Дополнение к методу анализа размерностей в задачах гидравлики

К.т.н., доцент А.М. Калякин;
ассистент Е.В. Чеснокова,*
ФГБОУ ВПО Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

Ключевые слова: метод анализа размерностей; функциональная зависимость; толщина стекающей пленки; скорость распространения поверхностных волн; комбинированный параметр; соотношение сил; размерность параметра

Метод анализа размерностей является одним из наиболее применяемых инструментов в инженерной практике. Однако часто при анализе явлений с помощью этого метода возникают ситуации, требующие нестандартного подхода. Два таких случая и предлагаемые нами решения рассматриваются в данной работе.

В дальнейшем изложении мы будем часто обращаться к так называемой стандартной схеме применения метода анализа размерностей [1, 2, 3], поэтому кратко изложим ее.

Допустим, что для искомой величины U (например, силы, давления, скорости, расхода и т.д.) известны параметры x, y, z (например, ускорение, плотность, скорость и т.д.), от которых зависит величина U. Необходимо найти степенной вид зависимости искомой величины U от аргументов x, y, z, то есть найти показатели степени. Если в качестве основных первичных величин выбрать массу, длину и время, то для размерностей получим:

$$[U^{'}] = [x]^a [y]^b [z]^c \tag{1}$$

или:

$$[m^a L^b t^c] = [m^{a_1} L^{b_1} t^{c_1}]^{\alpha} [m^{a_2} L^{b_2} t^{c_2}]^{\beta} [m^{a_3} L^{b_3} t^{c_3}]^{\gamma} . \tag{2}$$

Неизвестными в данном случае являются α, β и γ.

Основываясь на том очевидном факте, что показатели у каждой первичной величины в левой и правой частях равны, исходя из (2), можно записать следующее:

$$\begin{aligned} &\text{по массе: } a = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 ; \\ &\text{по длине: } b = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 ; \\ &\text{по времени: } c = \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 . \end{aligned} \tag{3}$$

Решая эту систему линейных уравнений, определяем α, β и γ.

Окончательный результат имеет вид:

$$U = C \cdot x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} , \tag{4}$$

где C – неизвестный числовой множитель.

Подробное обоснование применения метода анализа размерностей изложено в работах [1, 4, 5].

Часто встречаются задачи, в которых число параметров в общей функциональной зависимости типа

$$U = f(x, y, z, \ldots) \tag{5}$$

больше трех (напомним, что обычно в задачах механики, строительной механики, гидравлики, аэродинамики и т.д. первичных величин три – это масса m, длина L, время t; следовательно, и уравнений для поиска показателей степени также три), поэтому такая задача не может быть решена обычным формальным способом [6, 7, 8].

Предлагаемый нами прием решения таких задач рассмотрен ниже на конкретных примерах.

Пример 1

Жидкость тонкой пленкой стекает по вертикальной стене под действием силы тяжести. Необходимо определить вид зависимости для скорости стекания пленки. Задачи такого типа встречаются при расчетах пленочных теплообменных устройств.

Решение. В работах [1, 5] показано, что естественно представить общий вид зависимости для скорости U так:

$$U = f(\delta, \nu, g), \tag{6}$$

где σ – толщина пленки, ν – кинематический коэффициент вязкости, g – ускорение свободного падения.

Следуя стандартной схеме, имеем:

$$U = C \cdot \delta^{\alpha} \upsilon^{\beta} g^{\gamma}, \tag{7}$$

где α, β и γ – неизвестные безразмерные показатели степени.

Соотношение (7) в размерностях представляется так:

$$[Lt^{-1}] = L^{\alpha}[L^2t^{-1}]^{\beta}[Lt^{-2}]^{\gamma}. \tag{8}$$

Очевидно, что у одноименных величин показатель в левой части (8) должен быть равен показателю в правой части, поэтому

$$L^1 = L^{\alpha+2\beta+\gamma}, \; t^{-1} = t^{-\beta-2\gamma}, \tag{9}$$

или:

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 1, \; -\beta - 2\gamma = -1. \tag{10}$$

Как видно, уравнений в выражении (10) всего два, а неизвестных показателей три. Значит, обычным приемом, типичным для метода анализа размерностей, эта задача не решается.

