

Локальное подобие течения и распределение скоростей в турбулентных потоках

Д.т.н., профессор В.С. Боровков;
старший преподаватель В.Н. Байков,
ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет;
к.т.н., доцент М.А. Вольнов,
ФГБОУ ВПО Московский государственный университет природообустройства;
ассистент Д.В. Писарев,
ФГБОУ ВПО Московский государственный технический университет*

Ключевые слова: локальное подобие течения; логарифмический и степенной профиль; распределение скоростей в речных потоках

Обоснование условий, обеспечивающих подобие кинематических и динамических характеристик турбулентных потоков, имеет принципиальное научное значение для гидравлики и инженерной гидрологии. Такое обоснование актуально для решения задач гидравлического моделирования [1, 2] и инженерных расчетов систем водоснабжения и водоотведения, а также водопропускных сооружений в гидротехническом и дорожном строительстве [3, 4].

Общие вопросы динамического подобия турбулентных потоков, которым посвящено большое число научных работ, представляются в настоящее время достаточно разработанными [5]. Известно, что критерии динамического подобия могут быть получены преобразованием дифференциальных уравнений движения к безразмерному виду [6]. Необходимым условием динамического подобия потоков является их геометрическое и кинематическое подобие [7]. Вопросы кинематического подобия для наиболее важных в практическом плане течений в трубах и открытых каналах традиционно решаются на основе полуэмпирической теории турбулентности Л. Прандтля [8] с привлечением экспериментальных данных И. Никурадзе [9, 10] и результатов исследований течений в открытых каналах А.П. Зегжда [11].

Однако полуэмпирическая теория Л. Прандтля содержит ряд априорных допущений и противоречий, в том числе предполагается постоянство касательного напряжения по сечению потока, противоречащее основному уравнению равномерного движения [12]. Также в этой теории не обоснованы линейное изменение длины пути перемешивания с расстоянием от твердой границы потока, одинаковость связи продольных и вертикальных турбулентных пульсаций скорости с градиентом осредненной скорости течения и их близость по абсолютной величине. Полученное на основе этих допущений логарифмическое распределение скорости (1), подтвержденное опытами И. Никурадзе, Л. Прандтль называл «не более чем счастливой случайностью».

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln z + C, \quad (1)$$

где $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ – динамическая скорость; τ_0 – граничное касательное напряжение; κ – постоянный коэффициент (константа Кармана).

Рассматривая полуэмпирическую теорию турбулентности, профессор В.Н. Гончаров [13] отмечает: «Часто встречающееся утверждение о полном и точном совпадении этих спорных решений с опытом и о полном подтверждении в силу этого бесспорности теоретической базы этих решений – не отвечает действительности». В результате этих работ были получены так называемые «универсальные» профили скорости в виде:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{k_s} + 8,48 \quad (2)$$

для труб с шероховатой внутренней поверхностью (k_s – эквивалентная песчаная шероховатость) и

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* z}{\nu} + 5,5 \quad (3)$$

для гидравлически гладких труб.

Таким образом, единого распределения скоростей для турбулентных потоков в гладких и шероховатых границах и общего условия подобия распределения скоростей установлено не было, а для зоны переходного гидравлического сопротивления вопрос о распределении скоростей остался открытым. Все эти обстоятельства сохраняют интерес исследователей к проблеме локального кинематического подобия турбулентных течений [14, 15, 16]. При выполнении опытов в гладких трубах И. Никурадзе [9] было установлено, что наравне с логарифмическим распределением (3) опытные данные в достаточной мере точно отвечают также степенному распределению скоростей:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* z}{\nu} + 5,5, \quad (3)$$

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{z}{r_0} \right)^n, \quad (4)$$

где r_0 – радиус трубы; u_{\max} – скорость на оси трубы; n – показатель степени, зависящий от числа Рейнольдса.

Позднее А.Д. Альтшулем [17] и В.Нуннером [18] было установлено, что в общем случае при течении в гладких и шероховатых трубах

$$n = 0,9\sqrt{\lambda}, \quad (5)$$

где λ – коэффициент гидравлического сопротивления.

