Министерство образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.Ю. СИЛКИНА

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ И УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ

МОДЕЛИ КОНФЛИКТОВ, НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ, РИСКА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГПУ
2003

УДК 519.816

Силкина Г.Ю. Теория принятия решений и управление рисками. Модели конфликтов, неопределенности, риска.: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 72 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теория принятия решений и управления рисками» направления бакалаврской подготовки по специальности «Математические методы в экономике».

Изложены основы теории принятия решений в условиях конфликта, неопределенности, риска. Приведено большое количество примеров, задач для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов четвертого курса факультета экономики и менеджмента, изучающих дисциплину «Теория принятия решений и управление рисками» в рамках бакалаврской подготовки. Может быть использовано при проведении практических занятий, выполнении курсовых и дипломных работ студентами экономических специальностей Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Табл. 26. Библиогр.: 12 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Задача принятия решений (ЗПР) – одна из самых распространенных в любой предметной области. Ее решение сводится к выбору одной или нескольких альтернатив из имеющихся вариантов.

Формализовано ЗПР описывается кортежем вида

$$\left\langle L, A, K, X, F, G, D, T \,\middle|\, A^* \right\rangle, \tag{1}$$

где L – лицо, принимающее решение (ЛПР), A – множество возможных альтернативных вариантов, K – множество возможных критериев выбора, X – множество методов измерения предпочтений ЛПР (например, использование различных шкал), F – отображение множества возможных альтернатив в множество критериальных оценок (исходов), G – система предпочтений ЛПР, D – решающее правило, отражающее систему предпочтений ЛПР, T – постановка задачи (например, выбрать лучшую альтернативу или упорядочить весь набор альтернатив), A^* – искомое решение (точечное или множественное).

Любой из элементов формализованного описания (1) может служить классификационным признаком принятия решений, однако, традиционно ЗПР классифицируются по условиям принятия решений. Именно эти условия, характеризуя количество и качество доступной информации, определяют выбор метода решения.

Как правило, большинство оптимизационных задач формулируется и решается в условиях наличия полной информации; их можно отнести к совокупности задач с полной информацией или строго детерминированным задачам. Однако, строго детерминированные ситуации являются скорее исключением, чем правилом – адекватное реальности описание проблемы практически всегда содержит различного типа случайные и неопределенные факторы, отражающие то естественное положение, в котором находится принимающий решение: любое его знание относительно и неточно. Ограниченность или неточность информации о ситуации, в которой приходится принимать решение, приводит к двум новым видам задач: принятие решений в условиях риска; принятие решений в условиях неопределенности.

В общем случае условия принятия решений разделяются на условия определенности, риска, неопределенности и конфликта.

Условия определенности имеют место в случае, когда в процессе решения не возникают неопределенные и случайные факторы, а последствия принятого решения определены однозначно, т.е. каждому решению соответствует строго определенный результат. В условиях определенности ЗПР решается методами математического программирования.

Условия риска возникают тогда, когда при принятии решений необходимо учитывать случайные факторы с априори известными для них законами распределения вероятностей (их называют также вероятностно-определенными условиями). Задача выбора решений в условиях риска сводится к задаче принятия статистических решений при простых или сложных альтернативных гипотезах. Для решения этих задач применяются также методы теории одномерной или многомерной полезности.

Условия неопределенности возникают в ситуации, когда известны все последствия всевозможных решений, но не известны их вероятности, т.е. выбор любой альтернативы может привести к одному из нескольких исходов и отсутствует даже стохастическая зависимость между альтернативами и исходами. ЗПР в условиях неопределенности моделируется игрой с природой и ее решение находится по соответствующим критериях.

Условия конфликта определяются тем, что каждому решению соответствует результат, зависящий от поведения противодействующей стороны или совокупности противодействующих сторон. При этом, противодействующие стороны могут участвовать в конфликте как независимо одна от другой, так и в составе коалиций. Сам конфликт бывает либо антагонистическим, либо с непротивоположными интересами. В последнем случае стороны, участвующие в конфликте, могут принимать решения в зависимости от схемы обмена информацией об их возможных действиях. ЗПР в условиях конфликта формулируется как задача теории стратегических, классических или динамических игр и решается методами этой теории.

Собственно выбор решения A^* является заключительным и наиболее ответственным этапом процесса принятия решений. В реальных ЗПР к этапу выбора все еще сохраняется большая неопределенность информации, обусловленная наличием многих ситуаций и целей. Поэтому сразу выбрать лучшее решение из множества альтернатив невозможно. В связи с этим используется принцип последовательного уменьшения неопределенности, заключающийся в последовательном сужении множества альтернатив.

Различают три последовательные стадии такого сужения. На первом этапе исходное множество альтернатив A сужается до множества допустимых альтернатив $A_Д \subseteq A$. Эта процедура может выполняться путем логического мышления или формально, в зависимости от степени формализации доступной информации. Зачастую этот процесс происходит еще на этапе формирования исходного множества альтернатив.

На второй стадии множество допустимых решений сокращается до множества эффективных (недоминируемых) альтернатив: $A_Э \subseteq A_Д$. Эти альтернативы еще не являются лучшими, но они заведомо не являются худшими, и оптимальное решение необходимо находится среди них.

На третьем этапе строится собственно $A^* \subseteq A_Э$. Весь процесс выбора символически записывается в виде цепочки включений $A^* \subseteq A_Э \subseteq A_Д \subseteq A$.

2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА

2.1. Основные понятия и положения теории стратегических игр

В природе и обществе часто встречаются явления, в которых отдельные участники имеют несовпадающие интересы и располагают различными путями достижения своих целей. Столкновение несовпадающих интересов участников приводит в возникновению конфликтных ситуаций. Необходимость анализа таких ситуаций привела к созданию теории игр, задачей которой является выработка рекомендаций по рациональному образу действия участников конфликта.

Развитие событий в конфликтной ситуации зависит от решений, принимаемых каждой из сторон, поэтому разумное поведение любого участника конфликта должно определяться с учетом возможных действий всех его участников. Конфликт может возникнуть из различия целей, которые отражают не только несовпадающие интересы различных участников, но и многосторонние интересы одного и того же лица. Единственная общность, которая объединяет все конфликты, независимо от их физической и социальной природы, состоит в столкновении несовпадающих интересов нескольких сторон.

Содержательно под конфликтом понимается всякое явление, применительно к которому можно говорить о том, кто и как в этом явлении участвует, каковы могут быть у этого явления исходы, кто в этих исходах заинтересован, в чем эта заинтересованность состоит. Формализация содержательного описания конфликта представляет собой его математическую модель – игру.

Участники конфликта называются игроками; множество игроков обозначается $I = \{1,2,\ldots,n\}$. Стратегией игрока $i \in I$ называется совокупность правил, однозначно определяющих последовательность его действий при любом развитии конфликта; стратегия игрока обозначается s_i, совокупность стратегий – S_i. Процесс игры состоит в выборе каждым из игроков $i \in I$ одной из своих стратегий $s_i \in S_i$, в результате чего складывается игровая ситуация $s = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$; совокупность всех игровых ситуаций обозначается S.

Обычно предполагают, что результат игры может быть количественно оценен: если в игре сложилась ситуация $s = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ то игрок $i \in I$ получает выигрыш $H_i(s)$, который зависит не только от его собственной стратегии, но и от стратегий всех остальных игроков, т.е. от игровой ситуации в целом. Кортеж $\Gamma = \left\langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \right\rangle$ представляет собой стратегическую игру (игру в стратегической форме).

Игровая ситуация $s = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ называется приемлемой для игрока $i \in I$, если этот игрок, изменяя в ситуации s свою индивидуальную стратегию при неизменных стратегиях остальных игроков, не может увеличить своего выигрыша. Формально приемлемые ситуации допускают следующее описание. Пусть игровые ситуации $s = \{s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n\}$, $s' = \{s_1, s_2, \ldots, s_i', \ldots, s_n\}$ разнятся лишь индивидуальной стратегией i-го игрока. Ситуация s приемлема для игрока $i \in I$, если $H_i(s') \le H_i(s)$ $\forall s'$ указанного вида. Термин «приемлемая» объясняется тем, что если в некоторой ситуации $s \in S$ для i-го игрока найдется такая индивидуальная стратегия s_i', что $H_i(s') > H_i(s)$, то данный игрок, видя по каким-то признакам, что дело идет к образованию ситуации s (например, s зафиксирована некоторым договором) может в последний момент изменить свою стратегию и увеличить выигрыш. В этом смысле ситуация s считается для i-го игрока неприемлемой.

Игровая ситуация, приемлемая для всех игроков, называется ситуацией равновесия**.** Из определения следует, что в ситуациях равновесия и только в них ни один игрок не заинтересован в отклонении от своей стратегии. В частности, если ситуация равновесия оказывается предметом некоторого договора между игроками, ни один из них не будет заинтересован в нарушении своих обязательств. Напротив, если в договоре зафиксирована неравновесная ситуация, то найдется хотя бы один игрок, который будет заинтересован в нарушении этого договора. Составляющие ситуацию равновесия индивидуальные стратегии игроков называются оптимальными стратегиями**.**

Понятие равновесной ситуации является основным в теории игр. Равновесие замечательно тем, что ни один из игроков не имеет побудительных причин отклоняться от своей оптимальной стратегии, поскольку большего выигрыша, действуя в одиночку, он гарантировать себе не может. Таким образом, понятие равновесия ассоциируется с устойчивой ситуацией в игре. Отыскав свою оптимальную стратегию, каждый из игроков будет придерживаться ее в дальнейшем.

Игра *Г* называется антагонистической, если число игроков равно двум и значения функций выигрыша этих игроков в каждой ситуации равны по величине и противоположны по знаку. Таким образом, в антагонистической игре, где $I = \left\{ 1,2 \right\}$, выполняется $H_2(s) = -H_1(s), \quad s \in S$, $H_2(s) + H_1(s) = 0$, т.е. антагонистическая игра является игрой с нулевой суммой.

Матричной называется антагонистическая игра, в которой каждый из игроков имеет конечное число стратегий; при этом фиксированная стратегия каждого из игроков называется его чистой стратегией. Название «матричные игры» обусловливается следующей возможностью описания игр такого сорта. Пусть первый игрок имеет m чистых стратегий, второй – n чистых стратегий. Каждую чистую стратегию игроков будем ассоциировать с ее номером. Составим прямоугольную таблицу, в которой строки соответствуют стратегиям первого игрока, столбцы – стратегиям второго, а клетки таблицы, стоящие на пересечении строк и столбцов, соответствуют ситуациям игры. Если поместить в каждую клетку таблицы выигрыш первого игрока в соответствующей ситуации, то получим описание игры в виде матрицы, которая называется матрицей игры (матрицей выигрышей, платежной матрицей):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Процесс «игры в матричную игру» удобно представить себе следующим образом: задается матрица *A*; первый игрок выбирает некоторую строку этой матрицы, второй игрок – некоторый столбец. Эти выборы осуществляются игроками независимо друг от друга. После того, как выбор сделан, первый игрок получает выигрыш, равный числу, стоящему на пересечении выбранных строки и столбца (естественно, если это число отрицательное, речь идет о проигрыше первого игрока). Задача первого игрока – максимизировать свой выигрыш; задача второго игрока – максимизировать свой выигрыш – сводится к минимизации его проигрыша, что, в свою очередь, вследствие того, что выигрыш одного из игроков равен проигрышу второго, сводится к минимизации выигрыша первого. Таким образом, игроки решают прямо противоположные задачи: первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, второй – минимизировать его.

Обычно выбор критерия, по которому находится оптимальное решение, в значительной мере определяется имеющейся информацией. Матричные игры представляют собой предельный случай полного отсутствия информации о действиях второго участника конфликта (т.е. каждый из игроков знает возможные стратегии второго и выигрыш, который он получит в соответствующей ситуации, но не знает, какую именно стратегию выберет противник). Ясно, что в такой ситуации каждый из игроков должен рассчитывать на худшее.

Пусть игра двух лиц с нулевой суммой задается платежной матрицей A. Выбирая свою i-ю чистую стратегию, первый игрок может рассчитывать на выигрыш в размере $\alpha_i = \underbrace{\min}_{j=1,2,\ldots,n} a_{ij}$. Естественно предположить, что он выберет ту из своих чистых стратегий, на которой достигается $\alpha = \underbrace{\max}_{i=1,2,\ldots,m} \underbrace{\min}_{j=1,2,\ldots,n} a_{ij}$.

Число α называется нижней чистой ценой игры (максимином). Содержательно оно представляет собой минимальный выигрыш, который может гарантировать себе первый игрок при любых действиях второго игрока. Чистая стратегия i^*, на которой достигается нижняя чистая цена игры, называется максиминной стратегией первого игрока. Аналогично определяются верхняя чистая цена игры (минимакс): $\beta = \underbrace{\min}_{j=1,2,\ldots,n} \underbrace{\max}_{i=1,2,\ldots,m} a_{ij}$ и минимаксная стратегия второго игрока j^*. Очевидно, что в любой матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхней чистой цены игры: $\alpha \le \beta$. В том случае, когда $\alpha = \beta$, элемент $a_{i^*j^*}$ называют седловым элементом платежной матрицы, число $v = \alpha = \beta$ – чистой ценой игры, а игровую ситуацию (i^*, j^*) – ситуацией равновесия в чистых стратегиях. Таким образом, оптимальными чистыми стратегиями игроков являются те из них, на которых достигается чистая цена игры.

Игра имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях тогда и только тогда, когда в платежной матрице имеется седловой элемент, одновременно являющийся минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. Ясно, что такой элемент существует далеко не всегда: существование седлового элемента в платежной матрице – не правило, а скорее, исключение. Как правило, седлового элемента не существует и, как следствие, не существует и ситуации равновесия в чистых стратегиях.