Для решения задач такого типа, когда число аргументов в общей зависимости больше трех, нами предложено из рассмотренных аргументов формировать новые, группируя их в виде частного или произведения (каждый раз при этом число аргументов в общей функциональной зависимости уменьшается на единицу) [1, 9, 10, 11, 12].

Продемонстрируем этот прием на примере 1.

Сформируем параметр вида δg. Исходим из того, что в большинстве практических случаев, в частности для воды и ее растворов, наблюдается закономерность: чем больше толщина стекающей пленки, тем больше ее скорость (при очень малой толщине пленки порядка 0,1 мм в ней наблюдается ламинарный режим), а также из того, что движущей силой является сила тяжести. Общая функциональная зависимость будет такой:

$$U = f(\delta g, \nu). \tag{11}$$

Применяя к этой зависимости стандартную схему, получим, что показатель степени у ν равен нулю, т.е. вязкость вообще не влияет на скорость, что противоречит опыту. Поэтому, параметр δg исключается из рассмотрения. Заметим, что в данном случае величина δg имеет размерность квадрата скорости.

Рассмотрим комбинированный параметр в виде δ / ν и общую зависимость для скорости

$$U = f\left(\frac{\delta}{\nu}, g\right). \tag{12}$$

Как и в предыдущем случае, при использовании стандартной схемы величина g выбывает из рассмотрения (в зависимости $U=(\delta/\nu)^{\alpha} g^{\beta}$ формальное применение метода анализа размерности дает β=0, что противоречит физическому смыслу явления). Заметим, что и в данном случае частное δ/ν имеет размерность скорости в минус первой степени.

Образуем параметр, характеризующий отношение силы тяжести (движущей силы) и силы сопротивления; он будет иметь вид g/ν, тогда:

$$U=f\left(\delta,\frac{g}{\nu}\right). \tag{13}$$

Применяя стандартную схему, получаем последовательно:

$$m^0 L\, t^{-1}=L^a(L^{-1}t^{-1})^{\beta}.$$

Система в данном случае будет определенной и будет иметь вид:

$$\alpha-\beta=1,\quad \beta=1.$$

Окончательно α =2, β =1, и получаем ответ в виде:

$$U=C\cdot\frac{\delta^2 g}{\nu}. \tag{14}$$

Таким образом, выбрав новый комбинированный параметр, получим определенную систему и решение поставленной задачи.

Если комбинированный параметр выбрать в виде ν/g, то общее решение будет иметь вид:

$$U=f\left(\delta,\frac{\nu}{g}\right). \tag{15}$$

Применение той же стандартной схемы дает:

$$m^0 Lt^{-1}=L^a(Lt)^{\beta}.$$

Система уравнений будет иметь вид:

$$\alpha+\beta=1,\quad \beta=-1,$$

окончательно α =2, β = -1, и получаем ответ в том же виде, что и ранее:

$$U=C\cdot\frac{\delta^2 g}{\nu}.$$

Если толщина стекающей пленки мала, а коэффициент поверхностного натяжения σ влияет на процесс стекания, то он должен входить в правую часть общей зависимости для скорости совместно с плотностью (чтобы масса сократилась, т.к. в левой части она отсутствует).