Выполненный анализ применимости логарифмического и степенного профилей [19] показал, что и тот и другой профиль, за исключением пристенной и осевой зон потока, в достаточной мере отвечают данным измерений. Успешная попытка получить единый универсальный профиль скорости логарифмического вида для всех режимов гидравлического сопротивления на основе опытных данных И.Никурадзе была приведена в работе [20]:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{r_0} + \frac{1,5}{\kappa} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}}. \quad (6)$$

Полученное распределение показывает, что при различных режимах сопротивления параметрами локального кинематического подобия турбулентных течений являются динамическая скорость u_* и коэффициент гидравлического сопротивления λ . Это определяет необходимость особо тщательного определения этих параметров при выполнении лабораторных гидравлических исследований турбулентных течений и натуральных гидрологических измерений речных потоков. Тем не менее, до настоящего времени анализа локального кинематического подобия турбулентных течений и условий применимости логарифмического и степенного профилей скорости не производилось.

Для определения условий применимости и ограничений на распределение скоростей в турбулентном потоке используем фундаментальный принцип локального кинематического подобия течений, сформулированный Т. Карманом [21] и впоследствии уточненный академиком Л.И. Седовым [5].

Этот принцип локального подобия течений накладывает определенные ограничения на распределение скоростей в турбулентном потоке. Проанализируем эти ограничения более подробно.

Согласно Т. Карману, относительную скорость потока в точке, находящейся относительно другой на расстоянии Δz , можно представить в виде последовательности производных скорости u' , u'' , u''' , ... При этом относительную скорость можно представить в виде ряда Тейлора:

$$u = u' \Delta z + u'' \frac{\Delta z^2}{2!} + u''' \frac{\Delta z^3}{3!} + \dots \quad (7)$$

В дальнейшем ограничимся первыми тремя членами ряда (7), поскольку остальные члены ряда имеют малую величину.

Согласно π -теореме Букингема при анализе изменения скорости основными размерностями являются длина $[L]$ и время $[T]$. В этом случае имеем три определяющих параметра и две основные размерности, а, следовательно, один безразмерный комплекс, который можно записать в виде:

$$\frac{u^{n2}}{u'u^m} = c, \quad (8)$$

где c – некоторая константа.

Рассматривая комплекс (8) как дифференциальное уравнение, можно установить вид функции $u = f(z)$.

Интегрированием дифференциального уравнения (8) с двойной заменой переменных находим:

$$u = \left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{c}{c-1}} \frac{1}{\frac{c}{c-1}+1} (c_1 z + c_2)^{\frac{c}{c-1}+1} + c_3 = A(z+B)^{\frac{2c-1}{c-1}} + D. \quad (9)$$

Здесь c_1, c_2 и c_3 – постоянные интегрирования;
 A, B и D – коэффициенты.

Полученное решение, имеющее вид степенной функции, справедливо при $c \neq 0,5$ и $c \neq 1$.

При $c = 0,5$ интегрированием уравнения (8) находится решение в виде логарифмической функции:

$$u = A_1 \ln(z + B_1) + D_1. \quad (10)$$

При $c = 1$ получаем решение в виде экспоненциальной функции:

$$u = A_2 e^{z/B_2} + D_2. \quad (11)$$

Следовательно, фундаментальному условию локального кинематического подобия в равной мере удовлетворяют профили скорости логарифмического, степенного и экспоненциального вида, что является принципиально значимым результатом выполненного. Возможность физической реализации того или иного профиля скорости может быть установлена на основе уравнения движения с использованием гипотезы Буссинеска:

$$\frac{\tau_T}{\rho} = \nu_T \frac{du}{dz}, \quad (12)$$

где ν_T – так называемая турбулентная вязкость;

τ_T – касательное напряжение, имеющее турбулентную природу.

При этом полное касательное напряжение обычно представляют в виде:

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \nu_T) \frac{du}{dz}, \quad (13)$$

где ν – молекулярная (физическая) вязкость.

Из принципа размерности следует, что турбулентная вязкость пропорциональна некоторой длине L и характерной скорости.

Если расстояние от граничной поверхности z рассматривать как характерную длину, а в качестве характерной скорости принять динамическую скорость u_* , то можно записать:

$$\nu_T = \kappa u_* z, \quad (14)$$

где κ – коэффициент пропорциональности (константа Кармана).