Действительно, если нижняя цена игры строго меньше верхней, т.е. $\underbrace{\max}_{i}\underbrace{\min}_{j} a_{ij} < \underbrace{\min}_{j}\underbrace{\max}_{i} a_{ij}$, то первый игрок может обеспечить себе выигрыш $\underbrace{\max}_{i}\underbrace{\min}_{j} a_{ij}$, а второй игрок может не дать ему больше, чем $\underbrace{\min}_{j}\underbrace{\max}_{i} a_{ij}$. Вопрос о разделе между игроками разности $\left(\underbrace{\min}_{j}\underbrace{\max}_{i} a_{ij} - \underbrace{\max}_{i}\underbrace{\min}_{j} a_{ij}\right)$, которая в данном случае положительна, остается открытым. Поэтому естественно, чтобы игроки в таких ситуациях искали дополнительные стратегические возможности для уверенного получения в свою пользу возможно большей доли этой разности. Оказывается, что для этого игрокам целесообразно выбирать свои стратегии случайно, т.е. использовать смешанные стратегии.

Смешанной стратегией игрока называется вектор, каждая компонента которого показывает относительную частоту использования им соответствующей чистой стратегии. Так, если первый игрок имеет m чистых стратегий, то его смешанная стратегия представляет собой вектор

$X = \{x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m\}, \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$ координаты которого суть относительные частоты использования первым игроком его чистых стратегий. Аналогично записывается смешанная стратегия второго игрока:

$Y = \{y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n\}, \quad y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$. Пара (X, Y) называется игровой ситуацией в смешанных стратегиях.

Поскольку игроки выбирают свои чистые стратегии случайно и независимо друг от друга, игра приобретает случайный характер; случайной становится и величина выигрыша (проигрыша). При переходе к смешанным стратегиям каждая обычная ситуация (i, j) (в чистых стратегиях) является случайным событием и реализуется с вероятностью $x_i\, y_j$. Поскольку в этой ситуации первый игрок получает выигрыш a_{ij}, средняя величина выигрыша (проигрыша) – математическое ожидание – оказывается функцией от смешанных стратегий игроков и задается равенством: $H(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i y_j$; эта функция показывает выигрыш первого игрока в ситуации $\left(X,Y\right)$ и называется платежной функцией игры. Функция игры может быть записана в векторно-матричном виде: $H(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}x_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j=\sum_{i=1}^{m}x_i A_i Y^T = XAY^T$.

Принятие решения в смешанных стратегиях основано на тех же принципах максимина и минимакса, что и в случае чистых стратегиях. Единственное отличие: первый игрок стремится найти такую смешанную стратегию X^*, чтобы при полном отсутствии информации максимизировать ожидаемый выигрыш; при этом его максимальный гарантированный выигрыш равен $\underbrace{\max}_{X}\underbrace{\min}_{Y}XAY^T$; этот максимин он получает обязательно, как бы ни складывались обстоятельства. Второй игрок стремится минимизировать ожидаемый проигрыш, т.е. отыскивает смешанную стратегию Y^*, на которой достигается $\underbrace{\min}_{Y}\underbrace{\max}_{X}XAY^T$; больше этого минимакса первому игроку он заведомо не отдаст. И если в чистых стратегиях крайне редко существует ситуация, когда гарантированный выигрыш первого игрока равен гарантированному проигрышу второго, то в смешанных стратегиях такая ситуация существует всегда. Основная теорема теории игр гласит: каждая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях, т.е. существуют смешанные стратегии (X^*,Y^*), такие, что $H(X,Y^*)\le H(X^*,Y^*)\le H(X^*,Y)$.

Ситуация (X^*,Y^*) называется ситуацией равновесия в смешанных стратегиях (седловой точкой функции игры), стратегии X^*, Y^* – оптимальными смешанными стратегиями игроков, число $v=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i^* y_j^* = H(X^*,Y^*)$ – ценой игры в смешанных стратегиях или просто ценой игры. Совокупность оптимальных стратегий и цены игры составляет решение игры. Решение матричной игры находится ее сведением к задаче линейного программирования, размерность которой может быть понижена выявлением и исключением доминируемых стратегий игроков.

Рассматривая стратегии первого игрока, сравниваем элементы строк платежной матрицы: чистая стратегия i первого игрока доминирует его стратегию k , если $\forall\, j = \overline{1,n}\colon a_{ij} \geq a_{kj}$, $\exists\, j \in \overline{1,n}\colon a_{ij} > a_{kj}$. Поскольку второй игрок заинтересован в уменьшении проигрыша, доминирующим будет столбец с наименьшими элементами: стратегия j второго игрока доминирует его стратегию r , если $\forall\, i = \overline{1,m}\colon a_{ij} \leq a_{ir}$, $\exists i \in \overline{1,n}\colon a_{ij} < a_{ir}$. В матричной игре доминируемые стратегии входят в оптимальные смешанные стратегии с нулевыми вероятностями и могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения, что не повлияет на решение игры.

Алгоритм решения матричной игры состоит из следующих этапов.

1. Находим нижнюю и верхнюю цену игры и проверяем платежную матрицу на наличие седлового элемента. Если платежная матрица A имеет седловой элемент, то оптимальные (чистые) стратегии игроков определяются ее координатами (i^*, j^*) седлового элемента, а цена игры v – собственно седловым элементом матрицы $v = a_{i^* j^*}$. Если же седлового элемента в платежной матрице не существует, игра имеет равновесие только в смешанных стратегиях.

2. Выявляем доминируемые стратегии игроков. Если игроки имеют доминируемые стратегии, их следует исключить из дальнейшего рассмотрения, понизив тем самым размерность задачи. Тем самым осуществляется сужение множества допустимых альтернатив (стратегий игроков) до множества эффективных (недоминируемых) альтернатив.

• Находим оптимальные смешанные стратегии игроков и цену игры решением пары симметричных взаимно двойственных задач линейного программирования.

Упражнения

1. На каждой из двух торговых баз ассортиментный минимум составляет один и тот же набор из n товаров. Каждая база должна поставить в свой магазин A и B соответственно только один из этих товаров. Магазины A и B конкурируют между собой. Один и тот же товар в обоих магазинах продается по одной цене, однако, товар, поставляемый в магазин B, более высокого качества. Если магазин A завезет с базы товар i-го вида, i=1,2,..., n, отличный от товара j-го вида, j=1,2,..., n, завезенного в магазин B, то товар i-го вида будет

пользоваться спросом и магазин *A* от его реализации получит прибыль c_i. Если в магазины *A* и *B* завезены товары одинакового вида, то товар будут покупать в магазине *B* и магазин *A* понесет убытки по транспортировке, хранению и возможной порче товара в размере d_i. Формализовать данную конфликтную ситуацию и построить матрицу игры для n=3.

2. Две компании *A* и *B* продают два вида лекарств против гриппа. Компания *A* рекламирует свою продукцию на радио (стратегия A_1), телевидении (A_2) и в газетах (A_3). Компания *B*, в дополнение к использованию радио (B_1), телевидения (B_2) и газет (B_3), рассылает также брошюры по почте (B_4). В зависимости от умения и интенсивности проведения рекламной кампании, каждая из компаний *A* и *B* может привлечь на свою сторону часть клиентов конкурирующей компании. Матрица $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 9 & -3 \\ 6 & 5 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}$ характеризует процент клиентов, привлеченных или потерянных компанией *A*. Найти оптимальные стратегии компаний *A* и *B*.

3. Фирма *A* производит сезонный товар, имеющий спрос в течение n единиц времени, который она может поставить на рынок в один из моментов времени i, i=1,2,..., n. Для конкурентной борьбы с фирмой *A* дочерняя фирма *B* концерна *D*, не заботясь о собственных интересах, производит аналогичный товар, который поступает на рынок в один из моментов j, j=1,2,..., n. Цель фирмы *B* – разорение фирмы *A*, после чего, используя капитал концерна *D*, она может легко наверстать упущенное. Единственным законным средством фирмы *B* в конкурентной борьбе является выбор момента поставки товара на рынок, т.к. понижение цены на поставляемый товар запрещено определенным соглашением. Для разорения фирмы *A* фирма *B* должна минимизировать ее доходы. Пусть технология выпуска товара такова, что чем дольше он находится в производстве и позже поступает на рынок, тем выше его качество, а реализуется товар только более высокого качества, т.к. цена на товары разного качества одинакова. Доход от продажи товара в единицу времени равен c д.е. Требуется формализовать данную конфликтную ситуацию и построить матрицу игры для n=4, c=6 д.е.; найти нижнюю и верхнюю цену игры, минимаксную и максиминную стратегии игроков, проверить наличие седловой точки.

4. Две фирмы производят два конкурирующих товара. Каждый товар в настоящее время контролирует 50% рынка. Улучшив качество товара, обе фирмы собираются развернуть рекламные кампании. Если они этого делать не будут, состояние рынка существенно не изменится. Однако, если какая-либо фирма будет более активно рекламировать свои товары, то другая фирма потеряет соответствующий процент своих потребителей. Исследования рынка показали, что 50% потенциальных потребителей получают информацию посредством телевидения, 30% – через газеты и 20% – посредством радио. Сформулируйте задачу в виде игры с нулевой суммой, укажите интервал значений, которому принадлежит цена игры. Может ли каждая фирма действовать с единственной чистой стратегией?

5. В конфликтной ситуации участвуют две стороны: A – налоговая инспекция, B – налогоплательщик с определенным годовым доходом, налог с которого составляет T д.е. У стороны A два возможных способа действия. Один из них состоит в контролировании дохода налогоплательщика B и взимании с него налога в размере T, если доход заявлен и соответствует действительности, и налога в размере T и штрафа в размере W, если заявленный в декларации доход меньше действительного или в случае сокрытия всего дохода; затраты стороны A на осуществление контроля равны R. Второй способ поведения стороны A – не контролировать доход налогоплательщика. У стороны B три стратегии поведения: заявить о действительном доходе; заявить доход, меньше действительного и заплатить налог $C<T$; скрыть доход. Требуется формализовать данную конфликтную ситуацию и построить матрицу игры.

6. Две фирмы A и B проводят рекламную кампанию на предполагаемых рынках сбыта в каждом из двух соседних городов. У фирмы A имеются средства, чтобы оплатить в двух городах в совокупности четыре способа проведения рекламной кампании, у фирмы B – средства на три способа. Победа каждой фирмы, для определенности, фирмы A, в каждом из городов оценивается в условных единицах (очках) следующим образом. Если у фирмы A больше способов рекламы, чем у конкурента, то в качестве выигрыша она получает число очков, равное числу способов рекламы, примененных конкурентом в данном городе с добавлением одного очка за победу. Если у фирмы A меньше способов рекламы, чем у конкурента, то она проигрывает число очков, равное числу способов рекламы, примененных ею в данном городе и минус одно очко за проигрыш. Если число способов рекламы в городе у обеих

фирм одинаково, то каждая из них получает ноль очков. В качестве общих выигрышей каждой из фирм принимаются суммы ее очков по двум городам в различных ситуациях. Требуется представить модель конфликта в виде матричной игры, составив матрицу выигрышей фирмы A.

7. Обувная фабрика планирует выпуск двух моделей обуви. Спрос на эти модели не определен, однако можно предположить, что он принимает одно из двух значений. В зависимости от состояния спроса прибыль фабрики различна и задается матрицей $A=\begin{pmatrix} 52 & 22 \\ 22 & 49 \end{pmatrix}$. Найти оптимальное соотношение между объемами выпуска каждой модели, при котором предприятию гарантирована средняя величина прибыли при любом состоянии спроса.

8. Менеджер фирмы часто путешествует между двумя городами. При этом есть возможность выбрать один из двух маршрутов: маршрут A представляет собой скоростное шоссе в четыре полосы, маршрут B − длинную, обдуваемую ветрами дорогу. Патрулирование дороги осуществляется ограниченным числом инспекторов. Если все инспекторы расположены на одном маршруте, менеджер с его желанием ездить очень быстро, несомненно, получит штраф в 100 д.е. за превышение скорости. Если инспекторы патрулируют на двух маршрутах в отношении 50 на 50, то имеется 50%-я вероятность, что менеджер получит штраф в 100 д.е. на маршруте A и 30%-я вероятность, что он получит такой же штраф на маршруте B. Кроме того, маршрут B длиннее, поэтому бензина расходуется на 15 д.е. больше, чем на маршруте A. Определить оптимальные стратегии менеджера и дорожной инспекции.

9. Две отрасли осуществляют капитальные вложения в четыре объекта. С учетом особенностей вложений и местных условий прибыль первой отрасли в зависимости от объема финансирования выражается элементами матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, убытки второй отрасли равны прибыли первой. Найти оптимальные стратегии отраслей.

10. В городе имеются два предприятия, которые могут выпускать продукцию одинакового назначения, которую они предполагают продавать в том же городе. Хотя назначение продукции одно, она отличается по оформлению, удобству использования, т.е. относится к разным типам. Предположим, что первое предприятие имеет возможность выпускать

продукцию типов B_i, второе – типов C_j, i, j=1,...,5. Себестоимость и цена реализации всех типов продукции одинакова. Маркетинговыми исследованиями установлено, что в городе найден сбыт N =1000 единиц товаров всех типов, причем, если первое предприятие будет выпускать продукцию типа B_i , а второе – продукцию типа C_j, то в городе найдет сбыт $p_{ij}N$ единиц товаров типа B_i и $(1-p_{ij})N$ товаров типа C_j . Числа p_{ij} сведены в матрицу $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.7 & 0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.6 & 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$. Мощности предприятий таковы, что каждое из них способно полностью обеспечить город. Принимая доход от реализации единицы товара равным 1 д.е., найти оптимальные стратегии предприятий.

3. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

3.1. Понятие игры с природой

В теории антагонистических игр рассматривается неопределенность, состоящая в том, что ни один из игроков не обладает информацией о действиях противника. Тем не менее, эта неопределенность в некоторой степени компенсируется предположением каждого игрока о том, что противоборствующая сторона действует осознанно, выбирая стратегии, наиболее выгодные для себя и наименее выгодные для противника, т.е. поведение каждого игрока было нацелено на увеличение собственного выигрыша (уменьшение проигрыша).

Во многих задачах принятия решений принципиально значимым элементом является неопределенность иного рода, не связанная с сознательным, целенаправленным противодействием противника и заключающаяся в недостаточной информированности ЛПР об условиях, в которых принимается решение. Неопределенность такого рода может порождаться разными причинами. Среди них: нестабильность экономической ситуации, покупательский спрос на товар конкретного вида, меняющийся объем перевозок, рыночная конъюнктура, политика правительства, надежность партнера, биржевая ситуация, экологическая обстановка, стихийные бедствия и т.д.

