(x)$  используют критерий Колмогорова — Смирнова, при котором статистикой критерия является величина

$$D_L = \sup_x |F^*(x) - F_\xi(x)|, \quad (2.2.1)$$

представляющая собой максимальное отклонение эмпирической функции распределения от гипотетической.

Вероятностный смысл (2.2.1) очевиден: при каждом значении  $x$  величина  $F^*(x)$  является статистической оценкой  $F_\xi(x)$ , и с увеличением объёма выборки  $L$  происходит сближений этих функций (они сходятся по вероятности), так что при достаточно больших  $L$  значение  $D_L$  не должно существенно отличаться от нуля, если проверяемая гипотеза верна.

Решение о принятии или отвержении проверяемой гипотезы для критерия Колмогорова — Смирнова основывается на функции

$$K(t) \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} P(\sqrt{L}D_L \leq t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \exp(-2j^2t^2). \quad (2.2.2)$$

При этом предельную функцию  $K(t)$ , табулированную во многих справочниках и реализованную во многих программных пакетах, можно с хорошим приближением использовать для практических расчётов уже при  $L \geq 20$ , т. е. считать, что

$$K(t) \approx P(\sqrt{L}D_L \leq t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \exp(-2j^2t^2), \quad L \geq 20. \quad (2.2.2a)$$

Граница  $\lambda_\alpha$  критической области для критерия Колмогорова — Смирнова вычисляется из уравнения

$$K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha. \quad (2.2.3)$$

Так, при  $\alpha = 0,01$  граница  $\lambda_\alpha = 0,829$ ; при  $\alpha = 0,05$  граница  $\lambda_\alpha = 0,708$ .

В пакете MATLAB определение границы критической области для критерия Колмогорова — Смирнова реализовано посредством функции `kstest`<sup>1</sup>.

Итак, правило проверки гипотез по критерию Колмогорова — Смирнова выглядит следующим образом: если наблюдаемое значение  $D_L$  удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{L}D_L > \lambda_\alpha,$$

то проверяемую гипотезу отвергают с вероятностью  $\alpha$ ; в противном случае делается вывод, что статистические данные не противоречат гипотезе, и она принимается с вероятностью  $1 - \alpha$ .

На практике вычисление статистики  $D_L$  может оказаться весьма трудоёмкой задачей при больших объёмах выборки, особенно, при анализе многомерных распределений. В этой связи часто используют другой критерий, обладающий существенно меньшей вычислительной сложностью — *критерий Пирсона*, также известный как *критерий хи-квадрат*.

В основе такого критерия лежит группирование данных и переход к частотному представлению выборочных значений: весь интервал возможных значений (для рассматриваемых методов — интервал  $[0; 1]$ ) разбивается на  $n$  непересекающихся подынтервалов  $S_r$  ( $r = 1, \dots, n$ ), после чего определяются частоты  $v_r$  попадания наблюдаемых данных в каждый из подынтервалов  $S_r$ . Получившееся дискретное распределение сравнивается с теоретическими дискретными аналогами  $p_r$ , где статистикой критерия является квадратичная форма

$$\chi_n^2 = L \sum_{r=1}^n \frac{(v_r - p_r)^2}{p_r}, \quad (2.2.4)$$

которая асимптотически (практически — при  $L \geq 50$ ) подчиняется *распределению хи-квадрат с  $(n - 1)$  степенями свободы* (что, собственно, и дало название критерию). Таким образом, границей критической области для данного критерия является  $(1 - \alpha)$ -квантиль распределения  $\chi_{1-\alpha, n-1}^2$ , т. е. принятие решения в пользу проверяемой гипотезы происходит при условии, что

---

<sup>1</sup> Предполагается, что читатель знаком с использованием средств МАТАВ, поэтому подробное объяснение синтаксиса используемых функций в рамках данного пособия представляется нецелесообразным.

$$\chi_n^2 \leq \chi_{1-\alpha, n-1}^2.$$

Вопрос о связи между количеством  $L$  элементов в выборке и числом  $n$  подынтервалов не имеет однозначного ответа; обычно используют следующую простую рекомендацию:

$$n = \left[ \sqrt[3]{L} \right].$$

В пакете MATLAB вычисление квантилей распределения хи-квадрат осуществляется функцией `chi2inv`.

В табл. 2.1 представлены некоторые значения квантилей распределения хи-квадрат для некоторых значений  $\alpha$  и  $n$ . Более подробные таблицы можно найти в специализированной литературе, посвящённой математической статистике, или в специализированных программных пакетах.

Таблица 2.1

**Квантили  $\chi_{1-\alpha, n}^2$  распределения хи-квадрат**

$n$	$\alpha$					
	0,99	0,95	0,10	0,05	0,02	0,01
2	0,020	0,103	4,605	5,991	7,824	9,210
5	0,554	1,145	9,236	11,070	13,388	15,086
10	2,558	3,940	15,987	18,307	21,161	23,209
15	5,229	7,261	22,307	24,996	28,259	30,578

Отметим, что при достаточно большом числе степеней свободы хи-квадрат распределение близко к гауссовскому, так что когда количество подынтервалов равно нескольким десяткам, для определения критической области можно пользоваться квантилями нормального распределения.

Нетрудно заметить, что основные действия, совершаемые при вычислении статистики критерия хи-квадрат — разбиение на подынтервалы и определение частот попадания в них наблюдаемых значений — совпадают с аналогичными действиями, выполняемыми при построении гистограммы (разд. 1.4), которая является статистическим аналогом плотности распределения. Следовательно, визуальный анализ вида гистограммы может дать качественный ответ на вопрос о близости генерируемых псевдослучайных чисел к определённому распределению.

Рассмотрим некоторые методы программного получения псевдослучайных чисел, равномерно распределённых на интервале  $[0; 1]$ .

### Метод “середины квадратов”

Исторически первым методом программной реализации псевдослучайных чисел, видимо, следует считать предложенный Д. Нейманом<sup>1</sup> в 1951 г. *метод середины квадратов* (middle-square method).

В начале алгоритма выбирается произвольное число  $a_0$ , состоящее из  $2n$  двоичных цифр, которые не равны одновременно все 1 или 0, это число возводится в квадрат, образуя  $4n$  цифры, а затем выбирается число  $z_1$  из  $2n$  средних цифр: от  $(n + 1)$ -й до  $(3n)$ -й. Далее алгоритм, начиная с возведения в квадрат, повторяется до тех пор, пока не будет получено требуемое количество чисел.

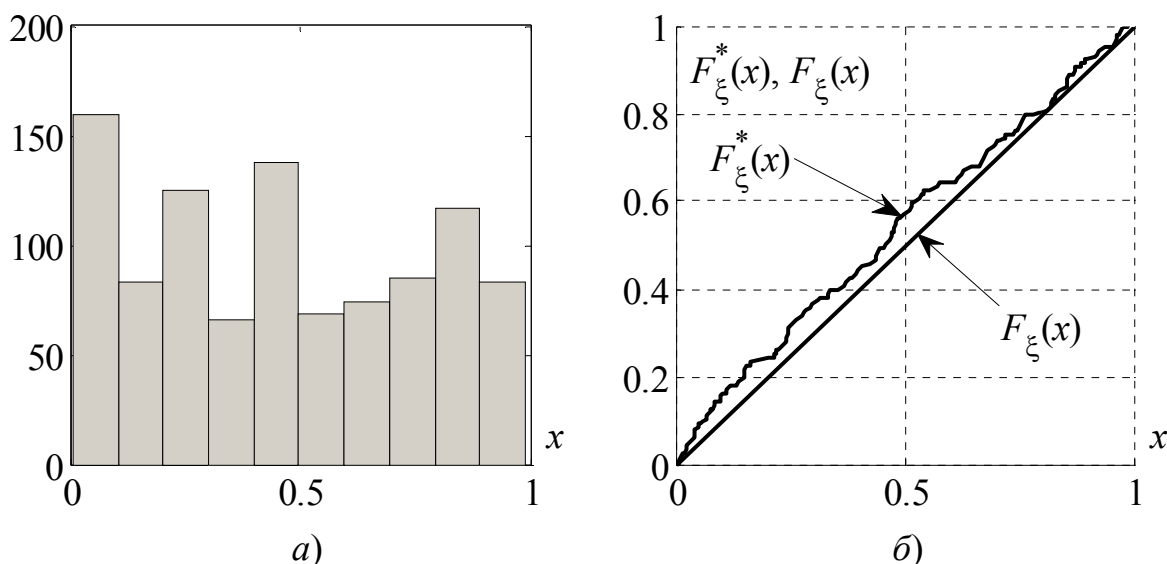


Рис. 2.1. Гистограмма (а), эмпирическая и теоретическая (б) функции распределения псевдослучайных чисел, полученных методом середины квадратов

На рис. 2.1, где для  $10^3$  псевдослучайных чисел, полученных с начальным значением  $a_0 = 27846$  при 32-разрядном беззнаковом представлении целых чисел, показаны гистограмма, эмпирическая и теоретическая функции равномерного на интервале  $[0; 1]$  распределения. Даже визуально заметно

<sup>1</sup> Джон Нейман (John von Neumann) — американский учёный, внёсший заметный вклад во многие области математики и физики, в том числе архитектуру и математическое обеспечение вычислительных машин.



существенное отличие сгенерированной выборки от желаемого равномерного распределения.

Найдём количественные показатели, позволяющие оценить степень близости на основании критериев согласия. На рис. 2.2 показано абсолютное отклонение эмпирической и теоретической функций распределения, максимальное значение которого составляет  $D_L = 0,083$ . Тогда, при объёме выборки  $L = 1000$  анализируемое значение

$$\sqrt{LD_L} = \sqrt{1000} \cdot 0,083 = 2,625$$

заметно превышает процентную точку  $\lambda_\alpha = 0,829$ , получающуюся для уровня значимости  $\alpha = 0,01$ , и, таким образом, гипотезу о том, что анализируемая выборка принадлежит равномерному на интервале  $[0; 1]$  распределению следует отвергнуть на основании критерия Колмогорова — Смирнова.



Рис. 2.2. Абсолютное отклонение эмпирической и теоретической функций распределения

Для принятия решения по критерию хи-квадрат необходимо вычислить величину  $\chi_n^2$  согласно (2.2.4). По полученной выборке имеем  $\chi_n^2 = 102,0$ . Согласно табл. 2.1, для  $n = 10$  квантили хи-квадрат распределений при уровнях значимости порядка  $10^{-1} \dots 10^{-2}$  имеют значения  $16 \dots 23$ . Таким образом, полученное значение  $\chi_n^2 = 102,0$  существенно превышает допустимые значения, и гипотезу о том, что анализируемая выборка при-

надлежит равномерному на интервале  $[0; 1]$  распределению на основании критерия хи-квадрат следует отвергнуть.

Итак, метод “середины квадратов” даёт последовательность с неудовлетворительными свойствами<sup>1</sup>, поскольку распределение полученных таким образом псевдослучайных чисел далеко от равномерного. Значительно лучшие результаты даёт модификация метода “середины квадратов” — метод произведений.

### **Метод произведений**

Выбирается произвольная пара чисел  $b_1$  и  $b_2$ , состоящих из  $2n$  двоичных цифр, вычисляется их произведение, средние цифры которого используются в качестве нового числа  $z_1$  — первого псевдослучайного числа в наборе. Далее вычисляется произведение чисел  $b_2$  и  $z_1$ , средние цифры которого — от  $(n + 1)$ -й до  $(3n)$ -й — используются в качестве нового числа  $z_2$  — второго псевдослучайного числа в наборе; процесс повторяется, с использованием  $b_2$  в качестве постоянного множителя, пока не будет получено требуемое количество чисел.

Результат работы алгоритма получения  $10^3$  псевдослучайных чисел по методу произведений с начальными значениями  $b_1 = 27835$  и  $b_2 = 16723$  представлен в виде гистограммы и ЭФР на рис. 2.3, из которой видна гораздо большая равномерность по сравнению с методом середины квадратов, что подтверждается значением статистик критериев согласия:  $D_L = 0,029$  (откуда  $\sqrt{LD_L} = 0,917$ ) и  $\chi_n^2 = 14,0$ , позволяющих при значениях уровня значимости порядка  $10^{-1} \dots 10^{-2}$  не отвергать гипотезу о равномерном на интервале  $[0; 1]$  распределении по критерию хи-квадрат.

Отметим, что и метод середины квадратов, и метод произведений позволяют получить периодическую (повторяющуюся) последовательность псевдослучайных чисел, с периодом, не превышающим  $2^{2n}$  (число возможных двоичных комбинаций из  $2n$  цифр).

---

<sup>1</sup> Отметим, что если рассматривать представление целых чисел не очень большим количеством двоичных разрядов, например, в двухбайтовых форматах `int16` или `uint16`, то данный и подобные ему методы вообще не работают, поскольку после двух–трёх десятков итераций происходит вырождение (обнуление) серединных цифр. Реально метод начинает работать при, по меньшей мере, четырёхбайтовом представлении целых чисел и при достаточно большом значении  $a_0$ .

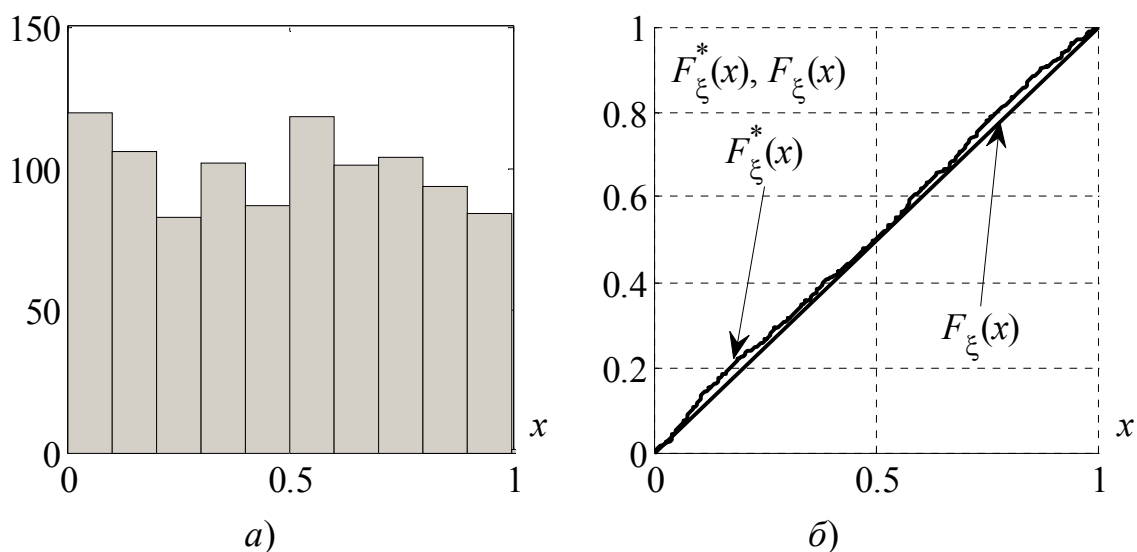


Рис. 2.3. Гистограмма (а), эмпирическая и теоретическая (б) функции распределения псевдослучайных чисел, полученных методом произведений

Ещё более эффективными методами получения псевдослучайных чисел, являются *линейные конгруэнтные методы* [2], предложенные Д. Леммером<sup>1</sup>, которые основаны на вычислении элементов линейной рекуррентной последовательности по модулю<sup>2</sup> некоторого натурального числа  $M$ :

$$z_{k+1} = \gamma z_k + c \pmod{M}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.2.5)$$

где  $\gamma$  и  $c$  — эмпирически выбираемые числа, и, кроме того, необходимо задавать начальное значение  $z_0$ , часто называемое в литературе “семечко” (seed).

Приведём необходимые (но не достаточные!) условия получения последовательности чисел с “хорошими случайными свойствами”:

- $\gamma$  и  $c$  — взаимно простые числа;
- для любого простого числа  $p$  число  $\gamma - 1$  кратно  $p$ .
- если  $M$  кратно 4, то  $\gamma - 1$  также кратно 4.

#### Метод вычетов

В частном случае  $c = 0$  линейный конгруэнтный метод называют *методом вычетов* (residual method), и он описывает мультипликативный генератор случайных чисел.

<sup>1</sup> Деррик Генри Леммер (Derrick Henry Lehmer) — математик, известный своими работами, относящимися к теории чисел. Работал в университете Беркли (США).

<sup>2</sup> Операция приведения чисел по модулю (mod) означает, что если  $r = sm + l$  ( $0 \leq l < m$ ), то  $r \pmod{m} = l$ .

Название метода обусловлено терминологией, принятой в теории чисел. При помощи любого натурального числа  $M$  множество всех целых чисел разбивается на попарно непересекающиеся подмножества, каждое из которых состоит из всех целых чисел, имеющих один и тот же остаток при делении на  $M$ . Эти подмножества называются *классами чисел по модулю  $M$* . При делении целых чисел на  $M$  получаются  $M$  различных остатков:  $0, 1, \dots, M-1$ . Поэтому существует в точности  $M$  различных классов чисел по модулю  $M$ . Всякое число из какого-либо класса называется *вычетом* этого класса.

Например, при  $z_0 = 1$ ,  $\gamma = 5^{17}$  и  $M = 2^{42}$  образуется последовательность псевдослучайных чисел, имеющая период  $2^{42} \approx 10^{12}$ . Результат работы алгоритма получения  $10^3$  псевдослучайных чисел по методу вычетов с указанными параметрами представлен на рис. 2.4, из которого визуально видна высокая степень равномерности распределения чисел в интервале  $[0; 1]$ .

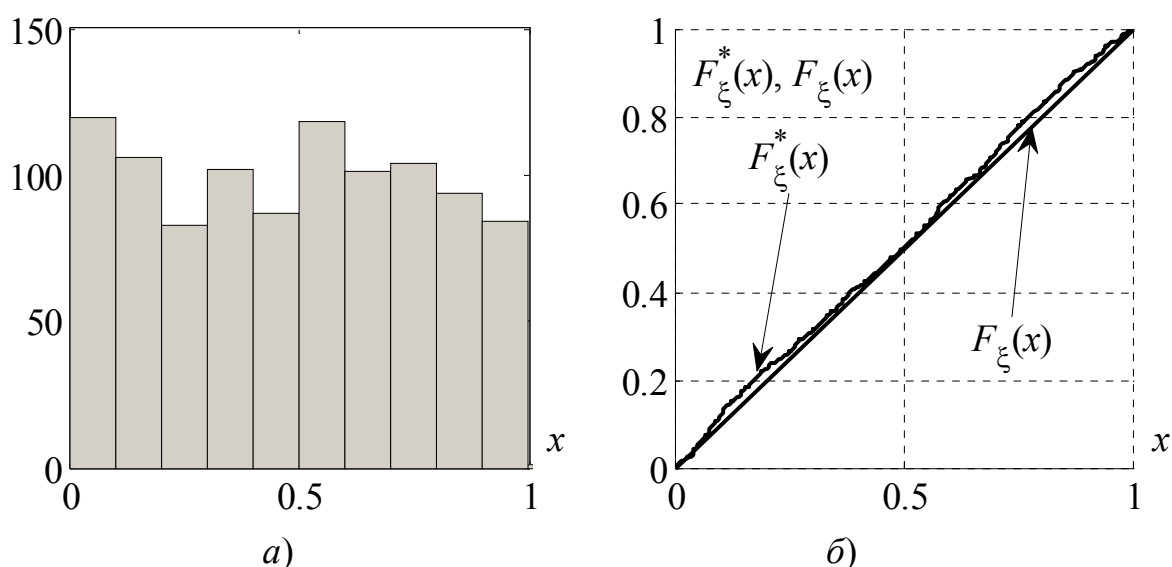


Рис. 2.4. Гистограмма (а), эмпирическая и теоретическая (б) функции распределения псевдослучайных чисел, полученных методом вычетов

Статистики критериев согласия Колмогорова — Смирнова и хи-квадрат равны соответственно<sup>1</sup>  $D_L = 0,007$  (откуда  $\sqrt{LD_L} = 0,221$ ) и  $\chi_n^2 = 0,26$ , что обеспечивает принятие гипотезы о равномерности распределения.

<sup>1</sup> Слишком малые значения статистик критерия могут означать, что генерируемые числа “недостаточно случайны”; это, впрочем, не относится к рассматриваемому методу вычетов.

Линейный конгруэнтный метод в общем виде (при  $c \neq 0$ ) порождает обширное семейство генераторов псевдослучайных чисел [2]. В табл. 2.2 представлены параметры некоторых линейных конгруэнтных методов, используемых для получения равномерного на интервале  $[0; 1]$  распределения в различных программно-аппаратных архитектурах.

Таблица 2.2

**Параметры линейных конгруэнтных методов**

$\gamma$	$c$	$M$	Использование
6364136223846793005	442695040888963407	$2^{64}$	64-битная RISC-архитектура
22695477	1	$2^{32}$	Borland C/C++
134775813	1	$2^{32}$	Borland Delphi
214013	214013	$2^{32}$	Microsoft Visual C/C++
1103515245	12345	$2^{32}$	ANSI C
69069	5	$2^{32}$	GNU Compiler Collection

В пакете MATLAB реализована параметрическая функция `rand`, позволяющая генерировать равномерно распределённые на интервале  $[0; 1]$  (псевдо)случайные числа с различными параметрами и на основе различных алгоритмов.

В первых версиях пакета (1960-е годы) и вплоть до версии 4 в пакете использовался “старый” (ныне, видимо, изъятый из пакета) мультипликативный генератор с параметрами

$$\gamma = 2^{16} + 3 = 65539, c = 0, M = 2^{31} = 2147500000,$$

ориентированный на работу с 32-разрядными целыми числами.

Начиная с версии 4 в пакете реализован мультипликативный генератор с параметрами

$$\gamma = 7^5 = 16807, c = 0, M = 2^{31} - 1 = 2147483647,$$

обеспечивающий генерирование чисел в диапазоне

$$\left[ \frac{1}{2^{31} - 1}; 1 - \frac{1}{2^{31} - 1} \right]$$

с периодом  $2^{31} - 2$ . Алгоритм также был ориентирован на 32-разрядную целочисленную арифметику.

В середине 1990-х годов произошла переориентация большинства вычислительных алгоритмов на вещественные форматы данных (с обычной и удвоенной точностью), что сказалось и на генераторах случайных чисел. В 1995 г. в пакете (версии с 5 до 7.3) был реализован алгоритм Дж. Марсалья (George Marsaglia) “вычитания с заимствованием” (subtract with borrow), не являющийся линейным конгруэнтным алгоритмом и ориентированный на вычисления с плавающей точкой в формате с двойной точностью. Алгоритм обеспечивает генерирование чисел в диапазоне  $[2^{-53}; 1 - 2^{-53}]$  с периодом  $2^{1492}$ .

Начиная с версии 7.4 в пакете реализован алгоритм М. Твистера (Mersenne Twister), также ориентированный на вычисления с плавающей точкой в формате с двойной точностью. Алгоритм обеспечивает генерирование чисел в диапазоне  $[2^{-53}; 1 - 2^{-53}]$  с периодом  $(2^{19937} - 1) / 2$ .

Выбор алгоритма генерирования осуществляется командой

```
rand(method, s),
```

где `method` — строковый параметр, принимающий три возможных значения: `'seed'` — для мультипликативного генератора; `'state'` — для алгоритма Марсалья; `'twister'` — для алгоритма Твистера. Целочисленное значение `s` определяет начальное состояние генератора: для `'seed'` — из диапазона от 0 до  $2^{31} - 2$ ; для `'state'` или `'twister'` оно выбирается из диапазона от 0 до  $2^{32} - 1$ .

Вызов функции `rand` генерирует одно случайное число:

```
>> rand
ans =
    0.4170
```

либо матрицу случайных чисел заданной размерности. Например,

```
>> rand(3, 4)
ans =
    0.7203    0.1468    0.3456    0.4192
    0.0001    0.0923    0.3968    0.6852
    0.3023    0.1863    0.5388    0.2045
```

генерирует матрицу случайных чисел размерности  $3 \times 4$ .

Итак, существует большое число различных методов программной реализации псевдослучайных чисел, обеспечивающих с достаточно высокой точностью первичную базовую статистику  $U(0; 1)$  — равномерное на интервале  $[0; 1]$  распределение. Рассмотрим далее методы получения других базовых статистик, а также специальных распределений.

Получение равномерного дискретного распределения  $Ud(N)$ , т. е. генерирование равновероятных целых чисел  $1, \dots, N$  можно осуществить очень просто, умножая числа  $u$  из распределения  $U(0; 1)$  на  $N$ , округляя результат в сторону нуля и добавляя единицу:

$$u_d = \lfloor Nu \rfloor + 1. \quad (2.2.6)$$

Единственным недостатком такого метода является то, что для больших значений  $N$  (порядка  $10^3$  и выше) может проявляться заметная неравномерность распределения; для подавляющего большинства практически интересных задач метод вполне пригоден.

В пакете MATLAB равномерное дискретное распределение реализуется на основе описанного метода функцией `unidrnd`.

Вызов функции `unidrnd(n)` генерирует одно случайное целое число в диапазоне от 1 до  $n$ :

```
>> unidrnd(10)
ans =
     9
```

либо матрицу случайных чисел заданной размерности. Например,

```
>> unidrnd(10, 3, 4)
ans =
     10     7     6     2
     2     1    10    10
     10     4     3     1
```

генерирует матрицу размерности  $3 \times 4$  случайных целых чисел, равномерно распределённых в диапазоне от 1 до 4.

Реализацию третьей базовой статистики — стандартного гауссовского распределения (с нулевым средним и единичной дисперсией) — можно осуществить на основе различных методов. Многие из них, достаточно эффективные, основанные на функциональных преобразованиях случайных величин, будут рассмотрены далее. Сейчас рассмотрим некоторые ме-

тоды, позволяющие генерировать нормальные числа без привлечения функциональных преобразований.

“Прямые” методы реализации гауссовского распределения основаны на центральной предельной теореме, в соответствии с которой сумма независимых одинаково распределённых случайных величин асимптотически нормальна. Практически это означает генерирование суммы достаточно большого числа  $K$  случайных величин, взятых из какого-то базового, обычно, равномерного распределения. При этом, должна быть обеспечена достаточно быстрая сходимость аппроксимирующего распределения к предельному гауссовскому. Так например, формула

$$v = \sqrt{\frac{12}{K}} \left( \sum_{i=1}^K \kappa_i - \frac{K}{2} \right), \quad (2.2.7)$$

где  $\kappa$  — случайные величины из  $U(0; 1)$ , уже для  $K = 12$ , обеспечивает среднеквадратическое отклонение плотности вероятности  $w_v(n)$  от гауссовской кривой не более  $9 \cdot 10^{-3}$  в области  $|n| < 2$  и не более  $9 \cdot 10^{-1}$  в области  $2 < |n| < 3$ , однако при больших (по модулю) значениях погрешность существенно возрастает, а при  $|n| \geq 6$  распределение  $w_v(n)$  тождественно равно нулю.

Вообще, при моделировании нормальных случайных чисел важнейшей является проблема “хвостов” распределения: при вполне приемлемой “основной”<sup>1</sup> части ( $|n| < 3$ ) поведение периферийных значений (выбросов) может оказаться неудовлетворительным. Фактически, всегда реализуется усечённое гауссовское распределение, и желательно использовать такие алгоритмы, которые при небольшой сложности (малое количество элементов из базового распределения, малое число операций) обеспечивают достаточно протяжённые “хвосты”. В этом смысле “прямые” методы, типа (2.2.7), достаточно сложны, поскольку предполагают использование большого числа (десятки) элементов из базового распределения.

Опишем алгоритм Дж. Марсалья, называемый *алгоритм зиггурата*<sup>2</sup> (ziggurat algorithm), на основе которого был реализован генератор гауссов-

---

<sup>1</sup> Вероятность отклонения гауссовской случайной величины с дисперсией  $\sigma^2$  от своего среднего не более чем на  $3\sigma$  составляет 0,999.

<sup>2</sup> Зиггурат — название ступенчатой пирамидальной башни, культового сооружения в Месопотамии.



ского распределения в версии 5 пакета MATLAB. Идея алгоритма состоит в том, что сначала генерируются числа, равномерно распределённые в некоторой прямоугольной области, а затем эта область подвергается “очистке”, так что часть чисел выбрасывается, и остаются только те, которые удовлетворяют условиям, накладываемым заданной кривой распределения — в данном случае гауссовской кривой

$$f(x) = \exp(-x^2/2).$$

Нормирующий множитель в рассуждениях не играет существенной роли.

Прежде всего, заметим, что алгоритм, по существу, реализует одностороннее гауссовское распределение

$$w(x) = \sqrt{2/\pi} \exp(-x^2/2), \quad x > 0.$$

Переход к “полноценному” распределению осуществляется посредством дополнительного случайного выбора знака генерируемых чисел на основе симметричного (двухстороннего) равномерного распределения.