Боровков В.С., Байков В.Н., Писарев Д.В., Вольнов М.А. Локальное подобие течения и распределение скоростей в турбулентных потоках

Используя уравнение равномерного движения для открытого потока и подставляя в него выражения (13) и (14), запишем:

$$g(h-z)i = (v + \kappa u_* z) \frac{du}{dz}.$$

Интегрируя это уравнение, с граничным условием $u = u_k$ (где u_k – скорость на высоте эквивалентной шероховатости $z = k_s$) получаем:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{v}{\kappa u_* h} \right) \ln \frac{1 + \frac{\kappa u_* z}{v}}{1 + \frac{\kappa u_* k_s}{v}} - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{z}{h} - \frac{k_s}{h} \right) + \frac{u_k}{u_*}. \quad (15)$$

Поскольку $\frac{\kappa u_* z}{v} > 30 \geq 1$ и $\frac{u_* h}{v} > \frac{u_* z}{v}$, выражение (15) приводится к виду:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{k_s} - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{z}{h} - \frac{k_s}{h} \right) + \frac{u_k}{u_*}. \quad (16)$$

В гладком канале (при $k_s \rightarrow 0$) имеем:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* z}{v} - \frac{1}{\kappa} \frac{z}{h} + \beta, \quad (17)$$

где β – некоторая постоянная.

Для шероховатого канала

$$\left(\frac{\kappa u_* k_s}{v} \gg 1 \right). \quad (18)$$

Полученные выражения при $\tau = const$ оказываются близкими к аналогичным соотношениям, учитывающим изменение касательного напряжения по глубине потока. В обоих случаях профиль скорости имеет логарифмический вид.

Сделаем попытку установить вид функции v_T , при котором может реализоваться экспоненциальный вид профиля скорости (11).

Представим этот профиль скорости в безразмерном виде, учитывая принцип размерности:

$$\frac{u}{u_*} = a e^{\alpha \frac{z}{h}} + b, \quad (19)$$

где a , α и b – некоторые постоянные.

Дифференцируя (19) и подставляя $\frac{du}{dz}$ в выражение (13) с учетом уравнения равномерного движения, находим:

$$v_T = \frac{1}{\alpha a} u_* h \left(1 - \frac{z}{h} \right) e^{-\alpha \frac{z}{h}} - v.$$

Это выражение является условием реализации профиля скорости экспоненциального вида.

Анализируя полученное выражение, можно заметить, что при $z \rightarrow 0$, $v_T \rightarrow u_* \frac{h}{2\alpha}$, т. е. является величиной конечной. Очевидно, что при $z \rightarrow 0$ должно соблюдаться условие $v_T \rightarrow 0$ [22]. Это позволяет заключить, что для течения в канале экспоненциальный профиль скорости (11) физически реализоваться не может.

Боровков В.С., Байков В.Н., Писарев Д.В., Волинов М.А. Локальное подобие течения и распределение скоростей в турбулентных потоках

Рассмотрим подробнее степенной профиль скорости в виде (10), полученный выше:

$$u = A(z + B)^n + D,$$

где $n = \frac{2c-1}{c-1}$.

Найдем выражение для турбулентной вязкости, отвечающее этому профилю, учитывая, что

$$\frac{du}{dz} = An(z + B)^{n-1}.$$

Подставляя производную $\frac{du}{dz}$ в выражение (13) и учитывая, что физическая вязкость много меньше турбулентной, после преобразований получаем:

$$\nu_T = \frac{u_*^2}{An} \left(1 - \frac{z}{h}\right) (z + B)^{1-n}.$$

Так как при $z \rightarrow 0$ должно удовлетворяться условие $\nu_T \rightarrow 0$, находим, что $B = 0$.

Следовательно,

$$\nu_T = \frac{u_*^2}{An} \left(1 - \frac{z}{h}\right) z^{1-n}.$$

В этом случае профиль скорости принимает вид:

$$u = Az^n + D.$$

С учетом граничных условий $z \rightarrow 0 \quad u \rightarrow 0$ и $z = h \quad u = u_{\max}$ получаем:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{z}{h}\right)^n. \quad (20)$$

Сравнивая два последних выражения, установим, что

$$A = \frac{u_{\max}}{h^n}.$$

И, следовательно,

$$\nu_T = \frac{u_*^2}{nu_{\max}} h^n z^{n-1} \left(1 - \frac{z}{h}\right). \quad (21)$$

Анализируя выражение (21), видим, что при $n \geq 1$ оно не удовлетворяет условию $\nu_T \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$. Из этого следует, что профиль скорости степенного вида (23) может физически реализоваться только при $0 < n < 1$. Обычно принято считать, что влияние физической вязкости мало по сравнению с влиянием турбулентности в той части потока, где справедлив степенной профиль скорости.