Общее выражение для скорости будет иметь вид:

$$U=f(\delta,g,\nu,\sigma,\rho). \tag{16}$$

Составляя из аргументов g, ν, σ, ρ один комбинированный параметр, получим его в виде $\frac{g\sigma}{\nu\rho}$, и выражение (16) преобразуется в следующий вид:

$$U=f\left(\delta,\frac{g\sigma}{\nu\rho}\right). \tag{17}$$

После применения стандартной схемы получаем окончательное выражение для скорости:

$$U=C\cdot\sqrt[3]{\frac{\delta g\sigma}{\nu\rho}}. \tag{18}$$

Малая толщина стекающей пленки может привести к появлению капиллярных волн на ее поверхности и при этом скорость распространения малых возмущений (волн) будет складываться из скорости движения пленки $U_{пл}$ и скорости распространения волн $U_{волн}$.

Скорость распространения возмущений U представится так:

$$U = U_{пл} + U_{волн}.$$

В этом случае при волновом движении возвращающей силой является сила поверхностного натяжения, а за линейный параметр можно принять как толщину пленки, так и длину образующихся волн. При толщине пленки в доли миллиметра можно предположить, что толщина пленки и длина волны будут величинами одного порядка.

Скорость распространения капиллярных волн будет определяться зависимостью:

$$U_{волн} = f(\delta, \sigma, \rho).$$

Применяя стандартную схему, получим:

$$U_{волн} = C\sqrt{\frac{\sigma}{\delta\rho}}, \tag{19}$$

далее определим порядок величин амплитуды A капиллярных волн, вызванных случайными факторами или трением о воздух (сила трения порядка $0{,}1 \cdot \rho_в U^2 / 2$ на единицу площади, где U – скорость стекающей пленки, $\rho_в$ – плотность воздуха).

Общее выражение для амплитуды будет иметь вид

$$A = f(F, \rho, \sigma),$$

где A – амплитуда волны, F – возмущающая сила, ρ – плотность жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Применяя стандартную схему, получим окончательный результат в виде

$$A = C\frac{F}{\sigma}. \tag{20}$$

Процесс подбора комбинированного параметра показателен на следующем, также известном примере [1, 5].

Пример 2

Методом анализа размерностей вывести зависимость для высоты подъема воды в открытой стеклянной трубке, опущенной в жидкость.

Решение. Из опытов известно, что чем меньше диаметр трубки, тем выше поднимается в ней жидкость – таким образом, одним из главных параметров в искомой зависимости является радиус трубки r.

Подъем жидкости происходит из-за силы поверхностного натяжения, поэтому коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ также должен войти в зависимость. Поскольку на жидкость, кроме силы поверхностного натяжения, действует сила тяжести, и высота подъема зависит от веса столба жидкости, то в число аргументов необходимо добавить ускорение силы тяжести g. Таким образом, предварительно установлен вид общей зависимости для высоты подъема жидкости:

$$h = f(r, \sigma, g, \ldots), \tag{21}$$

в правую часть которой входит величина σ, имеющая размерность [mt^{-2}] и поэтому содержащая массу. Так как в левую часть (21) масса не входит, то в аргументы правой части для исключения массы необходимо включить величину, содержащую массу; самым простым аргументом в данном случае является плотность ρ. Такой путь рассуждений очевиден и часто применяется, особенно по отношению к массе [13, 14, 15].

Общая зависимость с учетом последнего замечания будет иметь вид $h = f(r, \sigma / \rho, g)$.

С учетом того, что масса исключена, необходимо иметь в виду, что параметров в общей зависимости может быть не больше двух.

Сформируем комбинированный параметр вида $\sigma / \rho g$, и зависимость примет вид

$$h = f\left(r, \frac{\sigma}{\rho g}\right).$$

Размерность параметра $\sigma / \rho g$ равна L, и поэтому последний вид зависимости нас не устраивает.

Параметр типа $\sigma g / \rho$ и общая зависимость

$$h = f\left(\frac{\sigma g}{\rho}, r\right)$$

приводят к тому, что при решении системы уравнений показатель у этого параметра получается нулевым.