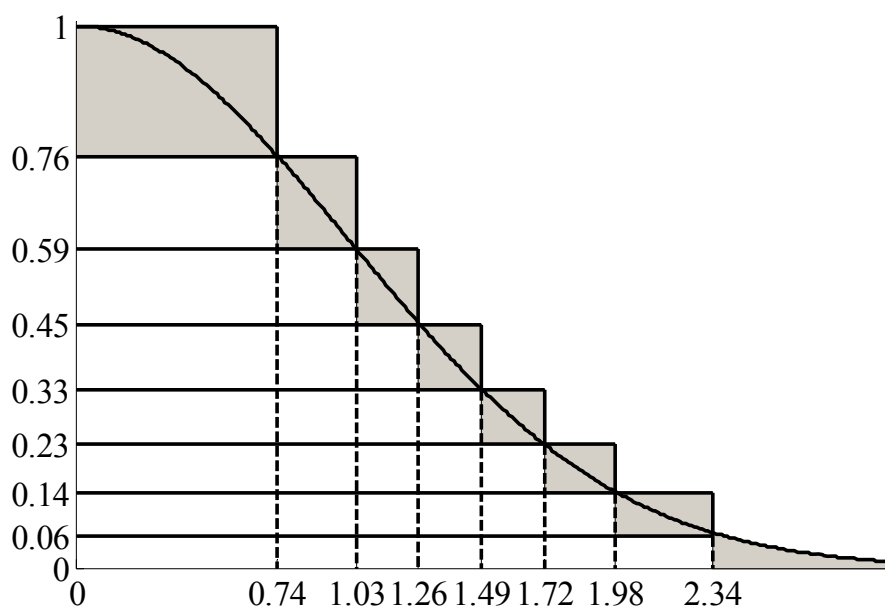


Рис. 2.5. К иллюстрации алгоритма зиггурата

Разделим гауссовскую кривую на части и заключим каждую часть внутри расположенных друг под другом  $n$  прямоугольных областей, имеющих одинаковые площади. (Получающаяся конструкция напоминает мезопотамскую пирамиду в разрезе — отсюда и название алгоритма). На рис. 2.5 показана конструкция, состоящая из  $n = 8$  областей; на практике это число существенно больше ( $n = 128$  в версии 5 пакета MATLAB).

В действительности из  $n$  областей только  $n - 1$  являются прямоугольными, а нижняя  $n$ -я представляет собой клинообразную область с бесконечным “хвостом”.

Пусть  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n + 1$ ) — границы областей. При этом полагаем, что  $x_{n+1} = \infty$ . Тогда

$$f(x_1) = 1, f(x_{n+1}) = 0,$$

и площадь  $S$  прямоугольных областей равна

$$S = x_{k+1}(f(x_k) - f(x_{k+1})), k = 1, \dots, n - 1. \quad (2.2.8a)$$

Этому же значению  $S$  должна быть равна площадь нижней, клинообразной области:

$$S = x_n f(x_n) + \int_{x_n}^{\infty} \exp(-x^2 / 2) dx, \quad (2.2.8 б)$$

отсюда появляется возможность нахождения границы  $x_n$  из трансцендентного уравнения (2.2.8б) на основе рекуррентной процедуры (2.2.8а).

Для иллюстрационного значения  $n = 8$  получается  $x_n = 2,341$ . Для практически используемых значений  $n = 128$  и  $256$  получаются  $x_n = 3,443$  и  $3,654$  соответственно.

Теперь при известном значении  $x_n$  легко вычисляются границы  $x_k$  всех прямоугольных областей, а также значения

$$\gamma_k = \frac{x_{k+1}}{x_k},$$

называемые *ядрами зиггурата* для прямоугольных областей.

Далее начинается собственно процесс получения случайных нормальных чисел. На основе равномерного дискретного распределения случайным образом выбирается  $k$ -я область, для неё генерируется равномерное на интервале  $[-1; 1]$  случайное число  $u$  (двухстороннее равномерное распределение “восстанавливает” двухстороннее гауссовское распределение), после чего производится проверка: не превысило ли абсолютное значение  $u$  соответствующего ядра, т. е. выполняется ли условие  $|u| < \gamma_k$  или, эквивалентно,

$$|u| x_k < x_{k+1}.$$

Выполнение указанного условия означает, что  $ux_k$  является абсциссой точки, лежащей ниже кривой плотности вероятности и, тем самым, может вы-

ступать в роли нормального случайного числа. Абсциссы, попадающие в заштрихованные части прямоугольных областей отбрасываются.

Далее представлен фрагмент функции, реализующей алгоритм зиггурата после проведения инициализирующей процедуры, когда получены границы  $x(k)$  и ядра  $\gamma(k)$  областей.

```
k = unidrnd(128);  
u = 2*rand - 1;  
if abs(u) < gama(k)  
    n = u*x(k);  
end;
```

Отметим, что хотя процедура нахождения  $x_k$  и  $\gamma_k$  требует заметных ресурсов, но она, будучи инициализирующей, проводится один раз, а последующая часть алгоритма выполняется быстро и с малыми затратами.

В пакете MATLAB вызов генератора нормальных случайных чисел осуществляется параметрической функцией `normrnd`.

`normrnd(mu, sigma)` генерирует одно число из гауссовского распределения с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$  (само значение  $\sigma$  является среднеквадратическим отклонением):

```
>> normrnd(0,1)  
ans =  
    -0.4326
```

Наличие дополнительных параметров обеспечивает генерирование матриц случайных целых чисел заданной размерности. Например,

```
>> normrnd(0,1,3,4)  
ans =  
    -1.6656    -1.1465    -0.0376    -0.1867  
     0.1253     1.1909     0.3273     0.7258  
     0.2877     1.1892     0.1746    -0.5883
```

генерирует матрицу размерности  $3 \times 4$  случайных нормальных чисел с нулевым средним и единичной дисперсией.

На рис. 2.6 представлены гистограмма и эмпирическая функция гауссовского распределения с нулевым средним и единичной дисперсией, полученного при помощи функции `normrnd`. Объём выборки составляет 8000 элементов.

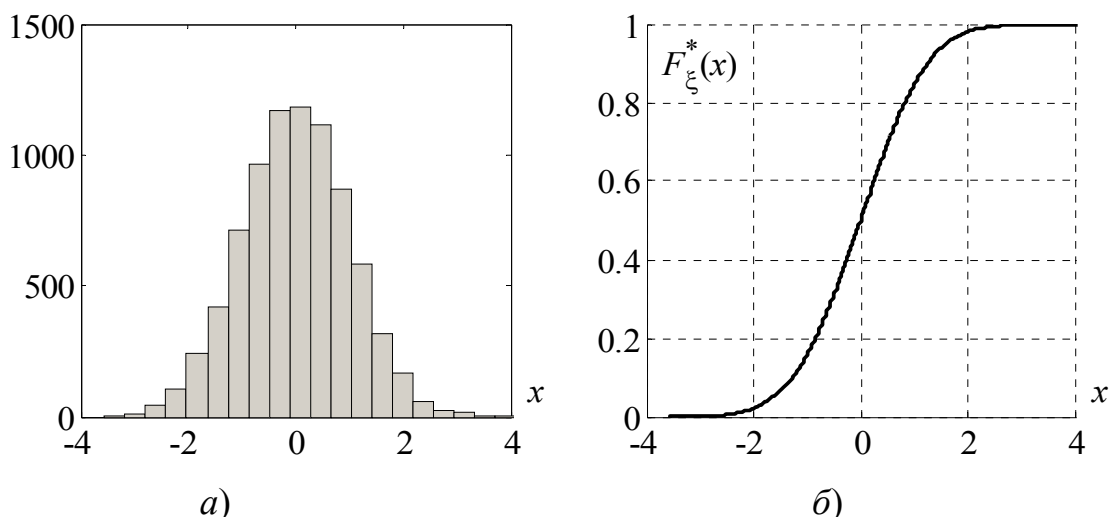


Рис. 2.6. Гистограмма (а) и эмпирическая функция (б) гауссовского распределения с нулевым средним и единичной дисперсией

Получение (псевдо)случайных чисел с распределением, отличным от равномерного, связано с применением к базовой статистике различных функциональных преобразований.

В общей постановке задача функционального преобразования случайных величин выглядит следующим образом. Задано совместное распределение, например, совместная плотность  $w_{\xi}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  непрерывных случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_n$  (эквивалентно можно говорить об  $n$ -мерном случайном векторе  $\xi$ ), а также задана совокупность детерминированных функций  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ , определяющая связь значений  $x_1, \dots, x_n$  случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_n$  со значениями  $y_1, \dots, y_n$  новых случайных величин  $\eta_1, \dots, \eta_n$  ( $n$ -мерного случайного вектора  $\eta$ ), так что

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f_1(\xi_1, \dots, \xi_n); \\ &\dots\dots\dots \\ \eta_n &= f_n(\xi_1, \dots, \xi_n). \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Требуется определить совместное распределение  $w_{\eta}^{(n)}(y_1, \dots, y_n)$  вектора  $\eta$ , а также, возможно, распределения отдельных его компонент.

В дальнейшем будем считать, что набор  $f_1, \dots, f_n$  является совокупностью непрерывных и дифференцируемых функций.

### 2.2.1. Функциональные преобразования одномерных случайных величин

Начнём с рассмотрения одномерного случая, когда одномерная случайная величина  $\xi$ , описываемая плотностью вероятностей  $w_\xi(x)$  или интегральной функцией распределения  $F_\xi(x)$ , подвергается преобразованию

$$\eta = f(\xi),$$

отображающему значения  $x$  случайной величины  $\xi$  на множество  $Y = \{y\}$  значений случайной величины  $\eta$ . Пусть вначале отображение  $f$  — взаимнооднозначное (рис. 2.7), так что существует обратное ему отображение

$$\xi = f^{-1}(\eta) \equiv g(\eta),$$

ставящее в соответствие каждому значению  $y$  единственное значение  $x$ :  $x = x(y)$ .

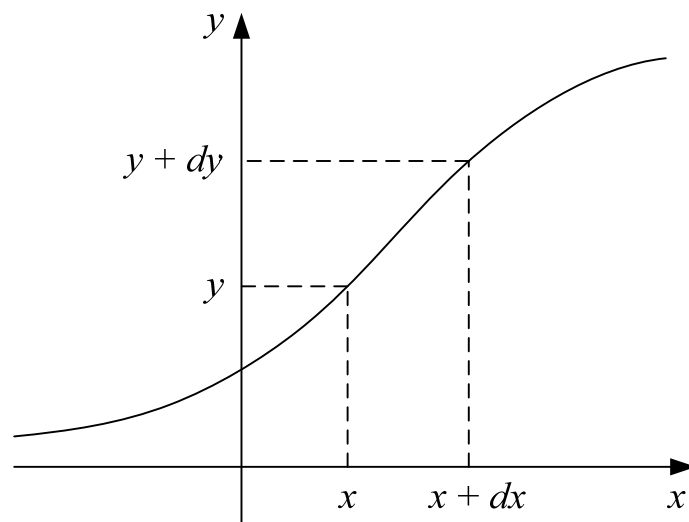


Рис. 2.7. Взаимнооднозначное преобразование случайных величин

Поскольку случайные величины связаны однозначной детерминированной зависимостью, события, состоящие в том, что  $\xi$  заключена в интервале  $[x; x + dx]$ , а  $\eta$  — в интервале  $[y; y + dy]$  являются эквивалентными, т. е. их вероятности равны:

$$P(x \leq \xi \leq x + dx) = w_\xi(x)dx = w_\eta(y)dy = P(y \leq \eta \leq y + dy).$$

Отсюда получаем соотношение, связывающее плотности вероятностей:

$$w_\eta(y) = w_\xi(x(y)) \left| \frac{dx(y)}{dy} \right|. \quad (2.2.10)$$

Наличие модуля связано с тем, что плотности вероятностей не могут быть отрицательными.

Итак, при однозначном отображении методика нахождения результирующего распределения достаточно проста:

- найти функцию  $g$ , обратную функции  $f$ ;
- найти производную  $g' = dx(y)/dy$  обратной функции;
- выразить исходное распределение  $w_\xi(x)$  через значения  $y$  преобразованной случайной величины  $\eta$ ;
- вычислить результирующее распределение  $w_\eta(y)$ , используя выражение (2.2.10).

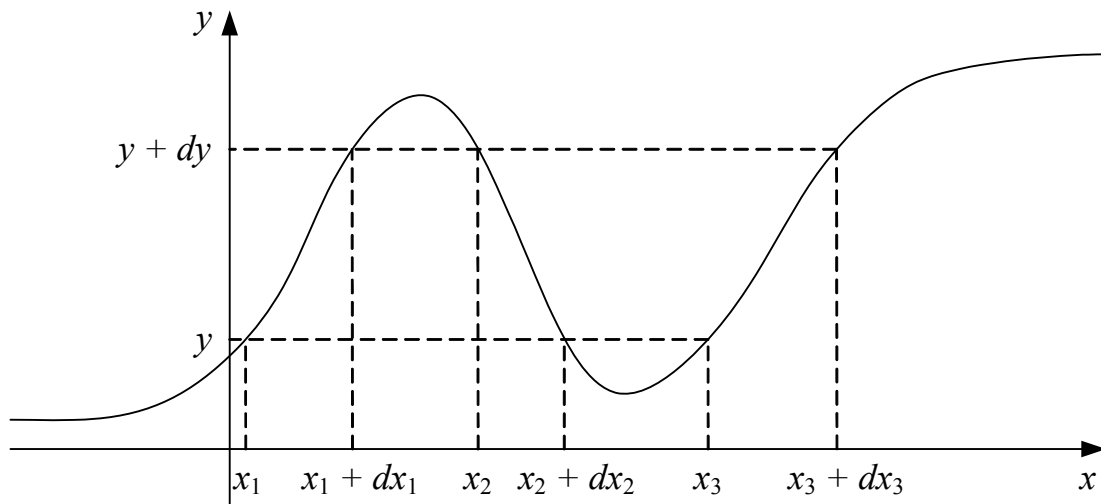


Рис. 2.8. Неоднозначное преобразование случайных величин

Задача немного усложняется, если отображение  $f$  является неоднозначным, поскольку в этом случае в одно значение  $y$  может отобразиться несколько значений  $x$  (рис. 2.8, где в одно значение  $y$  отображается три значения  $x$ ), т. е. выполнение неравенства

$$y \leq \eta \leq y + dy$$

обеспечивается несколькими несовместными возможностями:

$$x_1 \leq \xi \leq x_1 + dx_1 \text{ или } x_2 \leq \xi \leq x_2 + dx_2 \text{ или } \dots \text{ или } x_Q \leq \xi \leq x_Q + dx_Q,$$

где  $Q$  – число ветвей обратной функции.

При неоднозначном преобразовании вероятность нахождения  $\eta$  в интервале  $[y; y + dy]$  равняется сумме вероятностей нахождения  $\xi$  в каждом из интервалов  $[x_k; x_k + dx_k]$  ( $k = 1, \dots, Q$ ), так что формула для вычисления результирующего распределения видоизменяется и приобретает следующий вид:

$$w_\eta(y) = \sum_{k=1}^Q w_\xi(x_k(y)) \left| \frac{dx_k(y)}{dy} \right|. \quad (2.2.11)$$

Таким образом, в случае многозначного отображения всё множество значений  $X$  преобразуемой случайной величины разбивается на области монотонности  $X_k$  ( $k = 1, \dots, Q$ ) функции  $f$ ; в каждой такой области находится обратное преобразование  $g_k$ , после чего используется описанная выше методика с результирующим суммированием согласно (2.2.11). При этом необходимо учитывать, что обратные функции  $x_k(y)$  могут существовать не для всех  $y$ , составляющих значения случайной величины  $\eta$ , т. е. может оказаться так, что одна или более ветвей не влияют на распределение  $w_\eta(y)$  в какой-то области значений  $y$ .

Простейшим примером однозначного отображения является линейное преобразование

$$\eta = a\xi + b, \quad (2.2.12a)$$

для которого обратное отображение на всей области  $X$  имеет вид

$$\xi = \frac{\eta - b}{a}. \quad (2.2.12b)$$

Тогда  $dx(y)/dy = 1/a$ , и

$$w_\eta(y) = w_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}, \quad (2.2.13)$$

т. е. результирующее распределение получается из исходного посредством масштабирования и смещения.

На рис. 2.9, а показан пример неоднозначного отображения: (двухстороннее) квадратичное преобразование

$$y = kx^2, \quad (2.2.14)$$

для которого областями монотонности являются отрицательная и положительная полуоси (ноль может быть отнесён к любой области).

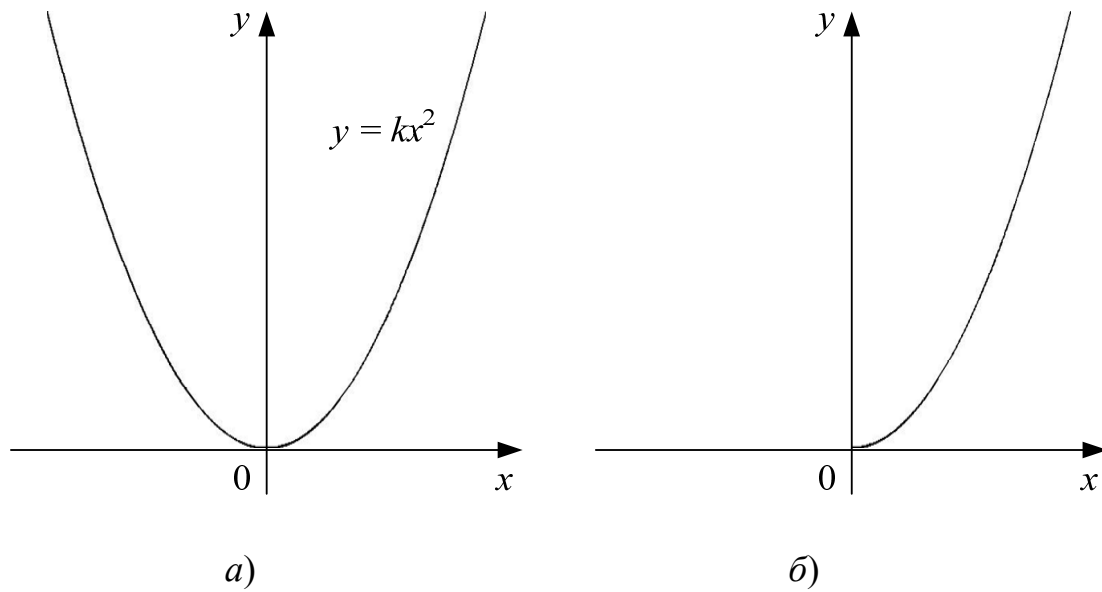


Рис. 2.9. Квадратичное (а) и одностороннее квадратичное (б) преобразования

На отрицательной полуоси обратная функция

$$g_1(y) = -\sqrt{y/k}, \quad y \geq 0; \quad (2.2.15a)$$

на положительной полуоси обратная функция

$$g_2(y) = \sqrt{y/k}, \quad y \geq 0. \quad (2.2.15б)$$

Модуль производной обратной функции для обеих ветвей равен

$$\left| \frac{dg_{1,2}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{ky}},$$

тогда, согласно (2.2.11),

$$w_\eta(y) = \frac{1}{2\sqrt{ky}} \left[ w_\xi(\sqrt{y/k}) + w_\xi(-\sqrt{y/k}) \right], \quad y \geq 0. \quad (2.2.16)$$

Физический смысл наличия в (2.2.16) двух слагаемых очевиден: отрицательные значения преобразуемой случайной величины  $\xi$  зеркально отображаются на положительную полуось. Поэтому, если входное распределение симметрично, т. е.  $w_\xi(x)$  — чётная функция, то выражение (2.2.16) упрощается:

$$w_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{ky}} w_\xi(\sqrt{y/k}), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases} \quad (2.2.16a)$$



Конкретизируем вид  $w_\eta(y)$  для двух типовых входных распределений: равномерного (для определённости симметричного) и гауссовского.

Если

$$w_\xi(x) = \begin{cases} 1/(2c), & x \in [-c; c]; \\ 0, & x \notin [-c; c]; \end{cases}$$

то

$$w_\xi(\sqrt{y/k}) = \begin{cases} 1/(2c), & y \in [0; kc^2]; \\ 0, & y \notin [0; kc^2], \end{cases}$$

так что

$$w_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2c\sqrt{ky}}, & y \in [0; kc^2]; \\ 0, & y \notin [0; kc^2]. \end{cases} \quad (2.2.17)$$

В точке  $y = 0$  плотность  $w_\eta(y)$  обращается в бесконечность, однако это интегрируемая особенность; интеграл от  $w_\eta(y)$  по промежутку  $[0; kc^2]$  конечен и равен, в согласии с условием нормировки, единице.

На рис. 2.10 показаны вид плотности вероятности (2.2.17), а также гистограмма и эмпирическая функция распределения, полученного посредством имитационного моделирования; объём выборки 8000.

Пусть теперь  $w_\xi(x)$  — гауссовское распределение  $N(a, \sigma^2)$  с математическим ожиданием  $a$  и дисперсией  $\sigma^2$  (распределение в общем случае несимметрично). Тогда

$$w_\xi(\sqrt{y/k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\sqrt{y/k} - a)^2}{2\sigma^2}\right],$$

и

$$\begin{aligned} w_\eta(y) &= \frac{1}{2\sqrt{yk}\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ \exp\left(-\frac{(\sqrt{y/k} - a)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\sqrt{y/k} + a)^2}{2\sigma^2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi yk}} \exp\left(-\frac{y + a^2k}{2\sigma^2k}\right) \operatorname{ch} \frac{a\sqrt{y}}{\sigma^2\sqrt{k}}, \quad y \geq 0, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

где  $\operatorname{ch}(x) = [\exp(x) + \exp(-x)]/2$  — гиперболический косинус.

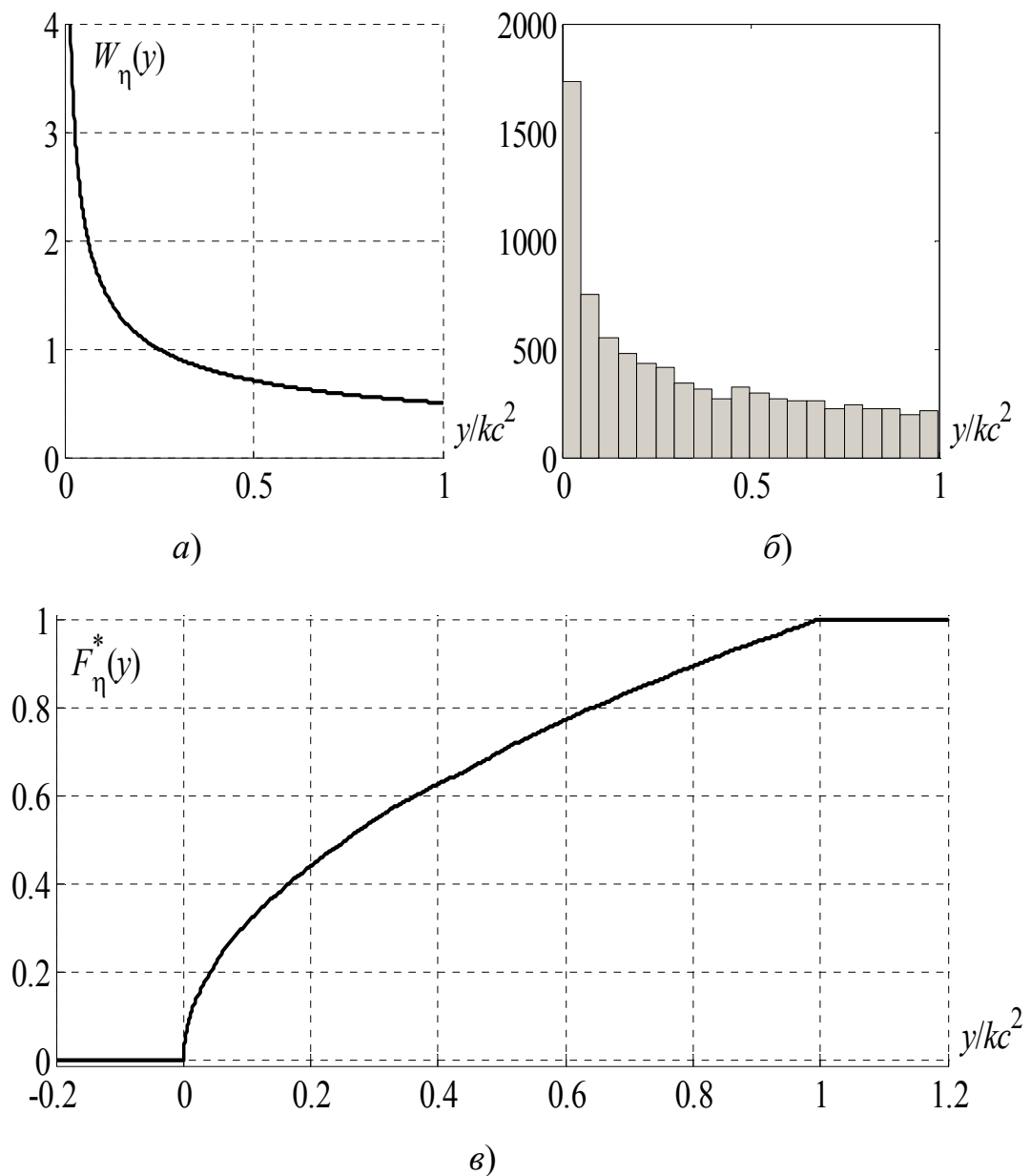


Рис. 2.10. Плотность вероятности (а), гистограмма (б) и эмпирическая функция (в) равномерного симметричного распределения после квадратичного преобразования

Вид плотности вероятности (2.2.18), а также гистограмма и эмпирическая функция распределения, полученные посредством имитационного моделирования для  $k = 1$ ,  $a = 1$ ,  $\sigma = 1$  показаны на рис. 2.11. Объем выборки составляет 8000 элементов.