Во всех задачах такого рода критерии принятия решений базируются на том, что ЛПР не противостоит разумный противник. Условия, в которых приходится принимать решения, зависят не от сознательных действий другого лица, а от объективной действительности, которую принято называть природой, а процесс принятия решений в условиях неопределенности – играми с природой. ЛПР в играх с природой старается действовать осмотрительно, стремясь максимизировать свой выигрыш (минимизировать проигрыш), природа действует совершенно случайно, не имея собственного интереса; она безразлична к выигрышу и не стремится обратить в свою пользу просчеты ЛПР.

Любую хозяйственную деятельность человека можно интерпретировать как игру с природой. В широком смысле под *природой* понимается совокупность неопределенных факторов с неизвестными вероятностными характеристиками, влияющих на эффективность принимаемых управленческих решений. Игры с природой представляют собой основную модель теории принятия решений в условиях неопределенности.

Данные, необходимые для принятия решений в условиях неопределенности, состоят из перечня возможных действий принимающего решение (альтернатив, стратегий) A_i, i=1, 2,...,m, и перечня возможных состояний природы P_j, j=1, 2,...,n. Совокупность состояний природы формируется либо на основе имеющегося опыта, либо в результате предположений и интуиции экспертов. Пара $\left(A_i, P_j\right)$ определяет ситуацию, сложившуюся в игре с природой. Каждой игровой ситуации соответствует возможный результат (исход), определяющий доход или затраты ЛПР при выборе данного действия и реализации данного состояния природы: $a_{ij} = a\left(A_i, P_j\right)$, который, в общем случае, может быть и непрерывной функцией от A_i , P_j. В дискретном случае указанные данные представляются в виде матрицы игры $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$; именно такое представление будет использовано в дальнейшем при рассмотрении критериев принятия решений в условиях неопределенности. Эта матрица содержательно отличается от матрицы антагонистической игры тем, что элементы столбцов не являются проигрышами природы при соответствующих ее состояниях. Матрица игры с природой отражает интересы ЛПР и может быть и матрицей выигрышей, и матрицей проигрышей.

Задача выбора стратегии ЛПР, более эффективной, чем все остальные, в игре с природой, с одной стороны, проще аналогичной задачи в антагонистической игре, поскольку в игре с природой отсутствует систематическое противодействие природы игроку, а, с другой стороны, эта задача осложняется наличием неопределенности, связанной с дефицитом осведомленности игрока о характере проявлений состояний природы.

Если какая-то стратегия игрока доминирует все остальные его стратегии, то она и должна выбираться ЛПР в качестве предпочтительной, доминируемые стратегии из рассмотрения исключаются, т.е. в играх с природой можно и должно пользоваться принципом доминирования стратегий игрока (строк матрицы игры). Однако принцип доминирования стратегий (состояний) природы недопустим, поскольку природа не выбирает свои стратегии сознательно, для нее не бывает более или менее эффективных состояний.

3.2. Критерии принятия решений в играх с природой

Принятие решений в условиях полной неопределенности осуществляется, как правило, с использованием следующих критериев: 1)критерий Лапласа; 2)критерий Вальда; 3)критерий Сэвиджа; 4)критерий Гурвица. Основное различие между перечисленными критериями определяется стратегией поведения ЛПР: критерий Лапласа является более оптимистичным по сравнению с критерием Вальда; критерий Гурвица может быть использован при различных подходах: от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного. Таким образом, все эти критерии, несмотря на их количественную природу, отражают субъективную оценку ситуации, в которой приходится принимать решение. Стратегия выбора определяется характером ЛПР; критерий выбора – конкретизация характера действия (поведения ЛПР); выбор критерия – реализация решающего правила ЛПР. В выборе критерия и состоит субъективизм: из собственных мироощущений или на основе принципа согласования ЛПР выбирает критерий, наиболее адекватно отражающий его представления об окружении задачи (состоянии внешней среды) и наиболее предпочтительном (рациональном) способе действия.

Несмотря на их разнообразие, все критерии построены по одному принципу. Сначала каждой альтернативе (стратегии ЛПР) ставится в соответствие число – количественная оценка стратегии, затем из сопоставления этих оценок выбирается оптимальная стратегия.

Критерий Лапласа. Применение критерия Лапласа основано на принципе недостаточного обоснования. Поскольку вероятности состояний природы P_j, j=1, 2,...,n, неизвестны, нет оснований утверждать, что эти вероятности различны (в противном случае можно было бы рассчитать эти вероятности и ситуацию уже нельзя было бы считать полностью неопределенной). Принцип недостаточного обоснования утверждает противоположное и потому можно предположить, что все состояния системы равновероятны; при этом вероятность реализации каждого состояния природы равна $\frac{1}{n}$ (или возможные состояния природы распределены равномерно на некотором отрезке в непрерывном случае). Каждая стратегия ЛПР оценивается средним выигрышем или проигрышем $\overline{a_i} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}$. Выбирается альтернатива A_i^*, обеспечивающая ЛПР наибольший ожидаемый доход: $A^* \in Arg \underbrace{\max}_{i=1,2,\ldots m} \overline{a_i}$ или наименьшие ожидаемые затраты: $A^* \in Arg \underbrace{\min}_{i=1,2,\ldots m} \overline{a_i}$. В общем виде

$$A^* \in Arg \underbrace{opt}_{i=1,2,\ldots m} \overline{a_i} . \tag{2}$$

Критерий Вальда. Этот критерий, называемый также максиминным (минимаксным), является наиболее осторожным из всех критериев, поскольку он основывается на выборе наилучшей из худших возможностей. Если $a_{ij} = a\left(A_i, P_j\right)$ представляет собой доход, то, избрав i-ю стратегию, ЛПР обеспечивает себе доход $\alpha_i = \underbrace{\min}_{j=1,2,\ldots m} a_{ij}$ независимо от состояния природы. Естественно, будет избрана та стратегия, на которой данное выражение достигает максимального значения:

$$A^* \in Arg \underbrace{\max}_{i=1,2,\ldots,m} \alpha_i = Arg \underbrace{\max}_{i=1,2,\ldots m} \underbrace{\min}_{j=1,2,\ldots n} a_{ij} . \tag{3}$$

Аналогично, если числа $a_{ij} = a\left(A_i, P_j\right)$ представляют собой затраты, то по минимаксному варианту критерия выбирается стратегия, минимизирующая максимально возможные затраты:

$$A^* \in Arg \underbrace{\min}_{i=1,2,\ldots m} \underbrace{\max}_{j=1,2,\ldots n} a_{ij}. \tag{4}$$

Критерий Вальда является настолько осторожным, что иногда приводит к нелогичным выводам.

Критерий Сэвиджа. Критерий Сэвиджа основан на анализе матрицы рисков (сожалений) $R=(r_{ij})$, элементы которой вычисляются по формулам:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij},\ \beta_j = \underbrace{\max}_{k=1,2,\ldots,m} a_{kj},\ j = 1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

если A–матрица выигрышей, и

$$r_{ij} = a_{ij} - \gamma_j, \quad \gamma_j = \underbrace{\min}_{k=1,2,\ldots,m} a_{kj},\ j = 1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

если A– матрица проигрышей.

Это означает, что r_{ij} есть разность между наилучшим значением в j-м столбце и значением a_{ij} при том же P_j. По существу, r_{ij} выражает сожаление ЛПР по поводу того, что он не знает истинного состояния природы и потому не выбрал наилучшей альтернативы в данном ее состоянии, чем и обусловлено второе название матрицы рисков.

Вне зависимости от того, какой была исходная матрица: матрицей доходов или затрат, матрица рискoй всегда является матрицей потерь (затрат, недополученной прибыли, убытков) и оптимальная стратегия находится по минимаксному принципу. Критерий минимального риска Сэвиджа рекомендует ЛПР выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е. ту, на которой достигается $\underbrace{\min}_{i=1,2,\ldots m} \underbrace{\max}_{j=1,2,\ldots n} r_{ij}$:

$$A^* \in Arg \underbrace{\min}_{i=1,2,\ldots m} \underbrace{\max}_{j=1,2,\ldots n} r_{ij}. \tag{7}$$

Критерий Гурвица. Критерий Гурвица охватывает ряд различных подходов к принятию решений: от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного. Предположим, что матрица A – матрица доходов; при наиболее оптимистичном подходе следует выбрать альтернативу, доставляющую $\underbrace{\max}_{i=1,2,\ldots m} \underbrace{\max}_{j=1,2,\ldots n} a_{ij}$. Аналогично, при наиболее пессимистичных предположениях выбираемая альтернатива соответствует $\underbrace{\max}_{i=1,2,\ldots m}\underbrace{\min}_{j=1,2,\ldots n} a_{ij}$.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего оптимизма и крайнего пессимизма взвешиванием обоих способов действия с коэффициентами λ и $(1-\lambda)$ соответственно, $0\le\lambda\le1$. Вычисляется показатель эффективности стратегии A_i

$$G_i(\lambda)=\{\lambda \underbrace{\max}_{j=1,2,\ldots n} a_{ij} + (1-\lambda) \underbrace{\min}_{j=1,2,\ldots n} a_{ij}\}. \tag{8}$$

По критерию Гурвица выбирается альтернатива, на которой достигается $\underbrace{\max}_{i=1,2,\ldots m} G_i(\lambda)$:

$$A^* \in Arg \underbrace{\max}_{i=1,2,\ldots m} G_i(\lambda). \tag{9}$$

В том случае, когда $A-$ матрица затрат, вычисляется показатель неэффективности стратегии A_i

$$G_i(\lambda)=\{\lambda \underbrace{\min}_{j=1,2,\ldots n} a_{ij} + (1-\lambda) \underbrace{\max}_{j=1,2,\ldots n} a_{ij}\} \tag{10}$$

и выбирается альтернатива, на которой достигается $\underbrace{\min}_{i=1,2,\ldots m} G_i(\lambda)$:

$$A^* \in Arg \underbrace{\min}_{i=1,2,\ldots m} G_i(\lambda). \tag{11}$$

Коэффициент λ определяется как показатель оптимизма: при λ=1 критерий предельно оптимистичен, при λ=0 он чрезмерно пессимистичен. Значение λ определяется в зависимости от склонности принимающего решение к оптимизму или пессимизму; при отсутствии ярко выраженных склонностей целесообразно положить λ=0.5.

*Пример*1.В соответствии со спросом на некоторую продукцию в городе планируется построить предприятие по ее производству. Спрос на продукцию точно не определен, но может выражаться числами 10, 20, 30, 40 тысяч единиц, причем вероятности того, что спрос установится на одном из названных уровней, неизвестны. Работа подобных предприятий показывает, что прибыль от реализации единицы продукции составляет 15 д.е., а убытки от нереализованной единицы продукции, связанные с ее хранением и уценкой, равны 5 д.е. Какова должна быть мощность предприятия, чтобы его ожидаемая прибыль была максимальной?

Решение. Поскольку вероятности различных уровней спроса неизвестны, данная задача представляет собой ситуацию принятия решений в условиях неопределенности. Принимающий решение должен выбрать одну из четырех альтернатив: A_1– построить предприятие мощностью 10 тысяч единиц, A_2– построить предприятие мощностью 20 тысяч единиц, A_3– построить предприятие мощностью 30 тысяч единиц, A_4– построить предприятие мощностью 40 тысяч единиц, основываясь на критериях Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица. Информация, необходимая для принятия решения задается матрицей $A = \begin{pmatrix} 150 & 150 & 150 & 150 \\ 100 & 300 & 300 & 300 \\ 50 & 250 & 450 & 450 \\ 0 & 200 & 400 & 600 \end{pmatrix}$, которая является матрицей выигрышей (ее элементы показывают прибыль предприятия в различных игровых ситуациях).

Критерий Лапласа. Находим средние ожидаемые доходы для каждой альтернативы: $\overline{a_1} = 150$, $\overline{a_2} = 250$, $\overline{a_3} = 300$, $\overline{a_4} = 300$ (тыс. д.е.). По критерию Лапласа следует выбрать альтернативу A_3 или A_4.

Критерий Вальда. Для каждой из альтернатив находим минимально возможный доход: $\alpha_1 = 150, \alpha_2 = 100, \alpha_3 = 50, \alpha_4 = 0$, и максимизируем его. По критерию Вальда оптимальным решением является альтернатива A_1

Критерий Сэвиджа. Строим матрицу рисков; с этой целью для каждого возможного состояния спроса (столбца матрицы A) находим максимально возможный доход: $\beta_1 = 150, \beta_2 = 300, \beta_3 = 450, \beta_4 = 600$ и вычисляем элементы матрицы рисков: $R = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 300 & 450 \\ 50 & 0 & 150 & 300 \\ 100 & 50 & 0 & 150 \\ 150 & 100 & 50 & 0 \end{pmatrix}$. По критерию Сэвиджа следует выбрать альтернативу, на которой максимальный риск (450, 300, 150, 150) будет минимальным, т.е. A_3 или A_4.

Критерий Гурвица (λ=0.5). Все промежуточные вычисления оформим в виде таблицы (табл. 1).

Таблица 1

Стратегии ЛПР	$\underbrace{\max}_{j=1,2,3,4} a_{ij}$	$\underbrace{\min}_{j=1,2,3,4} a_{ij}$	$G_i(\lambda)$
A_1	150	150	150
A_2	300	100	200

A_3	450	50	250
A_4	600	0	300

Из последнего столбца видно, что оптимальной по критерию Гурвица является альтернатива A_4. Таким образом, рассмотренные критерии чаще других (три критерия из четырех) рекомендовали альтернативу A_4; она и является оптимальным решением в условиях неопределенности.

Пример 2. После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование может находиться в одном из следующих состояний: 1) требуется незначительный ремонт; 2) необходимо заменить отдельные детали; 3) требуется капитальный ремонт. В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия может принять такие решения: 1) произвести ремонт своими силами, что потребует затрат в размере 2, 6 или 10 д.е. в зависимости от состояния оборудования; 2) произвести ремонт при помощи бригады специалистов, что вызовет затраты 10, 4 или 8 д.е.; 3) заменить оборудование новым, на что будет израсходовано 14, 12 или 6 д.е. Требуется высказать рекомендации по оптимальному способу действий руководству предприятия (для критерия Гурвица принять λ=0.6).