В случае выбора параметров $\sigma / \rho r$ и g зависимость получается такой:

$$h = f\left(\frac{\sigma}{\rho r}, g\right).$$

Применяя стандартную схему, получим

$$h = C\frac{\sigma}{\rho r g}.$$

Рассмотрим еще один прием устранения трудностей при применении метода анализа размерностей. Как и раньше, сделаем это на конкретных примерах [16, 17].

С помощью метода анализа размерностей задача о скорости истечения жидкости через малое отверстие в дне сосуда под действием силы тяжести решается просто, при этом решение имеет вид

$$V = C\sqrt{gH}.$$

Рассмотрим усложнение этой задачи: сосуд изолирован сверху от атмосферы (накрыт герметичной крышкой), и на свободной поверхности жидкости создано давление $p_1 > p_{am}$.

В этом случае общая функциональная зависимость может быть представлена так:

$$V = f(g, H, p, \rho),$$

где g – ускорение свободного падения; H – глубина жидкости в сосуде; ρ – плотность жидкости; p – давление на свободной поверхности.

В данном случае число аргументов, равное четырем, больше, чем возможное число уравнений. Трудности возникают из-за одновременного вхождения в функциональную зависимость давления и характеристики массовых сил g.

Решение в данном случае может быть получено, если представить зависимость для скорости в виде суммы (на самом деле, сумма избыточного и создаваемого слоем жидкости напоров стоит под одним корнем, и метод анализа размерностей, несмотря на это разногласие с аналитическим решением, уравнивает все значением произвольных постоянных C_1 и C_2, стоящих перед корнями):

$$V = f_1(g, H) + f_2(p, \rho).$$

Или, после применения стандартной схемы,

$$V = C_1\sqrt{gH} + C_2\sqrt{\frac{p - p_{am}}{\rho}}.$$

Поэтому можно сделать вывод, что в некоторых случаях невозможно получить решение методом анализа размерностей в виде одной степенной зависимости, и результат необходимо представить в виде суммы двух (или более) слагаемых.

Последнее утверждение не является абсолютно доказанным и требует дополнительного анализа.

Приведем еще один пример, когда метод анализа размерностей указывает на результат в виде суммы.

При определении давления в пузырьке газа, находящегося в жидкости, обусловленного только поверхностным натяжением жидкости общая, функциональная зависимость имеет вид

$$p = f(r, \sigma), \tag{22}$$

где r – радиус пузырька; σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

После применения стандартной схемы получаем:

$$p = C\frac{\sigma}{r}.$$

Если в зависимость (22) формально ввести ускорение g (или любое ускорение), сам метод исключит его. Иначе говоря, если представить давление в виде степенной зависимости

$$p = C \cdot r^{\alpha}\sigma^{\beta}g^{\gamma},$$

то после применения стандартной схемы получаем, что γ =0.

Этот не совсем очевидный с физической точки зрения факт может быть истолкован как необходимость представления конечного результата в виде суммы, например:

$$p = C\frac{\sigma}{r} + \rho gh,$$

т.е. учитывается внешнее избыточное гидростатическое давление.

Заключение

В заключении нами предполагаются следующие ограничения и рекомендации к выбору комбинированного параметра.

1) комбинированный параметр представляет отношение или произведение двух или большего числа аргументов и обязательно имеет размерность;
2) комбинированный параметр часто соответствует отношению сил, действующих в данном физическом процессе;
3) если размерность комбинированного параметра совпадает с размерностью искомой величины или любой ее степени, то такой параметр исключается из рассмотрения.

Также предлагается к применению два признака, указывающих на то, что конечный результат представляется в виде суммы.

1. Если к числу аргументов в общей функциональной зависимости прибавляется еще один, и его размерность совпадает с размерностью комплекса ранее заданных аргументов, то результат представим в виде суммы.
   Например, размерность p в выражении (22) равна размерности произведения ρgH, т.е. частное $p / \rho gH$ не имеет размерности.