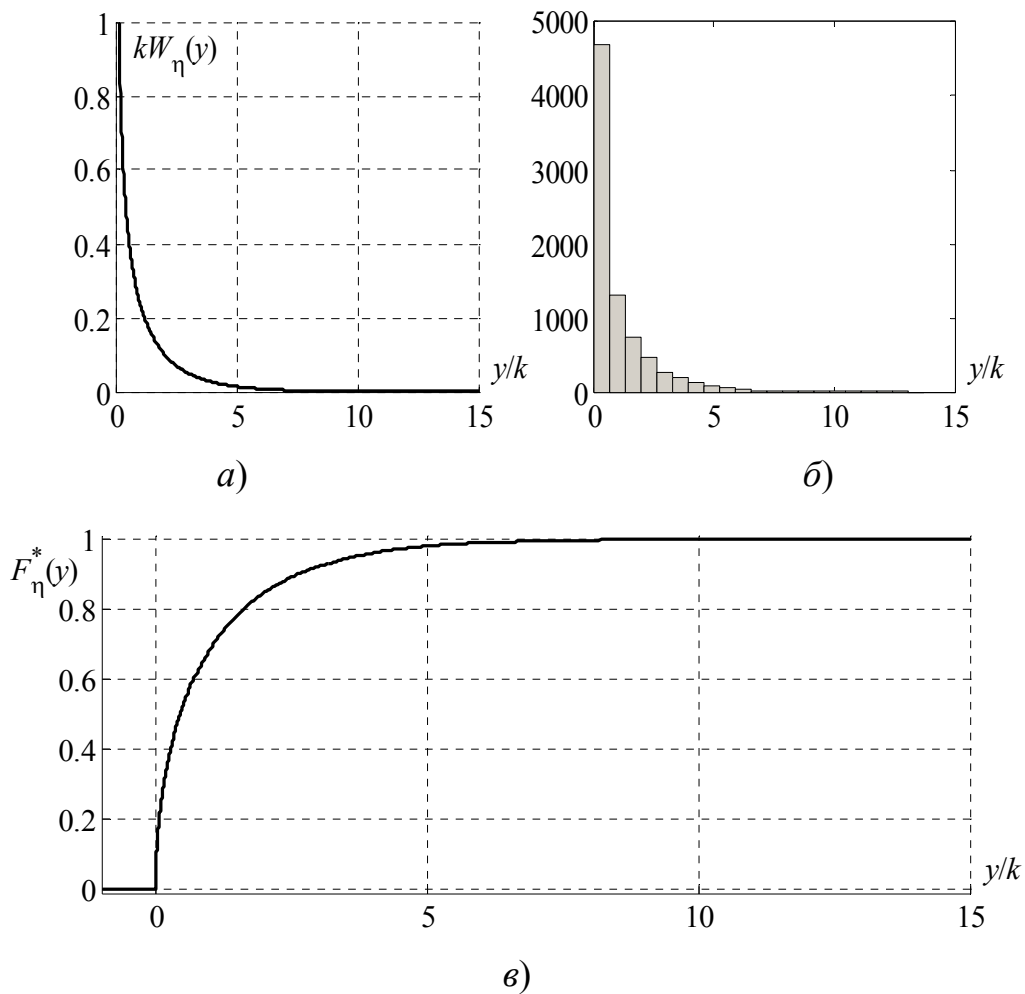


Рис. 2.11. Плотность вероятности (а), гистограмма (б) и эмпирическая функция (в) гауссовского распределения после квадратичного преобразования

Интересная особенность появляется при анализе так называемых *односторонних преобразований*. Пусть, к примеру, симметричное на интервале  $[-c; c]$  распределение подвергается одностороннему квадратичному преобразованию (рис. 2.9, б)

$$y = \begin{cases} kx^2, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (2.2.19)$$

На полуоси  $[0; +\infty)$  обратная функция определяется (2.2.15б), и соответствующая ей часть результирующего распределения — непрерывная компонента  $w_{\eta}^{(H)}(y)$  есть

$$w_{\eta}^{(H)}(y) = \frac{1}{2\sqrt{ky}} w_{\xi}(\sqrt{y/k}).$$

Для значений  $x$ , расположенных на отрицательной полуоси, имеет место тот факт, что все они отображаются в одно значение  $y = 0$ . В терминах вероятностного описания это означает наличие в выходном распределении дискретной компоненты  $w_{\eta}^{(a)}(y)$  — взвешенной дельта-функции  $q\delta(y)$ . Коэффициент  $q$ , стоящий перед дельта-функцией, определяет вероятность нахождения случайной величины  $\xi$  в том диапазоне, все значения которого отображаются в единственное значение  $y = 0$ . В рассматриваемом примере

$$q = P(\xi < 0) \equiv F_{\xi}(0),$$

где  $F_{\xi}(x)$  — интегральная функция распределения  $\xi$ . Таким образом,

$$w_{\eta}(y) = w_{\eta}^{(n)}(y) + w_{\eta}^{(a)}(y) = F_{\xi}(0)\delta(y) + \frac{1}{2\sqrt{ky}} w_{\xi}(\sqrt{y/k}), \quad y \geq 0. \quad (2.2.20)$$

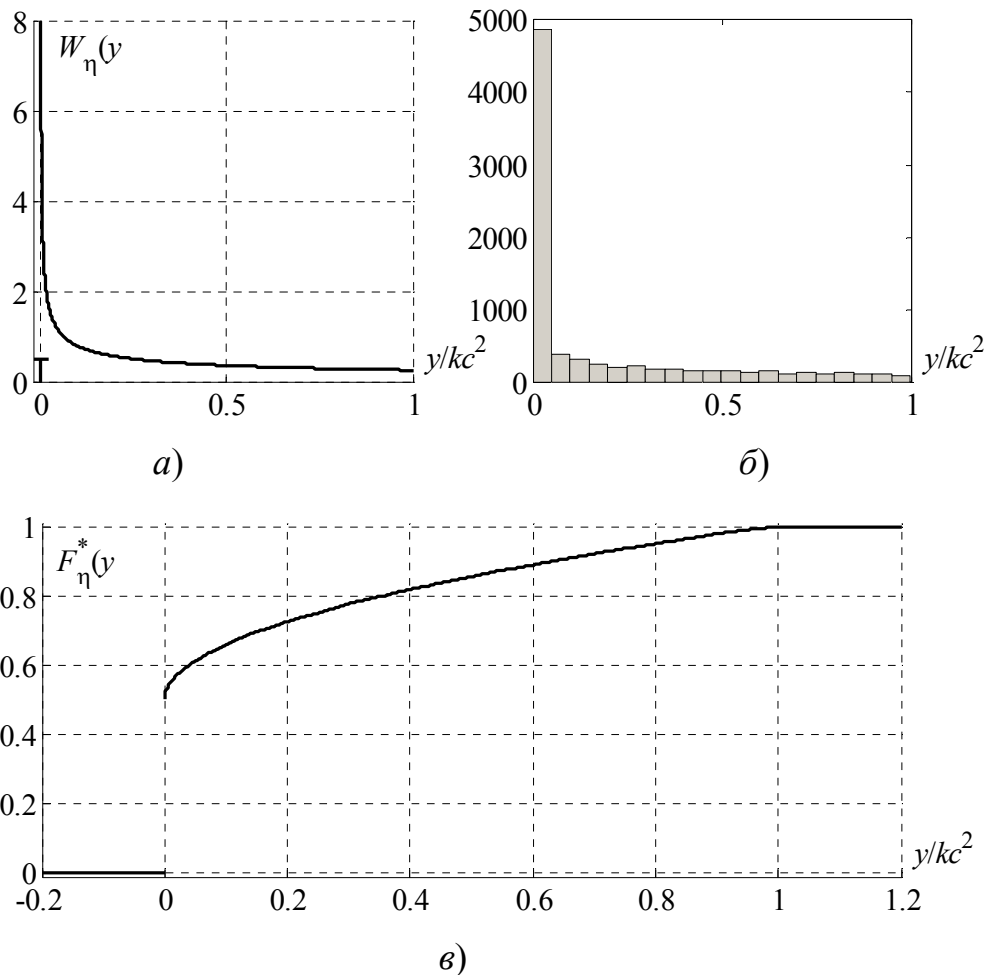


Рис. 2.12. Плотность вероятности (а), гистограмма (б) и эмпирическая функция (в) равномерного симметричного распределения после одностороннего квадратичного преобразования

В частности, для равномерного симметричного на интервале  $[-c; c]$  распределения имеем

$$w_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta(y) + \frac{1}{4c\sqrt{ky}}, & y \in [0; kc^2]; \\ 0, & y < 0, y > kc^2. \end{cases} \quad (2.2.21)$$

В более общем случае преобразование может содержать несколько участков, порождающих как непрерывные, так и дискретные компоненты. Наличие дискретных компонент принято отображать стрелками, высоты которых соответствуют взвешивающим коэффициентам (рис. 2.12).

Отметим, что, если требуется знание лишь моментов преобразованной случайной величины  $\eta$ , то их можно найти без предварительного вычисления закона распределения  $w_{\eta}(y)$ , используя следующие выражения:

$$\mathbf{E}[m_{\eta k}] = \int_{-\infty}^{\infty} f^n(x) w_{\xi}(x) dx; \quad (2.2.22a)$$

$$\mathbf{E}[\mu_{\eta k}] = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \mathbf{E}[\eta])^n w_{\xi}(x) dx. \quad (2.2.22б)$$

Описанная выше методика нахождения результирующего распределения после функционального преобразования может быть применена и к дискретному распределению случайной величины  $\xi$ . Однако в этом случае проще непосредственно подсчитать вероятности и значения результирующего дискретного распределения.

Пусть дискретная случайная величина  $\xi$  принимает значения  $x_k$  с вероятностями  $p_k = P(x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Тогда случайная величина  $\eta = f(\xi)$  также будет дискретной, принимающей значения  $y_k = f(x_k)$ . При взаимно-однозначном преобразовании

$$P(\eta = y_k) = P(\xi = x_k) = p_k.$$

Если же преобразование неоднозначное, когда одному значению  $y_k$  соответствует несколько значений  $x_{k_1}, \dots, x_{k_m}$ , то

$$P(\eta = y_k) = P(\xi = x_{k_1}) + \dots + P(\xi = x_{k_m}) = p_{k_1} + \dots + p_{k_m}.$$

Итак, нахождение результирующего распределения при заданном функциональном преобразовании не содержит каких-либо существенных

трудностей и проводится по описанной выше методике. Рассмотрим теперь обратную задачу. Заданы распределения  $w_\xi(x)$  и  $w_\eta(y)$  двух случайных величин: преобразуемой (“входной”)  $\xi$  и результирующей (“выходной”)  $\eta$ , и требуется найти функциональное преобразование  $\eta = f(\xi)$ , обеспечивающее указанное соответствие между распределениями. Другими словами, требуется получить возможность генерирования случайной величины с заданным законом распределения, при условии, что существует базовое распределение, в качестве которого обычно рассматривается равномерное на интервале  $[0; 1]$  распределение.

### 2.2.2. Методы моделирования вероятностных распределений

Прежде всего, отметим, что рассмотренное выше линейное преобразование (2.2.12) является масштабирующим, обеспечивающим растяжение (сжатие) и “параллельное” смещение значений генерируемых случайных чисел:

$$w_\xi(x) \rightarrow \frac{1}{a} w_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

По существу, такое преобразование уже использовалось в рассмотренных методах генерирования базовых статистик. Например, при реализации алгоритма зиггурата генерирования нормальных чисел команда

$$u = 2 * \text{rand} - 1$$

генерирует равномерно распределённые на интервале  $[-1; 1]$  числа посредством преобразования стандартного равномерного распределения  $U(0; 1)$ .

Рассмотрим некоторые методы получения случайных чисел с заданным законом распределения.

#### Метод обратной функции

Одним из наиболее часто используемых методов решения обратной задачи является *метод обратной функции распределения* (иногда его называют *методом Смирнова*), который основан на следующем свойстве интегральной функции распределения.

Если плотность вероятности  $w_\eta(y)$  непрерывной<sup>1</sup> случайной величины  $\eta$  удовлетворяет уравнению

---

<sup>1</sup> Для непрерывной случайной величины  $\eta$  интегральная функция распределения  $F_\eta(y)$  является строго монотонной функцией, что обеспечивает существование обратной

$$\int_{-\infty}^{\eta} w_{\eta}(y) dy = \kappa, \quad (2.2.23)$$

или, что эквивалентно, функция распределения  $F_{\eta}(y)$  удовлетворяет уравнению

$$\eta = F_{\eta}^{-1}(\kappa), \quad (2.2.23a)$$

где  $\kappa$  — случайная величина, равномерно распределённая на интервале  $[0; 1]$ , то случайная величина  $\eta$  распределена по закону  $w_{\eta}(y)$ .

Для доказательства справедливости этого свойства сформируем на основе случайной величины  $\eta$  и её произвольного значения  $y$  случайную величину

$$\eta_1 = \int_{-\infty}^{\eta} w_{\eta}(y') dy'$$

и значение

$$y_1 = \int_{-\infty}^y w_{\eta}(y') dy' \equiv F_{\eta}(y),$$

являющиеся монотонными функциями своих верхних пределов интегрирования. Тогда, с учётом (2.2.23), имеем соотношение

$$P(\eta < y) = P(\eta_1 < y_1) = P(\kappa < F_{\eta}(y)) = F_{\kappa}(F_{\eta}(y)).$$

Как известно, интегральная функция  $F_{\kappa}(k)$  равномерного распределения на интервале  $[0; 1]$  равна

$$F_{\kappa}(k) = \begin{cases} 0, & k < 0; \\ k, & 0 \leq k \leq 1; \\ 1, & k > 1. \end{cases}$$

Но  $F_{\eta}(y)$  сама является интегральной функцией распределения, принимающей значения в диапазоне от 0 до 1, следовательно,

$$P(\eta < y) = F_{\eta}(y),$$

т. е. интегральная функция распределения случайной величины  $\eta$  действительно равна желаемой функции  $F_{\eta}(y)$ .

функции  $F_{\eta}^{-1}(k)$ . Если  $F_{\eta}(y)$  не является строго монотонной, то вывод остаётся в силе, если под обратной функцией понимать  $F_{\eta}^{-1}(k) = \sup\{y : F_{\eta}(y) \leq k\}$

Для большинства практически интересных модельных распределений уравнение (2.2.23) оказывается трансцендентным, и без учёта специфических свойств рассматриваемого распределения трудно указать общие эффективные методы его решения. Использование численных методов, например, метода Ньютона, может привести к медленно сходящейся процедуре на тех участках, где  $w_{\eta}(y)$  мало по своей величине. Ещё более сложной может оказаться задача, если интеграл в (2.2.23) не вычисляется в элементарных функциях, и приходится применять либо аппроксимацию, либо численное интегрирование.

Тем не менее, для некоторых простых распределений удаётся получить результат в замкнутом виде. Например, для (одностороннего) экспоненциального распределения

$$w_{\eta}(y) = \begin{cases} \mu \exp(-\mu y), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0, \end{cases} \quad \mu > 0,$$

из (2.2.23) получаем уравнение

$$\exp(-\mu\eta) = 1 - \kappa,$$

эквивалентное уравнению

$$\exp(-\mu\eta) = \kappa,$$

поскольку случайные величины  $\kappa$  и  $1 - \kappa$  одинаково распределены. Отсюда

$$\eta = -\frac{1}{\mu} \ln \kappa. \quad (2.2.24)$$

В пакете MATLAB генерирование экспоненциально-распределённых случайных чисел величин реализовано на основе описанного метода функцией `exprnd(mu, n, m)`, где  $\mu$  — параметр распределения а  $m$  и  $n$  — размеры генерируемой матрицы. Например,

```
>> exprnd(1, 3, 4)
ans =
    0.2049    0.0906    1.2783    0.0357
    0.0989    0.4583    0.6035    1.8476
    2.0637    2.3275    0.0434    0.0298
```

генерирует матрицу размерности  $3 \times 4$  случайных релеевских чисел, для которых  $\mu = 1$ .



На рис. 2.13 представлены гистограмма и ЭФР для экспоненциального распределения, полученного на основе преобразования (2.2.24) для  $\mu = 1$ . Объём выборки составляет 8000 элементов.

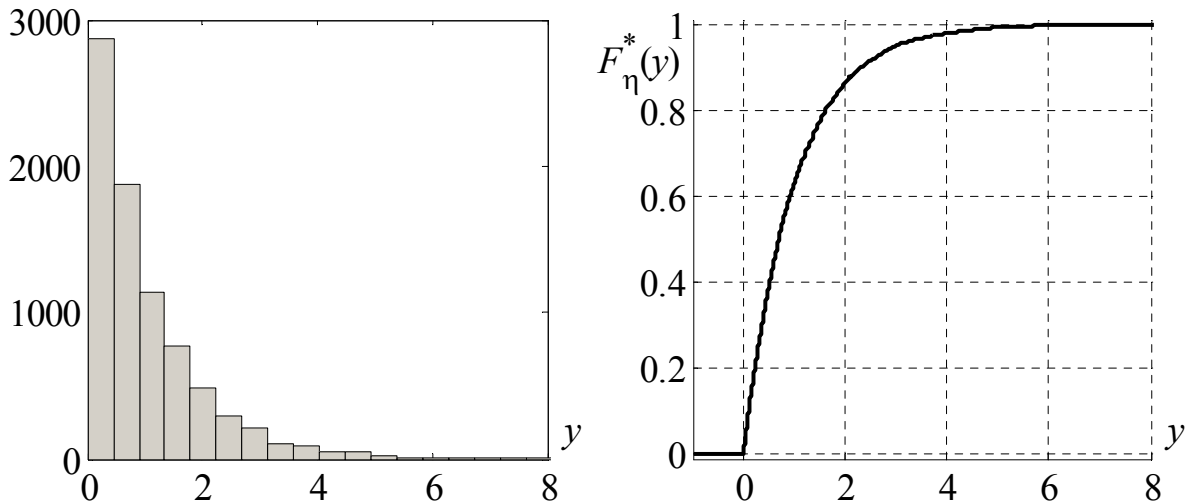


Рис. 2.13. Гистограмма (а) и ЭФР (б) для экспоненциального распределения при  $\mu = 1$

Для распределения Релея

$$w_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0, \end{cases} \quad \sigma > 0,$$

интегрирование в (2.2.23) приводит к уравнению

$$1 - \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) = \kappa,$$

так что искомое преобразование имеет следующий вид:

$$\eta = \sigma \sqrt{-2 \ln(1 - \kappa)}$$

или, эквивалентно,

$$\eta = \sigma \sqrt{-2 \ln \kappa}. \quad (2.2.25)$$

Напомним, что параметр  $\sigma$ , фигурирующий в распределении Релея, не является среднеквадратическим отклонением (корнем из дисперсии) релеевской случайной величины.

На рис. 2.14 представлены гистограмма и ЭФР для релеевского распределения, полученного на основе преобразования (2.2.25) при  $\sigma = 1$ . Объём выборки составляет 8000 элементов.

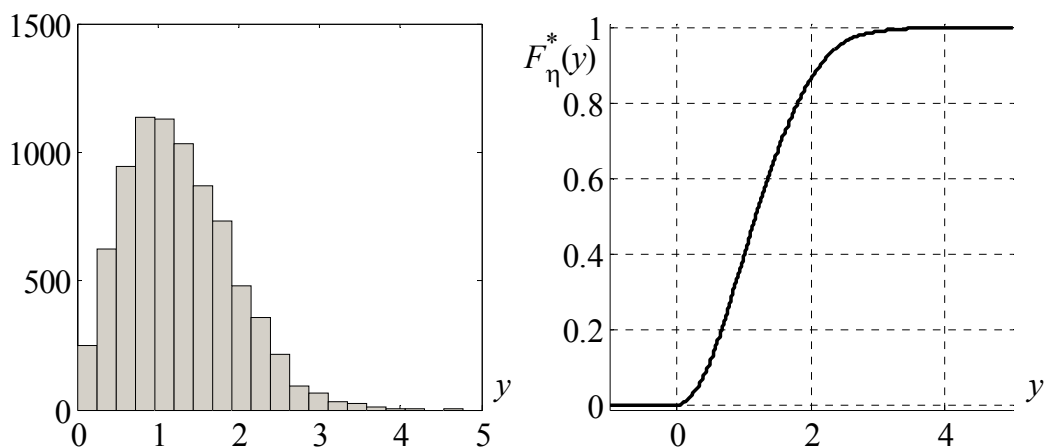


Рис. 2.14. Гистограмма (а) и ЭФР (б) для релеевского распределения при  $\sigma = 1$

В пакете MATLAB генератор распределения Релея (релеевского распределения) реализован функцией `raylrnd(sigma, m, n)`, где `sigma` — параметр распределения, а `m` и `n` — размеры генерируемой матрицы. Например,

```
>> raylrnd(1, 3, 4)
ans =
    0.7302    0.3094    1.1930    1.3475
    2.7460    1.5660    0.8332    0.7383
    0.1852    1.1924    0.4402    1.7784
```

генерирует матрицу размерности  $3 \times 4$  случайных релеевских чисел, для которых  $\sigma = 1$ .

Как уже было указано, метод обратной функции “в чистом” виде применим только к тем распределениям, для которых можно разрешить уравнение (2.2.23). Однако существует возможность использования такого метода и в тех случаях, когда интегрирование в (2.2.23) не удаётся провести в замкнутом виде. Речь идёт об аппроксимации желаемого закона распределения в табличном виде, пригодном для последующей обработки в стандартных программно-аппаратных архитектурах. Практически это означает, что в память цифрового устройства вводится таблица дискретных значений обратной функции  $F_{\eta}^{-1}$ , допускающая последующую простую, например, линейную интерполяцию, что обеспечивает минимальное время генерирования, правда, ценой существенных затрат памяти.

Вообще, табличные методы являются, пожалуй, самыми универсальными методами моделирования случайных величин. Более того, в том или ином виде они как составляющая присутствуют в подавляющем большинстве реализованных программных продуктов — либо в виде полной таблицы значений, либо в виде “опорных” значений (границы интервалов, площади областей и т. п.).

### Метод исключения

*Метод исключения* (метод режекции), который обычно связывают с именем Дж. Неймана, фактически уже был рассмотрен выше, поскольку он используется как составная часть в алгоритме зиггурата формирования гауссовского распределения. Теперь опишем его в более общем виде.

Пусть  $g$  — двумерная область, которая с одной стороны ограничена некоторым интервалом  $[a; b]$  оси абсцисс, а с другой — графиком функции  $w_\eta(y)$ , являющейся плотностью распределения моделируемой случайной величины  $\eta$  (рис. 2.15).

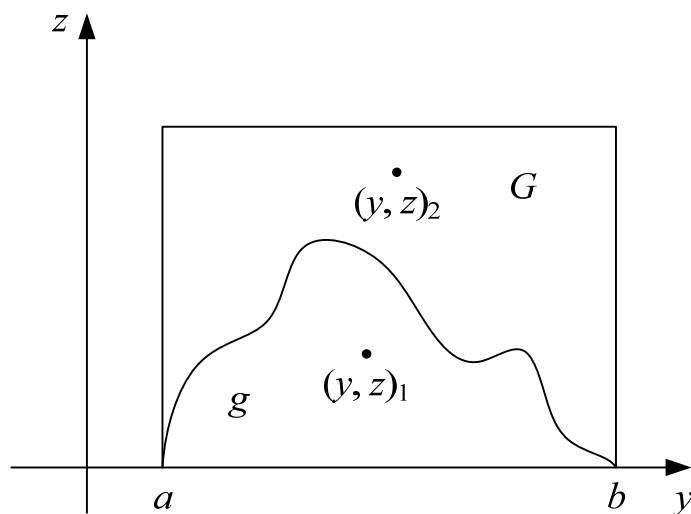


Рис. 2.15. К иллюстрации метода исключения

Поместим область  $g$  внутри другой области  $G$  (на рис. 2.15  $G$  — прямоугольная область, как это обычно бывает на практике;  $y$  — абсциссы точек,  $z$  — ординаты точек), также “опирающейся” на интервал  $[a; b]$  и пусть точка  $(y, z)$  — реализация случайного двумерного вектора  $(\eta, \zeta)$ , равномерно распределённого в области  $G$ . Тогда процедура состоит в том, что при выполнении неравенства  $w_\eta(y) \geq z$  значение  $y$  принимается в качестве ре-

лизации случайной величины с заданным законом распределения  $w_\eta(y)$ , т. е. подаётся на выход генератора чисел, а в противном случае точка  $(y, z)$  исключается из рассмотрения. Далее процедура вновь возвращается к реализации случайной точки  $(y, z)$  и проверке неравенства  $w_\eta(y) \geq z$ . Другими словами, искомый набор чисел составляют те точки области  $G$ , которые одновременно оказываются и в области  $g$ . Так, точка  $(y, z)_1$  принимается в качестве реализации, а точка  $(y, z)_2$  — отбрасывается, поскольку не попадает в область  $g$ .

Покажем, что закон распределения случайной величины  $\eta$ , формируемой с учётом указанного неравенства, соответствует плотности  $w_\eta(y)$ . Имеем условную плотность распределения

$$w_\eta(y / w_\eta(y) \geq z) = \frac{P(y \leq \eta < y + \Delta y, w_\eta(y) \geq z)}{\Delta y P(w_\eta(y) \geq z)},$$

где  $\Delta y$  — бесконечно узкий интервал на оси абсцисс.

Находящаяся в знаменателе вероятность  $P(w_\eta(y) \geq z)$  — это вероятность попадания точек под кривую плотности распределения, что из условия равномерности распределения двумерного вектора  $(\eta, \zeta)$  равно отношению площадей  $g$  и  $G$ :

$$P(w_\eta(y) \geq z) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{1}{S_G} \int_a^b w_\eta(y) dy = \frac{1}{S_G}.$$

Совместное условие

$$(y \leq \eta < y + \Delta y, w_\eta(y) \geq z)$$

определяет точки под кривой  $w_\eta(y)$ , заключённые одновременно в интервале шириной  $\Delta y$ . Снова, в силу равномерности распределения двумерного вектора  $(\eta, \zeta)$ , вероятность такого совместного события равна

$$P(y \leq \eta < y + \Delta y, w_\eta(y) \geq z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{S_G} \int_y^{y+\Delta y} w_\eta(y') dy' = \frac{\Delta y w_\eta(y)}{S_G}.$$

Таким образом,

$$w_\eta(y / w_\eta(y) \geq z) = w_\eta(y).$$

Более конкретно использование метода исключений можно охарактеризовать следующим образом. Для заданной ограниченной плотности  $w_\eta(y)$  выбирается число  $\gamma$ , такое, что для всех  $y$  выполняется условие  $\gamma w_\eta(y) < 1$ , а

распределение  $\zeta$  берётся равномерным на области определения функции  $w_\eta(y)$ . Тогда, если выполняется условие  $\gamma w_\eta(y) \geq z$ , то число  $y$  принимается в качестве сгенерированного случайного числа; в противном случае пара  $(y, z)$  отбрасывается.

Эффективность метода исключений тем выше, чем больше вероятность *не* исключения сгенерированной случайной точки, которая определяется отношением  $q$  площади под кривой  $w_\eta(y)$  к площади охватывающей области  $G$ . Тогда вероятность того, что при  $k$  последовательных шагах сгенерированная точка не удовлетворяла условиям и исключалась, а на  $(k + 1)$ -м шаге была принята, равна  $q(1 - q)^k$ . Следовательно, среднее время моделирования по методу исключения одного числа пропорционально величине

$$\tau = \sum_{k=1}^{\infty} kq(1 - q)^k = \frac{1}{q} - 1.$$

В тех случаях, когда распределение неограничено, метод приходится модифицировать подобно тому, как это делалось в алгоритме зиггурата (дробление области на конечное число подобластей).

### **Метод суперпозиций**

*Метод суперпозиций* не имеет самостоятельного значения, но может оказаться весьма полезным вспомогательным инструментом при реализации других методов. Его суть заключается в том, что моделируемое распределение  $w_\eta(y)$  представляется в виде аддитивной смеси других, более простых распределений  $w_k(y)$ :

$$w_\eta(y) = \sum_{k=1}^K p_k w_k(y), \quad (2.2.26)$$

где  $p_1, \dots, p_K$  — неотрицательные числа (весовые множители), сумма которых равна единице.

Геометрически соотношение (2.2.26) означает, что вся область под кривой  $w_\eta(y)$  разбивается на несколько непересекающихся подобластей  $g_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ), площади которых равны  $p_k$  (рис. 2.16). Тогда распределения  $w_k(y)$  образуются посредством “горизонтального выравнивания” подобластей  $g_k$  и нормированием (делением на  $p_k$ ) ординат точек  $w_k(y)$ .

Принцип разбиения заключается в том, что области, имеющие большие площади, т. е. большие вероятности  $p_k$ , должны соответствовать тем

плотностям  $w_k(y)$ , которые для своих реализаций требуют малое количество ресурсов. Соответственно, ресурсоёмким распределениям можно приписать малые вероятности, и в среднем затраты будут невелики, поскольку большая часть времени будет отводиться на реализацию распределений с малыми ресурсными затратами. Далее каждое распределение реализуется каким-либо известным способом.

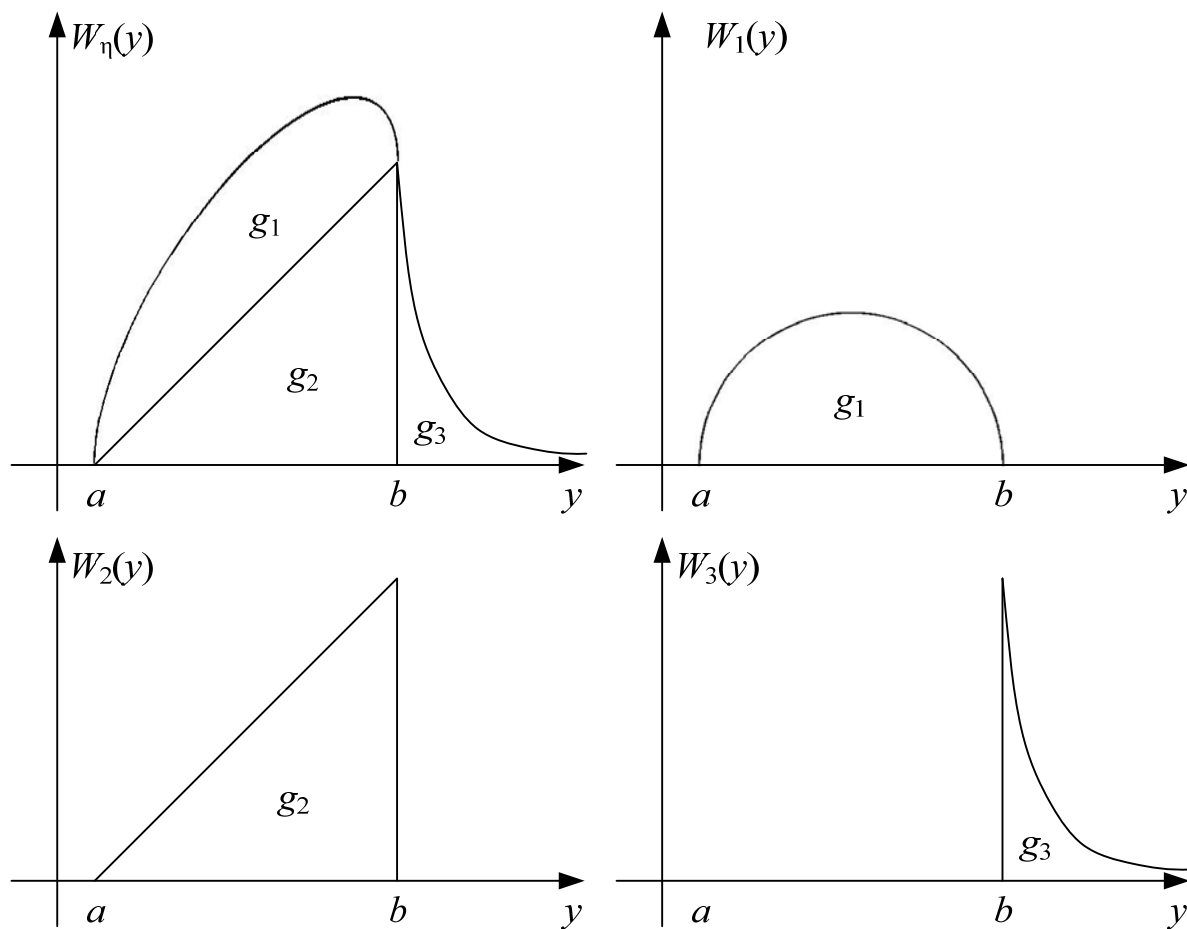


Рис. 2.16. К иллюстрации метода суперпозиций

Например, на рис. 2.17 показано разбиение на “ступенчатую” плотность  $w_1(y)$ , прямоугольную область  $w_6(y)$ , набор “треугольных” плотностей  $w_2(y)$ ,  $w_3(y)$ ,  $w_4(y)$ ,  $w_5(y)$ ,  $w_7(y)$ ,  $w_8(y)$ , и “остаточную” плотность

$$W_{\eta}(y) = \frac{W_{\eta}(y) - \sum_{k=1}^8 p_k W_k(y)}{1 - \sum_{k=1}^8 p_k}.$$

Ступенчатая и прямоугольная плотности легко реализуется на основе масштабированного равномерного распределения. Остаточную плотность  $w_{\eta}(y)$  подобной формы можно реализовать методом исключений. Для реализации треугольных плотностей вида

$$w_{\eta}(y) = \begin{cases} 2y, & y \in [0;1] \\ 0, & y \notin [0;1] \end{cases}$$

проще всего использовать метод обратной функции, поскольку в этом случае соотношение (2.2.23) даёт

$$\eta = \sqrt{k},$$

где случайная величина  $k$  равномерно распределена на интервале  $[0; 1]$ .