Решение. В рассматриваемой ситуации руководство предприятия, принимающее решение, выбирает одну из трех альтернатив: A_1 – произвести ремонт своими силами; A_2 – пригласить бригаду специалистов; A_3 – заменить оборудование. Качество принимаемого решения оценивается размером затрат на ремонт оборудования и зависит от его состояния; информация, необходимая для принятия решения, задается матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 10 & 4 & 8 \\ 14 & 12 & 6 \end{pmatrix}$, которая в данном случае является матрицей проигрышей (затрат). Для обоснования рекомендаций руководству предприятия проведем исследование по всем критериям.

Критерий Лапласа. Находим средние ожидаемые затраты для каждой альтернативы: $\overline{a_1} = 6$, $\overline{a_2} = 7.3$, $\overline{a_3} = 10.7$. Поскольку задача руководства предприятия состоит в минимизации затрат, то оптимальной по Лапласу является альтернатива A_1.

Критерий Вальда (минимаксный вариант). Для каждой альтернативы находим максимально возможные потери: $\alpha_1 = 10; \alpha_2 = 10; \alpha_3 = 14$ и минимизируем их. Оптимальными по критерию Вальда является альтернативы A_1 и A_2.

Критерий Сэвиджа. Строим матрицу рисков: находим минимальный (наилучший) элемент каждого столбца (затраты предприятия в случае, когда состояние оборудования было бы точно известно): $\gamma_1 = 2; \gamma_2 = 4; \gamma_3 = 6$ и вычисляем элементы матрицы рисков по формуле (6): $R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 2 \\ 12 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Критерий Сэвиджа рекомендует выбрать альтернативу A_1, на которой максимальный риск (4, 8, 12) достигает минимального значения.

Критерий Гурвица. Вычисления оформляем в виде таблицы (табл. 2).

Таблица 2

Стратегии ЛПР	$\underbrace{\min}_{j=1,2,3} a_{ij}$	$\underbrace{\max}_{j=1,2,3} a_{ij}$	$G_i(\lambda)$
A_1	2	10	5.2
A_2	4	10	6.4
A_3	6	14	9.2

Из последнего столбца видно, что минимальные затраты соответствуют первой альтернативе A_1, которая и будет оптимальной по критерию Гурвица.

Проведенное исследование по совокупности критериев показало, что чаще других оптимальной называлась альтернатива A_1; правомерно ее и рекомендовать руководству предприятия для реализации.

Обобщенный критерий Гурвица. Предположим для определенности, что игра с природой задана матрицей выигрышей A. Переставим выигрыши $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ при каждой стратегии A_i, т.е. элементы каждой строки матрицы A, расположив их в неубывающем порядке, и обозначим получившуюся матрицу $B = \left(b_{ij}\right)$. Пусть числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ удовлетворяют условию $\lambda_j \geq 0,\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

Обобщенным показателем эффективности стратегии A_i назовем число $G_i\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j b_{ij}$. Обобщенным критерием Гурвица относительно выигрышей с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называется критерий, по которому оптимальной считается стратегия с максимальным показателем эффективности:

$$A^* \in Arg \underbrace{\max}_{i=1,2,\ldots,m} G_i\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right). \qquad (12)$$

Числа $\lambda_p = \sum_{j=1}^{\left[n/2\right]} \lambda_j$ и $\lambda_o = \sum_{j=\left[n/2\right]+1}^{n} \lambda_j = 1 - \lambda_p$ назовем показателями пессимизма и оптимизма соответственно. Коэффициенты λ_j выбираются из субъективных соображений следующим образом: чем опаснее ситуация, тем ближе к единице должен быть коэффициент пессимизма; в безопасной ситуации наоборот. Можно предложить и формальный способ подсчета этих коэффициентов.

Пусть $b_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}$, $j = 1,2,\ldots n$ – сумма всех выигрышей, стоящих в j-ом столбце матрицы B, $\bar{b}_j = \frac{1}{m} b_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} b_{ij}$, $j = 1,2,\ldots,n$ – среднее значение выигрышей, стоящих в j-м столбце матрицы B, $b = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij}$ – сумма всех элементов матрицы B.

В случае, когда принимающий решение оценивает для себя ситуацию как опасную, он, естественно, хочет подстраховаться и потому при выборе стратегии ведет себя достаточно осторожно, проявляя больше пессимизма, чем оптимизма, поэтому показатель пессимизма должен быть больше показателя оптимизма. В этом случае показатель оптимизма можно найти по формуле: $\lambda_O = \frac{b_1}{b_1 + b_n}$, а коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – в соответствии с принципом невозрастания средних выигрышей по формуле

$$\lambda_j = \frac{b_{n-j+1}}{b}, \; j = 1,2,\ldots,n. \qquad (13)$$

Если же принимающий решение считает ситуацию безопасной, то показатель оптимизма должен быть больше показателя пессимизма. Это можно выразить выбором показателя оптимизма $\lambda_O = \frac{b_n}{b_1 + b_n}$ и неубывающей последовательности коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ по принципу неубывания средних выигрышей:

$$\lambda_j = \frac{b_j}{b}, \; j = 1,2,\ldots,n. \qquad (14)$$

Пример 3. Инвестор может приобрести акции одной из трех компаний. Доходность акций зависит от состояния рынка ценных бумаг. Имеются статистические данные о доходности акций за четыре месяца $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 20 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 12 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. Инвестору необходимо принять решение, какой из компаний отдать предпочтение.

Решение. Воспользуемся обобщенным критерием Гурвица в опасной и безопасной ситуации. Составим матрицу $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 20 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$. В опасной ситуации выбираем коэффициенты λ_j по принципу невозрастания средних выигрышей:

$$\lambda_1 = \frac{b_4}{b} = \frac{b_4}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} = \frac{39}{102}; \quad \lambda_2 = \frac{b_3}{b} = \frac{25}{102}; \quad \lambda_3 = \frac{b_2}{b} = \frac{21}{102}; \quad \lambda_4 = \frac{b_1}{b} = \frac{17}{102}.$$

Обобщенные показатели эффективности стратегий $G_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \approx 7.98$; $G_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 7$; $G_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \approx 8.31$. Оптимальной в опасной ситуации является третья стратегия.

В безопасной ситуации коэффициенты λ_j находим по принципу неубывания средних выигрышей: $\lambda_1 = \frac{b_1}{b} = \frac{17}{102}$; $\lambda_2 = \frac{b_2}{b} = \frac{21}{102}$; $\lambda_3 = \frac{b_3}{b} = \frac{25}{102}$; $\lambda_4 = \frac{b_4}{b} = \frac{39}{102}$. Обобщенные показатели эффективности стратегий $G_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \approx 11.51$; $G_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 7$; $G_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \approx 9.69$ и оптимальной в опасной ситуации является первая стратегия. Таким образом. обобщенный критерий Гурвица различает опасную и безопасную ситуации.

3.3. Упражнения

1. Информация, необходимая для выбора одной из четырех альтернатив, задается следующей матрицей затрат: $A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 & -6 & 17 \\ 3 & 14 & 8 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 14 & 20 & -3 \\ 7 & 19 & 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Пользуясь критериями Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица (λ=0.5), дать рекомендации о принятии решения.

2. Возможно строительство четырех типов электростанций: A_1 (тепловых), A_2 (приплотинных), A_3 (безшлюзовых), A_4 (шлюзовых). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива, его перевозки и т.д. Предположим, что выделено четыре различных состояния системы, каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов (состояний природы). Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояний системы и задается матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. Определить, какой тип электростанции целесообразно строить в данной местности (принять λ=0.4).

3. Иванов – прилежный студент, который обычно получает хорошие оценки, благодаря, в частности, тому, что имеет возможность повторить материал в ночь перед экзаменом. Перед очередным экзаменом Иванов столкнулся с небольшой проблемой: его сокурсники организовали на всю ночь вечеринку. Иванов имеет три альтернатива: участвовать в вечеринке всю ночь; половину ночи участвовать в вечеринке, а половину – заниматься; заниматься всю ночь. Преподаватель, принимающий экзамен, непредсказуем в том смысле, что экзамен может быть легким, средним или трудным. В зависимости от сложности экзамена и времени, затраченного Ивановым на повторение, можно ожидать следующие экзаменационные баллы: $\begin{pmatrix} 85 & 60 & 40 \\ 92 & 85 & 81 \\ 100 & 88 & 82 \end{pmatrix}$. Какой выбор должен сделать Иванов (принять λ=0.5)?

4. Объем реализации товара за рассматриваемый период времени колеблется в зависимости от уровня покупательского спроса в пределах от 4 до 7 единиц. Прибыль торгового предприятия от единицы реализованного товара равна 2 д.е. Если запасенного товара окажется недостаточно для полного удовлетворения спроса, заказывается дополнительное количество товара, что требует новых затрат на доставку в размере 4 д.е. в расчете на единицу товара. Если же запасенный товар полностью реализовать не удастся, то расходы на хранение остатка составят 3 д.е. в расчете на единицу товара. Дать обоснованные рекомендации о величине товарного запаса (принять λ=0.7).

5. В новом жилом массиве создается телевизионное ателье для ремонта телевизоров в стационарных условиях. Поток заявок на ремонт в условиях стационара выражается числами 2, 4, 6 и 8 тысяч в год. Накопленный опыт аналогичных предприятий показывает, что прибыль от ремонта одной тысячи телевизоров составляют 9 д. е., потери, вызванные отказом в ремонте из-за недостатка мощностей оцениваются в 5 д.е., а убытки от простоя специализированного оборудования составляют 6 д.е. в расчете на каждую тысячу телевизоров. Дать обоснованные рекомендации о мощности создаваемого телеателье (принять λ=0.5).

6. Для отопления дома в зимний период используется уголь, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом тонна угля стоит 75 д.е., в мягкую зиму - 85 д.е., в обычную - 90 д.е, в холодную - 95 д.е. Расход угля в отопительный сезон определяется характером зимы: на мягкую зиму достаточно 6 т угля, на обычную требуется 7 т, а в холодную зиму расходуется 8 т угля. Затраты домовладельца зависят от количества запасенного летом угля. При необходимости недостающее количество угля можно приобрести и зимой, продать излишки угля или хранить их до следующей зимы возможности не будет. Дать обоснованные рекомендации по созданию запаса угля (принять λ=0.4).

7. За некоторый промежуток времени потребление исходного сырья на предприятии составит 9 – 12 тонн. Если для выпуска запланированного объема продукции запасенного сырья окажется недостаточно, его докупают, при этом дополнительны затраты составляют 5 д.е. за тонну. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на хранение остатка составят 2 д.е. за тонну. Дать обоснованные рекомендации о величине запасов сырья (принять λ=0.3).

8. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать картофель на трех участках: на участке *A* – повышенной влажности, *B* – средней влажности и *C* – сухом. Урожайность картофеля зависит от количества осадков, выпавших в течение года. Если осадков выпадет меньше нормы, то средняя урожайность на участке *A* составит 270ц с 1 га; при количестве осадков, близком к норме – 220ц; если осадков выпадет больше нормы – 110ц. Для участка Б эти цифры равны 210, 250 и 140ц, для участка *C* – 120, 260, 280ц. Определить, на каком из участков следует выращивать картофель в текущем году (принять λ=0.3).

9. Предприятие имеет возможность самостоятельно планировать выпуск не основной сезонной продукции *A*, *B* и *C*. Не проданная в течение сезона часть продукции позднее полностью реализуется по сниженным ценам. Данные о себестоимости продукции, отпускных ценах и объемах реализации приведены в табл. 3. Дать рекомендации об объемах выпуска продукции к предстоящему сезону, обеспечивающий предприятия возможно большую сумму прибыли (принять λ=0.6). Указание: для уменьшения размерности платежной матрицы ограничиться рассмотрением случаев, когда спрос на продукцию *A*, *B* и *C* независим и одновременно на все виды продукции имеет место либо высокий, либо средний, либо низкий спрос.

Таблица 3

Вид продукции	Себе-ст-сть	Отпускная цена		Объем продаж при спросе:		
		в сезон	после уценки	высоком	среднем	низком
A	1.3	2.6	2.1	19	14	8
B	1.7	3.0	1.8	28	16	7
C	0.9	1.8	0.7	32	18	9

10. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине может принимать одно из следующих значений: 100, 150, 200, 250, 300 штук. Свежие булочки продаются по цене 0.50 д.е. за штуку; если булочка не реализована в тот же день, в конце дня она продается по цене 0.15 д.е.; затраты магазина на одну булочку составляют 0.25 д.е. Определить объем ежедневного запаса булочек (принять λ=0.4).

11. Один из четырех станков должен быть выбран для изготовления партии изделий, размер которой Q может принимать любое значение $Q^* < Q < Q^{**}, Q^* = 10, Q^{**} = 40$. Производственные затраты C_i для станка с номером i задаются формулой: $C_i = K_i + a_i Q$, числовые данные приводятся в табл. 4:

Таблица 4

i	1	2	3	4
K_i	100	40	150	90
a_i	5	12	3	8

Пользуясь критериями Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица (принять λ=0.6), определить, на каком из станков целесообразно выполнять заказ.

12. Возможно строительство четырех типов электростанций: A_1 (тепловых), A_2 (приплотинных), A_3 (безшлюзовых), A_4 (шлюзовых). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива, его перевозки и т.д. Предположим, что выделено четыре различных состояния, каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов (состояний природы). Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояний природы и задается матрицей $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. Пользуясь критерием Гурвица и обобщенным критерием Гурвица для опасной и безопасной ситуации, определить, какой тип электростанции целесообразно строить в данной местности.

13. Руководство универмага заказывает товар определенного вида, спрос на который лежит в пределах от 6 до 9 единиц. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения спроса, то имеется возможность срочно заказать и завезти недостающее количество товара; затраты по срочному завозу единицы товара равны 2 д.е. Если спрос будет меньше наличного количества товара, то нереализованный товар придется хранить на складе универмага; расходы на хранение единицы товара составляют 1 д.е. Пользуясь критерием Гурвица и обобщенным критерием Гурвица для опасной и безопасной ситуации, определить такой объем заказа на товар, при котором дополнительные затраты, связанные с хранением и срочным завозом, будут минимальными.

14. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность одну из трех культур: A, B, C. Урожайность культур зависит от количества осадков, выпавших в течение года. Если осадков выпадет меньше нормы, то средняя урожайность культуры A составит 20ц; при количестве осадков, близком к норме - 5ц; если осадков выпадет больше нормы – 15ц. Для культуры B эти цифры равны 7.5, 12.5 и 5ц, для культуры C – 0, 7.5, 10ц. Цена за 1ц культуры равна 2, 4, 8 д.е. соответственно. На основе обобщенного критерия Гурвица в опасной и безопасной ситуации определить, какую культуру следует выращивать в текущем году.

15. Руководство универмага заказывает товар определенного вида, спрос на который лежит в пределах от 6 до 9 единиц. В случае, если товара окажется

недостаточно, то имеется возможность срочно заказать недостающее количество, дополнительные расходы при этом составят 2 д.е. на единицу товара. Если же спрос будет меньше заказанного количества, то нереализованный товар придется хранить на складе, что потребует расхода 1 д.е. на единицу товара. Используя обобщенный критерий Гурвица для опасной и безопасной ситуации, определить объем заказа на товар, при котором дополнительные затраты, связанные со срочным заказом и хранением, будут минимальны.

4. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

4.1. Понятие риска. Управление рисками

Любое коммерческое предприятие в своей деятельности постоянно сталкивается с рисками, т.е. угрозами финансовых потерь под воздействием внутренних и внешних факторов; именно поэтому залогом его успешного функционирования является способность управлять рисками в конкретных макроэкономических условиях.

Основные проблемы в области управления рисками связаны с оценками степени риска принимаемых решений: разработкой методов учета риска при принятии решений (методов оценки риска как такового и критериев принятия рискованных решений), выработкой представлений о допустимом уровне риска фирмы в системе ее предпочтений, обоснованием условий и возможностей борьбы с чрезмерным риском, разработкой мер, позволяющих снизить риск или избежать его.

Управление рисками в широком смысле представляет собой особый вид деятельности предпринимателя или менеджера, направленный, с одной стороны, на смягчение воздействий неблагоприятных или нежелательных внутренних и внешних факторов риска на результаты бизнеса, а с другой – на использование благоприятного влияния этих факторов, обеспечивающего дополнительные полезные результаты или иные преимущества по сравнению с конкурентами. На этой основе в процессе управления рисками необходимо обеспечить сохранение и увеличение капитала фирмы, улучшение финансового положения и повышение ее интеллектуального капитала.

В более узком смысле управление рисками сводится лишь к обеспечению безопасности фирмы на основе учета неблагоприятных факторов и снижения или ликвидации их самих или последствий их влияния.

В современных условиях России, которые характеризуются крайней нестабильностью окружающей предпринимателя среды, частой сменой государственной политики в области финансов и налогов, резкими изменениями рыночной конъюнктуры, а также наличием большого числа предприятий и фирм, находящихся на грани банкротства, особенно важную роль играет управление рисками в узком смысле как составной части общего процесса антикризисного управления на предприятии.

Существуют определенные методы управления рисками, которые могут быть использованы в том случае, когда в процессе управления необходимо снизить влияние факторов риска на результаты бизнеса. К ним относятся:

- использование путей уклонения от факторов риска и вообще исключение рискованных решений;
- снижение вероятности наступления тех или иных неблагоприятных событий или нежелательного влияния факторов риска;
- использование приемов снижения риска;
- применение средств передачи риска третьим лицам.

Приемы уклонения от риска связаны либо со снижением числа принимаемых рискованных решений или вообще их исключением из практики конкретного бизнеса, либо с заведомым выбором решений, характеризующихся относительно малым уровнем риска. Проблемы в данном случае связаны с тем, что вложений капитала, безрисковых или с относительно малым риском, как и других подобных решений, не так уж и много, и доходность их или иные полезные результаты, как правило, существенно ниже того уровня, который может быть достигнут при реализации решений с относительно высоким риском.

Снижение вероятности наступления неблагоприятных событий может быть достигнуто средствами актуализации и повышения достоверности информации, используемой при принятии решений, в первую очередь, накоплением статистической информации и проведения экспериментов.

Основной формой снижения риска бизнеса является диверсификация деятельности предприятия или фирмы. В современных условиях она связана с тем, что направления деятельности крупных предприятий, например, транснациональных компаний, не замыкаются в какой-то одной отрасли или сфере, а осуществляются сразу в нескольких из них, вплоть до создания отдельных самостоятельных подразделений, имеющих отдельные направления бизнеса или конкурирующих друг с другом. Диверсификация деятельности повышает устойчивость фирмы и снижает риски бизнеса. Особо важную роль играет диверсификация при формировании портфеля ценных бумаг. В процессе управления портфелем ценных бумаг необходимо учитывать, что снижение риска сопровождается снижением ожидаемой доходности. Приемлемое сочетание доходности и риска выбирает сам инвестор.

Средством передачи рисков может быть прямая передача риска третьему лицу, например, страховой компании, на условиях заключаемого договора. При этом, чем больше объем риска, переводимый на страховщика, тем выше затраты на оплату соответствующего страхового полиса. Поэтому одна из основных проблем при управлении рисками, подлежащими страхованию, состоит в том, чтобы определить, какие риски имеет смысл сохранить у себя, осуществляя дополнительные расходы по снижению возможности наступления нежелательных событий, а какие перевести на страховщика, осуществляя дополнительные расходы по оплате договора страхования.

Но для того, чтобы управлять рисками, необходимо прежде всего определить само понятие риска и указать способы его измерения.

Риск – одна из важнейших концепций экономической деятельности, однако по поводу рисков существует немало заблуждений, связанных с непониманием их объективной природы. Это зачастую приводит к отрицанию самой возможности измерения рисков, а управление ими объявляется «тонким искусством», не поддающимся никакой разумной формализации. Более того, зачастую риск ассоциируется с чем-то исключительным, авантюрным и даже противозаконным – достаточно вспомнить известные поговорки типа «кто не рискует, тот шампанского не пьет». Возможно, одной из причин подобной точки зрения является то обстоятельство, что источники рисков в экономике и, как следствие, их разновидности, столь многообразны, что вряд ли можно говорить об единой, универсальной методике их измерения. Вместе с тем, существуют некоторые общие методологические принципы, следуя которым можно измерять самые разнообразные риски.

Риск есть всегда! Но в чем же он состоит? Рассматривая конкретные примеры рисков, можно заметить, что при точном знании будущего риск полностью отсутствует. Так, вряд ли кто-то стал бы инвестировать средства в валюту, если бы знал, что это окажется невыгодным по сравнению с инвестированием в какие-то другие надежные и ликвидные инструменты. Таким образом, риск – это плата за неопределенность результатов вырабатываемых управленческих решений.

В наиболее общем понимании *риск экономического субъекта* (под экономическим субъектом подразумевается коммерческая организация либо индивидуальный предприниматель) представляет собой неопределенность (неоднозначность) его экономических результатов в будущем, обусловленную неопределенностью (неоднозначностью) самого этого будущего. И поскольку риск – это неопределенность (случайность), то измерение риска – это измерение неопределенности, для чего наиболее естественно использовать вероятностную модель.

В дальнейшем будем предполагать, что качество вырабатываемых управленческих решений оценивается с помощью одного финансового показателя X – дохода, величины чистого приведенного потока прибыли или объема затрат, из которых первые два подлежат максимизации, а третий – минимизации. В условиях риска любой из этих показателей становится случайной величиной, которая может быть охарактеризована и оценена с помощью математического аппарата теории вероятностей.

4.2. Методы измерения риска

Несмотря на определенную популярность темы рисков в экономике, до настоящего времени не сформировался единый подход к методам измерения рисков; более того, нет и единой, устоявшейся терминологии. Так, в экономической теории и практике риском называют как вероятностные характеристики случайного события: вероятность получения определенной прибыли или вероятность определенного объема затрат (реже), так и масштабную величину результата этого события (чаще). Возможно, правильнее было бы называть риском именно вероятностные характеристики как меру неопределенности принимаемых решений, а масштабные показатели именовать иначе, например, позицией или ценой риска. В дальнейшем применяется общепринятая терминология, допускающая двоякое понимание меры риска, а там, где возможна неоднозначная трактовка, сделаны соответствующие оговорки.

Мера риска – это абсолютная (относительная) величина или вероятностный показатель возможных результатов хозяйственной деятельности экономического субъекта в заданных условиях в течение определенного периода времени в будущем.

Абсолютная величина результатов выражается в денежной форме и характеризует их среднее значение или разброс относительно среднего значения; относительная величина может быть выражена в процентном отношении к вложенным средствам. В качестве вероятностной характеристики меры риска традиционно используют закон распределения случайной величины, устанавливающий связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями их реализации (и здесь нет единства подходов: под вероятностной мерой риска обычно понимают вероятность получения определенной прибыли, хотя здесь более уместным является термин «надежность», и вероятность того, что прибыль не будет получена). Закон распределения может быть представлен рядом распределения, кривой распределения и функцией распределения.

При любом подходе, вероятностном или масштабном, риск имеет математически выраженную вероятность наступления определенного события, которая опирается на статистические данные или экспертные оценки и может быть рассчитана с достаточно высокой степенью точности.

Рассматривая риск с точки зрения его оценки, необходимо решить следующие задачи:

- описать все возможные в будущем варианты развития событий, соответствующие данному риску (возможные исходы принятия решений или случайные события);
- определить вероятности каждого из этих вариантов(случайных событий).

Вероятность наступления события (вероятностная мера риска) может быть определена объективным или субъективным методами. Объективный метод также имеет три разновидности.

1. *Прямой вероятностный* (*статистический*) *метод.* Он основан на вычислении относительной частоты, с которой происходит случайное событие: если в n испытаниях случайное событие наблюдалось m раз, то его вероятность находится по формуле $p = \frac{m}{n}$. Этот метод является наиболее предпочтительным в том случае, когда имеется обширная и достаточно надежная информация об истории оцениваемого объекта.

2. *Приближенный вероятностный метод.* Этот метод используется в том случае, когда по каким-то причинам не удается получить искомое распределение вероятностей по всем вариантам развития событий. Множество вариантов пытаются сознательно упростить в расчете на то, что полученная (хотя и грубая) модель окажется практически полезной. Для иллюстрации основной идеи этого метода рассмотрим пример о выдаче кредита некоторой коммерческой организации. В этом случае даже простое перечисление всех возможных вариантов – задача достаточно сложная. Так, коммерческая

организация может вообще не вернуть кредит, вернуть его частично, вернуть с опозданием, возвращать по частям и т.д.; строго говоря, число возможных вариантов бесконечно. Можно выбрать 5 – 10 наиболее типичных вариантов и определить вероятность каждого из них. Для максимального упрощения ситуации можно ограничиться рассмотрением всего двух возможных исходов: «вернет» или «не вернет», и тогда задача сведется к определению только одной вероятности – вероятности возврата (или невозврата) кредита.

3. *Косвенный* (*качественный*) *метод*. Если применение точной или приближенной вероятностной модели оказывается практически невозможным, значит, невозможно и «прямое» (количественное) измерение рисков. В этом случае можно ограничиться измерением каких-то других показателей, косвенно характеризующих рассматриваемый риск и в то же время доступных для практического измерения. Этот метод дает лишь качественную оценку риска, но за неимением лучшего такой подход оказывается единственно возможным.

Субъективный метод базируется на использовании субъективных критериев, основанных на различных предположениях; к ним могут относиться суждение принимающего решение, его личный опыт, оценка эксперта, консультанта и т.д.

Условия ситуации риска формализуются в виде таблицы, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – различные значения случайной величины X, упорядоченные по возрастанию, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – отвечающие им вероятности (табл. 5).

Таблица 5

Значения случайной величины X	x_1	x_2	…	x_n	$x_1<x_2<\ldots<x_n$, $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_n$,
Вероятности	p_1	p_2	…	p_n	$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$
Функция распределения $F(x)$	$F(x_1)$	$F(x_2)$	…	$F(x_n)$	$F(x)=0,\ x \le x_n$; $F(x)=1,\ x>x_n$

По известным значениям вероятностей можно рассчитать кумулятивную функцию распределения случайной величины X, численно равную вероятности того, что значение X меньше x (последняя строка табл. 5):

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{j:x_j<x} p_j\ . \tag{15}$$

Для наглядного изображения закона распределения используют многоугольник распределения или его гладкую аппроксимацию – кривую распределения – и график функции распределения, дискретной или непрерывной.

Закон распределения случайной величины дает исчерпывающую информацию о ее вероятностных характеристиках, которой, однако может оказаться недостаточно для выработки управленческих решений. В некоторых случаях знание именно закона распределения (всех возможных значений случайной величины X и отвечающих им вероятностей) и не требуется: необходимо иметь лишь обобщенные масштабные и вероятностные характеристики. Наиболее распространенной из масштабных характеристик является среднее ожидаемое значение.

Среднее ожидаемое значение (математическое ожидание) случайной величины X выражается в денежных единицах, обозначается MX и вычисляется как взвешенно среднее для всех различных ее значений, где вероятность каждого значения используется в качестве весового коэффициента. В терминах введенных выше обозначений

$$MX = \bar{x} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \ . \tag{16}$$

Математическое ожидание – это еще не оценка риска как такового, это значение показателя X, по которому оценивается качество принимаемых управленческих решений, вычисленное с учетом риска. Однако, зная среднюю ожидаемую прибыльность проекта и имея закон распределения прибыли $F_A(x)$, можно построить и обобщенную вероятностную характеристику риска. Под *риском проекта A* естественно понимать вероятность того, что полученная прибыль будет меньше средней:

$$r_A = P\left\{ X < \bar{x} \right\} = F_A\left(\bar{x}\right). \tag{17}$$

Среднее значение представляет собой одну из обобщенных масштабных характеристик случайной величины и зачастую не дает возможности принять решение в пользу какого-то способа действия. Для более обоснованного выбора необходимо измерить колеблемость показателей, т.е. определить меру изменчивости возможного результата. Так, при вложении средств в некоторый проект важно знать не только среднюю величину прибыли, но и пределы, в которых она может меняться. Колеблемость возможных результатов представляет собой степень отклонения случайной величины от среднего значения. Для ее оценки на практике применяют три тесно связанных между собой показателя: дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации, каждый из которых может быть использован как оценка непосредственно риска принимаемого решения (отклонение от ожидаемого значения в абсолютном или относительном измерении).