Результаты выполненного анализа позволяют сделать вывод о том, что фундаментальному принципу локального кинематического подобия в равной мере отвечают распределения скоростей логарифмического и степенного вида. Однако окончательное суждение может быть сделано на основе их проверки данными лабораторных и натурных измерений в речных потоках.

Этот важный аналитический результат проверялся сопоставлением измеренных распределений скоростей в речных потоках с профилями скорости логарифмического и степенного вида. Для проверки логарифмический профиль записывался в виде:

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{h} + C. \quad (22)$$

В рамках настоящей работы было произведено сопоставление логарифмического распределения скоростей с данными натурных измерений для 6 равнинных существенно различающихся водотоков.

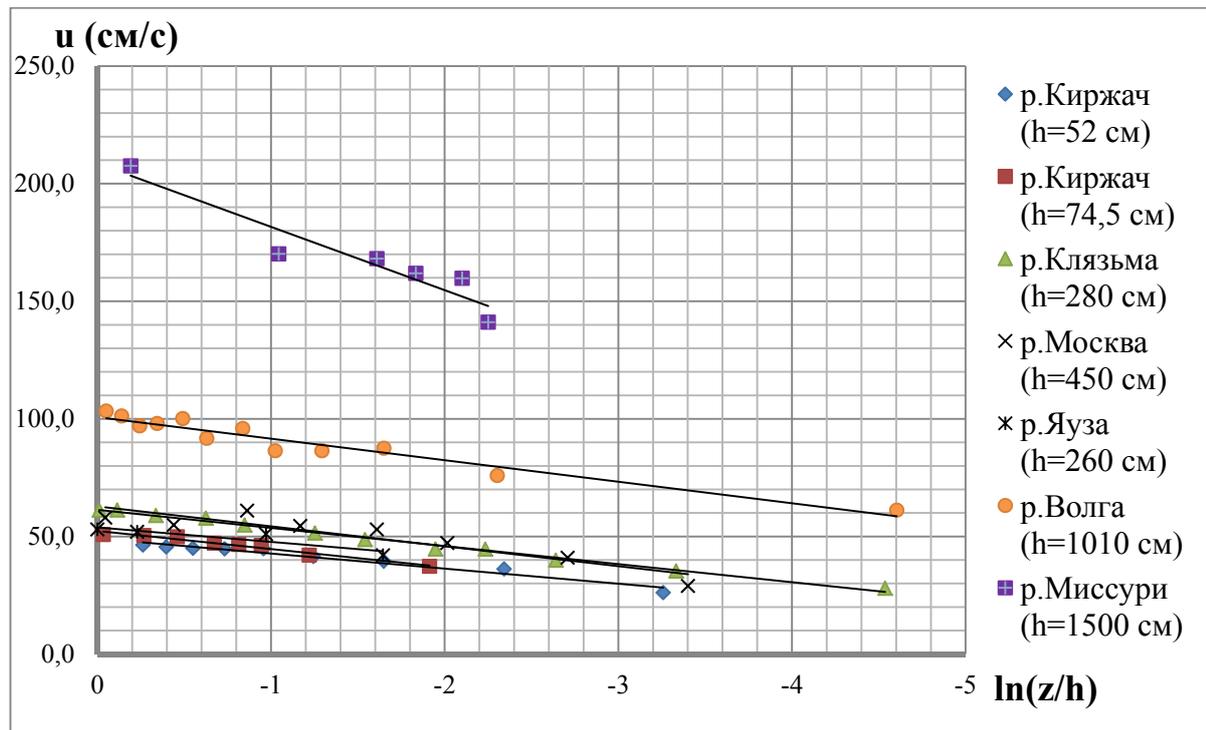


Рисунок 1. Сопоставление логарифмического распределения скоростей с данными натурных измерений для 6 равнинных существенно различающихся водотоков

Данные, представленные на рис. 1, обнаруживают хорошее соответствие измеренных распределений скорости с профилем логарифмического типа (22).