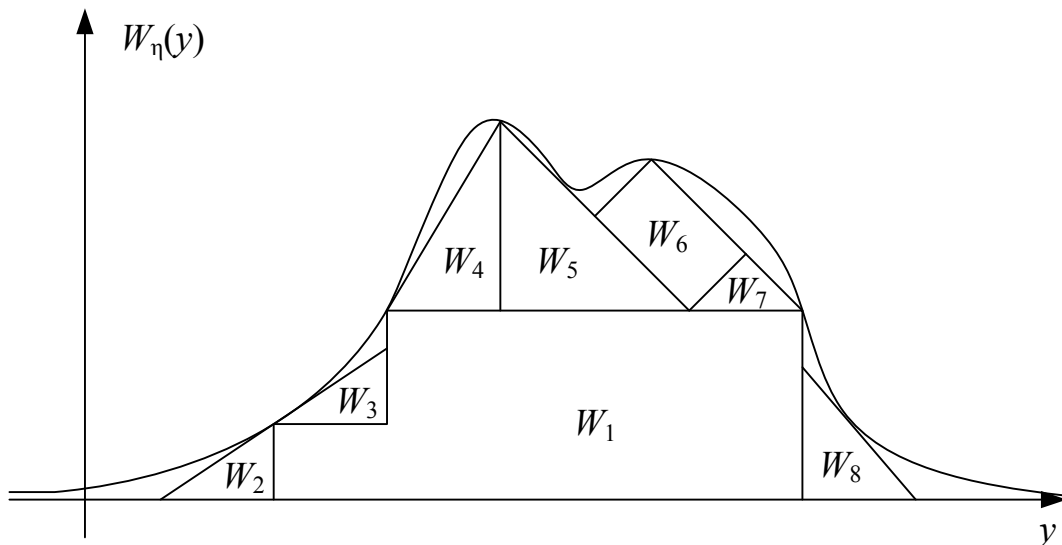


Рис. 2.17. Пример разбиения на подобласти в методе суперпозиций

Описанные методы касались непрерывных распределений. Рассмотрим теперь основные подходы к формированию генераторов дискретных случайных величин, базовой статисткой для которых является дискретное равновероятное распределение из набора  $1, \dots, N$ , реализуемое функцией `unidrnd`.

Выбирая  $N=2$  и, для удобства, масштабируя распределение в симметричный вид:

$$2 * (\text{unidrnd}(1, m, n)) - 3,$$

получаем матрицу размерности  $m \times n$ , содержащую случайные равновероятные числа  $+1$  и  $-1$ .

В более общем случае генерируемые числа не равновероятны:

$$P(\xi = x_1) = p, \quad P(\xi = x_2) = q = 1 - p.$$

Такую последовательность независимых испытаний называют *бернуллиевским источником с параметром  $p$* . Полагая, например,  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 0$ , на основании свойств интегральной функции равномерного распределения случайной величины  $\kappa$  запишем

$$P(\xi = 1) = p = P(\kappa < p).$$

Введём *индикатор  $I(A)$  события  $A$* , равный единице, если  $A$  наступило, и нулю в противном случае:

$$I(A) = \begin{cases} 1, & A; \\ 0, & \bar{A}. \end{cases}$$

Тогда искомое преобразование

$$\xi = I(\kappa < p). \quad (2.2.27)$$

В пакете MATLAB реализацию индикатора событий удобно осуществлять при помощи функции `find`, возвращающей индексы тех элементов, которые удовлетворяют содержащемуся в вызове функции условию. Например,

```
>> x=[1 4 -3 -7 6 9 -1]; find(x<0);
ans =
     3     4     7
```

Тогда, если сгенерирован набор

$$u = \text{rand}(1, n);$$

из  $n$  равномерных на интервале  $[0; 1]$  чисел, то команды

$$z(\text{find}(u < p)) = 1; \quad z(\text{find}(u \geq p)) = 0;$$

реализуют числа  $z$  с бернуллиевским распределением при заданном параметре  $p$ .

### Биномиальное распределение

Имея бернуллиевскую последовательность, нетрудно смоделировать выборку из биномиального распределения  $Bi(N, p)$  — количества “благо-



приятных” исходов в схеме из  $N$  независимых испытаний, в каждом из которых вероятность исхода равна  $p$ .

Прямой метод реализации  $Bi(N, p)$  основан на “происхождении” этого распределения: если  $(\xi_1, \dots, \xi_N)$  — бернуллиевская последовательность, т. е. все  $\xi_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) независимо с вероятностью  $p$  принимают значение 1, и с вероятностью  $1 - p$  — значение 0, то сумма  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_N$  имеет распределение  $B(N, p)$ . Таким образом, производя  $N$ -элементные “нарезки” из достаточно длинной бернуллиевской последовательности и суммируя числа внутри “нарезок”, можно получить реализацию биномиального распределения.

Описанный метод не обладает высокой эффективностью, особенно при значениях  $p$  близких к нулю или единице, когда в бернуллиевской последовательности возникают весьма длинные отрезки одинаковых чисел. Тем не менее, именно такой метод лежит в основе функции `binornd`, реализованной в пакете MATLAB.

Функция `binornd(N, p, m, n)` возвращает матрицу  $m \times n$  целых чисел, подчиняющихся распределению  $Bi(N, p)$ . Например,

```
>> binornd(5, 0.1, 1, 10);
ans =
    1  2  2  0  2  1  0  1  0  0  1  0  1  2  1
```

На рис. 2.18 представлена гистограмма и эмпирическая функция биномиального распределения, построенного на основе 7-элементных бернуллиевских наборов при вероятности элементарного исхода  $p = 0,4$ . Объём выборки составляет 8000 элементов.

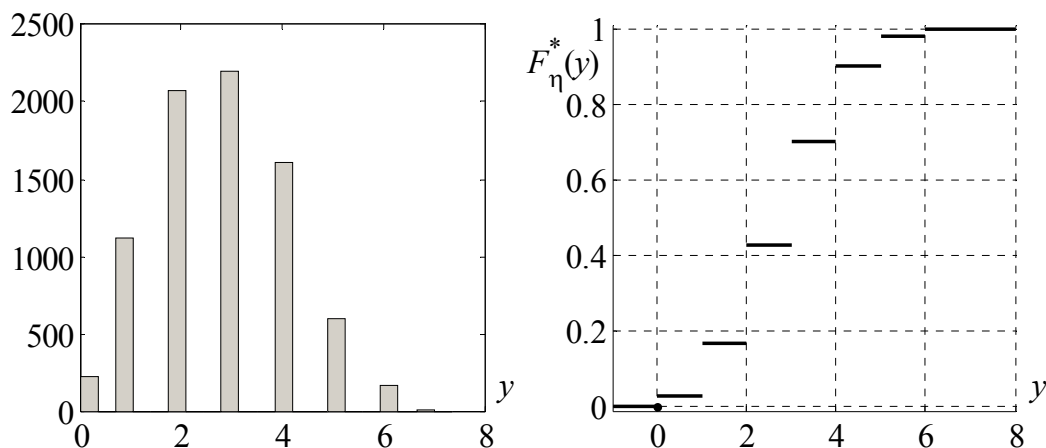


Рис. 2.18. Гистограмма (а) и ЭФР (б) для биномиального распределения при  $N = 7, p = 0,4$

Наряду с прямым, существуют ряд и других, в том числе, заметно более эффективных методов моделирования биномиального распределения. Так, одним из направлений является моделирование, основанное на рандомизации параметров распределения, т. е. на рассмотрении условных вероятностей.

Напомним, что если рассматриваются условные вероятности  $P(\xi / \theta)$ , где параметр  $\theta$  является дискретной случайной величиной с распределением вероятностей  $p_k = P(\theta = t_k)$ , то безусловная вероятность получается усреднением по параметру:

$$P(\xi = x) = \sum_k P(\xi = x / t_k) p(\theta = t_k).$$

Для биномиального распределения, подвергнутого рандомизации, имеет место свойство “самоподобия” по параметру, которое в общем виде можно сформулировать следующим образом.

Пусть случайная величина  $\xi$  подчиняется биномиальному распределению  $Bi(M, p)$ , при этом параметр  $M$  сам является случайной величиной, подчиняющейся биномиальному распределению  $Bi(N, q)$ , причём  $N \geq M$ . Тогда  $\xi$  имеет результирующее биномиальное распределение  $Bi(N, pq)$ .

Данное свойство (точнее, его видоизменённый вариант) положено в основу метода моделирования биномиального распределения, предложенного в конце 1970 гг. Санкт-Петербургским математиком Б.Б. Походземем. Рассмотрим основные вероятностные конструкции, используемые в алгоритме, реализующем данный метод.

Для моделирования случайной величины  $\xi$  с желаемым распределением  $Bi(N, p)$  привлекается “вспомогательное” биномиальное распределение  $Bi(M, q)$ , где

$$q = \begin{cases} 2p, & 0 \leq p \leq 1/2; \\ 2(1-p), & 1/2 < p \leq 1, \end{cases}$$

а параметр  $M \leq N$  сам подчиняется гораздо более легко реализуемому биномиальному распределению  $Bi(N, 1/2)$ . Тогда результирующие распределения случайных величин  $\xi$  (при  $0 \leq p \leq 1/2$ ) и  $N - \xi$  (при  $1/2 < p \leq 1$ ) являются биномиальными с параметрами  $N$  и  $p$ .

Определим последовательность

$$p_k = \min(2p_{k-1}, 2 - 2p_{k-1}), k = 1, 2, \dots, p_0 = p,$$

и пусть  $K$  — первое значение  $k$ , при котором  $p_k = 0$ . Обозначим через  $Q = \{n_1, n_2, \dots\}$  множество значений  $k$ , для которых  $p_k \geq 1/2$ . Например, для  $p = 1/16$  имеем

$$p_1 = \min(1/8, 15/8) = 1/8;$$

$$p_2 = \min(1/4, 7/4) = 1/4;$$

$$p_3 = \min(1/2, 3/2) = 1/2;$$

$$p_4 = \min(1, 1) = 1;$$

$$p_5 = \min(2, 0) = 0,$$

так что  $M = 5$ ,  $Q = \{3, 4\}$ . Заметим, что  $M$  конечно только для случаев, когда вероятность  $p$  является целой степенью двойки; в этом случае  $M$  на единицу больше числа двоичных разрядов  $p$ .

Далее рассмотрим последовательность независимых случайных величин  $\beta_1, \beta_2, \dots$ , равновероятно принимающих два различных значения, скажем, 0 и 1. Образуем числа (количество единиц в последовательности)

$$N_0 = N; N_k = \begin{cases} 0, & N_{k-1} = 0; \\ \sum_{i=S_{k-2}+1}^{S_{k-1}} \beta_i, & N_{k-1} > 0, \end{cases} k = 1, 2, \dots,$$

где

$$S_{-1} = 0; S_k = \sum_{j=0}^k N_j.$$

Например:

$$N_1 = \begin{cases} 0, & N_0 = 0; \\ \sum_{i=1}^{N_0} \beta_i, & N_0 > 0, \end{cases} N_2 = \begin{cases} 0, & N_1 = 0; \\ \sum_{i=N_0+1}^{N_0+N_1} \beta_i, & N_1 > 0, \dots \end{cases}$$

Пусть  $L$  — первое значение  $k$ , при котором  $N_k = 0$  ( $L$  всегда конечно).

Тогда случайная величина

$$\eta = \begin{cases} 0, & n_1 > \min(L, M); \\ \sum_{k: n_k \leq \min(L, M)} (-1)^k N_k, & n_1 \leq \min(L, M), \end{cases}$$

имеет биномиальное распределение с параметрами  $N$  и  $p$ .

Алгоритм моделирования заключается в последовательном моделировании  $L$  раз биномиальных распределений с одинаковой вероятностью элементарного исхода и возрастающими значениями параметра  $M$ .

1. Задаются значения  $N$  и  $p$  распределения, а также начальные значения внутренних переменных  $y := 0$  (накапливаемая сумма в выражении для  $\eta$ ) и  $s := 1$  (формирование под суммой переменного знака).

2. Если  $p = 1$  или  $N = 0$ , то  $x := y + s * N$ , и закончить выполнение алгоритма (одновременно и вырожденные случаи, приводящие к тому, что результатом выполнения уже на первом шаге является  $x = 1$ , и окончательный результат работы алгоритма, вызванный обнулением на каком-то шаге значения  $N$ ).

3. Получить реализацию случайной величины из распределения  $Bi(N, 1/2)$ , т. е. подсчитать число  $M$  единиц в последовательности (реализация “вспомогательного” распределения и переход к реализации “основного” распределения).

4. Если  $p > 0,5$ , то  $y := y + s * M$ ,  $s := -s$ ,  $p := 2 * (1 - p)$ ; иначе  $p := 2 * p$ .

5.  $N := M$  и вернуться к шагу 2.

Быстродействие такого алгоритма зависит от метода моделирования последовательностей равновероятных двоичных величин, а также от способа подсчёта числа единиц. Естественной характеристикой трудоёмкости (сложности) алгоритма является  $E[L]$  — среднее число шагов до обнуления  $N_k$ , и можно показать, что справедлива оценка

$$E[L] \leq \log_2 M + 2.$$

Практическая реализация методов моделирования биномиального распределения, основанных на рандомизации параметра, показывает их заметно большую эффективность (и по быстродействию, и по затрачиваемым ресурсам памяти), чем “прямые” методы.

### **Пуассоновское распределение**

Моделирование пуассоновского распределения  $\pi(\lambda)$ , вероятности целочисленных значений для которого равны

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda), \quad k = 0, 1, \dots,$$

также возможно различными методами.

Вспомним, что пуассоновское распределение является предельным по отношению к схеме Бернулли, когда при большом числе  $n$  испытаний

$$np_n \rightarrow \lambda,$$

где  $p_n$  — вероятность “успеха” в  $n$ -м испытании. Следовательно, моделирование пуассоновского распределения может быть получено на основе биномиального при надлежащем выборе значения

$$p_n = \frac{\lambda}{n} \ll 1.$$

Практически  $p_n$  порядка  $10^{-2}$  и меньше. Таким образом, моделируется серия из  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых вероятность элементарного исхода, например, появление 1, равна  $p_n$ . Тогда число таких исходов есть реализация пуассоновского распределения с параметром  $\lambda = np_n$ .

Эффективность описанного метода, как уже было сказано, невысока, так как при малых значениях  $p_n$  для выявления действительно редких ненулевых значений требуются весьма большое число испытаний. В этой связи пуассоновское распределение реализуют, как правило, другими методами.

Пусть  $u$  — случайное число, сгенерированное из равномерного на интервале  $[0; 1]$  распределения. образуем последовательность чисел

$$q_r = \lambda \exp(-\lambda) \sum_{i=0}^r \frac{1}{i!}, \quad r = 0, 1, \dots$$

и найдём такое  $k$ , что

$$q_{k-1} < u < q_k.$$

Тогда (задача 2.2)  $r$  имеет пуассоновское распределение с параметром  $\lambda$ . Аналогичным образом моделируется пуассоновское распределение на основе суммирования экспоненциально распределённых величин (задача 2.3).

В пакете MATLAB генератор пуассоновских случайных чисел реализован функцией `poissrnd(lambda, m, n)`, где `lambda` — параметр распределения, являющийся, как известно, математическим ожиданием пуассоновской случайной величины.

Для “больших” значений  $\lambda \geq 15$  используется простой мультипликативный метод.

1. Задать начальные значения:  $L := \exp(-\lambda)$ ,  $k := 0$ ,  $q := 1$ .
2. Сгенерировать случайное значение  $u$  из равномерного на интервале  $[0; 1]$  распределения;  $q := q * u$ .
3. Если  $q \geq L$ , то  $k := k + 1$  и вернуться к шагу 2.
4. Полученное значение  $k$  принадлежит пуассоновскому распределению с параметром  $\lambda$ .

Для “малых” значений  $0 < \lambda < 15$  используется *метод времени ожидания*<sup>1</sup> (waiting time method).

```

j = find(lambda < 15);
p = zeros(numel(j), 1);
while ~isempty(j)
    p = p - log(rand(numel(j), 1));
    t = (p < lambda(j));
    j = j(t);
    p = p(t);
    r(j) = r(j) + 1;
end

```

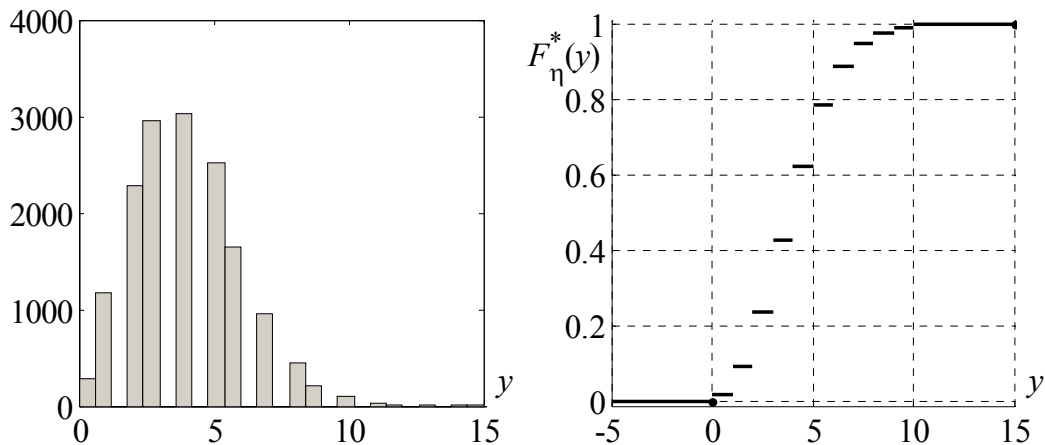


Рис. 2.19. Гистограмма (а) и ЭФР (б) для пуассоновского распределения при  $\lambda = 4$

<sup>1</sup> Напомним, что пуассоновское распределение — это распределение случайной величины, которая равна числу событий, произошедших в единицу времени при некоторых ограничениях. Например, число  $\alpha$ -частиц, которое испускается радиоактивным веществом за одну секунду, имеет пуассоновское распределение.

На рис. 2.19 представлена гистограмма и эмпирическая функция пуассоновского распределения с параметром  $\lambda = 4$ . Объём выборки составляет 15625 элементов.

### Произвольное дискретное распределение

Рассмотрим задачу моделирования произвольного дискретного распределения, когда случайная величина  $\eta$  принимает ряд значений  $y_1, y_2, \dots, y_m$  с соответствующими вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_m$ . При этом, согласно (1.2.2), интегральная функция распределения равна

$$F_{\eta}(y) = \sum_{k=1}^m p_k e(y - y_k),$$

где  $e(y)$  — функция единичного скачка, и требуется решить (в данном случае — алгоритмически) уравнение (2.2.23) относительно равномерного на интервале  $[0; 1]$  распределения.

Простейший и заведомо неэффективный переборный алгоритм решения уравнения имеет следующий вид.

- Генерируется случайное число  $u$ , равномерно распределённое на интервале  $[0; 1]$ .
- Если  $0 \leq u < p_1$ , то  $y := y_1$ ; иначе  
если  $p_1 \leq u < p_1 + p_2$ , то  $y := y_2$ ; иначе  
...  
если  $p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} \leq u < 1$ , то  $y := y_m$ .

Среднее число  $\gamma$  циклов сравнения, выполняемых при таком алгоритме, составляет

$$\gamma = \sum_{k=1}^m kp_k, \quad (2.2.28)$$

но можно добиться ускорения счёта посредством специфических для конкретного распределения приёмов на основе перестановок значений в таблицах распределений.

Например, для биномиального распределения  $Bi(6, 0,5)$  имеем следующие значения и соответствующие им вероятности:

$k$	1	2	3	4	5	6	7
$y_k$	0	1	2	3	4	5	6
$p_k$	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

При этом среднее число циклов сравнения для переборного алгоритма равно

$$\gamma = 1 \cdot \frac{1}{64} + 2 \cdot \frac{6}{64} + 3 \cdot \frac{15}{64} + 4 \cdot \frac{20}{64} + 5 \cdot \frac{15}{64} + 6 \cdot \frac{6}{64} + 7 \cdot \frac{1}{64} = \frac{256}{64} = 4,00.$$

Ускорения вычислений можно добиться, расположив значения в таблице в порядке убывания вероятностей:

$k$	1	2	3	4	5	6	7
$y_k$	3	2	4	1	5	0	6
$p_k$	20/64	15/64	15/64	6/64	6/64	1/64	1/64

В этом случае

$$\gamma = 1 \cdot \frac{20}{64} + 2 \cdot \frac{15}{64} + 3 \cdot \frac{15}{64} + 4 \cdot \frac{6}{64} + 5 \cdot \frac{6}{64} + 6 \cdot \frac{1}{64} + 7 \cdot \frac{1}{64} = \frac{162}{64} = 2,53$$

оказывается существенно меньше, чем для переборного алгоритма.

В пакете MATLAB реализована функция накопительной суммы `cumsum`, позволяющая достаточно просто реализовать условия сравнения для переборного алгоритма. Пусть, к примеру, требуется сгенерировать 8000 случайных чисел, являющихся реализацией дискретной случайной величины, которая принимает значения

$$\mathbf{x} = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$$

с соответствующими вероятностями

$$\mathbf{p} = [0,1 \ 0,2 \ 0,2 \ 0,35 \ 0,15].$$

Возможен следующий вариант реализации, при которой генерируемые значения содержатся в переменной `X`:

```
x = [1 2 3 4 5];
p = [0.1 0.2 0.2 0.35 0.15];
for i = 1:8000
    u = rand;
    k = min( find(u < cumsum(p)) );
    % k - индекс значения случайной величины, соответствующего условию проверки
    X(i) = x(k);
```



end;

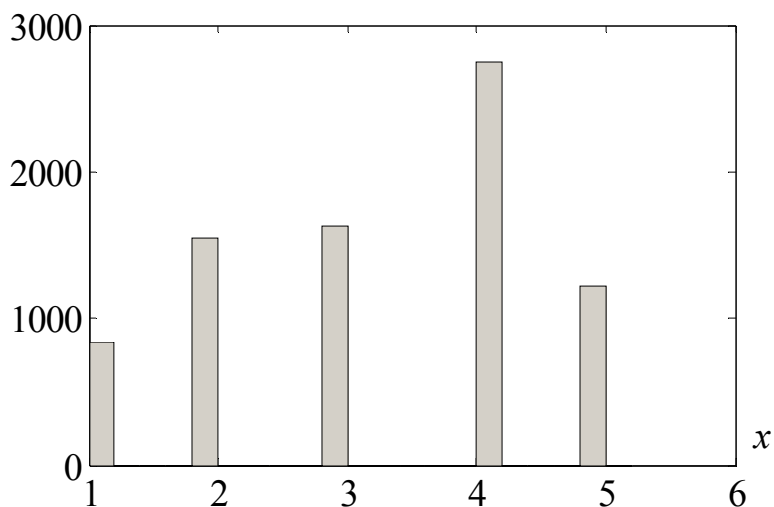


Рис. 2.20. Гистограмма дискретного распределения

На рис. 2.20 представлены результаты моделирования случайной величины, подчиняющейся заданному распределению.

## 2.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В предыдущем разделе были рассмотрены методы моделирования, а также методы анализа функциональных преобразований одномерных случайных величин. Не менее важными задачами, особенно, применительно к анализу случайных процессов (см. далее), является имитационное моделирование многомерных распределений. Для решения таких задач используются как многомерное обобщение рассмотренных методов (метода обратных функций, метода исключения и др.), так и специальные методы, изначально ориентированные на оперирование с многомерными распределениями (метод условных распределений, метод функциональных преобразований).

### 2.3.1. Моделирование многомерных случайных величин

Если компоненты  $n$ -мерной случайной величины  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  независимы, то многомерное распределение  $w_{\xi}^{(n)}(\mathbf{x})$  факторизуется:

$$w_{\xi}^{(n)}(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^n w_{\xi_k}(x_k),$$

и каждую компоненту  $\xi_k$  можно моделировать независимо.

Простейшим случаем является моделирование случайной точки с независимыми координатами, распределёнными равномерно в  $n$ -мерном прямоугольном параллелепипеде

$$\Pi = \{a_k \leq x_k \leq b_k, k = 1, \dots, n\}.$$

Совместная плотность вероятности  $w_{\xi}^{(n)}(\mathbf{x})$  внутри такого множества имеет постоянное значение

$$c = \left( \prod_{k=1}^n (b_k - a_k) \right)^{-1},$$

а плотности вероятности отдельных компонент равны

$$w_{\xi_k}(x_k) = (b_k - a_k)^{-1}, x_k \in [a_k, b_k].$$

Следовательно, при наличии совокупности  $\{u_k\}$  равномерно распределённых на интервале  $[0; 1]$  чисел реализация каждой из компонент  $x_k$ , согласно (2.2.23), осуществляется посредством линейного преобразования

$$x_k = a_k + u_k(b_k - a_k). \quad (2.3.1)$$

В более общем случае, когда компоненты  $\xi_k$  зависимы, для моделирования используют как многомерное обобщение изложенных выше методов, например, многомерный метод исключения (метод Неймана), так и специальные методы, изначально ориентированные на многомерное моделирование.

### Метод условных распределений

Использование метода условных распределений основано на представлении многомерного распределения в виде произведения условных распределений, согласно (1.2.32):

$$w_{\xi}^{(n)}(\mathbf{x}) = w_{\xi_1}(x_1) w_{\xi_2}(x_2 / \xi_1 = x_1) w_{\xi_3}(x_3 / \xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2) \times \dots \times \\ \times w_{\xi_n}(x_n / \xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}),$$

так что моделирование многомерного распределения сводится к последовательному моделированию одномерных величин.

Реализация компоненты  $\xi_1$  в соответствии с безусловным распределением  $w_{\xi_1}(x_1)$  осуществляется каким-либо из известных методов. Затем производится реализация компоненты  $\xi_2$  на основании условного распределения  $w_{\xi_2}(x_2 / \xi_1 = x_1)$ , зависящего от полученного на предыдущем этапе значения  $\xi_1 = x_1$ . Далее процедура продолжается аналогичным образом, пока не будут реализованы все условные распределения.

Очевидно, что представление  $n$ -мерной плотности в виде произведения условных плотностей возможно  $n!$  способами, и разным способам соответствуют, вообще говоря, различные виды условных плотностей и порядок моделирования компонент. Например, в двумерном случае

$$w_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2) = w_{\xi_1}(x_1)w_{\xi_2}(x_2 / \xi_1 = x_1) = w_{\xi_2}(x_2)w_{\xi_1}(x_1 / \xi_2 = x_2),$$

поэтому, в зависимости от совокупной эффективности процесса моделирования можно вначале смоделировать  $x_1$ , а затем  $x_2$ , либо наоборот: вначале  $x_2$ , а затем  $x_1$ .

Рассмотрим случайную точку  $(\xi_1, \xi_2)$ , которая принимает значения в треугольнике, определяемом условиями  $x_1 + x_2 \leq 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ , с плотностью вероятности

$$w_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2) = 6x_1, \quad (2.3.2)$$

т. е. по одной координате ( $x_2$ ) распределение равномерное, а по другой ( $x_1$ ) — треугольное.

Пусть первой моделируемой случайной величиной будет  $\xi_1$ , а второй —  $\xi_2$ . Тогда

$$w_{\xi_1}(x_1) = \int_0^{1-x_1} w_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2) dx_2 = 6x_1(1-x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq 1;$$

$$w_{\xi_2}(x_2 / \xi_1 = x_1) = \frac{w_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2)}{w_{\xi_1}(x_1)} = \frac{1}{1-x_1}, \quad 0 \leq x_2 \leq 1-x_1$$

(условное распределение случайной величины  $\xi_2$ , которое в общем случае является функцией двух переменных  $x_1$  и  $x_2$  в данном случае не зависит от  $x_2$ ). При использовании метода обратной функции необходимо найти интегральные функции распределения

$$F_{\xi_1}(x_1) = \int_0^{x_1} w_{\xi_1}(x'_1) dx'_1 = 3x_1^2 - 2x_1^3, \quad 0 \leq x_1 \leq 1,$$

$$F_{\xi_2}(x_2 / \xi_1 = x_1) = \int_0^{x_2} w_{\xi_2}(x'_2 / \xi_1 = x_1) dx'_2 = \frac{x_2}{1-x_1}, \quad 0 \leq x_2 \leq 1-x_1.$$

Тогда на основании (2.2.23) получаем следующую систему уравнений для нахождения зависимостей  $\xi_1(\kappa_1)$  и  $\xi_2(\kappa_2)$ :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 3\xi_1^2 - 2\xi_1^3; \\ \kappa_2(1-\xi_1) &= \xi_2. \end{aligned} \quad (2.3.3a)$$

Очевидно, что первое уравнение является алгебраическим уравнением третьей степени, и разрешение системы (2.3.3a) в замкнутом виде затруднительно.