Дисперсия – это взвешенно среднее квадратов отклонений возможных значений случайной величины от ее ожидаемого значения:

$$DX = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(x_j - \bar{x} \right)^2 . \tag{18}$$

Так же, как и среднее значение, дисперсия является именованной величиной; ее размерность равна квадрату размерности самой случайной величины и потому использовать дисперсию для оценки разброса случайной величины не вполне удобно. В связи с этим, наряду с дисперсией, вводится стандартное отклонение

$$\sigma X = \sqrt{DX} , \tag{19}$$

которое измеряется в тех же единицах, что и сама случайная величина. Стандартное отклонение служит мерой абсолютной колеблемости.

Наряду с дисперсией и среднеквадратическим отклонением в качестве меры риска используют также полудисперсию, при вычислении которой учитываются только те состояния, в которых доходность ниже ожидаемой:

$$SDX = \sum_{j: x_j < \bar{x}} p_j \left(x_j - \bar{x} \right)^2 . \tag{20}$$

Смысл подобного подхода состоит в том, что ЛПР всегда заинтересован в получении дохода выше среднего уровня и оценка риска должна осуществляться с учетом возможности получения дохода ниже ожидаемого значения.

Аналогом среднеквадратического отклонения при подобном подходе является величина

$$S\sigma X = \sqrt{2SDX} . \tag{21}$$

Однако на практике при измерении риска практически используют только дисперсию и стандартное отклонение. Это обусловлено тем, что применение полудисперсии значительно усложняет расчеты.

Удобной безразмерной характеристикой случайной величины, которая показывает относительное значение ее разброса, является коэффициент вариации

$$VX = \frac{\sigma X}{MX} , \tag{22}$$

который показывает, какую долю среднего значения случайной величины составляет ее средний разброс. Коэффициент вариации – относительная величина, на его размер не оказывают влияния абсолютные значения изучаемого показателя. С помощью коэффициента вариации можно сравнивать даже показатели, измеренные в различных денежных единицах. Коэффициент вариации меняется в пределах от 0 до 1 и чем больше его значение, тем больше вариабельность случайной величины. В экономической статистике принята следующая градация различных значений коэффициента вариации:

до 0.1 – слабая вариабельность;

0.1–0.25 – умеренная вариабельность;

свыше 0.25 – высокая вариабельность.

4.3. Критерии принятия рискованных решений

Рассматриваемая в настоящем разделе проблема в общем виде формулируется следующим образом. Принимающий решение должен выбрать одну из имеющихся альтернатив A_i $i = 1,2,\dots,m$, каждая из которых в конечном счете будет иметь своим результатом некоторый исход, набор которых считается известным и зависящим от состояний природы Q_j, $j = 1,2,\dots,n$. Оценка предпочтительности возможных исходов осуществляется с помощью одного критерия X (доход или затраты). Принимающий решение не знает точно, к какому именно исходу приведет любая из выбранных им альтернатив, но для каждого способа действия он в состоянии установить вероятности реализации различных исходов. Информация для принятия решения представляется таблицей (табл.6).

Таблица 6

Состояния природы	Q_1	Q_2	…	Q_n
Вероятности	p_1	p_2	…	p_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Иногда обоснование наилучшей альтернативы может быть выполнено только на основе этой таблицы. Для определенности положим, что X – доход; в этом случае табл. 6 определяет матрицу доходностей A.

Очевидно, что, если минимальная доходность по одной альтернативе не меньше, чем максимальная доходность по любой другой, т.е., каково бы ни было состояние природы, доходность от реализации этой альтернативы будет лишь превышать доходность от каждой из остальных, то ее выгодно предпочесть всем остальным. В этом случае говорят, что данная альтернатива абсолютно доминирует все остальные. Формально это записывается так:

$$A_i \succ_{абс} A_k \quad \Leftrightarrow \quad \min_{j=1,2,\ldots,n} a_{ij} \ge \max_{j=1,2,\ldots,n} a_{kj}, \forall\, k \ne i \tag{23}$$

Наряду с абсолютным доминированием выделяют также доминирование по состояниям, когда в каждом состоянии природы доходность по одной из альтернатив не меньше, чем доходность по каждой из остальных, и существует хотя бы одно состояние, в котором эта доходность строго больше. Формально доминирование по состоянию для альтернативы A_i можно записать так:

$$\forall\, k \ne i\ \forall\, j = \overline{1,n}\ a_{ij} \ge a_{kj}, \quad \exists\, j_0 : a_{ij_0} > a_{kj_0}. \tag{24}$$

Решение в том случае, когда одна альтернатива доминирует все остальные может быть принято без использование вероятностей наступления будущих состояний экономики, и соответственно, оценок риска. Однако, условия как абсолютного доминирования, так и доминирования по состояниям встречаются в практических ситуациях достаточно редко. Как правило, доминирование по состояниям зачастую не позволяет выбрать одну лучшую альтернативу, но позволяет отбросить худшие (доминируемые) варианты.

Выделяют также доминирование по вероятности достижения рассматриваемых уровней доходности. Говорят, что альтернатива A_i доминирует во вероятности альтернативу $A_к$, если для любой доходности $a \in D$, где D – множество рассматриваемых уровней доходности, вероятность достижения большей или равной доходности для альтернативы A_i не меньше, чем для альтернативы $A_к$. В терминах кумулятивной функции распределения доминирование по вероятности записывается следующим образом:

$$A_i \succ_P A_k \quad \Leftrightarrow \quad F_{A_i}(a) \le F_{A_k}(a), a \in D \tag{25}$$

и хотя бы для одного $a \in D$ имеет место строгое неравенство. Доминирование по вероятности, в отличие от абсолютного и доминирования по состояниям, имеет смысл и в том случае, когда разные уровни доходности достигаются с разными вероятностями.

Пример 4. Известно, что при вложении средств в проект A из 120 случаев прибыль 12.5 д.е. была получена в 48 случаях, прибыль 20 д.е. – в 42 случаях и прибыль 12 д.е. – в 30 случаях. При вложении средств в проект B из 150 случаев прибыль 15 д.е. была получена в 45 случаях, прибыль 20 д.е. – в 75 случаях и прибыль 22 д.е. – в 30 случаях. Определить более прибыльный вариант вложения средств.

Решение. Каждая из альтернатив A и B имеет по 3 возможных исхода, вероятности которых могут быть рассчитаны на основе статистических данных прямым вероятностным методом (табл. 7).

Таблица 7

Проект A				
Прибыль x_j	12	12.5	20	
Вероятности p_j	0.25	0.4	0.35	$\sum_{j=1}^{3} p_j = 1$
Функция распределения $F_A(x)$	0	0.25	0.65	$F_A(x)=0,\ x\le 12$, $F_A(x)=1,\ x>20$
Проект B				
Прибыль x_j	15	20	22	
Вероятности p_j	0.3	0.5	0.2	$\sum_{j=1}^{3} p_j = 1$
Функция распределения $F_B(x)$	0	0.3	0.8	$F_B(x)=0,\ x\le 15$, $F_B(x)=1,\ x>22$

Обобщенная информация о проектах также сводится в таблицу (табл. 8).

Таблица 8

	Вероятности		Функция распределения		Разность
Прибыль x	Проект A	Проект B	$F_A(x)$	$F_B(x)$	$F_B(x) - F_A(x)$
12	0.25	0	0	0	0
12.5	0.4	0	0.25	0	–0.25
15	0	0.3	0.65	0	–0.65
20	0.35	0.5	0.65	0.3	–0.35
22	0	0.2	1	0.8	–0.2
23	0	0	1	1	0

Поскольку $\forall x\ F_B(x) \le F_A(x) \Rightarrow B \succ_P A$.

Следует отметить, что ситуация доминирования по вероятности на практике встречается достаточно редко; более типичен случай, когда графики функций распределения пересекаются (так что нет полного доминирования по вероятности) и для выработки оптимальных управленческих решений приходится пользоваться другими критериями, использующими масштабные характеристики риска.

Критерий ожидаемого значения (*критерий Байеса*). Использование критерия ожидаемого значения, обусловленное стремлением максимизировать ожидаемый доход ($MX \to \max!$) или минимизировать ожидаемые затраты ($MX \to \min!$), представляет собой естественный переход от условий полной определенности к ситуации с рисками.

Каждая стратегия ЛПР A_i $i = 1,2,\ldots,m$, оценивается средним ожидаемым значением выигрыша или проигрыша

$$\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij} . \tag{26}$$

Будет избрана стратегия, доставляющая оптимальное значение среднего выигрыша или проигрыша:

$$A^* \in Arg \underbrace{opt}_{i=1,2,\ldots m} \overline{a_i} . \tag{27}$$

Пример 5. Рассматриваются два варианта вложения средств *A* и *B*, данные о которых приведены в табл. 9 Какой из этих проектов является более предпочтительным?

Таблица 9

Проект *A*					
Прибыль x_j	0	5	12	20	25
Вероятности p_j	0.05	0.1	0.15	0.5	0.2

Проект *B*				
Прибыль x_j	7	10	18	24
Вероятности p_j	0.15	0.2	0.45	0.2

Решение. Расчеты, результаты которых приведены в табл. 10,

Таблица 10

	Вероятности		Функция распределения		Разность
Прибыль *x*	Проект *A*	Проект *B*	$F_A(x)$	$F_B(x)$	$F_B(x) - F_A(x)$
0	0.05	0	0	0	0
5	0.1	0	0.05	0	–0.05
7	0	0.15	0.15	0	–0.15
10	0	0.2	0.15	0.15	0
12	0.15	0	0.15	0.35	0.2
18	0	0.45	0.3	0.35	0.05
20	0.5	0	0.3	0.8	0.5
24	0	0.2	0.8	0.8	0
25	0.2	0	0.8	1	0.2

26	0	0	1	1	0

показывают, что ни один из проектов не является более предпочтительным в смысле отношения доминирования по вероятности (последний столбец содержит числа разных знаков).

Оценим проекты по критерию ожидаемого значения прибыли. Для проекта *A* ожидаемая прибыль $\bar{a}$= 0.05·0 +0.1·5+ 0.15·12+ 0.5·20+ 0.2·25=17.3 (д.е.). Аналогично для проекта *B* $\bar{b}$ =0.15·7+ 0.2·10+0.45·18+0.2·24=15.95 (д.е.). По критерию ожидаемой прибыли проект *A* является более предпочтительным, чем проект *B*.

Пример 6. Станок из группы в *n* станков ремонтируется индивидуально, если он остановился из-за неисправности. Через *T* интервалов времени выполняется профилактический ремонт всех *n* станков. Задача состоит в определении оптимального значения T^*, при котором минимизируются общие затраты на ремонт вышедших из строя станков и проведение профилактического ремонта в расчете на один интервал времени.

Решение. Так как невозможно предсказать заранее, когда именно возникнет неисправность, необходимо вычислить вероятность того, что станок выйдет из строя в момент времени *t*. В данном случае это и есть элемент риска в процессе принятия решения.

Пусть p_t – вероятность выхода из строя одного станка в момент времени *t*, n_t – случайная величина, представляющая число всех вышедших из строя станков в тот же момент. Предположим, что затраты на ремонт вышедшего из строя станка равны c_1, а затраты на профилактический ремонт одного станка – c_2. Применение критерия ожидаемого значения в данном случае оправдано, если станки работают в течение большого периода времени. При этом совокупные затраты за промежуток времени *T*, складывающиеся из затрат на текущий и профилактический ремонт, составят $\left(c_1 \cdot \sum_{t=1}^{T-1} n_t + c_2 \cdot n\right)$, затраты на один интервал $C(T) = \frac{1}{T}\left(c_1 \sum_{t=1}^{T-1} n_t + c_2 n\right)$, ожидаемые затраты на один интервал $MC(T) = M\left[\frac{1}{T}\left(c_1 \sum_{t=1}^{T-1} n_t + c_2 n\right)\right] = \frac{1}{T}\left(c_1 \sum_{t=1}^{T-1} Mn_t + c_2 n\right)$, где Mn_t – среднее значение (математическое ожидание) вышедших из строя станков в момент времени t. Случайная величина n_t имеет распределение Бернулли с параметрами (n, p_t) – число успехов в n испытаниях с вероятностью успеха в одном испытании, равной p_t, где под числом испытаний понимается количество станков, а под «успехом» – выход станка из строя, и его математическое ожидание $Mn_t = p_t n$. С учетом последнего равенства формула для подсчета ожидаемых затрат примет вид: $MC(T) = \frac{n}{T}\left(c_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + c_2\right)$.

Условия оптимальности для T^*(минимума затрат на ремонт вышедших из строя станков и проведение профилактического ремонта) могут быть записаны следующим образом: $MC(T^* - 1) \geq MC(T^*), \quad MC(T^* + 1) \geq MC(T^*)$.

Для решения задачи, начиная с малого значения T, вычисляем $MC(T)$, пока условия оптимальности не будут удовлетворены.

Рассмотрим конкретные числовые данные: положим n=50, c_1=100 д.е., c_2=10 д.е. Информация о вероятностях p_t приведена в табл. 11 (эти данные являются не полными, но поскольку с увеличением времени, прошедшего после очередного профилактического ремонта вероятность неисправности станка возрастает, оптимальное значение T^* не может находиться в оставшейся части таблицы); в этой же таблице содержатся и результаты расчетов.

Таблица 11

T	1	2	3	4	5
p_T	0.05	0.07	0.1	0.13	0.18
$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	0	0.05	0.12	0.22	0.35
$MC(T)$	500	375	366.7	400	450

Из табл. 11 видно, что проводить профилактический ремонт следует каждые T^*=3 интервала времени.