2. Если сам метод при его использовании исключает какой-либо составной параметр, то, возможно, необходимо представить результат в виде суммы, во второе слагаемое которой исключенный параметр входит как аргумент.

Литература

1. Калякин А.М. Физические свойства жидкостей. Метод анализа размерностей. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2006. 63 с.
2. Хантли Г. Анализ размерностей. М.: Мир, 1970. 174 с.
3. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. Москва: Высшая школа, 1973. 296 с.
4. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
5. Коган Б.Ю. Размерность физических величин. М.: Наука, 1967. 72 с.
6. Михалкин В.С., Борухович А.С. Построение математических моделей физических процессов и явлений на основе анализа размерностей // Физическое образование в вузах. 1998. Т. 4. №4. С. 89-92.
7. Трубецков Д.И. Две лекции. Анализ размерностей или райская жизнь в физике // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20. №1. С. 16-32.
8. Бриджмен П. Анализ размерностей. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 148 с.
9. Калякин А.М., Чеснокова Е.В., Сауткина Т.Н., Береда Н.Н., Захарикова А.О. Примеры применения метода анализа размерностей к решению гидравлических задач // Сборник научных трудов Sworld по материалам международной научно-практической конференции. 2012. Т. 26. №2. С. 66-67.
10. Калякин А.М., Чеснокова Е.В., Сауткина Т.Н., Богатов Р.И. Один из специальных приемов при применении метода анализа размерностей // Сборник научных трудов Sworld по материалам международной научно-практической конференции. 2012. Т. 29. №3. С. 78-79.
11. Калякин А.М., Чеснокова Е.В., Сауткина Т.Н., Богатов Р.И. Некоторые специальные приемы применения метода анализа размерностей // Материалы VIII международной научно-практической конференции «Научная индустрия европейского континента – 2012». Часть 25. Прага, 2012. С. 50-53.
12. Калякин А.М., Калякин А.В., Чеснокова Е.В. Обощение метода анализа размерностей при решении некоторых задач // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений: межвуз. науч. сб. Саратов: СГТУ, 2011. С. 56-59.
13. Кирпичев М. В. Анализ размерностей // Известия АН СССР. Отд. техн. наук. 1953. №9. С. 21-25.
14. Drobot S. About dimensional analysis // Zat. Mat. 1954. №14. Pp. 84-99.
15. Kasprzak W., Lysik B. Dimensional Analysis. Warsaw: WNT, 1988. 220 p.
16. Furmanik K., Nowakowski Z. Possibilities of dimensional analysis for a wear model – experimental verification of active layout of rail vehicle wheel bands // Scientific Bulletin of Technical University of Cracow. 1996. No. 10. Pp. 35-46.
17. Buckingham E. On physically similar systems // Physical Reviews. 1914. Vol. IV. Pp. 345-376.

** Елена Вадимовна Чеснокова, г. Саратов, Россия*

Тел. раб.: +7(8452)99-89-14; эл. почта: adamas.elena@gmail.com

doi: 10.5862/MCE.37.6

Addition to the method of dimensional analysis in hydraulic problems

A.M. Kalyakin;
E.V. Chesnokova,
Saratov State Technical University of Yuri Gagarin, Saratov, Russia
+7(8452)99-89-14; e-mail: adamas.elena@gmail.com

Key words

method of dimensional analysis; the functional dependence of the thickness of the film flowing down; the speed of the surface waves; the combined option; the correlation of forces; the dimension of the parameter

Abstract

The modern engineering design, structures, and especially machines running of new technologies set to engineers the problems that require immediate solution. Therefore, the importance of the method of dimensional analysis as a tool for ordinary engineer is increasing, allows developers to get quick and quite simple solution of even very complex tasks.

The method of dimensional analysis is being applied to almost any field of physics and engineering, but it is especially effective at solving problems of mechanics and applied mechanics – hydraulics, fluid mechanics, structural mechanics, etc.