Попробуем обойти проблему, поменяв местами порядок моделирования случайных величин: первой моделируется случайная величина  $\xi_2$ , а второй —  $\xi_1$ . Тогда имеем плотности вероятности

$$\begin{aligned} w_{\xi_2}(x_2) &= \int_0^{1-x_2} w_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2) dx_1 = 3(1-x_2)^2, \quad 0 \leq x_2 \leq 1; \\ w_{\xi_1}(x_1 / \xi_2 = x_2) &= \frac{w_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2)}{w_{\xi_2}(x_2)} = \frac{2x_1}{(1-x_2)^2}, \quad 0 \leq x_1 \leq 1-x_2 \end{aligned}$$

и соответствующие интегральные функции распределения

$$\begin{aligned} F_{\xi_2}(x_2) &= \int_0^{x_2} w_{\xi_2}(x'_2) dx'_2 = 1 - (1-x_2)^3, \quad 0 \leq x_2 \leq 1; \\ F_{\xi_1}(x_1 / \xi_2 = x_2) &= \int_0^{x_1} w_{\xi_1}(x'_1 / \xi_2 = x_2) dx'_1 = \frac{x_1^2}{(1-x_2)^2}, \quad 0 \leq x_1 \leq 1-x_2. \end{aligned}$$

Отсюда система уравнений

$$\begin{aligned} (1-\xi_2)^3 &= 1-\kappa_1; \\ \xi_1^2 &= (1-\xi_2)^2 \kappa_2. \end{aligned}$$

Используя тот факт, что случайные величины  $\kappa_1$  и  $1-\kappa_1$  одинаково распределены, запишем первое уравнение в виде

$$(1-\xi_2)^3 = \kappa_1,$$

и окончательно получим:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= 1 - \sqrt[3]{\kappa_1}; \\ \xi_1 &= \sqrt{\kappa_2} \sqrt[3]{\kappa_1}. \end{aligned} \quad (2.3.3b)$$

Налицо явное упрощение: вместо необходимости решать алгебраическое уравнение третьей степени нужные преобразования получаются сразу же в явном виде.

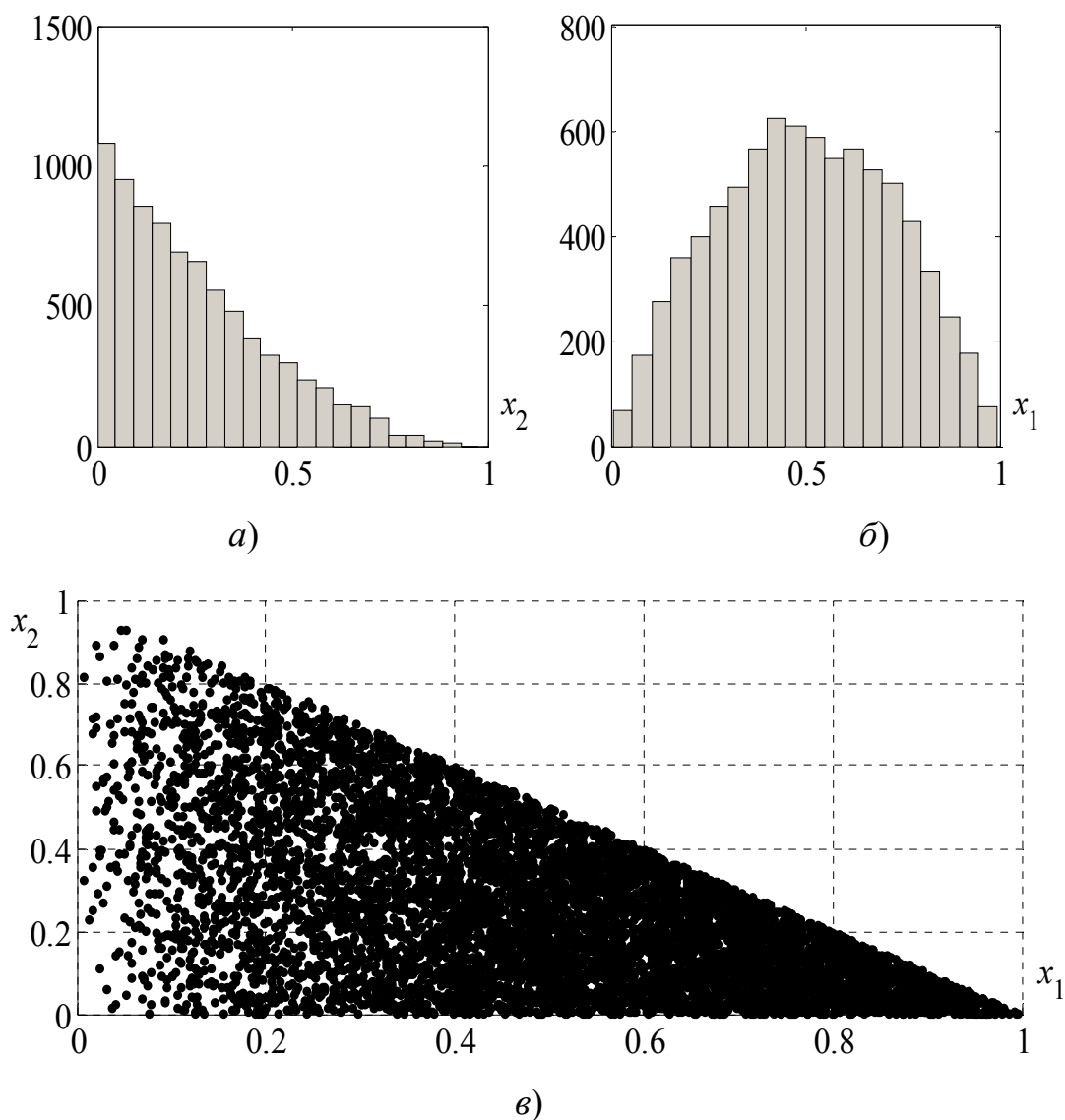


Рис. 2.21. Результаты моделирования безусловного  $w_{\xi_2}(x_2)$  (а), условного  $w_{\xi_1}(x_1 / \xi_2 = x_2)$  (б) и двумерного  $w_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2)$  (в) распределения

На рис. 2.21 представлены результаты моделирования двумерной случайной величины, имеющей совместный закон распределения (2.3.2), а также соответствующие одномерные распределения: безусловное  $w_{\xi_2}(x_2)$  и условное  $w_{\xi_1}(x_1 / \xi_2 = x_2)$ . Объём выборки составляет 8000 элементов.

## Метод замены переменных

Во многих случаях удаётся упростить формулы моделирования многомерной случайной величины за счёт удачного выбора координат при дополнительном преобразовании.

Как известно [5], при переходе от переменных  $x_1, \dots, x_n$  к переменным  $y_1, \dots, y_n$  отношение “элементарных” объёмов, равно якобиану (определителю матрицы Якоби) преобразования:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \det \begin{pmatrix} \partial y_1 / \partial x_1 & \partial y_1 / \partial x_2 & \dots & \partial y_1 / \partial x_n \\ \partial y_2 / \partial x_1 & \partial y_2 / \partial x_2 & \dots & \partial y_2 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial y_n / \partial x_1 & \partial y_n / \partial x_2 & \dots & \partial y_n / \partial x_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, если  $w_{\xi}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  — плотность вероятности случайной многомерной точки  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  в пространстве значений  $(x_1, \dots, x_n)$ , то эта же плотность вероятности для многомерной точки  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  в пространстве значений  $(y_1, \dots, y_n)$  равна

$$w_{\eta}^{(n)}(y_1, \dots, y_n) = w_{\xi}^{(n)}(x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n)) \left| \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|,$$

где после вычисления якобиана  $\{x_k\}$  должны быть выражены через  $\{y_k\}$ .

Например, пусть требуется смоделировать случайный выбор точки, равномерно распределённой в трёхмерном шаре

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R.$$

Плотность вероятности в границах шара постоянна и равна

$$w_{\xi}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{4\pi R^3}.$$

Для решения поставленной задачи можно попытаться использовать трёхмерный метод исключения, когда вначале генерируются точки внутри куба, содержащего шар, а потом производится проверка условия и выбрасывание тех точек, которые лежат вне шара. Однако более эффективным видится подход, основанный на переходе к сферическим координатам.

Пусть  $(r, \theta, \varphi)$  — сферические координаты, связанные с прямоугольными декартовыми координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  известными соотношениями:

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi; \\x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi; \\x_3 &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

В новых координатах шар превращается в прямоугольный параллелепипед  
 $0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Поскольку якобиан преобразования

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta,$$

в новых координатах плотность вероятности, равную

$$w_{\xi}^{(3)}(r, \theta, \varphi) = \left( (4/3)\pi R^3 \right)^{-1} r^2 \sin \theta,$$

можно представить в виде произведения трёх множителей, например:

$$w_{\xi}^{(3)}(r, \theta, \varphi) = \left( 3r^2 R^{-3} \right) \left( 2^{-1} \sin \theta \right) \left( 2\pi \right)^{-1}.$$

Следовательно, сферические координаты случайной точки независимы в указанном прямоугольном параллелепипеде, и для их отдельного моделирования можно применить метод обратной функции. На основании (2.2.23) имеем следующую совокупность уравнений:

$$\int_0^r \frac{3r'^2 dr'}{R^3} = \kappa_1, \quad \int_0^{\theta} \frac{\sin \theta' d\theta'}{2} = \kappa_2, \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi'}{2\pi} = \kappa_3,$$

решая которые, получаем

$$r = R\sqrt[3]{\kappa_1}, \quad \theta = \arccos(1 - 2\kappa_2), \quad \varphi = 2\pi\kappa_3,$$

где, как обычно,  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  — равномерно распределённые на интервале  $[0; 1]$  случайные величины, принимающие соответствующие значения  $u_1, u_2, u_3$ . Таким образом, окончательно имеем следующие выражения для моделирования координат случайных точек, равномерно распределённых в шаре:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2R\sqrt[3]{u_1} \sqrt{u_2 - u_2^2} \cos(2\pi u_3); \\x_2 &= 2R\sqrt[3]{u_1} \sqrt{u_2 - u_2^2} \sin(2\pi u_3); \\x_3 &= R\sqrt[3]{u_1} (1 - 2u_2).\end{aligned}\tag{2.3.4}$$

На рис. 2.22 представлены результаты моделирования случайных точек, равномерно распределённых в шаре единичного радиуса, на основании соотношений (2.3.4). Объём выборки при моделировании составляет 2000 элементов.

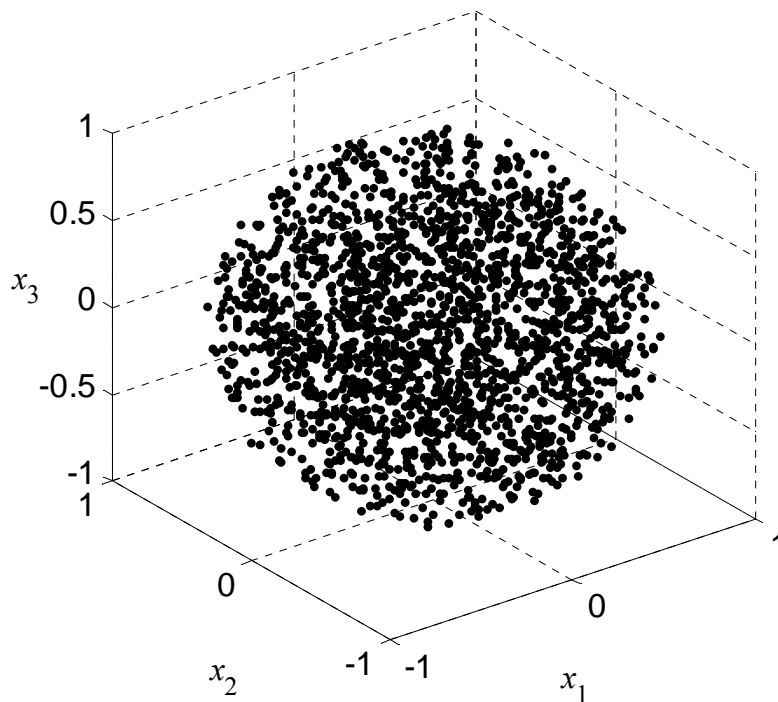


Рис. 2.22. Равномерное распределение в шаре

Итак, существует ряд универсальных и специализированных методов, обеспечивающих имитационное моделирование многомерной совокупности случайных величин. Обратимся теперь к задаче нахождения результирующего распределения и его характеристик после функционального преобразования многомерных, вообще говоря, зависимых случайных величин.

### 2.3.2. Функциональные преобразования совокупности случайных величин

Начнём с двумерного случая. Пусть случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , совместное распределение которых есть  $w_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2)$ , подвергаются детерминированному преобразованию

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)),$$

порождающему результирующие случайные величины

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \xi_2), \quad \eta_2 = f_2(\xi_1, \xi_2). \quad (2.3.5)$$

Требуется найти совместное распределение случайных величин  $\eta_1$  и  $\eta_2$  (плотность распределения  $w_{\eta}^{(2)}(y_1, y_2)$ , интегральную функцию распределения  $F_{\eta}^{(2)}(y_1, y_2)$ ), а также одномерные распределения  $\eta_1$  и  $\eta_2$ .



Методика решения сформулированной задачи принципиально ничем не отличается от одномерного случая; разница проявляется лишь в более сложном нахождении обратных преобразований.

По аналогии с одномерным случаем рассмотрим вначале взаимно-однозначное преобразование, когда отображению (2.3.5) соответствует пара обратных преобразований

$$\xi_1 = \varphi_1(\eta_1, \eta_2), \quad \xi_2 = \varphi_2(\eta_1, \eta_2). \quad (2.3.6)$$

Элементарная площадь  $dS_x$  в плоскости  $x_1, x_2$

$$[x_1; x_1 + dx_1] \times [x_2; x_2 + dx_2]$$

отображается (рис. 2.23) на элементарную площадь  $dS_y$  в плоскости  $y_1, y_2$ , определяемую неравенствами

$$y_1 \leq f_1(x_1, x_2) \leq y_1 + dy_1; \quad y_2 \leq f_2(x_1, x_2) \leq y_2 + dy_2.$$

Тогда, поскольку вероятности попадания точки в площади  $dS_x$  и  $dS_y$  одинаковы,

$$\begin{aligned} P(y_1 \leq f_1(x_1, x_2) \leq y_1 + dy_1, y_2 \leq f_2(x_1, x_2) \leq y_2 + dy_2) &= w_{\eta}^{(2)}(y_1, y_2) dS_y = \\ &= w_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2) dS_x, \end{aligned}$$

откуда

$$w_{\eta}^{(2)}(y_1, y_2) = w_{\xi}^{(2)}(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) \left| \frac{dS_x}{dS_y} \right|.$$

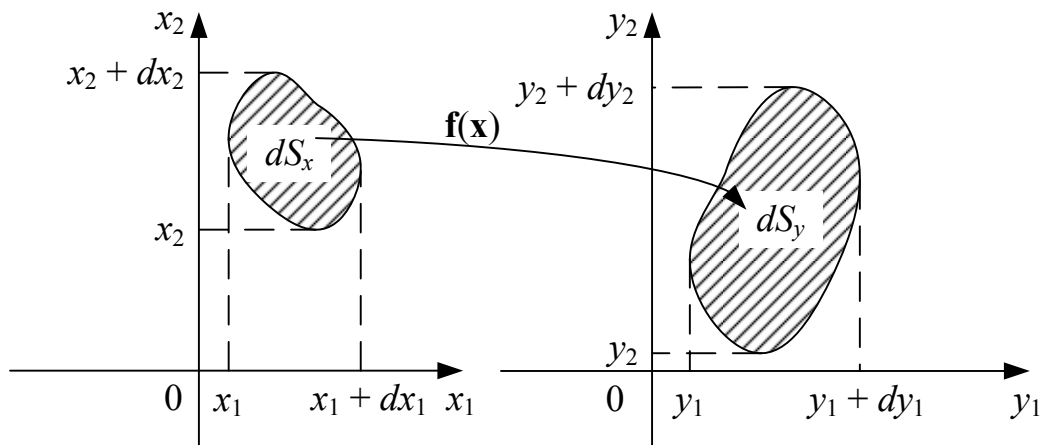


Рис. 2.23. Отображение элементарных площадей при однозначном преобразовании

При переходе от переменных  $x_1, x_2$  к переменным  $y_1, y_2$  отношение элементарных площадей равно якобиану преобразования (являющемуся аналогом производной для одномерного случая):

$$\frac{dS_x}{dS_y} \equiv \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}},$$

причём

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \frac{1}{\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}}.$$

Следовательно, выражение для двумерной плотности при взаимно-однозначном преобразовании имеет следующий вид:

$$w_{\eta}^{(2)}(y_1, y_2) = w_{\xi}^{(2)}(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right|, \quad (2.3.7)$$

где в якобиане, после его вычисления, переменные  $x_1$  и  $x_2$  должны быть выражены через переменные  $y_1$  и  $y_2$  на основании обратных преобразований (2.3.6).

Обобщение полученного результата для неоднозначного преобразования вполне очевидно. В этом случае имеет место  $m > 1$  ветвей обратной функции:

$$\xi_{1k} = \varphi_{1k}(\eta_1, \eta_2), \quad \xi_{2k} = \varphi_{2k}(\eta_1, \eta_2), \quad k = 1, \dots, m,$$

и в элементарную площадь  $dS_y$  отображаются несколько элементарных площадей  $dS_{x1}, \dots, dS_{xm}$  (рис. 2.24). Тогда событие, состоящее в том, что точка с координатами  $(y_1, y_2)$  находится в области  $dS_y$ , эквивалентно объединению событий, состоящих в том, что точка с координатами  $(x_1, x_2)$  находится в области  $dS_{xk}$  ( $k = 1, \dots, m$ ), и по формуле суммирования вероятностей

$$w_{\eta}^{(2)}(y_1, y_2) = \sum_{k=1}^m w_{\xi}^{(2)}(x_{1k}(y_1, y_2), x_{2k}(y_1, y_2)) \left| \frac{\partial(x_{1k}, x_{2k})}{\partial(y_1, y_2)} \right|. \quad (2.3.7a)$$

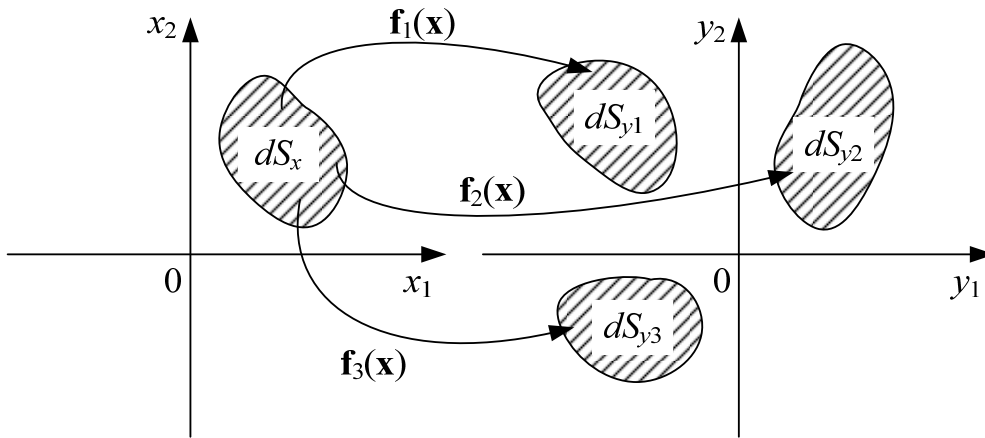


Рис. 2.24. Отображение элементарных площадей при неоднозначном преобразовании

Дальнейшим обобщением (2.3.7) является запись выражения для многомерной плотности вероятности при функциональном преобразовании произвольной (конечной) совокупности случайных величин, когда случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , совместное распределение которых есть  $w_{\xi}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ , подвергаются преобразованию

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)),$$

которое порождает случайные величины

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \eta_n = f_n(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Тогда на основании приведённых рассуждений можем записать выражение для многомерной плотности  $w_{\eta}^{(n)}(y_1, \dots, y_n)$  после преобразования:

$$w_{\eta}^{(n)}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^m w_{\xi}^{(n)}(x_{1k}(y_1, \dots, y_n), \dots, x_{nk}(y_1, \dots, y_n)) \left| \frac{\partial(x_{1k}, \dots, x_{nk})}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|. \quad (2.3.76)$$

где  $x_{ik}(y_1, \dots, y_n)$  —  $k$ -я ветвь обратного преобразования ( $i = 1, \dots, n$ ).

Применение формул (2.3.7) к большинству модельных функциональным преобразованиям, как правило, приводит к затруднениям. Так, если функции  $f_k$  являются многочленами степени, выше третьей или трансцендентными, то в общем случае аналитически трудно разрешить систему нелинейных уравнений для того, чтобы найти обратные функции  $\varphi_k$ . С другой стороны, при попытках кусочно-линейной аппроксимации функции  $f_k$

оказываются разрывными, что приводит к тому, что производные в некоторых точках оказываются бесконечными.

Частным, но важным с практической точки зрения случаем, является задача нахождения закона распределения одной случайной величины, являющейся функциональным преобразованием других случайных величин. Рассмотрим эту задачу подробнее применительно к наиболее часто встречающимся преобразованиям двух величин.

Положим  $\eta_1 \equiv \xi_1$ ,  $\eta_2 = f(\xi_1, \xi_2)$  и будем считать, что обратная функция  $f^{-1} = \varphi(\eta_1, \eta_2)$  — однозначная. Тогда

$$\left| \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{array} \right| = \left| \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|,$$

и после вычисления производной необходимо подставить

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = \varphi(y_1, y_2).$$

Таким образом, двумерная плотность равна

$$w_{\eta}^{(2)}(y_1, y_2) = w_{\xi}^{(2)}(y_1, \varphi(y_1, y_2)) \frac{1}{|\partial f(x_1, x_2) / \partial x_2|},$$

а искомый закон распределения получается посредством интегрирования  $w_{\eta}^{(2)}(y_1, y_2)$  по “лишней” переменной:

$$w_{\eta_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}^{(2)}(y_1, \varphi(y_1, y_2)) \frac{dy_1}{|\partial f(x_1, x_2) / \partial x_2|}. \quad (2.3.8)$$

При этом, если случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы, то двумерная плотность факторизуется, и

$$w_{\eta_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi_1}(y_1) w_{\xi_2}(\varphi(y_1, y_2)) \frac{dy_1}{|\partial f(x_1, x_2) / \partial x_2|}. \quad (2.3.8a)$$

Формула (2.3.8) позволяет легко найти распределение суммы, разности, произведения и отношения двух случайных величин.

Пусть  $\eta_2 = \xi_1 \pm \xi_2$ , тогда обратная функция  $x_2 = \varphi(y_1, y_2) = y_1 \mp y_2$  — однозначная, якобиан преобразования  $|\partial f(x_1, x_2) / \partial x_2| = 1$ , и

$$w_{\eta_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}^{(2)}(y_1, y_2 \mp y_1) dy_1. \quad (2.3.9)$$

Если  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы, то результирующее распределение

$$w_{\eta_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi_1}(y_1) w_{\xi_2}(y_2 \mp y_1) dy_1. \quad (2.3.9a)$$

Пусть  $\eta_2 = \xi_2 \xi_1$  тогда обратная функция  $x_2 = \varphi(y_1, y_2) = y_2 / y_1$  — однозначная, якобиан преобразования  $|\partial f(x_1, x_2) / \partial x_2| = |x_1| = |y_1|$ , и

$$w_{\eta_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}^{(2)}(y_1, y_2 / y_1) \frac{dy_1}{|y_1|}. \quad (2.3.10)$$

Если  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы, то

$$w_{\eta_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi_1}(y_1) w_{\xi_2}(y_2 / y_1) \frac{dy_1}{|y_1|}. \quad (2.3.10a)$$

Пусть  $\eta_2 = \xi_2 / \xi_1$ , тогда обратная функция  $x_2 = \varphi(y_1, y_2) = y_2 y_1$  — однозначная, якобиан преобразования  $|\partial f(x_1, x_2) / \partial x_2| = 1 / |x_1| = 1 / |y_1|$ , и

$$w_{\eta_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}^{(2)}(y_1, y_2 y_1) |y_1| dy_1. \quad (2.3.11)$$

Если  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы, то

$$w_{\eta_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi_1}(y_1) w_{\xi_2}(y_2 y_1) |y_1| dy_1. \quad (2.3.11a)$$

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие методику нахождения закона распределения при функциональном преобразовании совокупности случайных величин.

### **Линейное преобразование двух случайных величин**

Пусть

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2; \\ \eta_2 &= a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2, \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

где  $a_{11}, \dots, a_{22}$  — постоянные коэффициенты.

Якобиан преобразования равен

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \equiv D.$$

Следовательно, при отличном от нуля определителе  $D$  система для нахождения обратных функций имеет единственное решение

$$\xi_1 = D^{-1}(a_{22}\eta_1 - a_{12}\eta_2); \xi_2 = D^{-1}(a_{11}\eta_2 - a_{21}\eta_1). \quad (2.3.13)$$

Отсюда двумерная плотность для преобразованных величин на основании (2.3.7) есть

$$w_{\eta}^{(2)}(y_1, y_2) = |D|^{-1} w_{\xi}^{(2)}(D^{-1}(a_{22}y_1 - a_{12}y_2), D^{-1}(a_{11}y_2 - a_{21}y_1)). \quad (2.3.14)$$

В качестве примера на рис. 2.25 показаны реализации двумерного равномерного распределения, компоненты которого независимы и распределены равномерно на интервале  $[0; 1]$ , подвергнутого линейному преобразованию

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1 + \xi_2; \\ \eta_2 &= \xi_1 - \xi_2, \end{aligned}$$

Объём выборки составляет 8 000 элементов.

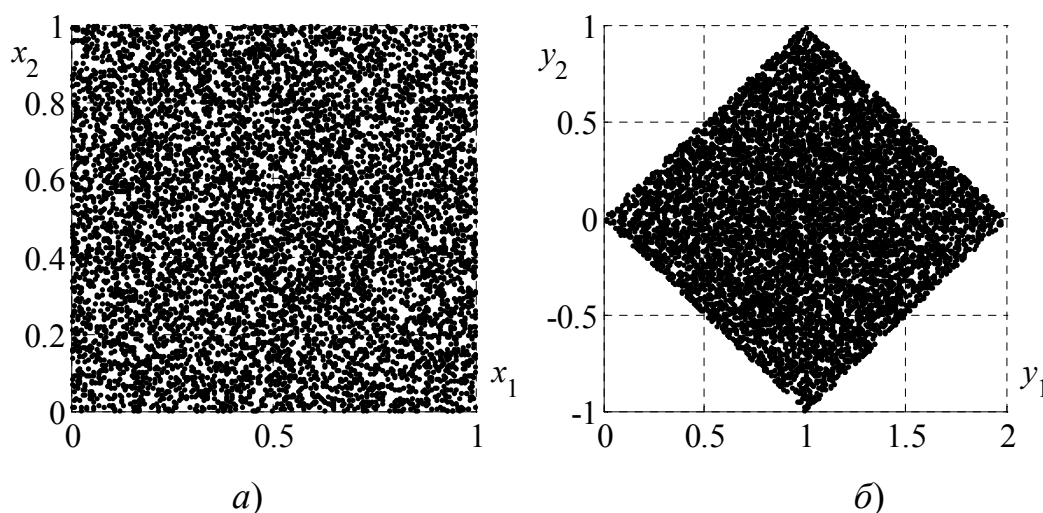


Рис. 2.25. Двумерное равномерное распределение до (а) и после (б) линейного преобразования

Отметим, что после преобразования одномерные компоненты распределения  $\eta_1$  и  $\eta_2$  становятся зависимыми.

Действительно, в этом случае распределение имеет вид прямоугольного параллелепипеда, в основании которого, как видно из рис. 2.25, б, лежит квадрат  $Q$  со стороной  $\sqrt{2}$ , а высота равна  $1/2$ . Тогда одномерные распределения компонент в указанном квадрате имеют вид

$$w_{\eta_1}(y_1) = \iint_{\mathcal{Q}} w_{\eta}^{(2)}(y_1, y_2) dy_2 = \begin{cases} (1/2) \int_{-y_1}^{-y_1} dy_2, & 0 \leq y_1 \leq 1; \\ (1/2) \int_{y_1-2}^{-y_1+2} dy_2, & 1 < y_1 \leq 2; \end{cases}$$

и

$$w_{\eta_2}(y_2) = \iint_{\mathcal{Q}} w_{\eta}^{(2)}(y_1, y_2) dy_1 = \begin{cases} (1/2) \int_{-y_2}^{y_2+2} dy_1, & -1 \leq y_2 < 0; \\ (1/2) \int_{y_2}^{2-y_2} dy_1, & 0 \leq y_2 \leq 1. \end{cases}$$

Вычисление интегралов даёт следующие треугольные распределения:

$$w_{\eta_1}(y_1) = \begin{cases} y_1, & 0 \leq y_1 \leq 1; \\ 2 - y_1, & 1 < y_1 \leq 2; \\ 0, & y_1 < 0, y_1 > 2; \end{cases} \quad w_{\eta_2}(y_2) = \begin{cases} 1 + y_2, & -1 \leq y_2 < 0; \\ 1 - y_2, & 0 \leq y_2 \leq 1; \\ 0, & y_2 < -1, y_2 > 1, \end{cases}$$

которые, конечно, отличаются от равномерных.

### Пример двузначного обратного преобразования

Рассмотрим следующее преобразование двух случайных величин:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}; \\ \eta_2 &= \xi_1 / \xi_2. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Геометрический смысл этого преобразования очевиден:  $\eta_1$  — модуль, а  $\eta_2$  — тангенс аргумента комплексного числа (или тангенс угла наклона радиус-вектора), компонентами которого являются величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

Найдём обратные функции. При  $y_1 > 0$  система из двух уравнений

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \\ y_2 &= x_1 / x_2 \end{aligned}$$

имеет два решения:

$$x_1 = y_1 y_2 / \sqrt{1 + y_2^2}; \quad x_2 = y_1 / \sqrt{1 + y_2^2}$$

и

$$x_1 = -y_1 y_2 / \sqrt{1 + y_2^2}; \quad x_2 = -y_1 / \sqrt{1 + y_2^2}.$$

При  $y_1 \leq 0$  система, очевидно, не имеет вещественных решений.