Следует отметить, что в критерии ожидаемого значения риск в явном виде не фигурирует и учитывается лишь косвенно при подсчете среднего ожидаемого значения оценочного показателя X.

Критерий ожидаемого значения является подходящим для часто повторяющихся ситуаций. Математически это выражается законом больших чисел: пусть X – с.в. с математическим ожиданием MX и дисперсией σ^2=DX. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – случайная выборка объема n, то выборочное среднее

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ имеет дисперсию σ^2/n, т.е. при $n\to\infty$ $\sigma^2/n\to 0$ и $\bar{x} \to MX$. Однако его можно модифицировать таким образом, чтобы он стал приемлемым и для редких ситуаций тоже. Один из способов уменьшить дисперсию – увеличить объем выборки (такой подход использует критерий ожидаемого значения), второй – уменьшить σ^2. Если σ^2 уменьшается, то дисперсия выборочного среднего также уменьшается и вероятность того, что выборочное среднее близко к MX, увеличивается.

Критерий минимальной вариации. При выработке оптимальных управленческих решений критерий ожидаемого значения целесообразно дополнять мерой риска, такой как колеблемость возможных результатов, рассчитанной в форме стандартного отклонения или коэффициента вариации, что позволяет более точно упорядочить альтернативы по предпочтительности.

Пример 7. Оценить проекты *A* и *B* из примера 5 по критерию минимальной вариации.

Решение. Средняя ожидаемая прибыль проектов *A* и *B* найдена в примере 5: $\bar{a}$=17.3, $\bar{b}$=15.95. Вычисляем дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации прибыли:

$$DA = 0.05\cdot(17.3)^2 + 0.1\cdot(12.3)^2 + 0.3\cdot(5.3)^2 + 0.5\cdot(2.7)^2 + 0.2\cdot(7.7)^2 = 49.81,$$

$$\sigma A = \sqrt{49.81} = 7.06, \quad VA = \frac{7.06}{17.3} = 0.41.$$

Для проекта *B*: $DB = 33.95, \sigma B = 5.82, VB = 0.36$. Таким образом, по критерию минимальной вариации более предпочтительным является проект *B*.

Критерий ожидаемое значение – стандартное отклонение. Критерии ожидаемого значения и минимальной вариации представляются подходящими для оценивания альтернатив в каждой конкретной ситуации, однако, необходимо еще установить подходящее упорядочение по предпочтительности двух этих критериев для ЛПР. Это показывает целесообразность построения критерия, в котором максимизация ожидаемого значения дохода сочетается с минимизацией ее стандартного отклонения. Возможным критерием, отвечающим этим требованиям, является максимум функции $\Phi(X,K) = MX - K\sigma X$, где X – случайная величина, представляющая доход, σX – ее стандартное отклонение, K – заданная постоянная, которая может быть интерпретирована как несклонность к риску. Действительно, K определяет «степень важности» стандартного отклонения σX по отношению к среднему ожидаемому значению дохода *MX*. Например, предприниматель, остро реагирующий на большие отрицательные отклонения дохода вниз от *MX*, может выбрать *K* много больше 1. Это придает больший вес стандартному отклонению и приводит к решению, уменьшающему вероятность больших потерь дохода.

В случае, когда показатель *X* представляет собой величину затрат, оптимальное решение находится из условия минимума функции: $\Psi(X,K) = MX + K\sigma X$.

Пример 8. Оценить проекты *A* и *B* из примера 2 по критерию «ожидаемое значение – стандартное отклонение» при *K*=1, 2.

Решение. По результатам примеров 5,7 составляем выражения: $\Phi(A,1) = 17.3 - 7.06 = 10.24, \Phi(B,1) = 15.92 - 5.82 = 10.13$; т.е. при *K*=1 проекты *A* и *B* практически равнозначны. Полагая *K*=2, находим: $\Phi(A,2) = 17.3 - 2 \cdot 7.06 = 3.18, \Phi(B,2) = 15.92 - 2 \cdot 5.82 = 4.31$, т.е. проект *B* является более предпочтительным, чем проект *A*. Таким образом, чем более несклонен к риску принимающий решение, тем скорее он остановит свой выбор на проекте *B*.

Критерий предельного уровня. Критерий предельного уровня не дает оптимального решения, максимизирующего прибыль или минимизирующего затраты, а соответствует, скорее, приемлемому способу действия. Он формализуется заданием порогового значения критерия, которое не может быть нарушено.

Критерием предельного значения целесообразно пользоваться и в тех случаях, в тех случаях, когда в момент принятия решений нет полной информации о множестве возможных альтернатив или тогда, когда множество возможных альтернатив известно, но осуществлять выбор приходится с учетом нескольких факторов. Следующий пример иллюстрирует преимущества такого подхода.

Пример 9. Предположим, что величина спроса *x* на некоторый товар в единицу времени (интенсивность спроса) задается непрерывной функцией *f*(*x*). Если запасы товара *Z* в начальный момент невелики, то в дальнейшем возможен дефицит товара; в противном случае запасы нереализованного товара могут оказаться чрезвычайно большими, что неизбежно приведет к увеличению издержек. Требуется определить оптимальный уровень запасов Z.

Решение. Определение оптимального уровня запасов Z предполагает отыскание компромисса между двумя видами потерь: потерями от дефицита товара и потерями от его избытка. Принимающему решение можно рекомендовать следующий способ действия: установить необходимый уровень запасов таким образом, чтобы величина ожидаемого дефицита (математическое ожидание дефицита) не превышала Z_1 единиц, а ожидаемая величина излишков не превышала заданного уровня Z_2. Математически эти условия записываются в виде: ожидаемый дефицит $MD = \int_Z^\infty (x - Z) f(x) dx \le Z_1$; ожидаемые излишки $MI = \int_0^Z (Z - x) f(x) dx \le Z_2$; (в случае дискретного спроса на товар интеграл заменяется суммой). При произвольном выборе Z_1 и Z_2 указанные условия могут оказаться противоречивыми; в этом случае следует ослабить ограничения, чтобы обеспечить совместность условий.

Критерий наиболее вероятного исхода. Этот критерий основан на преобразовании случайной ситуации в детерминированную путем замены случайной величины единственным ее значением, имеющим наибольшую вероятность реализации. Формально каждая стратегия ЛПР $A_i, i = 1,2,\ldots,m$, оценивается величиной $\hat{a}_i = a_{ik}, k = \arg \underbrace{\max}_{j=1,2,\ldots,n} p_j$. Оптимальная стратегия находится из включения

$$A^* \in Arg \underbrace{opt}_{i=1,2,\ldots,m} \hat{a}_i. \tag{28}$$

Критерий наиболее вероятного исхода можно считать упрощением более сложного критерия принятия решения в условиях риска. Такое упрощение проводится не из чисто аналитических соображений, а, в первую очередь, из соображений здравого смысла: знание наиболее вероятного исхода дает достаточную информацию для принятия решения. Он неприменим в том случае, когда закон распределения случайной величины не имеет четко выраженного максимума ли этот максимум не единственный.

4.4. Учет экспериментальных данных при принятии решений в условиях риска

При рассмотрении критериев принятия решений в условиях риска предполагалось, что законы распределения вероятностей заданы изначально и не меняются.; такие вероятности называются априорными**.**

Иногда бывает полезно провести эксперимент для уточнения этих вероятностей. Вероятности, полученные в ходе проведения эксперимента, называются апостериорными**.** Знание апостериорных вероятностей зачастую меняет точку зрения на понятие оптимального решения и позволяет принимать более точные управленческие решения.

Пример 10. Предприятие выпускает некоторую продукцию партиями фиксированного размера. Из-за случайных сбоев в технологическом процессе возможен выпуск партии с недопустимо высоким уровнем бракованных изделий. По статистике 5% партий являются негодными. Предпринимателю известно, что при отправке потребителю негодной партии он будет оштрафован. Требуется определить оптимальную стратегию поведения предпринимателя (отправлять или не отправлять наугад выбранную партию товара).

*Решение***.** Если решение об отправке партии принимается на основании априорных вероятностей без дополнительных исследований, то в соответствии с критерием наиболее вероятного исхода партию следует отправлять (вероятность того, что партия годная, равна 0.95).

Однако, предприниматель, заботящийся о своей репутации, наверняка подстрахуется и подвергнет наугад выбранную к отправке партию дополнительному контролю.

Как это можно сделать? Например, взять и проверить несколько деталей из партии, предназначенной для отправки, и по результатам этой проверки принять окончательное решение о годности или негодности партии.

Для подсчета новых (апостериорных) вероятностей используются формулы полной вероятности и Байеса. Пусть событие A может произойти лишь совместно с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу несовместных событий (гипотез). Вероятности $P(H_i)$ называются априорными вероятностями гипотез. Тогда вероятность появления события A может быть найдена по формуле полной вероятности: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right)P\left(A \middle| H_i\right)$. Если событие A произошло, то вероятности гипотез могли измениться.

Апостериорные вероятности гипотез находятся по формуле Байеса: $P(H_i | A) = \dfrac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{P(A)}$.

Возвращаемся к нашей задаче. Пусть годная партия содержит 5% бракованных изделий, негодная – 20% бракованных изделий. Наугад из подготовленных к отправке партий выбирается одна и из этой партии для дополнительного контроля берут 2 детали.

Таким образом, опыт состоит в случайном выборе двух деталей из некоторой партии. Относительно условий опыта (в терминах введенных ранее обозначений) можно выдвинуть две гипотезы: Q_1 – партия годная, $P(Q_1)$=0.95; Q_2 – партия негодная, $P(Q_2)$=0.05. В результате проведения опыта возможно появление одного из трех событий: Ω_0 – среди выбранных двух деталей бракованных нет; Ω_1 – среди двух ровно 1 бракованная деталь; Ω_2 – среди двух ровно 2 бракованные детали. Требуется определить, как появление одного из событий Ω_l влияет на вероятности гипотез и, как следствие, на окончательное решение об отправке партии. Вероятности событий Ω_i находим по формуле полной вероятности, вычисляя условные вероятности по формуле Бернулли.

$$P(\Omega_0) = C_2^2 (0.95)^2 (0.05)^0 0.95 + C_2^2 (0.8)^2 (0.2)^0 0.05 = 0.857 + 0.032 = 0.889;$$

$$P(\Omega_1) = C_2^1 (0.95)^1 (0.05)^1 0.95 + C_2^1 (0.8)^1 (0.2)^1 0.05 = 0.09 + 0.016 = 0.106;$$

$$P(\Omega_2) = C_2^0 (0.95)^0 (0.05)^2 0.95 + C_2^0 (0.8)^0 (0.2)^2 0.05 = 0.002 + 0.002 = 0.004.$$

По формуле Байеса находим апостериорные вероятности:

$$P(Q_1 | \Omega_0) = \frac{P(\Omega_0 | Q_1) P(Q_1)}{P(\Omega_0)} = \frac{0.857}{0.889} = 0.964; \; P(Q_1 | \Omega_1) = \frac{0.09}{0.106} = 0.85;$$

$$P(Q_1 | \Omega_2) = \frac{0.002}{0.004} = 0.5.$$

Как видно из полученных числовых результатов после проведения дополнительной проверки вероятность гипотез о пригодности партии существенно меняется. Результаты вычислений удобно оформлять в виде таблицы (табл. 12).

Таблица 12

Состояния природы Q_j	Q_1	Q_2
Априорные вероятности p_j	0.95	0.05
Ω_0	0.964	0.036

Ω_1	0.85	0.15
Ω_2	0.5	0.5

Если из двух наугад выбранных деталей ни одна не оказалась бракованной, партия почти наверняка является годной (вероятность пригодности партии 0.964 превышает априорную вероятность), ее можно отправлять потребителю. Если одна из двух деталей оказалась бракованной, вероятность того, что партия является пригодной равна 0.85, меньше соответствующей априорной вероятности. Принимаемое решение будет зависеть от суммы штрафа. Если же обе детали оказались бракованными, то вероятность негодности партии очень высока, и отправлять ее не следует.

4.5. Планирование эксперимента в управлении рисками

В настоящем разделе обсуждается весьма существенный вопрос для принятия решений в условиях риска: в каких случаях необходимо проводить эксперименты с целью получения дополнительной информации о состояниях природы для принятия более эффективных решений.

Предположим, что ЛПР имеет *m* стратегий $A_i, i = 1,2,\ldots,m$, природа может находиться в одном из своих состояний $Q_j, j = 1,2,\ldots,n$, с вероятностями $p_j, j = 1,2,\ldots,n$, и матрица *A* является матрицей выигрышей.

Рассмотрим сначала случай идеального эксперимента, который характеризуется тем, что в результате его проведения мы получим точное знание того состояния природы, которое имеет место в данной ситуации. Предположим, что затраты на проведение эксперимента равны *c*.

Пусть $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij}$ – взвешенно средний выигрыш ЛПР, избравшего стратегию A_i, $\bar{a} = \max_{i=1,2,\ldots,m} \bar{a}_i$ – максимальный взвешенно средний выигрыш ЛПР. Пусть далее $\beta_j = \max_{i=1,2,\ldots,m} a_{ij}$ – максимальный выигрыш ЛПР при состоянии природы Q_j, $\bar{\beta} = \sum_{j=1}^{n} p_j \beta_j$ – взвешенно среднее максимальных выигрышей ЛПР на каждом состоянии природы.

Ответ на поставленный вопрос о целесообразности проведения идеального эксперимента содержит следующее утверждение.

Утверждение 1. Идеальный эксперимент целесообразно проводить при условии выполнения неравенства $c < \overline{\beta} - \overline{a}$, т.е. когда затраты на проведение эксперимента меньше разности между взвешенно средним максимальным выигрышем $\overline{\beta}$ и максимальным взвешенно средним выигрышем $\overline{a}$, и нецелесообразно проводить при выполнении противоположного неравенства $c \geq \overline{\beta} - \overline{a}$.

Если матрица *A* является матрицей проигрышей, то ответ на вопрос о целесообразности проведения идеального эксперимента дает

Утверждение 2. Идеальный эксперимент целесообразно проводить при условии выполнения неравенства $c < \overline{a} - \overline{\gamma}$ и нецелесообразно проводить при выполнении противоположного неравенства $c \geq \overline{a} - \overline{\gamma}$, где $\gamma_j = \min\limits_{i=1,2,\ldots,m} a_{ij}$, $\overline{\gamma} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \beta_j$.