Сопоставление измеренных распределений со степенным профилем (15) приведено на рис. 2.

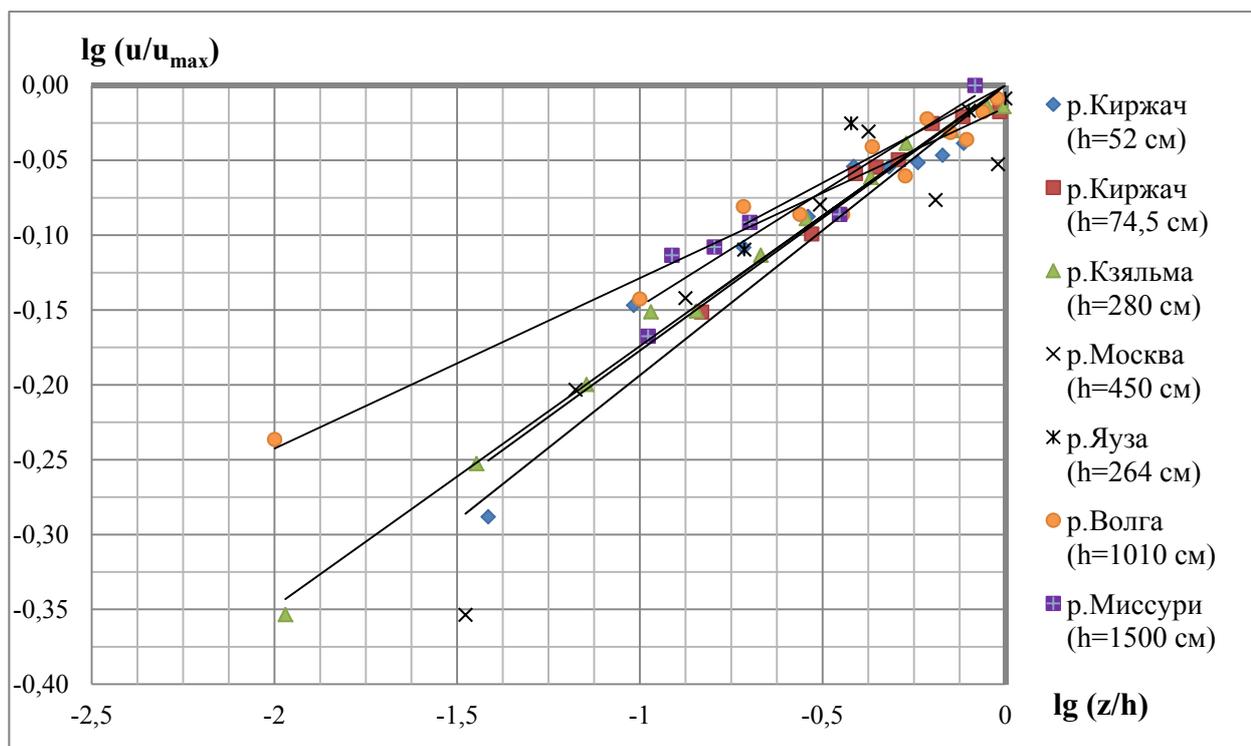


Рисунок 2. Сопоставление измеренных распределений со степенным профилем

Боровков В.С., Байков В.Н., Писарев Д.В., Волинов М.А. Локальное подобие течения и распределение скоростей в турбулентных потоках

Результаты сопоставления показывают, что степенной профиль для речных потоков также вполне приемлем, что подтверждает сделанный вывод о соответствии этого профиля скорости принципу локального подобия течения.

Как известно, динамическая скорость является параметром подобия логарифмических профилей скорости и, как показано Б. А. Фидманом [23], также параметром подобия для распределений стандартов турбулентных пульсаций скорости. По этой причине определению динамической скорости для речных потоков в настоящей работе уделялось особое внимание. Прямое определение динамической скорости по глубине и местному гидравлическому уклону затрудняется необходимостью точного определения уклона.

В данной работе динамическая скорость находилась двумя независимыми способами с использованием логарифмического и степенного распределения скоростей. Как видно из выражения (22) угловой коэффициент в первом слагаемом уравнения представляет собой отношение динамической скорости к константе Кармана, значение которой, как известно, равно 0,4, что позволяет определить опытное значение динамической скорости.