Якобиан преобразования

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} x_1 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & x_2 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ 1/x_2 & -x_1/x_2^2 \end{vmatrix} = -\frac{x_1^2/x_2^2 + 1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = -\frac{1+y_2^2}{y_1}.$$

Отсюда

$$w_{\eta}^{(2)}(y_1, y_2) = \frac{1+y_2^2}{y_1} \left[ w_{\xi}^{(2)}\left(y_1 y_2 / \sqrt{1+y_2^2}, y_1 / \sqrt{1+y_2^2}\right) + w_{\xi}^{(2)}\left(-y_1 y_2 / \sqrt{1+y_2^2}, -y_1 / \sqrt{1+y_2^2}\right) \right], y_1 > 0. \quad (2.3.16)$$

Результат преобразования (2.3.16) применительно к равномерному в единичном квадрате распределению показан на рис. 2.26. Объём выборки составляет 8 000 элементов.

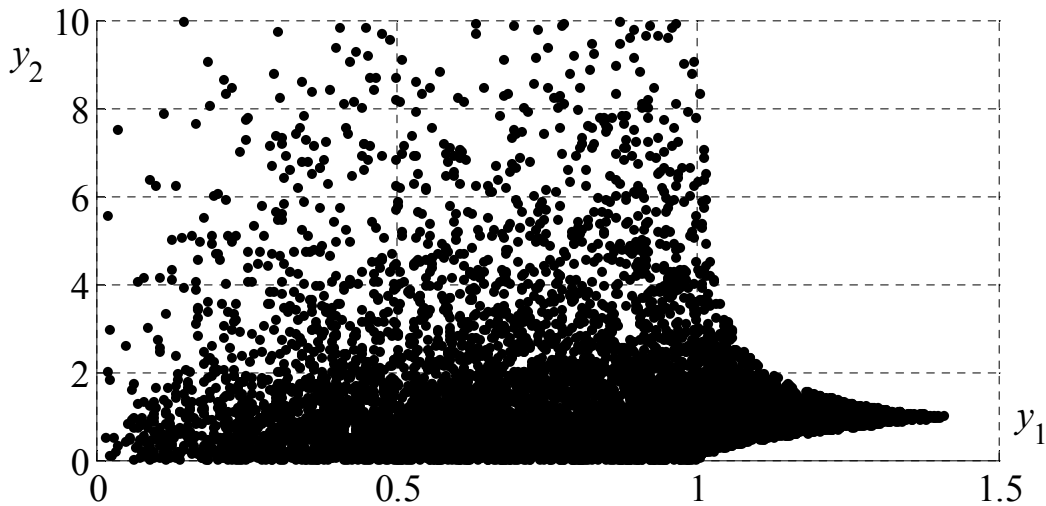


Рис. 2.26. Двумерное равномерное распределение после преобразования (2.3.15)

### Распределение суммы (разности) независимых величин

Вычисление распределения суммы и разности независимых случайных величин осуществляется согласно (2.3.9a).

Пусть  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — гауссовские величины с нулевым средним и одинаковой дисперсией  $\sigma^2$ . Найдём распределение суммы и разности их модулей, т. е. случайных величин  $\eta_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$  и  $\eta_2 = |\xi_1| - |\xi_2|$ .

Для нахождения распределения модулей величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , очевидно, необходимо обнулить отрицательную часть распределения и удвоить неотрицательную:



$$w_{|\xi_i|}(x_i) = \begin{cases} \sqrt{2 / (\pi\sigma^2)} \exp[-x_i^2 / (2\sigma^2)], & x_i \geq 0; \\ 0, & x_i < 0. \end{cases}$$

Тогда распределение величины  $\eta_1$  является свёрткой распределений

$$w_{\eta_1}(y_1) = w_{\xi_1} * w_{\xi_2} = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi_1}(x) w_{\xi_2}(y_1 - x) dx = \\ = \int_0^{y_1} \sqrt{2 / (\pi\sigma^2)} \exp[-x^2 / (2\sigma^2)] \sqrt{2 / (\pi\sigma^2)} \exp[-(y_1 - x)^2 / (2\sigma^2)] dx.$$

Проводя замену переменной  $z = (x - y_1 / 2) / \sigma$ , имеем

$$w_{\eta_1}(y_1) = (2 / \pi\sigma^2) \exp[-y_1^2 / (4\sigma^2)] \int_{-y_1/(2\sigma)}^{y_1/(2\sigma)} \exp(-z^2) dz = \\ = \sqrt{2 / (\pi\sigma^2)} \exp[-y_1^2 / (4\sigma^2)] \operatorname{erf}[y_1 / (2\sigma)], \quad y_1 > 0, \quad (2.3.17)$$

где  $\operatorname{erf}(z) = (2 / \sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-x^2) dx$  — табулированная “функция ошибок”.

На рис. 2.27 показаны для  $\sigma = 1$  плотность вероятности, а также гистограмма, полученная при моделировании величины  $\eta_1$ . Объём выборки составляет  $10^5$  элементов.

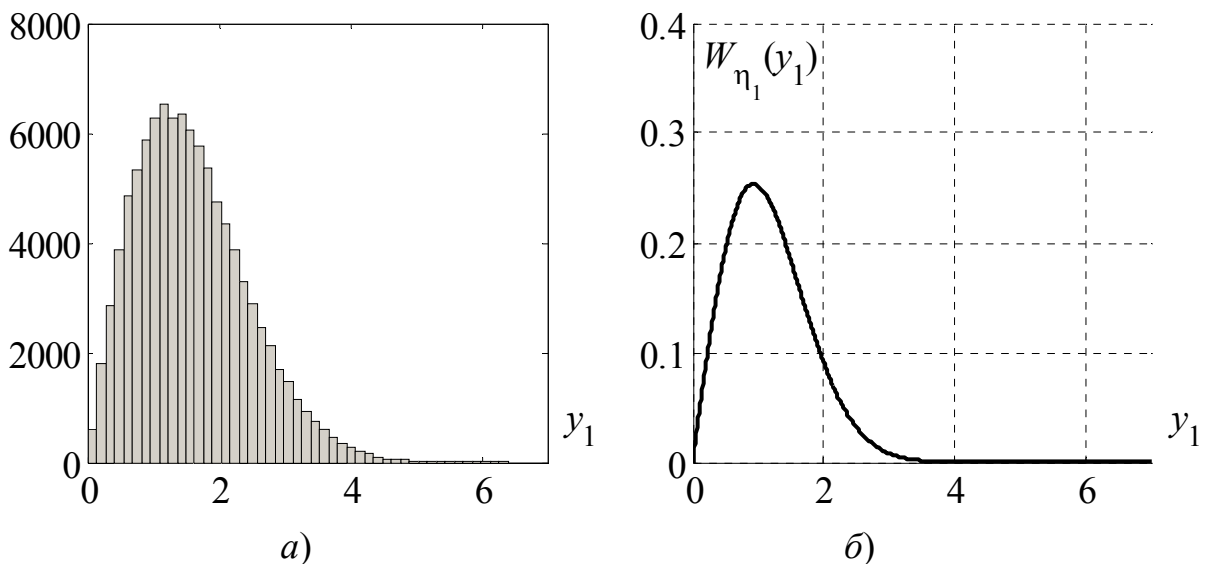


Рис. 2.27. Гистограмма (а) и плотность вероятности (б) суммы модулей гауссовских величин с нулевым средним и единичной дисперсией

Для нахождения распределения  $\eta_2$  необходимо вычислить интеграл

$$w_{\eta_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi_1}(x)w_{\xi_2}(y_2 + x)dx.$$

При  $y_2 \geq 0$

$$w_{\eta_2}(y_2) = \int_0^{\infty} \sqrt{2/(\pi\sigma^2)} \exp[-x^2/(2\sigma^2)] \sqrt{2/(\pi\sigma^2)} \exp[-(y_2 + x)^2/(2\sigma^2)] dx.$$

Заменой переменной  $z = (x + y_2/2)/\sigma$  получаем

$$\begin{aligned} w_{\eta_2}(y_2) &= (2/\pi\sigma^2) \exp[-y_2^2/(4\sigma^2)] \int_{y_2/(2\sigma)}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \\ &= \sqrt{1/(\pi\sigma^2)} \exp[-y_2^2/(4\sigma^2)] (1 - \operatorname{erf}[y_2/(2\sigma)]). \end{aligned}$$

Аналогично при  $y_2 < 0$

$$\begin{aligned} w_{\eta_2}(y_2) &= \int_{-y_2}^{\infty} \sqrt{2/(\pi\sigma^2)} \exp[-x^2/(2\sigma^2)] \sqrt{2/(\pi\sigma^2)} \exp[-(y_2 + x)^2/(2\sigma^2)] dx = \\ &= \sqrt{1/(\pi\sigma^2)} \exp[-y_2^2/(4\sigma^2)] (1 - \operatorname{erf}[-y_2/(2\sigma)]). \end{aligned}$$

Объединим оба случая:

$$w_{\eta_2}(y_2) = \sqrt{1/(\pi\sigma^2)} \exp[-y_2^2/(4\sigma^2)] (1 - \operatorname{erf}[|y_2|/(2\sigma)]). \quad (2.3.18)$$

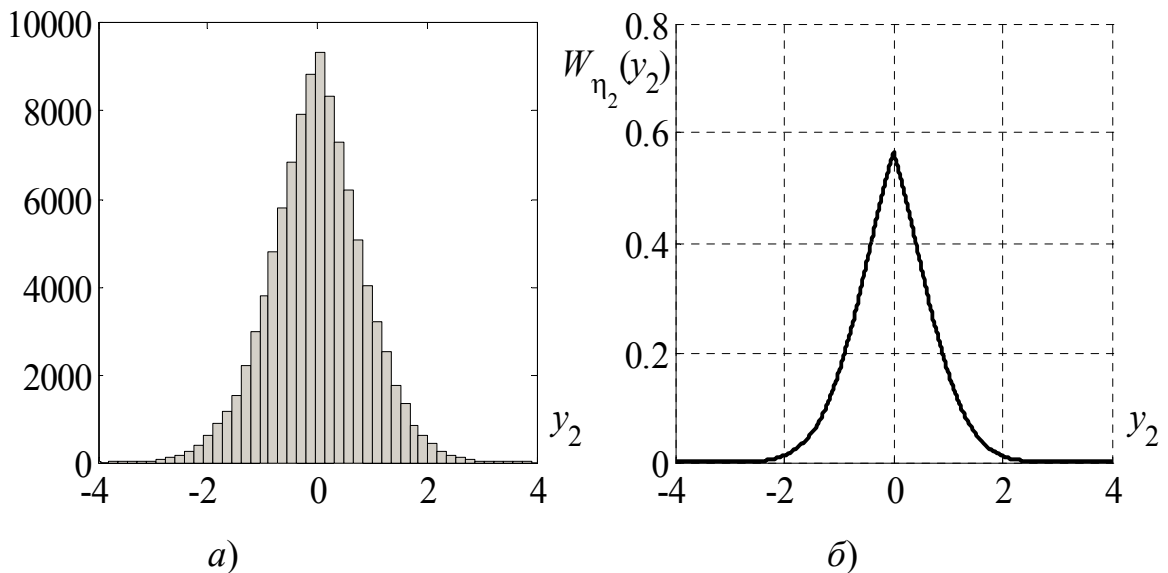


Рис. 2.28. Гистограмма (а) и плотность вероятности (б) разности модулей гауссовских величин с нулевым средним и единичной дисперсией

На рис. 2.28 показаны для  $\sigma = 1$  плотность вероятности, а также гистограмма, полученная при моделировании величины  $\eta_2$ . Объём выборки составляет  $10^5$  элементов.

Некоторые технические сложности могут возникнуть при вычислении интеграла свёртки от кусочно-линейных плотностей. Пусть, к примеру, результирующая величина  $\eta$  представляет собой сумму величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , распределённых равномерно на симметричном интервале  $[-c; c]$ :

$$w_{\xi_i}(x_i) = \begin{cases} 1/(2c), & |x_i| \leq c; \\ 0, & |x_i| > c, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Тогда (рис. 2.29) результат пропорционален площади прямоугольника, образованного наложением двух распределений: “неподвижного” (относительно переменной интегрирования)  $w_{\xi_1}(x)$  и “смещённого”  $w_{\xi_2}(y-x)$ :

$$w_{\eta}(y) = \begin{cases} 1/(4c^2)(2c - |y|), & |y| \leq 2c; \\ 0, & |y| > 2c. \end{cases} \quad (2.3.19)$$

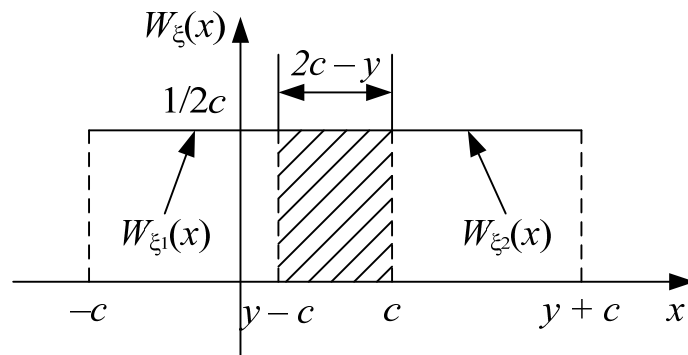


Рис. 2.29. К вычислению свёртки равномерных распределений

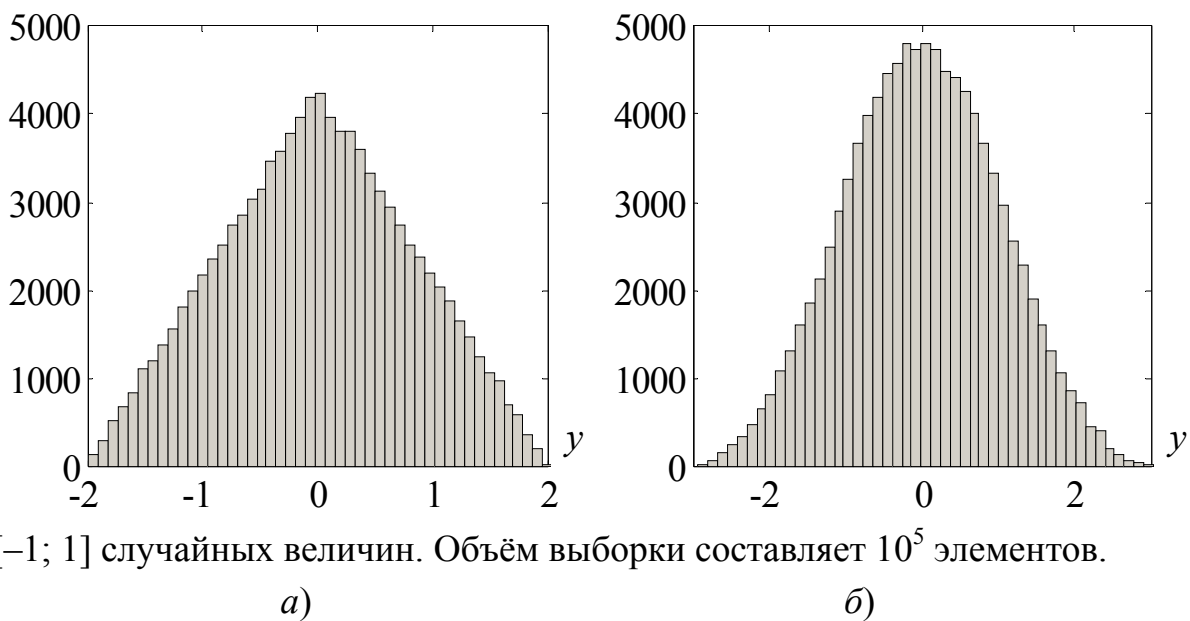
При большом числе линейных участков, образующих “кривую” плотности вероятности, требуется скрупулёзное рассмотрение результирующего распределения на каждом из участков с учётом сдвига смещённой составляющей  $w_{\xi}(y-x)$  в зависимости от значения переменной  $y$ .

Так, при нахождении распределения, получающегося в результате сложения трёх равномерно распределённых на интервале  $[-c; c]$  случайных величин  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  и  $\xi_3$ , свёртке подвергается равномерное распределение какой-либо из случайных величин, а также треугольное распределение

(2.3.19), образованное свёрткой двух других распределений. Результирующее распределение имеет следующий вид:

$$w_{\eta}(y) = \begin{cases} 1/(8c^3)(3c^2 - y^2), & |y| \leq c; \\ 1/(16c^3)(3c - |y|)^2, & c < |y| \leq 3c; \\ 0, & |y| > 3c. \end{cases} \quad (2.3.20)$$

На рис. 2.30 представлены результаты моделирования величины  $\eta$ , являющейся суммой двух и трёх равномерно распределённых на интервале



[-1; 1] случайных величин. Объём выборки составляет  $10^5$  элементов.

Рис. 2.30. Гистограммы моделирования суммы двух (а) и трёх (б) равномерно распределённых на интервале [-1; 1] случайных величин

Отметим, что при наличии большого числа “участков” в кусочно-линейном распределении нахождение свёртки может оказаться весьма трудоёмкой задачей. В этой связи для решения подобных задач интерес представляет использование интегральных преобразований, позволяющих обойти вычисление интегралов типа свёртки. Например, при использовании характеристических функций — преобразования Фурье от плотности распределения — свёртка распределений соответствует перемножению характеристических функций. Однако “обратной стороной” таких методов является необходимость вычисления обратного интегрального преобразования, что может оказаться не менее сложной задачей, чем вычисление свёртки.

### Функциональные преобразование дискретных величин

При нахождении результирующих характеристик при функциональном преобразовании дискретных величин, как правило, наиболее простым оказывается подход, связанный с прямым перебором результирующих значений и поиском соответствующих им вероятностей.

Пусть заданы две независимые дискретные величины  $\xi$  и  $\eta$  с соответствующими распределениями

$x$	-1	0	1	3,5	4
$p(x)$	0,18	0,12	0,25	0,35	0,10

и

$y$	-2	1	5
$p(y)$	0,10	0,34	0,56

Необходимо найти распределения их суммы и произведения, т. е. случайных величин

$$\zeta_1 = \xi + \eta, \quad \zeta_2 = \xi\eta.$$

В силу независимости преобразуемых величин вероятность каждого из значений величин  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  равна произведению вероятностей значений величин  $\xi$  и  $\eta$ . При этом надо учесть то, что одно и то же результирующее значение может проявиться в результате преобразования различных значений. Например, значение  $z_1 = 2$  появляется и при сложении значений  $x = 1$ ,  $y = 1$ , и при сложении значений  $x = 4$ ,  $y = -2$ . Следовательно, вероятность значения  $z_1 = 2$  равна сумме двух слагаемых, каждое из которых, в свою очередь, равно произведению соответствующих вероятностей. Таким образом, прямым перебором всех возможных значений и суммированием вероятностей, соответствующих одинаковым значениям, получаем следующие дискретные распределения:

$z_1$	-3	-2	-1	0	1	1,5	2
$p(z_1)$	0,0180	0,0120	0,0250	0,0612	0,0408	0,0350	0,0950
$z_2$	4	4,5	5	6	8,5	9	
$p(z_2)$	0,1008	0,1190	0,1012	0,1400	0,1960	0,056	

и

$z_2$	-8	-7	-5	-2	-1	0	1
$p(z_2)$	0,0100	0,0350	0,1008	0,0250	0,0612	0,1200	0,085
$z_2$	2	3,5	4	5	17,5	20	
$p(z_2)$	0,0180	0,1190	0,0340	0,1400	0,1960	0,0560	

На рис. 2.31 представлены плотности вероятности (в виде дискретных дельта-функций) случайных величин  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ .

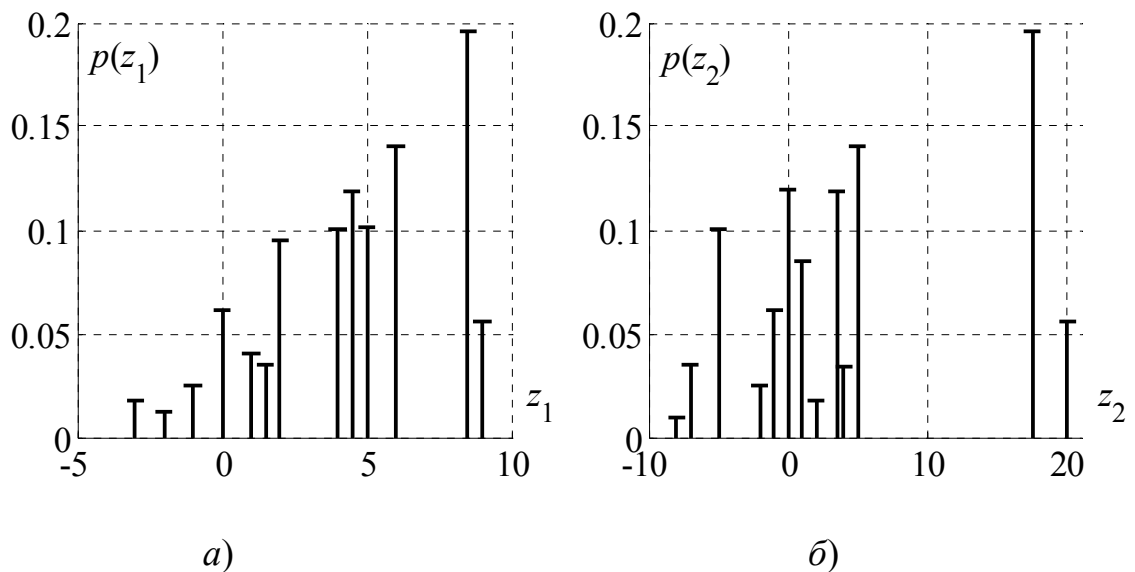


Рис. 2.31. Плотности вероятности случайных величин  $\zeta_1$  (а) и  $\zeta_2$  (б)

Отметим, что распределение  $\zeta_1$  можно получить как свёртку распределений  $\xi$  и  $\eta$ , если использовать дельта-функции для выражения плотностей дискретных распределений.

## 2.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В разд. 1.5 были рассмотрены подходы к определению, а также экспериментальному измерению основных характеристик случайных процессов. Напомним, что случайный процесс задаётся совокупностью многомерных распределений случайных величин, образованных при фиксировании определённых моментов времени (“временных срезов”), и числовые характеристики процессов вычисляются посредством усреднения по ансамблю реализаций. В то же время, реальное измерение вероятностных (статистических) характеристик осуществляется, как правило, на основании одной

наблюдаемой реализации. При этом правомерность и корректность замены значений “истинных” ансамблевых характеристик их статистическими однореализационными аналогами опирается на требование эргодичности по отношению к соответствующим характеристикам (математическому ожиданию, корреляционной функции, энергетическому спектру и др.).

Наиболее общим типом являются процессы с непрерывными значениями и непрерывным временем. Однако современные методы анализа и обработки сигналов предполагают оперирование с дискретизированными значениями, даже если исходное сообщение (речь, звук, телевизионное изображение) является непрерывным по своей природе. В этой связи анализ случайных процессов фактически сводится к анализу случайных последовательностей, т. е. дискретному набору (вектору) случайных величин, обладающих теми или иными вероятностными связями. Более того, в силу ограниченности разрядной сетки цифровых устройств возможно представление лишь конечного числа значений процессов. Правда, при достаточно большем количестве разрядов (например, 64) число возможных значений настолько велико, что можно говорить о квазинепрерывном представлении. Однако, когда количество разрядов, отводимое на представление данных, не превышает размеры одного–двух байт, приходится считаться с дискретизированностью значений процесса.

Рассмотренные в предыдущем разделе методы моделирования многомерной совокупности случайных величин (метод условных распределений, многомерный метод Неймана и др.), вообще говоря, пригодны и для моделирования случайных процессов. Однако при формировании реализаций большой длины (тысячи и десятки тысяч отсчётов) такие методы требуют значительных вычислительных затрат. К сожалению, более эффективных методов моделирования протяжённых реализаций с заданным многомерным законом распределения в настоящее время не известно. К счастью, на практике столь широко поставленные задачи встречаются редко, и чаще требуется моделирование реализаций процессов, относящихся к какому-то более узкому классу: стационарные, гауссовские, марковские и т. п. Для таких классов уже можно указать достаточно эффективные алгоритмы моделирования.

С другой стороны, существует ряд задач, в которых в большей степени интерес представляют вероятностные связи между отдельными отсчётами и в меньшей — распределение самих отсчётов. В этом случае для моделиро-

вания процесса достаточно задаться каким-либо легко реализуемым одномерным распределением, например, равномерным или гауссовским, а затем в рамках такого распределения осуществлять генерирование отсчётов по заданной корреляционной функции (энергетическому спектру). При таком подходе понятие “вероятностная связь” фактически заменяется понятием “корреляционная связь”, что допустимо для гауссовских (а также сформированных на их основе) процессов, но может оказаться не вполне корректным для тех процессов, распределение которых далеко от нормального.

### 2.4.1. Моделирование марковских цепей

Модель марковского процесса (разд. 1.5) описывает процесс, развитие которого после определённого временного значения  $t_0$  не зависит от значений в предшествующие моменты  $t < t_0$ . Многомерное распределение марковского процесса (1.5.4) факторизуется совокупностью условных (переходных) и одного безусловного (начального) распределения.

Дискретизированный по времени и по значениям марковский процесс называется *марковской цепью*.

$L$ -элементная последовательность зависимых отсчётов  $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(L)})$  называется марковской цепью  $n$ -го порядка, если для условной вероятности справедливо следующее соотношение:

$$P(x_k^{(i)} / x^{(j_1)}, \dots, x^{(j_n)}) = P(x_k^{(i)} / x^{(j_1)}, \dots, x^{(j_n)}, x^{(j_{n+1})}), \quad (2.4.1)$$

где  $L \geq i$ ,  $j_1 = i - 1$ ,  $j_2 = i - 2$ , ...,  $j_n = i - n$ ,  $j_{n+1} = i - n - 1$ . Другими словами, условная вероятность некоторого  $i$ -го исхода  $x_k^{(i)}$ , когда известны исходы в предыдущих  $n$  испытаниях, не зависит от более ранних исходов, начиная с  $(n + 1)$ -го.

Состоящая из  $n$  элементов последовательность  $(x^{(i)}, x^{(i-1)}, \dots, x^{(i-n+1)})$  определяет некоторое *состояние*  $S_q$  ( $q = 1, \dots, N$ ) цепи, в котором вероятность выбора  $k$ -го элемента<sup>1</sup> равна  $P(x_k/S_q)$ . Если  $M$  — количество возможных значений процесса, то число  $N$  возможных состояний равно  $M^n$ .

---

<sup>1</sup> Напомним, что в двухиндексной записи  $x_k^{(i)}$  верхний индекс обозначает позицию (порядковый номер) элемента в какой-либо последовательности, а нижний — значение в каком-либо дискретном ансамбле (алфавите). Если по контексту речь идёт преимущественно об одном индексе, то второй может быть опущен.



В простейшем случае однородной марковской цепи первого порядка (которую часто называют просто марковской цепью) текущее значение процесса зависит только от одного предшествующего элемента, и переходные вероятности не зависят от порядкового номера генерируемого элемента, так что все переходные вероятности можно записать в виде квадратной матрицы  $\mathbf{P}$  размерности  $M \times M$ :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{M1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{M2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1M} & p_{2M} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix}, \quad (2.4.2)$$

где  $p_{kj} = P(x_k^{(i)} / x_j^{(i-1)})$ ,  $k, j = 1, \dots, M$ .

Матрица переходных вероятностей является стохастической: сумма вероятностей в каждой строке равна единице, т. е. каждая строка представляет собой какое-то распределение вероятностей. В такой цепи состояние определяется парой последовательных элементов  $(x^{(i)}, x^{(i-1)})$ , а число состояний равно числу  $M$  возможных значений процесса.

Для того, чтобы полностью описать марковскую цепь, дополнительно требуется задать вектор  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_M)$  — распределение начальных вероятностей значений цепи (начальных вероятностей состояний).

Одной из задач исследования марковских цепей является нахождение безусловных вероятностей состояний  $P_i(S_q)$  в  $i$ -м ( $i = 1, \dots, L$ ) испытании. Вычисление таких вероятностей осуществляется на основе рекуррентной формулы

$$P_i(S_q) = \sum_{k=1}^M P_{i-1}(S_k) p_{qk}, \quad q = 1, \dots, M, \quad (2.4.3)$$

где нумерация состояний связана с нумерацией элементов, образующих это состояние. Например, для однородной цепи первого порядка номер состояния совпадает с номером значения текущего элемента в  $M$ -элементном алфавите.

При некоторых условиях в однородной марковской цепи с увеличением номера (шага) испытания устанавливается стационарный режим, находясь в котором, цепь продолжает “блуждать” по состояниям, но вероятно-

сти этих состояний перестают зависеть от номера шага. Суть этих условий отражается следующими свойствами:

- хорошая “перемешиваемость”, т. е. цепь не должна в себе содержать каких-либо циклических структур, когда моменты попадания в отдельные состояния или группы состояний оказываются равными определенным (неслучайным) промежутками времени;
- из любого состояния  $S_q$  можно перейти в любое другое состояние  $S_r$  ( $q, r = 1, \dots, M$ ) и вернуться обратно в состояние  $S_q$ , причём эти состояния не обязательно должны быть соседними.