Until now the main obstacle to the application of the method of dimensional analysis in its classic form was a multifactorial problem (with many arguments), the solution of which was rather difficult and sometimes impossible. In order to overcome these difficulties, the authors of this study proposed a simple method – application of the combined option avoiding these difficulties.

The main result of the study is a simple algorithm which application will make it possible to solve a large class of previously unsolvable problems.

References

1. Kalyakin A.M. *Fizicheskie svoistva zhidkostey. Metod analiza razmernostey* [The physical properties of fluids. The method of dimensional analysis]. Saratov: SSTU, 2006. 63 p. (rus)
2. Khantly G. *Analiz razmernostey* [Dimensional analysis]. Moscow: Mir, 1970. 174 p. (rus)
3. Guhman A.A. *Vvedeniye v teoriyu podobiya* [Introduction to the theory of similarity], Moscow: Vysshaya shkola, 1973. 296 p. (rus)
4. Sedov L.I. *Metody podobiya I razmernosti v mekhanike* [Similarity and dimensional methods in mechanics]. Moscow: Nauka, 1972. 440 p. (rus)
5. Kogan B.Yu. *Razmernost fizicheskikh velichin* [The dimension of physical quantities]. Moscow: Nauka 1967. 72 p. (rus).
6. Mihalkin V.S., Boruhovich A.S. *Fizicheskoye obrazovaniye v vuzakh*. 1998. Vol. 4. No.4. Pp. 89–92. (rus).
7. Trubetskov D.I. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika. 2012. Vol. 20. No.1. Pp. 16–32. (rus).
8. Bridzhmen P. Analiz razmernostey [Dimensional analysis]. Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2001. 148 p. (rus).
9. Kalyakin A.M., Chesnokova E.V., Sautkina T.N., Bereda N.N., Zaharikova A.O. *Sbornik nauchnykh trudov Sworld po materialam mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Sworld collection of scientific papers based on international scientific and practical conference]. 2012. Vol. 26. No.2. Pp. 66–67. (rus).
10. Kalyakin A.M., Chesnokova E.V., Sautkina T.N., Bogatov R.I. *Sbornik nauchnykh trudov Sworld po materialam mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Sworld collection of scientific papers based on international scientific and practical conference]. 2012. Vol. 29. No.3. Pp. 78–79. (rus).
11. Kalyakin A.M., Chesnokova E.V., Sautkina T.N., Bogatov R.I. *Materialy VIII mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Nauchnaya industriya yevropeyskogo kontinenta – 2012»* [Proceedings of the VIII International Scientific Conference "Scientific Industry of the European continent – 2012"]. Vol. 25. Prague, 2012. Pp. 50–53. (rus).

12. Kalyakin A.M., Kalyakin A.V., Chesnokova E.V. *Sovershenstvovaniye metodov gidravlicheskikh raschetov vodopropusknykh i ochistnykh sooruzheniy: mezhvuz. nauch. sb* [Improvement of methods for hydraulic calculations culverts and water treatment facilities: interuniversity collected articles]. Saratov: SGTU, 2011. Pp. 56–59. (rus).
13. Kirpichev M.V. *Izvestiya AN SSSR. Otd. tekhn. nauk*. 1953. No.9. Pp. 21–25. (rus)
14. Drobot S. About dimensional analysis. *Zat. Mat*. 1954. No.14. Pp. 84–99.
15. Kasprzak W., Lysik B. *Dimensional Analysis*. Warsaw: WNT. 1988. 220 p.
16. Furmanik K., Nowakowski Z. Possibilities of dimensional analysis for a wear model – experimental verification of active layout of rail vehicle wheel bands. *Scientific Bulletin of Technical University of Cracow*. 1996. No.10. Pp. 35–46.
17. Buckingham E. On physically similar systems. *Physical Reviews*. 1914. Vol. IV. Pp. 345–376.

Full text of this article in Russian: pp. 41–47