При анализе измеренных распределений скоростей в степенной форме из уравнения (20) находился показатель степени n . С использованием формулы (5) по показателю степени определялся коэффициент гидравлического сопротивления λ . По средней скорости, найденной для каждого случая численным интегрированием распределения скоростей, производилось независимое определение значения динамической скорости по степенному профилю:

$$u_* = u_{cp} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{8}}. \quad (23)$$

Сопоставление динамических скоростей, найденных независимо по логарифмическому и степенному профилю (рис. 3), обнаруживает их хорошую сходимость.

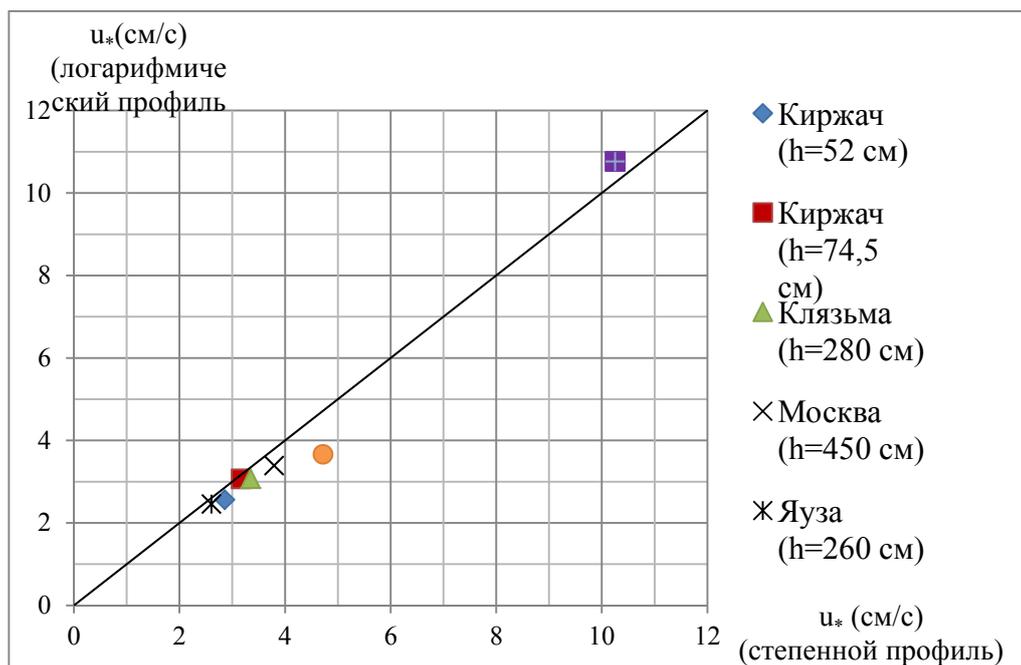


Рисунок 3. Сопоставление динамических скоростей, найденных независимо по логарифмическому и степенному профилю

Предложенная методика определения местной динамической скорости речных потоков с использованием степенного профиля скорости дает результаты, совпадающие с данными расчета динамической скорости по логарифмическому распределению скоростей.

Таким образом, приведенное в настоящей статье аналитическое обоснование соответствия логарифмического и степенного распределения скоростей принципу локального кинематического подобия течений, подтвержденное данными натурных измерений, имеет важное научное значение. Полученные результаты могут быть использованы в практике гидрологических измерений.