При выполнимости указанных условий существуют так называемые *финальные вероятности состояний*

$$P(S_q) = \lim_{i \rightarrow \infty} P_i(S_q), \quad q = 1, \dots, M,$$

не зависящие от номера шага и начальных условий. Значения финальных вероятностей определяются из системы линейных однородных уравнений

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^M P(S_k) p_{kq} + P(S_q)(p_{qq} - 1) = 0, \quad q = 1, \dots, M. \quad (2.4.4)$$

Как известно [6], такая система уравнений имеет бесконечное множество решений; единственность решения обеспечивается условием нормировки на вероятности состояний:

$$\sum_{q=1}^M P(S_q) = 1.$$

Сценарий моделирования марковской цепи состоит в следующем. На первом шаге производится выбор первого элемента  $x^{(1)}$  согласно начальному распределению  $\pi$ , и этот элемент своим значением определяет номер  $k$  ( $k = 1, \dots, M$ ) строки матрицы переходных вероятностей. Тогда на втором шаге распределение  $p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{Mk}$ , записанное в  $k$ -й строке, является порождающим, т. е. из него будет получен второй элемент  $x^{(2)}$ , который своим значением определит номер строки, распределение в которой будет порождающим на третьем шаге и т. д.

Рассмотрим в качестве примера моделирование на временной сетке с тактовым интервалом  $T$  двух марковских цепей: первая принимает три возможных значения  $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ , описывается матрицей переходных вероятностей

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,40 & 0,15 \\ 0,02 & 0,45 & 0,53 \\ 0,48 & 0,48 & 0,04 \end{pmatrix};$$

вторая принимает пять возможных значений  $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 2$ , описывается матрицей переходных вероятностей

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,05 & 0,20 & 0,10 & 0,10 \\ 0,15 & 0,30 & 0,00 & 0,25 & 0,30 \\ 0,20 & 0,07 & 0,20 & 0,33 & 0,20 \\ 0,14 & 0,22 & 0,09 & 0,23 & 0,32 \\ 0,05 & 0,05 & 0,05 & 0,05 & 0,80 \end{pmatrix}.$$

В обоих случаях начальное распределение является равновероятным на соответствующем алфавите.

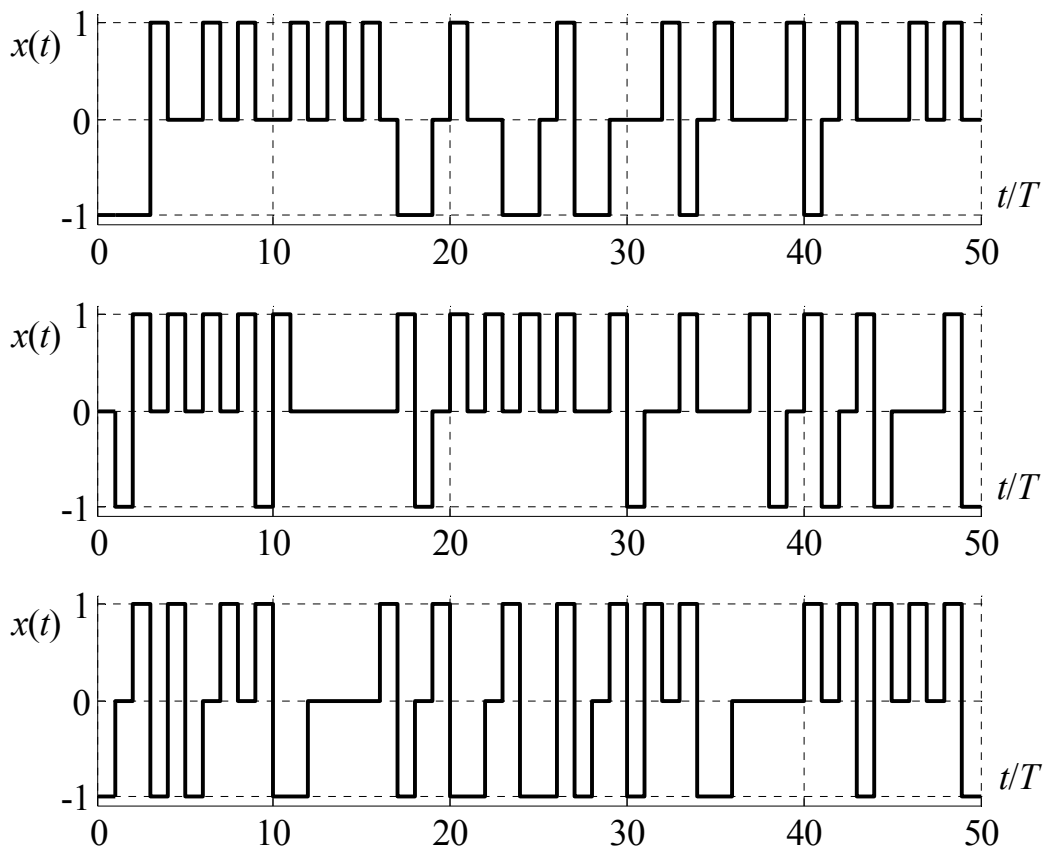


Рис. 2.32. Реализации марковской цепи с матрицей переходных вероятностей  $\mathbf{P}_1$

На рис. 2.32 и 2.33 показаны типичные реализации моделируемых процессов.

Фигурирующие в матрице  $\mathbf{P}_1$  переходные вероятности таковы, что в каждой строке находится по две приблизительно одинаковых вероятности, и это приводит к тому, что в реализациях процесса нет ярко выраженных преимущественных значений. В противоположность этому, в матрице  $\mathbf{P}_2$  имеют место превалирующие вероятности, например,  $P(x_1/x_1)$  или  $P(x_5/x_5)$ . Следствием этого является то, что в реализациях процесса более часто проявляются значения  $x_1 = -2$  и  $x_5 = 2$ .

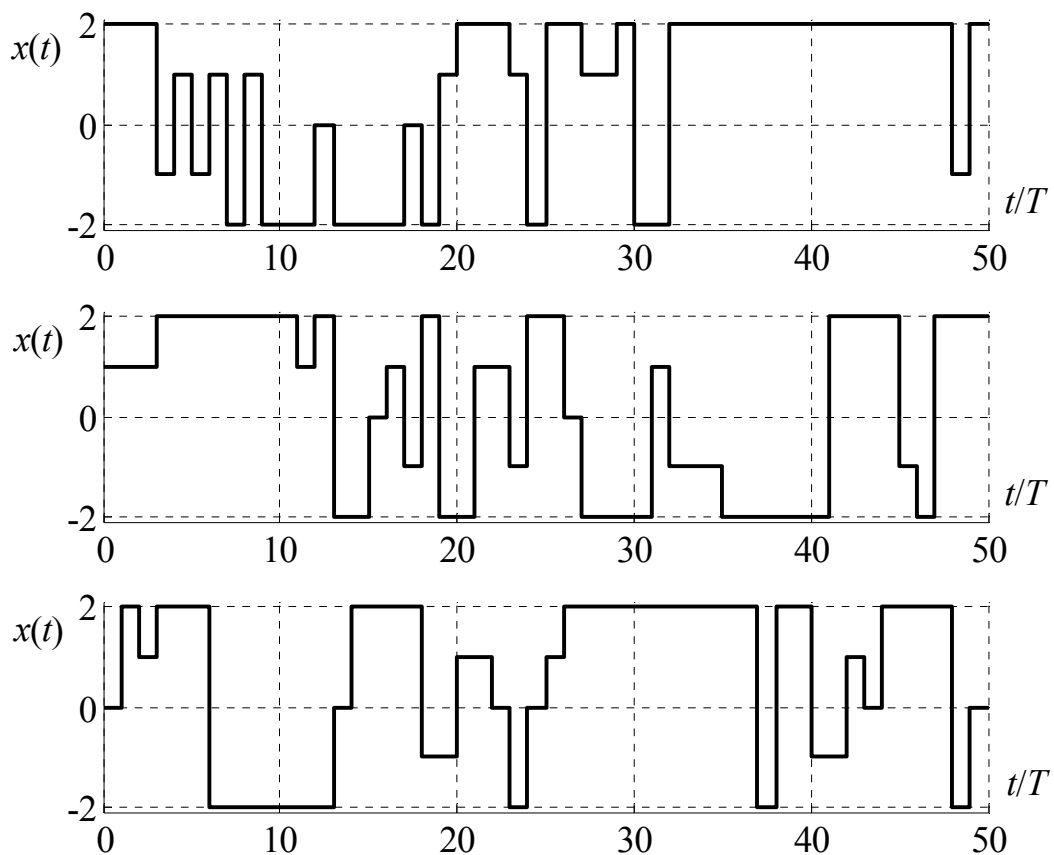


Рис. 2.33. Реализации марковской цепи с матрицей переходных вероятностей  $\mathbf{P}_2$

Решение системы уравнений (2.4.4) для матрицы  $\mathbf{P}_1$  даёт равновероятное распределение финальных вероятностей состояний:

$$P(S_1) = P(S_2) = P(S_3) = 1/3.$$

Следовательно, на достаточно длинной реализации число различных пар  $(x_k, x_j)$ ,  $k, j = 1, 2, 3$ , т. е. число переходов из одного значения в другое будет приблизительно одинаковым.

Для матрицы  $\mathbf{P}_2$  получаем следующее распределение финальных вероятностей состояний:

$$P(S_1) = 0,220; P(S_2) = 0,197; P(S_3) = 0,200; \\ P(S_4) = 0,197; P(S_5) = 0,186.$$

Если рассматривается неоднородная марковская цепь, то переходные вероятности будут зависеть от шага испытания, т. е., вообще говоря, необходимо задавать набор  $\mathbf{P}(1), \mathbf{P}(2), \dots, \mathbf{P}(n)$  матриц переходных вероятностей — каждую для каждого шага испытаний. В общем случае такой подход оказывается весьма ресурсозатратным. Обычно ограничиваются моделями неоднородных марковских цепей, в которых вид матрицы переходных вероятностей  $\mathbf{P}(k)$  на текущем шаге по определённому правилу зависит от одной или нескольких матриц  $\mathbf{P}(k-1), \mathbf{P}(k-2), \dots$  на предыдущих шагах.

#### 2.4.2. Моделирование марковских последовательностей

Марковская последовательность — это последовательность многомерных случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , которые в некоторые дискретные моменты времени  $t_1, t_2, \dots$  принимают непрерывное множество возможных значений, и для которых выполняются марковские свойства (2.4.1).

Многомерное распределение непрерывного марковского процесса факторизуется переходными плотностями  $w_\xi(x_k, t_k / x_{k-1}, t_{k-1})$  согласно (1.5.4), однако они не могут быть произвольными функциями, поскольку помимо обычных свойств (неотрицательности, нормировки, согласованности) должны удовлетворять интегральному уравнению Колмогорова — Чепмена (иногда его называют уравнением Смолуховского):

$$w_\xi(x_3, t_3 / x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} w_\xi(x_3, t_3 / x_2, t_2) w_\xi(x_2, t_2 / x_1, t_1) dx_2, \quad (2.4.5)$$

которое, в свою очередь, сводится к дифференциальным уравнениям в частных производных параболического типа [9], коэффициенты которых определяют различные классы марковских процессов.

Физический смысл соотношения (2.4.5) состоит в том, что если процесс является марковским, то временную сетку  $t_1, t_2, \dots$  и сетку значений  $x_1, x_2, \dots$  нельзя рассматривать независимым образом. Другими словами, у марковского процесса имеется определённая связь между одномерным законом распределения и характеристиками корреляционной функции (энергетического спектра).

Так, можно показать, что для стационарного гауссовского марковского процесса, часто называемым *диффузионным марковским процессом*, обязательным условием является экспоненциальный вид его корреляционной функции:

$$b_{\xi}(\tau) = \sigma^2 r^2(t) = \sigma^2 \exp(-|\tau|/\tau_0),$$

где параметр  $\tau_0$  имеет смысл интервала корреляции (временной промежуток, за который корреляционные связи между отсчётами ослабевают в  $e$  раз). Рассмотрим основные аспекты моделирования именно такого марковского процесса, полагая, для простоты, что его математическое ожидание равно нулю.

Если  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$  — интервал дискретизации, то согласно (1.2.35), условная плотность вероятности текущего отсчёта  $x_k = x(t_k)$  при известном предыдущем отсчёте  $x_{k-1} = x(t_{k-1})$  равна

$$\begin{aligned} w_{\xi}(x_k, t_k / x_{k-1}, t_{k-1}) &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi [1 - r^2(\Delta t)]}} \exp \left\{ -\frac{(x_k - r(\Delta t)x_{k-1})^2}{2\sigma^2 [1 - r^2(\Delta t)]} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi [1 - \exp(-2\Delta t / \tau_0)]}} \exp \left\{ -\frac{[x_k - \exp(-\Delta t / \tau_0)x_{k-1}]^2}{2\sigma^2 [1 - \exp(-2\Delta t / \tau_0)]} \right\}, k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Из (2.4.6) следует, что каждый последующий отчёт, начиная со второго, представляет собой реализацию гауссовской случайной величины, дисперсия которой определяется корреляционной функцией процесса и равна

$$\sigma^2 [1 - \exp(-2\Delta t / \tau_0)],$$

а математическое ожидание, равное

$$\exp(-\Delta t / \tau_0)x_{k-1},$$

зависит от значения предшествующего отсчёта.

Значение первого отсчёта  $x_1 = x(t_1)$  определяется начальным распределением  $w_\xi(x_1, t_1)$  и, в соответствии с принятым упрощением, представляет собой гауссовский отсчёт с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ .

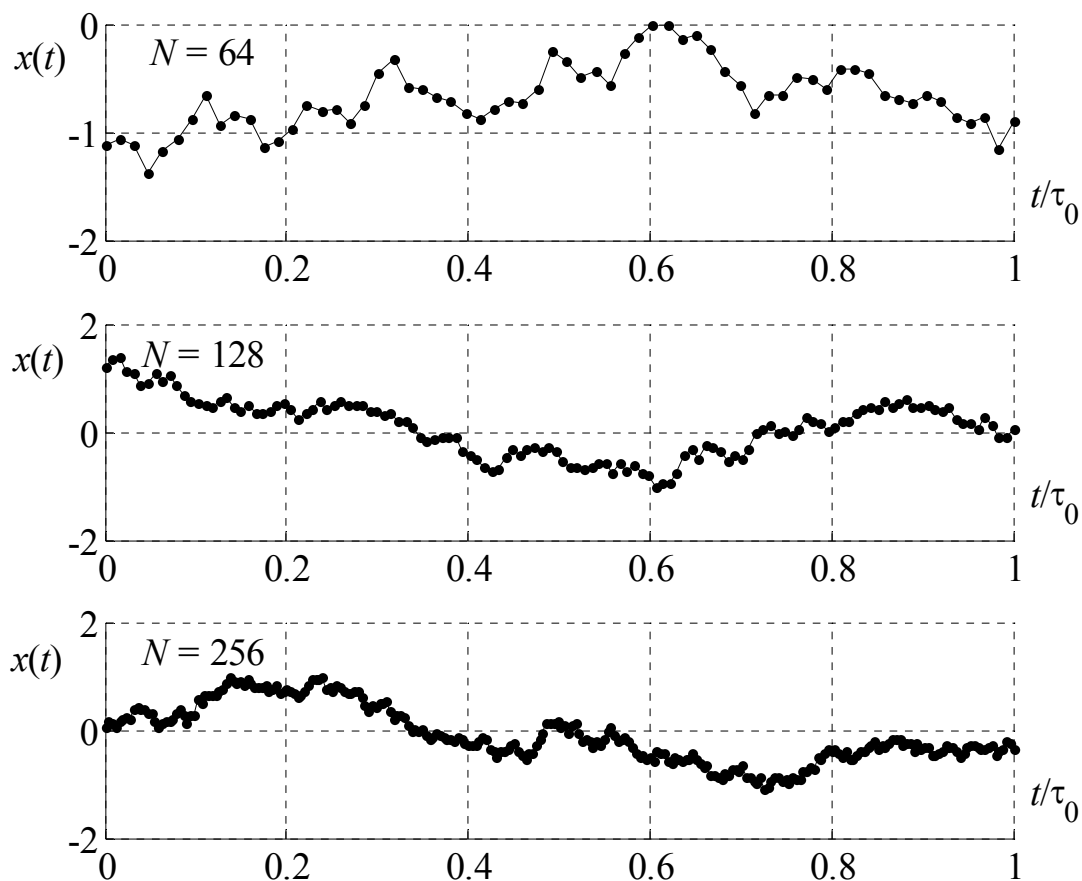


Рис. 2.34. Реализации марковского диффузионного процесса при  $T = \tau$  и различном числе отсчётов на интервале наблюдения

На рис. 2.34–2.36 представлены результаты моделирования диффузионного марковского процесса на интервалах наблюдения  $T$ , равных  $\tau$ ,  $10\tau$  и  $50\tau$  при различном числе  $N$  отсчётов на интервале наблюдения:  $N = 64$ , 128 и 256. Дисперсия процесса для всех реализаций равна единице.

В зависимости от соотношения между  $T$  и  $\tau$ , а также от числа отсчётов на интервале наблюдения изменяется значение коэффициента корреляции  $r(\tau)$ , влияющее на текущие значения математического ожидания и дисперсии каждого последующего отсчёта.

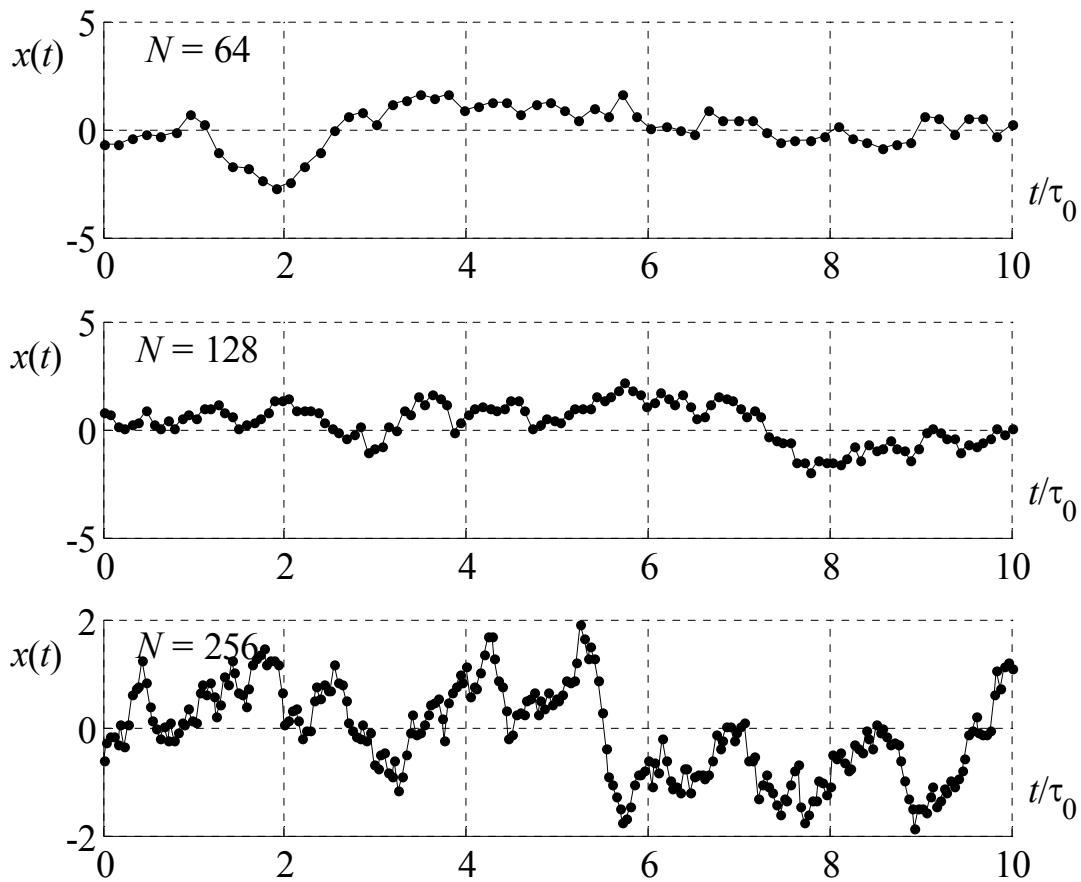


Рис. 2.35. Реализации марковского диффузионного процесса при  $T = 10\tau$  и различном числе отсчётов на интервале наблюдения

При  $T = 50\tau$  и  $N = 64$  получается минимальное из всех представленных вариантов значение  $r(\tau) = 0,45$ , когда корреляционные связи между отсчётами наименьшие (хотя по своему абсолютному значению 45%-я корреляция — весьма велика), что обуславливает относительную независимость значений процесса (рис. 2.36, где наблюдаются скачки значений примерно в  $3\sigma$ ).

С увеличением числа отсчётов и уменьшением интервала наблюдения корреляционные связи начинают возрастать. Так, при фиксированном  $N = 64$  и уменьшении  $T$  от  $50\tau$  до  $\tau$  коэффициент корреляции возрастает до значения  $r(\tau) = 0,98$ , и это означает, что соседние отсчёты не могут измениться по отношению друг к другу на значительную величину.



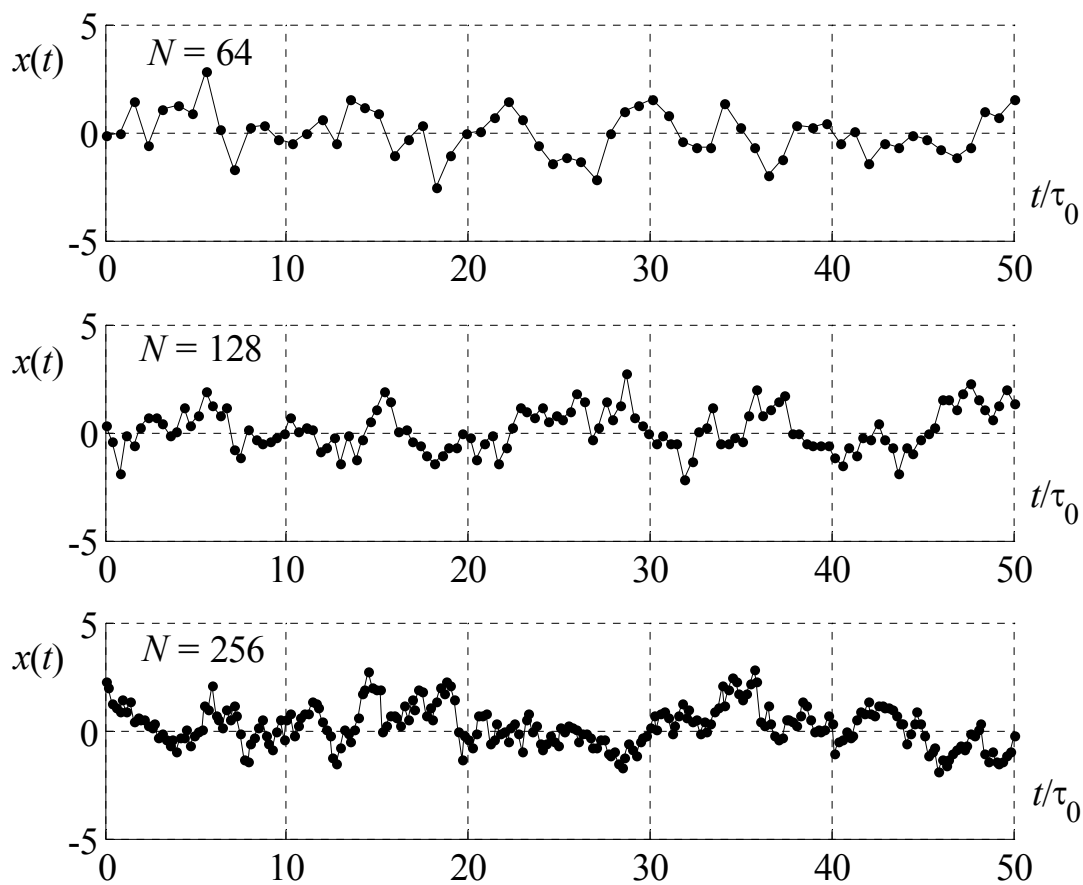


Рис. 2.36. Реализации марковского диффузионного процесса при  $T = 50\tau$  и различном числе отсчётов на интервале наблюдения

### 2.4.3. Моделирование гауссовских процессов с заданными корреляционными свойствами

Моделирование совокупности гауссовских случайных величин с заданными корреляционными связями является одной из наиболее распространённых задач. Зачастую наибольший интерес представляет не распределение самих отсчётов, а корреляционные связи между отдельными отсчётами или, что эквивалентно, энергетические характеристики процесса, т. е. параметры его энергетического спектра. Поэтому фиксируется какое-либо модельное многомерное распределение, чаще всего, гауссовское, и затем выбирается желаемая структура корреляционных связей между компонентами распределения.

Плотность вероятности  $n$ -элементного случайного гауссовского вектора  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  с математическими ожиданиями  $\mathbf{E}[\xi_i] = a_i$  и ковариациями

$$\mathbf{E}[(\xi_i - a_i)(\xi_j - a_j)] = \text{Cov}[\xi_i, \xi_j], \quad i, j = 1, \dots, n$$

выражается следующей достаточно громоздкой формулой [1]:

$$w_{\xi}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{K}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - a_i)(x_j - a_j) \beta_{ij} \right], \quad (2.4.7)$$

где  $\det \mathbf{K}$  — определитель матрицы  $\mathbf{K}$ , составленной из ковариаций, а  $\beta_{ij}$  являются элементами матрицы  $\mathbf{K}^{-1}$ , обратной к матрице  $\mathbf{K}$ .

Обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  может быть определена для любой исходной квадратной  $n \times n$ -матрицы, если она невырождена, т. е. если её определитель  $\det \mathbf{A}$  отличен от нуля. При этом элементы  $\alpha_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) обратной матрицы равны

$$\alpha_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}},$$

где  $A_{ij} = (-1)^{j+i} \bar{M}_j^i$  — алгебраическое дополнение элемента  $\alpha_{ij}$  исходной матрицы, получающееся (с учётом знака) посредством вычёркивания в определителе  $\det \mathbf{A}$   $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

Вводя вектор столбец

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \dots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$$

и транспонированный вектор (вектор-строку)

$$\mathbf{x}' - \mathbf{a}' = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n),$$

выражение для многомерной гауссовской плотности можно записать в матричных обозначениях:

$$w_{\xi}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{K}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}' - \mathbf{a}') \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right], \quad (2.4.7a)$$

В показателе экспоненты находится положительно определённая форма, которую, как известно [6], можно посредством линейного преобразования свести к диагональному виду, т. е. к сумме квадратов. Следовательно, возможна постановка и обратной задачи: для совокупности независимых гауссовских величин найти линейное преобразование, обеспечивающее заданные корреляционные соотношения.

В настоящее время существует большое количество различных методов имитационного моделирования гауссовских процессов с заданными корреляционными свойствами; провести их подробный анализ в рамках данного пособия не представляется возможным. Поэтому ограничимся кратким рассмотрением наиболее употребимых методов.

### Метод линейного преобразования

Идея метода заключается, как это следует из его названия, в линейном преобразовании набора (вектора)  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]$  некоррелированных гауссовских величин, в отношении которых будем полагать, что они имеют нулевые средние и единичные дисперсии, в набор (вектор)  $\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_N]$  гауссовских величин с заданными корреляционными связями.

Вектор  $\xi$ , представляющий собой моделируемый процесс, формируется из  $\mathbf{v}$  посредством умножения на квадратную  $(N \times N)$ -матрицу  $\mathbf{A}$ :

$$\xi^T = \mathbf{A} \mathbf{v}^T, \quad (2.4.8)$$

которая связана с ковариационной матрицей  $\mathbf{K}$ , определяющей корреляционные связи между элементами.

Наиболее просто задача решается, если считать матрицу  $\mathbf{A}$  нижнетреугольной:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}.$$

В этом случае компоненты векторов  $\mathbf{v}$  и  $\xi$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a_{11} v_1; \\ \xi_2 &= a_{21} v_1 + a_{22} v_2; \\ &\dots \\ \xi_N &= a_{N1} v_1 + a_{N2} v_2 + \dots + a_{NN} v_N. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Тогда имеем следующие корреляционные связи между элементами  $\xi$ :

$$\begin{aligned} b_{11} &= \mathbf{E}[\xi_1^2] = \mathbf{E}[(a_{11} v_1)^2] = a_{11}^2 \mathbf{E}[v_1^2] = a_{11}^2; \\ b_{21} &= \mathbf{E}[\xi_2 \xi_1] = \mathbf{E}[(a_{21} v_1 + a_{22} v_2) a_{11} v_1] = a_{21} a_{11}; \\ b_{22} &= \mathbf{E}[\xi_2^2] = \mathbf{E}[(a_{21} v_1 + a_{22} v_2)^2] = a_{21}^2 + a_{22}^2; \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

и т. д.

Из соотношений (2.4.10) по заданным коэффициентам корреляции  $b_{ij}$  ( $i \geq j$ ) легко определяются коэффициенты матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$a_{11} = \sqrt{b_{11}}; \quad a_{i1} = b_{i1} / a_{11}, \quad i = 1, \dots, N; \quad (2.4.11a)$$

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{jj}} \left( b_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} a_{jk} \right), \quad j = 2, \dots, i-1; \quad (2.4.11б)$$

$$a_{ii} = \sqrt{b_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2}. \quad (2.4.11в)$$

Методика вычисления согласно (2.4.11) состоит в следующем. После определения  $a_{11}$  (единственного элемента первой строки) дальнейшее вычисление коэффициентов матрицы  $\mathbf{A}$  осуществляется по строкам: вначале по (2.4.11a) находится первый элемент  $a_{i1}$  очередной строки, затем по (2.4.11б) определяются элементы этой строки кроме последнего, который вычисляется по (2.4.11в) и т. д.

Метод линейного преобразования достаточно эффективен при небольшом числе  $N$  (порядка десяти), однако при моделировании случайных процессов с большим числом элементов в последовательности ( $N$  порядка сотен и тысяч) данный метод требует существенных вычислительных ресурсов.

### Метод цифровой фильтрации

Для моделирования стационарных гауссовских процессов весьма эффективным является *метод цифровой фильтрации*, в основу которого положено преобразование исходной некоррелированной последовательности либо в виде “скользящего суммирования”

$$\xi_k = \sum_{i=1}^M c_i v_{k-i}, \quad (2.4.12)$$

(нерекурсивная цифровая фильтрация), либо на основе рекурсивного соотношения вида

$$\xi_k = \sum_{i=0}^L a_i v_{k-i} - \sum_{i=1}^Q b_i \xi_{k-i}, \quad (2.4.13)$$

(рекурсивная цифровая фильтрация), где  $a_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$  — взвешивающие коэффициенты, определяющие корреляционно-спектральные свойства результирующей последовательности. Начальные условия в рекуррентном соотношении

ношении (2.4.13) можно выбирать произвольными, например, нулевыми. При этом возникает некоторый “переходной процесс”, когда начальный участок моделируемого процесса не будет иметь требуемых свойств.

Передаточные функции  $H_1(z)$  и  $H_2(z)$  цифровых фильтров, действие которых описывается соотношениями (2.4.12) и (2.4.13), имеют соответственно вид

$$H_1(z) = c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_M z^{-M}, \quad (2.4.14)$$

и

$$H_2(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_L z^{-L}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + a_Q z^{-Q}}. \quad (2.4.15)$$

Таким образом, задачу моделирования стационарных гауссовских последовательностей с заданными корреляционными свойствами можно рассматривать как задачу синтеза цифрового линейного формирующего фильтра, коэффициенты которого подлежат расчёту, исходя из требуемых корреляционных свойств.

Коэффициент корреляции  $r_j$  элементов  $n_k$  и  $n_{k+j}$  равен

$$r_j = \mathbf{E}[v_k v_{k+j}] = \begin{cases} 1, & j = 0; \\ 0, & j \neq 0. \end{cases} \quad (2.4.16)$$

Сформируем из последовательности  $\{v_k\}$  последовательность  $\{\xi_k\}$  согласно (2.4.12):

$$\begin{aligned} \xi_k &= c_1 v_{k-1} + c_2 v_{k-2} + \dots + c_M v_{k-M}; \\ \xi_{k+1} &= c_1 v_k + c_2 v_{k-1} + \dots + c_M v_{k-M+1}; \\ &\dots \end{aligned}$$

Образуется “окно” скользящего суммирования, при вычислении очередного значения  $\xi_{k+1}$  окно в исходной последовательности  $\{v_k\}$  сдвигается на один элемент, а значение  $v_{k-M}$  выбрасывается из окна. Коррелированность между элементами  $\xi_k$  и  $\xi_{k+j}$  обеспечивается за счёт того, что в их формировании участвует  $M-j$  общих элементов; при  $j = M$  значения  $\xi_k$  и  $\xi_{k+j}$  становятся некоррелированными.

Коэффициент корреляции  $\rho_j$  элементов  $\xi_k$  и  $\xi_{k+j}$  равен

$$\rho_j = \mathbf{E}[\xi_k \xi_{k+j}] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^M c_i v_{k-i} \sum_{p=1}^M c_p v_{k+j-p}\right] = \sum_{i=1}^M \sum_{p=1}^M c_i c_p \mathbf{E}[v_{k-i} v_{k+j-p}].$$

Стоящее под знаком двойного суммирования математическое ожидание, согласно (2.4.16), отлично от нуля только, когда  $p = i + j$ , при этом

$$\rho_j = \sum_{i=1}^{M-j} c_i c_{i+j}, j = 0, 1, \dots, \quad (2.4.17)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \rho_0 &= c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_M^2; \\ \rho_1 &= c_1 c_2 + c_2 c_3 + \dots + c_{M-1} c_M; \\ \rho_2 &= c_1 c_3 + c_2 c_4 + \dots + c_{M-2} c_M; \\ &\dots\dots\dots \\ \rho_{M-1} &= c_1 c_M; \\ \rho_N &= 0, N \geq M. \end{aligned}$$

Итак, для моделирования требуется решить задачу синтеза: по заданной корреляционной функции найти взвешивающие коэффициенты формирующего фильтра.

Прямой путь решения такой задачи состоит в решении системы нелинейных уравнений (2.4.17), но он требует существенных вычислительных затрат. К тому же, при изменении условий моделирования, например, шага квантования, приходится заново решать уравнения.

Рассмотрим способ получения взвешивающих коэффициентов формирующего фильтра, основанный на разложении в ряд Фурье энергетического спектра процесса, однозначно связанного с корреляционной функцией, согласно теореме Винера — Хинчина, преобразованием Фурье.

Как известно [7], при прохождении стационарного процесса с энергетическим спектром  $F(\omega)$  через линейное устройство с комплексной частотной характеристикой  $H(j\omega)$  энергетический спектр  $G(\omega)$  на выходе устройства равен

$$G(\omega) = F(\omega) |H(j\omega)|^2.$$

Если входным процессом является *белый шум*, у которого энергетический спектр имеет постоянное значение  $F(\omega) = N_0$ , то выходной спектр по форме совпадает с квадратом модуля частотной характеристики устройства:

$$G(\omega) = N_0 |H(j\omega)|^2. \quad (2.4.18)$$

Условию (2.4.18) при фиксированном  $G(\omega)$  удовлетворяет бесконечное множество линейных устройств, которые отличаются друг от друга

фазо-частотными характеристиками (ФЧХ), т. е. аргументом комплексной частотной характеристики  $H(j\omega)$ . Выберем из этого многообразия то устройство, у которого ФЧХ равна нулю, т. е. частотная характеристика вещественна. Тогда импульсная характеристика такого устройства равна

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{N_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{G(\omega)} \exp(j\omega t) d\omega. \quad (2.4.19)$$

Дальнейшие действия связаны с дискретизацией процесса, что, на основании теоремы Котельникова, предполагает работу с финитным (ограниченным по полосе частот) спектром процесса. Поэтому заменим “истинный” энергетический спектр  $G(\omega)$  на его усечённую версию  $G_1(\omega)$  в пределах полосы частот, ограниченной частотой  $\omega_0$ :

$$G_1(\omega) = \begin{cases} G(\omega), & |\omega| \leq \omega_0; \\ 0, & \omega > \omega_0. \end{cases} \quad (2.4.20)$$

Физически такая замена обеспечивается тем, что спектр  $G(\omega)$  убывает с ростом частоты, и, рано или поздно, его значение станет меньше любого заданного уровня. Однако, если частота  $\omega_0$  не очень велика, то замена (2.4.20) может привести к ощутимым погрешностям<sup>1</sup>.

Рассмотрение процессов с усечённым спектром вида (2.4.20) фактически означает, что вместо модели белого шума рассматривается *модель белого шума в конечной полосе частот*, обеспечивающая возможность представления реализаций  $n(t)$  в виде, вообще говоря, бесконечной совокупности отсчётных значений  $n_k$ :

$$n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n_k \frac{\sin[(t - k\Delta t)\omega_0]}{(t - k\Delta t)\omega_0},$$

где  $\Delta t = \pi / \omega_0$  — интервал дискретизации. При этом дисперсия  $\sigma_n^2$  белого шума в конечной полосе частот равна

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} N_0 d\omega = \frac{N_0 \omega_0}{\pi}.$$

---

<sup>1</sup> Вопрос о выборе значения  $\omega_0$  для реально используемых процессов не имеет однозначного ответа в силу конечной длительности используемых реализаций и, следовательно, инфинитности  $G(\omega)$  в спектральной области. Одной из рекомендаций является определение  $\omega_0$ , исходя из заданной концентрации энергии в полосе частот.

Выразим отсчётные значения  $x_k$  процесса на выходе линейного устройства, описываемого финитной частотной характеристикой

$$H(\omega) = \sqrt{G_1(\omega) / N_0}$$

через отсчётные значения  $n_k$  процесса на входе и отсчётные значения  $h_k$  импульсной характеристики, дискретизация которой возможна в виду финитности  $H(\omega)$ :

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \frac{\sin[(t - k\Delta t)\omega_0]}{(t - k\Delta t)\omega_0},$$

где, согласно (2.4.19) и с учётом того, что  $\Delta t = \pi/\omega_0$ ,

$$h_k = h(k\Delta t) = \frac{1}{\pi\sqrt{N_0}} \int_0^{\omega_0} \sqrt{G(\omega)} \cos(k\pi\omega / \omega_0) d\omega.$$

Для непрерывных реализаций процесс на выходе определяется в виде интеграла Дюамеля:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)n(t - \tau)d\tau = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_i n_p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(\tau - i\Delta t)\omega_0]}{(\tau - i\Delta t)\omega_0} \frac{\sin[(t - \tau - p\Delta t)\omega_0]}{(t - \tau - p\Delta t)\omega_0} d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x_k \equiv x(k\Delta t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_i n_p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(\tau - i\Delta t)\omega_0]}{(\tau - i\Delta t)\omega_0} \frac{\sin[(\tau - (k - p)\Delta t)\omega_0]}{(\tau - (k - p)\Delta t)\omega_0} d\tau.$$

Нетрудно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(\tau - i\Delta t)\omega_0]}{(\tau - i\Delta t)\omega_0} \frac{\sin[(\tau - (k - p)\Delta t)\omega_0]}{(\tau - (k - p)\Delta t)\omega_0} d\tau = \begin{cases} \pi / \omega_0, & i = k - p; \\ 0, & i \neq k - p, \end{cases}$$

поэтому

$$x_k = \frac{\pi}{\omega_0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i n_{k-i}. \quad (2.4.21)$$

Теперь, если считать получившееся выражение как результат цифровой фильтрации, то

$$c_i = \frac{\pi}{\omega_0} h_i = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \int_0^1 \sqrt{G(\omega_0 y)} \cos(i\pi y) dy \quad (2.4.22)$$



являются взвешивающими коэффициентами формирующего фильтра.

Выражение (2.4.22) можно трактовать как разложение в ряд Фурье функции  $\sqrt{G(\omega)}$  — отсюда и название метода. Как правило,  $c_i$  достаточно быстро убывают с ростом индекса, поэтому в (2.4.21) достаточно ограничиться небольшим количеством слагаемых:

$$x_k \approx \sum_{i=-I}^I c_i n_{k-i}.$$

Кроме того, в силу стационарности последовательность элементов  $x_k$ , можно записать

$$x_k \approx \sum_{i=0}^M c_i n_{k-i}, \quad M = 2I + 1. \quad (2.4.23)$$

Критерии учёта количества  $M$  коэффициентов могут быть различны. Один из возможных вариантов состоит в том, что  $M$  выбирается из условия

$$\left| 1 - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^M c_i^2 \right| < \varepsilon,$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия моделируемого процесса, а  $\varepsilon$  — достаточно малое число, обычно порядка  $10^{-2} \dots 10^{-3}$ .

### Метод канонического разложения

Одними из наиболее универсальных методов анализа и моделирования случайных процессов являются методы, основанные на *каноническом представлении* (разложении), согласно которому процесс  $\xi(t)$  представляется на некотором интервале наблюдения  $[0; T]$  в виде разложения по некоторому базису  $\{\varphi_k(t)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  — ортонормированному набору детерминированных функций:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t), \quad (2.4.24)$$

где  $\xi_k$  — случайные величины, являющиеся координатами процесса  $\xi(t)$  при его разложении в базисе  $\{\varphi_k(t)\}$ .

Канонические представления случайных процессов удобны для выполнения различных операций анализа, особенно линейных. Объясняется это тем, что при каноническом представлении процесса его зависимость от временного аргумента выражается при помощи детерминированных функций, что даёт возможность свести выполнение различных линейных опе-

раций над случайными функциями (дифференцирование, интегрирование, решение линейных дифференциальных уравнений и т. д.) к соответствующим операциям над базисными функциями, т. е. к обычным операциям анализа. Особенно важное значение канонические представления имеют для приложений теории случайных функций к решению задач обработки сигналов в присутствии помех. В этой области метод канонических представлений оказывается универсальным методом, который позволяет объединить все известные методы решения подобных задач в единую теорию.

С другой стороны, необходимо понимать, что получение канонических разложений для различных классов и видов случайных процессов на непрерывном интервале наблюдения является достаточно сложной математической задачей, приводящей, как правило, к необходимости решения интегро-дифференциальных уравнений<sup>1</sup>. Для случайных последовательностей задачи анализа и моделирования существенно упрощаются, и соответствующие алгоритмы сводятся к достаточно простым рекуррентным соотношениям.

В рамках общей теории канонических разложений, в разработку которой большой вклад внёс В. С. Пугачёв<sup>2</sup>, рассмотрим частную задачу формирования случайной последовательности  $\{\xi_k\}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , где  $\xi_1, \dots, \xi_N$  представляют собой отсчётные значения процесса  $\xi(t)$  в дискретные моменты времени  $t_1, \dots, t_N$ , из последовательности  $v_1, \dots, v_N$  некоррелированных случайных величин:

$$\xi_k \equiv \xi(t_k) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(t_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.4.25)$$

где вид базисных функций  $\{\varphi_i(t)\}$  определяется требуемыми корреляционными характеристиками.

Общая методика нахождения набора коррелированных величин  $\{\xi_k\}$  состоит в следующем.

---

<sup>1</sup> Само по себе представление случайного процесса в виде бесконечного ряда требует теоретико-вероятностного обоснования понятия предельного перехода для случайных величин и функций.

<sup>2</sup> Владимир Семёнович Пугачёв — российский учёный и педагог, основоположник статистической теории управляемых систем, автор фундаментальных работ в области авиационной баллистики и динамики полёта, теории управления и теории дифференциальных уравнений.

Первый элемент  $\xi_1$  последовательности  $\xi$  полагается равным первому элементу  $v_1$  последовательности  $\mathbf{v}$ :

$$\xi_1 \equiv \xi(t_1) = v_1.$$

При этом дисперсия  $\mathbf{D}[\xi_1]$  определяется заданной корреляционной функцией  $b_\xi(t, t')$ :

$$\sigma_1^2 \equiv \mathbf{D}[\xi_1] = b_\xi(t_1, t_1),$$

а первая базисная функция  $\varphi_1(t)$  равна

$$\varphi_1(t) = b_\xi(t, t_1) / \sigma_1^2. \quad (2.4.26)$$

Далее рекуррентным образом находятся дисперсии  $\mathbf{D}[\xi_k]$  и базисные функции  $\varphi_k(t)$  для  $k = 2, \dots, N$ :

$$\sigma_k^2 \equiv \mathbf{D}[\xi_k] = b_\xi(t_k, t_k) - \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i^2 \varphi_i^2(t_k), \quad k = 2, \dots, N; \quad (2.4.27)$$

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sigma_k^2} \left( b_\xi(t, t_k) - \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i^2 \varphi_i(t) \varphi_i(t_k) \right), \quad k = 2, \dots, N. \quad (2.4.28)$$

Если процесс  $\xi(t)$  предполагается стационарным, то в корреляционной функции фигурируют разностные аргументы:

$$\varphi_1(t) = b_\xi(t - t_1) / \sigma_1^2; \quad (2.4.26a)$$

$$\sigma_k^2 \equiv \mathbf{D}[\xi_k] = \sigma_0^2 - \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i^2 \varphi_i^2(t_k), \quad k = 2, \dots, N; \quad (2.4.27a)$$

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sigma_k^2} \left( b_\xi(t - t_k) - \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i^2 \varphi_i(t) \varphi_i(t_k) \right), \quad k = 2, \dots, N. \quad (2.4.28a)$$

Пусть, к примеру, требуется построить стационарную гауссовскую последовательность, в которой корреляционные связи имеют экспоненциальный вид:

$$b_\xi(t, t') = b_\xi(t - t') = \sigma_0^2 \exp[-\gamma |t - t'|].$$

Тогда

$$\sigma_1^2 = \sigma_0^2, \quad \varphi_1(t) = \exp(-\gamma |t - t_1|).$$

Далее, на основании (2.4.27) и (2.4.28) имеем:

$$\sigma_2^2 = \sigma_0^2 - \sigma_1^2 \varphi_1^2(t_2) = \sigma_0^2 [1 - \exp(-2\gamma \Delta t)];$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\sigma_2^2} [b_\xi(t - t_2) - \sigma_1^2 \varphi_1(t) \varphi_1(t_2)] =$$

$$= \frac{\exp(-\gamma |t - t_2|) - \exp(-\gamma \Delta t) \exp(-\gamma |t - t_1|)}{1 - \exp(-2\gamma \Delta t)},$$

где  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  — интервал дискретизации.

Продолжая вычисления, нетрудно показать, что для всех  $k = 2, \dots, N$

$$\varphi_k(t) = \frac{\exp(-\gamma |t - t_k|) - \exp(-\gamma \Delta t) \exp(-\gamma |t - t_{k-1}|)}{1 - \exp(-2\gamma \Delta t)}, \quad (2.4.29)$$

а

$$\sigma_k^2 = \sigma_0^2 [1 - \exp(-2\gamma \Delta t)],$$

т. е. дисперсии всех элементов формируемой последовательности, начиная со второго, одинаковы. В отсчётных точках базисные функции равны

$$\varphi_k(t_m) = \frac{\exp(-\gamma |m - k| \Delta t) - \exp(-\gamma \Delta t) \exp(-\gamma |m - k + 1| \Delta t)}{1 - \exp(-2\gamma \Delta t)},$$

$$m = 1, \dots, k; k = 2, \dots, N.$$

Таким образом, каноническое представление (2.4.25) для экспоненциальной корреляционной функции имеет следующий вид:

$$\xi_1 = v_1; \quad \xi_k = \sum_{i=1}^k v_i \exp[-\gamma(k-i)\Delta t], \quad k = 2, \dots, N. \quad (2.4.50)$$

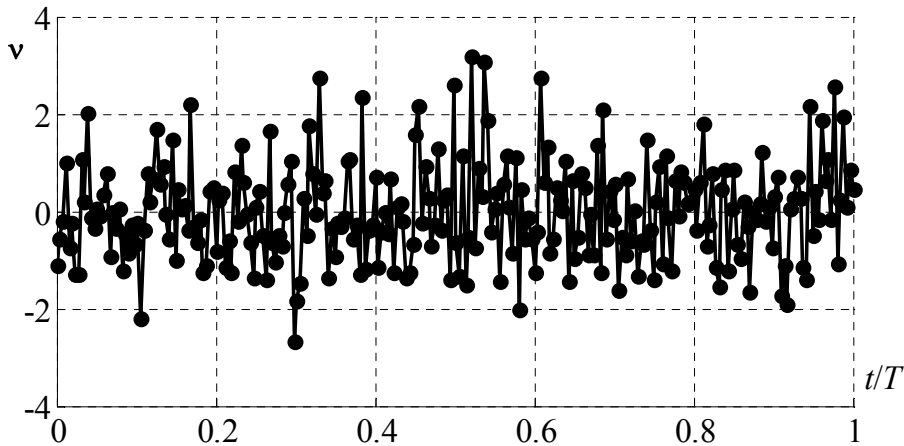


Рис. 2.37. Последовательность некоррелированных величин

На рис. 2.37 представлены результаты моделирования на интервале  $[0; T]$  случайной последовательности  $v$  некоррелированных величин, состоящей из  $N = 256$  отсчётов, а на рис. 2.38 — последовательности  $\xi$  коррелированных величин, построенных по формулам (2.4.50), в которых  $\gamma = 1/T$  и  $\gamma = 10/T$ .

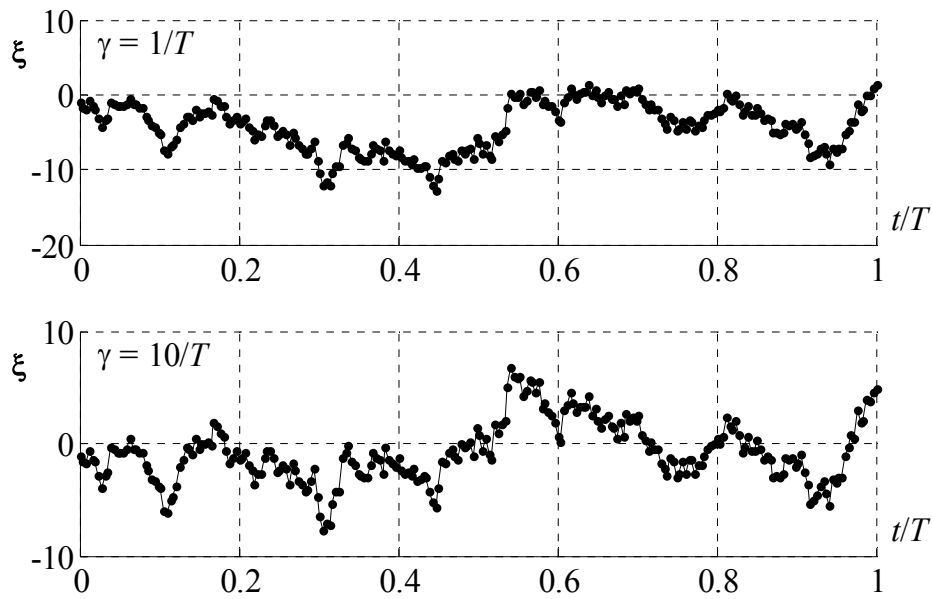


Рис. 2.38. Последовательность коррелированных величин

При  $\gamma = 1/T$  отсчётные значения обладают достаточно большой корреляцией. Как следствие, изменение значений такого процесса на наблюдаемом интервале сравнительно невелико (процесс даже “не успевает” изменить знак).

Для  $\gamma = 10/T$  корреляционные связи между отсчётами существенно меньше, и для реализаций процесса уже наблюдаются заметные “колебания” значений, хотя, конечно, не в такой степени, как для последовательности некоррелированных значений (рис. 2.37).

## ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 2

2.1. Найти преобразование  $\eta = f(\xi)$ , обеспечивающее генерирование заданных законов распределения  $w_\eta(y)$ , если  $\xi$  равномерно распределено на интервале  $[0; 1]$ .

$$w_\eta(y) = \lambda(1 - \lambda y / 2), \quad 0 \leq y \leq 2 / \lambda, \quad \lambda > 0;$$

$$w_\eta(y) = \frac{c}{(1 + by)^2}, \quad c > 0, \quad b > 0;$$

$$w_\eta(y) = c(y + 1)^{3/4}, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$w_\eta(y) = c|\sin x|, \quad -\pi / 2 \leq y \leq \pi / 2.$$

2.2. Пусть  $u$  — случайное число, сгенерированное из равномерного на интервале  $[0; 1]$  распределения. Образует последовательность чисел

$$q_n = \lambda \exp(-\lambda) \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

и найдём такое  $n$ , что  $q_{n-1} < u < q_n$ . Показать, что  $n$  имеет пуассоновское распределение с параметром  $\lambda$ .

2.3. Пусть  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  — случайные величины, подчиняющиеся экспоненциальному распределению  $w_\varepsilon(x) = \mu \exp(-\mu x)$ ,  $x \geq 0$ . Образует возрастающую последовательность сумм

$$\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \dots$$

и найдём такое  $n$ , что

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \leq \mu < \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k.$$

Показать, что  $n$  имеет пуассоновское распределение с параметром  $\mu$ .

2.4. Вывести явную формулу для расчёта значений случайной величины  $\xi$

а) с плотностью распределения

$$w_\xi(x) = \cos^2(2\pi m x), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad m — \text{натуральное};$$

б) с интегральной функцией распределения

$$F_\xi(x) = 1 - (1/3)[2 \exp(-x) + \exp(-5x)], \quad 0 \leq x < \infty.$$

2.5. Вывести явные формулы для расчёта значений случайных точек  $(x, y)$ :

а) равномерно распределённых в кольце  $R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2$ ;

б) с плотностью распределения  $w_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2) = 6x_2$ , определённой в треугольнике, ограниченном прямыми  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_1 = x_2$ .

2.6. Найти плотность вероятности случайной величины  $\xi = \eta - \ln \kappa$ , где  $\kappa$  распределена равномерно на интервале  $[0; 1]$ , а  $\eta$  — независима от  $\kappa$  и имеет плотность распределения  $w_{\eta}(y)$ .

2.7. Показать, что случайную величину  $\xi$  с плотностью распределения

$$w_{\xi}(x) = \frac{a \exp(-ax)}{(1 - \exp(-ad))}, \quad a > 0, \quad d > 0,$$

можно смоделировать с помощью равномерной на интервале  $[0; 1]$  величины  $\kappa$ , используя следующие формулы:

а)  $\xi = -(1/a) \ln[1 - \kappa(1 - \exp(-ad))]$ ;

б)  $\xi = -(1/a) \ln[\kappa + (1 - \kappa)\exp(-ad)]$ ;

в)  $\xi = -(1/a) \ln \kappa$  (при условии  $x < d$ );

2.8. Случайная точка  $(x_1, x_2)$  распределена равномерно в квадрате  $[0; 1] \times [0; 1]$ . Найти закон распределения площади прямоугольника со сторонами  $x_1$  и  $x_2$ .

2.9. Пусть задано двумерное распределение  $w_{\xi}^{(2)}(x_1, x_2)$ . Найти закон распределения наименьшей и наибольшей из двух случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

2.10. Найти распределение суммы квадратов двух независимых гауссовских величин с нулевыми средними и дисперсиями  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$ .

2.11. Написать и программно реализовать по методу исключения (методу Неймана) алгоритмы моделирования случайных величин со следующими плотностями вероятности:

$$w_{\xi}(x) = c(3 - \sqrt[3]{2x}), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$w_{\xi}(x) = cx^{5/3}(1-x)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$w_{\xi}(x) = cx^{5/3} \exp(-x), \quad x > 0.$$

2.12. Написать и программно реализовать алгоритмы моделирования случайных величин, описываемых следующими плотностями вероятности:

$$w_{\xi}(x) = c[x^{-2} + x^2 \exp(-x^3)], \quad x \geq 1;$$

$$w_{\xi}(x) = c \exp(-ax) [1 + \exp(-bx)], \quad x \geq 0, \quad a, b > 0;$$

$$w_{\xi}(x) = cx(1-x)^2, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$w_{\xi}(x) = c(1-x)^3, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

2.13. Написать моделирующие формулы для случайных величин со следующими плотностями распределения:

$$w_{\xi}(x) = c \exp[-(x-1)^2], \quad x \geq 1;$$

$$w_{\xi}(x) = c \ln^4 x, \quad 0 < x \leq 1.$$

2.14. Написать и программно реализовать алгоритмы моделирования двумерных случайных векторов, описываемых следующими плотностями вероятности:

$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) = cx \exp(-xy), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y \geq 0;$$

$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) = c [\exp(-|x|) + \exp(-|y|)], \quad -1 \leq x, \quad y \leq 1;$$

$$w_{\xi\eta}^{(2)}(x, y) = c \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq x, \quad y \leq 1;$$

2.15. Написать моделирующие формулы и реализовать программно алгоритмы моделирования гауссовских случайных векторов, задаваемых математическими ожиданиями  $a$  и ковариационной матрицей  $\mathbf{K}$ :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 3, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — М. : Кнорус, 2010. — 658 с.
2. *Кнут Д.* Искусство программирования. Т. 2. — М. : Вильямс, 2007. — 832 с.
3. *Ивченко Г. И.* Введение в математическую статистику / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. — М. : Издательство ЛКИ, 2010. — 600 с.
4. *Боровков А. А.* Математическая статистика. — М. : Физматлит, 2010. — 704 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. — М. : Физматлит, 2001. — 616 с.
6. *Ильин В. А.* Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : Физматлит, 2002. — 320 с.
7. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. — М. : Радио и связь, 1982. — 624 с.
8. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. — М. : Дрофа, 2006. — 719 с.
9. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский — М. : Изд-во МГУ, 1999. — 799 с.
10. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов / Б. Г. Володин [и др.] ; под общ. ред. А. А. Свешникова — М. : Лань, 2008. — 448 с.
11. *Горяинов В. Т.* Статистическая радиотехника: примеры и задачи : учеб. пособие / В. Т. Горяинов, А. Г. Журавлёв, В. И. Тихонов. — М. : Сов. радио, 1980. — 544 с.
12. *Ипатов В. П.* Сборник задач по статистической радиотехнике / В. П. Ипатов, А. С. Маругин, Ю. Д. Ульяницкий. — СПб. : СПбГЭТУ (ЛЭТИ), 1998. — 64 с.

Гельгор Александр Леонидович  
Горлов Антон Игоревич  
Попов Евгений Александрович

## МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97  
Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005-93, т. 2; 953005 – учебная литература

---

Подписано к печати                      Формат 60x84/16.    Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 13,63                      . Уч.-изд. л.                      . Тираж экз.    Заказ

---

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,  
в Цифровом типографском центре  
Издательства Политехнического университета.  
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.  
Тел.: (812) 550-40-14.  
Тел./факс: (812) 297-57-76.