Литература

1. Леви И. И. Моделирование гидравлических явлений. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1960. 210 с.
2. Лятхер В. М., Прудовский А. М. Гидравлическое моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1984. 390 с.
3. Справочник по расчету водосбросных гидротехнических сооружений. Под ред. Векслера А. Б. М.: Энергоатомиздат, 1988. 624 с.
4. Чистяков И. В. Сток ливневых вод на основе паводковой волны для сооружений автомобильных дорог и аэродромов: Автореф. дис. д-ра техн. наук: 05.23.11. М., 2011. 40 с.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
7. Рейнольдс Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. М.: Энергия, 1979. 405 с.
8. Прандтль Л. Результаты работ последнего времени по изучению турбулентности // Проблемы турбулентности. М.-Л.: Изд-во ОНТИ НКТП, 1936. С. 9–35.
9. Никурадзе И. Закономерности турбулентного движения в гладких трубах // Проблемы турбулентности. М.-Л.: Изд-во ОНТИ НКТП, 1936. С. 75–150.
10. Nikuradse I. Stroemungsgesetze in rauhen Rohren // Forschungs-Heft (Forschung auf dem Gebiete des Ingenieur-Wesens). 1933. No. 361. Pp. 1-22.
11. Зегжда А. П. Гидравлические потери на трение в каналах и трубопроводах. М.-Л.: Гос. изд-во литер. по строит. и архитект., 1957. 277 с.
12. Киселев П. Г. Гидравлика. Основы механики жидкости: Учеб. пособие для вузов. М.: Энергия, 1980. 360 с.
13. Гончаров В. Н. Равномерный турбулентный поток. М.-Л.: ГЭИ, 1952. 145 с.
14. Gioia G., Bombardelli F. A. Scaling and similarity in rough channel flows // Phys. Rev. Lett. 2002. 88, 014501. Pp. 1-4.
15. Flack K. A., Schultz M. P., Shapiro T. A. Experimental support for Townsend's Reynolds number similarity hypothesis on rough walls // Phys. Fluids. 2005. 17, 035 102. Pp. 1-9.
16. Zagarola M. V. Mean-flow scalling of turbulent pipe flow: Doctoral dissertation. Princeton University. 1996. 187 p.
17. Альтшуль А. Д. Гидравлические сопротивления. М.: Недра, 1982. 222 с.
18. Nunner W. Warmeuebergang Forschungsheft. 1956. N455. Pp. 5-39.
19. Полянин А. Д., Вязьмина Е. А., Дильман В. В. Критерии для проверки применимости эмпирических формул. Анализ турбулентных течений и общие замечания // Теоретические основы химических технологий. 2009. Т. 43, №2. С. 131-140.
20. Байков В. Н. Универсальное распределение скоростей в водных потоках при различных режимах гидравлического сопротивления // Вестник МГСУ. 2009. №4. С. 19-22.
21. Карман Т. Некоторые вопросы теории турбулентности // Проблемы турбулентности. М.-Л.: Изд-во ОНТИ НКТП, 1936. С. 35–75.
22. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
23. Фидман Б. А. Турбулентность водных потоков. Л.: Гидрометеоздат, 1991. 230 с.

* Валерий Степанович Боровков, Москва, Россия
Тел. раб.: +7(499)261-59-53; эл. почта: MGSU-hydraulic@yandex.ru

© Боровков В.С., Байков В.Н., Писарев Д.В., Волынов М.А., 2012

doi: 10.5862/MCE.32.2

Local similarity and velocity distribution in turbulent flows

V.S. Borovkov,*Moscow State Building University, Moscow, Russia
+7(499)261-59-53; e-mail: MGSU-hydraulic@yandex.ru***V.N. Baykov,***Moscow State Building University, Moscow, Russia***M.A. Volynov,***Moscow State University of Environmental Engineering, Moscow, Russia***D.V. Pisarev,***Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

Key words

local similarity flows; logarithmic and the wall law velocity profile; the distribution of velocities in river flows

Abstract

Justification of conditions for similarity of turbulent flows cinematic and dynamic characteristics is fundamental for solving the hydraulic modeling problems and calculating the water supply and sewerage systems, culverts in hydraulic and highway engineering.

In the article the local kinematic similarity conditions for turbulent pipe flows were investigated. It was established that Prandtl-Nikuradze similarity conditions were not universal for various hydraulic resistance regimes and wall velocity distribution had not any theoretical foundation.

The analysis of local similarity flows principal Von Karman- Sedov was presented. It was showed that logarithmic and wall law velocity distribution in equal measure corresponds to this principal and both dynamic velocity and drag coefficient are the similarity parameters for velocity distributions.

The data of velocity measurements corresponding with logarithmic and wall law velocity distribution for rivers which distinguished by discharges and scales is presented. Two investigated methods for dynamic velocity determination with using logarithmic and wall law velocity profiles were described. It was indicated that this two different determination methods displayed equivalent dynamic velocities for each investigated river flow.

References

1. Levy I. I. *Modelirovanie gidravlicheskikh yavleniy* [Modeling of hydraulic phenomena]. Moscow-Leningrad: publ. house Gosenergoizdat, 1960. 210 p. (rus)
2. Lyather V. M., Prudovsky A. M. *Gidravlichesкое modelirovanie*. [Hydraulic modeling.] Moscow: Energoatomizdat, 1984. 390 p. (rus)
3. *Spravochnik po raschetu vodosbrosnyh gidrotehnicheskikh sooruzheny*. [Handbook for the design of water-waste of hydraulic engineering structures.] Edited by Veksler A. B. Moscow: Energoatomizdat, 1988. 624 p. (rus)
4. Chistyakov I. V. *Stok livnevyyh vod na osnove pavodkovoy volny dlya sooruzheny avtomobilnyh dorog i aerodromov* [Design of rainwater runoff on the basis of flood wave theory for the construction of highways and airfields]. Doctor dissert. thesis: 05.23.11. Moscow, 2011. 40 p. (rus)
5. Sedov L. I. *Metody podobiya i razmernosti v mehanike* [Similarity and dimensionality methods in mechanics]. Moscow: Nauka, 1977. 440 p. (rus)
6. Floyciansky L. G. *Mehanika zhidkosti i gasa*. [Liquid and gas mechanics]. Moscow: Drofa, 2003. 840 p. (rus)
7. Reynolds A. J. *Turbulent flow in engineering*. Dept of Mech. Engineering Brunel Univ. London.
8. Prandtl L. Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Zeitschrift des vereines deutscher ingenieure. V. D. I. 1933. Vol. 77. No. 5. Pp. 105-114.
9. Nikuradse I. Gesetzmaessigkeiten der turbulenten Stroemung in glatten Rohren. *Forschungs-heft (Forschung auf dem Gebiete des Ingenieur-wesens)*. 1932. No. 356. Pp.1-36.

Borovkov V.S., Baykov V.N., Volynov M.A., Pisarev D.V. Local similarity and velocity distribution in turbulent flows

10. Nikuradse I. Stroemungsgesetze in rauhen Rohren. *Forschungs-Heft (Forschung auf dem Gebiete des Ingenieur-wesens)*. 1933. No. 361. Pp. 1-22.
11. Zegzhda A. P. *Gidravlicheskie poteri na trenie v kanalah i truboprovodah* [Hydraulic friction losses in channels and pipes]. Moscow-Leningrad: Gos. izd-vo liter. po stroit. i arhitekt., 1957. 277 p. (rus)
12. Kiselev P. G. *Gidravlika. Osnovy mehaniki zhidkosti*. [Hydraulics. Foundation of fluid mechanics]. Moscow: Energiya, 1980. 360 p. (rus)
13. Goncharov V. N. *Ravnomernye turbulentnye potoki* [Uniform turbulent flow]. Moscow-Leningrad: GEI, 1952. 145 p. (rus)
14. Gioia G., Bombardelli F.A. Scaling and similarity in rough channel flows. *Phys. Rev. Lett.* 2002. No. 88. 014 501.
15. Flack K. A., Schultz M. P., Shapiro T. A. *Experimental support for Townsend's Reynolds number similarity hypothesis on rough walls*. *Phys. Fluids*. 2005. No. 17. 035 102.
16. Zagarola M. V. *Mean-flow scalling of turbulent pipe flow*. Doctoral dissertation. Princeton University, 1996.
17. Altshul A. D. *Gidravlicheskie soprotivleniya* [Hydraulic resistance]. Moscow: Nedra, 1982. 222 p. (rus)
18. Nunner W. *Warmeubergang Forschungsheft*. 1956. No. 455.
19. Polyanin A. D., Vyazmina E. A., Dilman V. V. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2009. Vol. 43. No. 2. Pp.131-140. (rus)
20. Baykov V. N. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2009. No. 4. Pp. 19-22. (rus)
21. Karman Th. V. Some aspects of the theory of turbulent motion. *Proceedings of the International Congress for applied mechanics*. Cambridge. 1934.
22. Schlichting H. *Grenzschicht – Theorie*. Verlag G. Braun – Karlsruhe. 1965. 742 p.
23. Fidman B.A. *Turbulentnost vodnyh potokov*. [Turbulence in water flows.] Leningrad: publishing house: «Hydrometeoizdat», 1991. 230 p. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 12-19