Теперь перейдем к вопросу о целесообразности проведения эксперимента, не являющегося идеальным, а дающего косвенную информацию о правдоподобии тех или иных состояний природы. В общем случае можно предположить, что такой эксперимент приводит к появлению одного из несовместных событий $\Omega_l, l = 1,2,\ldots,k$ (исходов эксперимента), вероятности которых зависят от того состояния природы Q_j, $j = 1,2,\ldots,n$, при которых он проводился.

Допустим, что эксперимент проведен и его исходом является событие Ω_l. Но тогда в связи с этим изменились априорные вероятности состояний природы p_j, $j = 1,2,\ldots,n$ и стали равными условным вероятностям $p_{jl} = P\left(Q_j \middle| \Omega_l\right)$, $j = 1,2,\ldots,n$ при условии, что событие Ω_l произошло. Эти апостериорные вероятности вычисляются по формуле Байеса:

$$p_{jl} = \frac{p_j P\left(\Omega_l \middle| Q_j\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j P\left(\Omega_l \middle| Q_j\right)}, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{29}$$

Расположим вероятности p_{jl} в виде матрицы апостериорных вероятностей состояний природы (табл.13).

Таблица 13

Состояния природы	Q_1	Q_2	…	Q_n
Априорные вероятности	p_1	p_2	…	p_n
Ω_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{n1}
Ω_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{n2}
…	…	…	…	…
Ω_k	p_{1k}	p_{2k}	…	p_{nk}

Апостериорные вероятности удовлетворяют нормировочному равенству: сумма всех элементов каждого столбца равна единице: $\sum_{l=1}^{k} p_{jl} = 1,\ j = 1,2,\ldots,n$.

По-прежнему предполагаем для определенности, что A – матрица выигрышей. Пусть $\overline{a}_{il} = \sum_{j=1}^{n} p_{jl} a_{ij},\ i = 1,2,\ldots,m,\ l = 1,2,\ldots,k$ – ожидаемый средний выигрыш ЛПР, избравшего i-ую стратегию, при условии, что исходом эксперимента является событие Ω_l, $\hat{a}_l = \max\limits_{i=1,2,\ldots,m} \overline{a}_{il}$ – максимальный средний выигрыш при исходе эксперимента Ω_l, $\hat{a} = \sum_{l=1}^{k} P(\Omega_l)\hat{a}_l$ – взвешенно среднее максимальных выигрышей $\hat{a}_l$ с весовыми коэффициентами, равными вероятностям событий Ω_l, рассчитанным по формулам полной вероятности, $\overline{a} = \max\limits_{i=1,2,\ldots,m} \overline{a}_i$ – максимальный взвешенно средний выигрыш ЛПР без проведения эксперимента. Следующее утверждение содержит условия целесообразности проведения не идеального эксперимента.

Утверждение 3. Не идеальный эксперимент целесообразно проводить, если затраты на его проведение c меньше разности взвешенно среднего максимальных выигрышей $\hat{a}$ и максимального взвешенно среднего выигрыша $\overline{a}$ без эксперимента: $c < \hat{a} - \overline{a}$ и нецелесообразно проводить в противном случае: если $c \geq \hat{a} - \overline{a}$.

4.6. Элементы теории портфеля инвестиций

Под инвестициями подразумевается вложение денежных средств в различные формы материального богатства или финансовые активы. Создание портфеля ценных бумаг (ПЦБ) является одной из наиболее выгодных форм инвестиций в рыночной экономике, будущие состояния которой неизвестны, но вероятности их реализации могут быть определены.

Портфель ценных бумаг определяется как совокупность различных инвестиционных инструментов, которые собираются для достижения конкретной инвестиционной цели. Главная цель в формировании ПЦБ определяется как достижение оптимального сочетания между риском и доходом инвестора.

Уменьшение риска портфеля достигается за счет его диверсификации: невысокие доходы по одним активам будут компенсироваться высокой прибылью по другим. Диверсификация осуществляется посредством включения в портфель ценных бумаг широкого круга отраслей, не связанных тесно между собой, что позволяет избежать отрицательных эффектов, обусловленных циклическими колебаниями их деловой активности. Исследования показали, что большая часть риска нивелируется, если в портфель входят от 8 до 20 видов ценных бумаг.

Следует подчеркнуть, что посредством манипулирования содержимым портфеля можно уменьшить только диверсифицируемый или несистематический риск, т.е. конкретный риск инвестора, не связанный с общим состоянием экономики.

ПЦБ требует специального анализа, если он является нетривиальным, т.е. содержит два или более видов ценных бумаг. Предположим, что инвестор рассматривает вопрос о формировании портфеля из $m \geq 2$ ценных бумаг $A_i, i = 1,2,\ldots,m$. Информация, необходимая для принятия решения о формировании портфеля, включает: перечень будущих состояний экономики $Q_j, j = 1,2,\ldots,n$, вероятности их реализации $p_j, j = 1,2,\ldots,n$, доходности ценных бумаг каждого вида в каждом будущем состоянии экономики $x_{ij}, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n$.

Рассматривая вопрос о создании ПЦБ, инвестор должен определить для себя его параметры. Таковыми являются числовые характеристики отдельных ценных бумаг:

- ожидаемая доходность $\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,m$;
- риск вложения $\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_j \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2}, \quad i = 1,2,\ldots,m$

и структура ПЦБ $v = \left(v_1, v_2, \ldots, v_m\right) -$ специальный показатель, характеризующий долю стоимости ценных бумаг каждого вида в общей стоимости формируемого портфеля: $\nu_i = \dfrac{C_i k_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} C_i k_i}$; $\quad \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i = 1; \quad \nu_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,m$

(здесь C_i – стоимость приобретения единицы i-го актива, k_i – число активов i-го вида в ПЦБ).

На основе этих параметров строятся агрегированные параметры, характеризующие ПЦБ:

- доходность ПЦБ при его заданной структуре $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ при условии, что в будущем реализуется j-е состояние экономики $x_{Пj} = \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij}$;

- ожидаемая доходность ПЦБ в целом при его заданной структуре $\bar{x}_П = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_{Пj} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i \bar{x}_i$, т.е. ожидаемая доходность портфеля определяется как взвешенно средняя сумма ожидаемых доходностей ценных бумаг каждого вида, входящих в состав портфеля, причем в качестве весовых коэффициентов выступают показатели структуры данного портфеля;

- риск портфеля ценных бумаг в форме стандартного отклонения $\sigma_П = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \left(x_{Пj} - \bar{x}_П\right)^2} = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} - \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i \bar{x}_i\right)^2}$.

Последнее соотношение позволяет сделать вывод о том, что риск ПЦБ зависит от распределения доходности отдельных ценных бумаг, ожидаемой доходности портфеля и вероятностного распределения будущих состояний экономики.

В случае, когда портфель состоит только из двух видов ценных бумаг, его структура определяется парой чисел $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, а формула для оценки его риска обретает вид:

$$\sigma_П = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} p_j \left[\nu_1 x_{1j} + \nu_2 x_{2j} - \left(\nu_1 \bar{x}_1 + \nu_2 \bar{x}_2\right)\right]^2} . \tag{30}$$

В терминах дисперсии $\sigma_1^2 = \nu_1^2 \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \left(x_{1j} - \bar{x}_1\right)^2$, $\sigma_2^2 = \nu_2^2 \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \left(x_{2j} - \bar{x}_2\right)^2$ и ковариации доходностей $\sigma_{12} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \left(x_{1j} - \bar{x}_1\right)\left(x_{2j} - \bar{x}_2\right)$ эта формула записывается в виде:

$$\sigma_П = \sqrt{\nu_1^2 \sigma_1^2 + \nu_2^2 \sigma_2^2 + 2\nu_1 \nu_2 \sigma_{12}} = \sqrt{\nu_1^2 \sigma_1^2 + \nu_2^2 \sigma_2^2 + 2\nu_1 \nu_2 \sigma_1 \sigma_1 \rho_{12}} , \tag{31}$$

где $\rho_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$ – коэффициент корреляции, и предоставляет широкие возможности для анализа риска ПЦБ.

Известно, что значение ρ_{12} лежит на отрезке $-1 \le \rho_{12} \le 1$. Чем ближе значение коэффициента корреляции к единице, тем больше зависимость между доходностью активов, т.е. доходность одновременно относительно высокая или относительно низкая. В этом случае возможности диверсификации не слишком велики, и чем больше значение этого коэффициента, тем меньше влияние структуры портфеля на уменьшение его риска.

Если коэффициент корреляции отрицателен, то превышению доходности одного вида ценных бумаг над ожидаемой доходностью соответствует уменьшение доходности ценных бумаг другого вида по сравнению с ожидаемым значением. И чем ближе значение коэффициента к $\rho = -1$, тем больше структура портфеля влияет на уменьшение его риска и тем больше может быть сокращен риск портфеля по сравнению с риском отдельных активов, входящих в этот портфель. Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 4. При любой структуре портфеля, состоящего из ценных бумаг двух видов, риск портфеля меньше риска ценной бумаги с большим риском.

Утверждение 5. Существуют структуры портфеля, состоящего из ценных бумаг двух видов (с определенными характеристиками), при которых риск портфеля меньше риска ценной бумаги с меньшим риском.

В предположении, что $\sigma_2 < \sigma_1$, структура этого портфеля находится по формуле

$$v_1 < \frac{2\sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}; \; v_2 = 1 - v_1 > \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{32}$$

(параметры ценных бумаг должны обеспечивать выполнение неравенства $0 \le v_1, v_2 \le 1$).

Утверждение 6. Если коэффициент корреляции $\rho = -1$, существует структура портфеля, при котором его риск равен нулю, т.е. инвестор может осуществить безрисковое вложение своего капитала.

Структуру безрискового портфеля определяет формула

$$v_1 = \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2}, \; v_2 = 1 - v_1 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2}. \tag{33}$$

Утверждение 7. Существует портфель, состоящий из двух видов ценных бумаг, имеющий минимальный риск.

Формула структуры портфеля с минимальным риском имеет вид

$$v_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}\ ;\ v_2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}. \quad (34)$$

4.7. Функции полезности

До сих пор обоснование выбора решений осуществлялось с позиций объективиста, платежи выражались в форме реальных денег. Имеются многочисленные случаи, когда при анализе следует использовать скорее полезность, чем реальную величину платежей. Определение полезности является субъективным, оно зависит от отношения ЛПР к риску.

Для составления представления о склонности или несклонности к риску наиболее пригодно понятие простого шанса или простой лотереи, под которой понимается лотерея с двумя исходами, вероятности которых известны и в сумме равны 1, а также понятие гарантированного эквивалента, под которым понимается такой гарантированный доход, который для данного ЛПР эквивалентен простому шансу.

Простой шанс представляется набором $L = \{x_1, x_2, p\}$, где x_1 – выигрыш с вероятностью p, x_2 – выигрыш с вероятностью $(1 - p)$, $x_1 > x_2$. Например, если из 1000 лотерейных билетов 1 приносит выигрыш 1 млн. руб, а остальные - ничего, то такая лотерея представляет собой простой шанс вида $L = \{1, 0, 0.001\}$.

Под гарантированным эквивалентом понимают сумму, которую ЛПР согласно заплатить за право участия в простой лотерее. Склонность или несклонность ЛПР к риску определяется в зависимости соотношения ожидаемого выигрыша в простую лотерею и гарантированного эквивалента B.

Если гарантированный эквивалент B больше ожидаемого выигрыша в простую лотерею: $px_1 + (1 - p)x_2 < B$ и ЛПР согласен заплатить сумму, равную B, за право участия в данной лотерее, т.е. за $(100p)\%$ -й шанс выиграть x_1 д.е., то он считается склонным к риску. Если гарантированный эквивалент меньше ожидаемого выигрыша в простую лотерею, т.е. $px_1 + (1 - p)x_2 > B$ и ЛПР согласится заплатить за право участия в лотерее только B, то он не склонен к риску. Если гарантированный эквивалент для ЛПР совпадает с математическим ожиданием выигрыша в простую лотерею: $px_1 + (1-p)x_2 = B$, то ЛПР безразличен (нейтрален) к риску.

Определим функцию полезности на лотерее $L = \{x_1, x_2, p\}$: $u(x_1, x_2, p) = pu(x_1) + (1-p)u(x_2)$. Соответствие лотереи гарантированному эквиваленту означает, что их полезность для ЛПР одинакова: $u(B) = u(x_1, x_2, p) = pu(x_1) + (1-p)u(x_2)$. Учитывая, что функция полезности является возрастающей, получаем:

если ЛПР *склонен к риску,* то

$$u(B) = pu(x_1) + (1-p)u(x_2) > u(px_1 + (1-p)x_2), \tag{35}$$

и график функции полезности $u(x)$ является выпуклым вниз;

если ЛПР *не склонен к риску*, то

$$u(B) = pu(x_1) + (1-p)u(x_2) < u(px_1 + (1-p)x_2), \tag{36}$$

и график функции полезности $u(x)$ является выпуклым вверх;

если ЛПР *безразличен к риску*, то

$$u(B) = pu(x_1) + (1-p)u(x_2) = u(px_1 + (1-p)x_2) \tag{37}$$

и функция полезности $u(x)$ линейна.

Рассмотрим влияние свойств функций полезности на однозначность выбора оптимального решения на примере задачи о страховании. Почему одни люди страхуются, а другие нет? Кто принимает оптимальное решение, а кто ошибается? Оказывается, никто не ошибается, а все принимают оптимальные решения. Только это оптимальное решение является разным для различных типов функций полезности, т.е. не существует единственного оптимального решения.

Пусть финансовое состояние индивидуума оценивается заданным значением W. Предполагается, что можно вычислить вероятность p потери некоторой части этого богатства, измеряемой величиной $L \le W$ (например, в результате несчастного случая). Индивид может купить страховой полис, в соответствии с которым ему возместят нанесенный ущерб в размере q. Плата за страхование составляет πq, где π – доля страхования в объеме нанесенного ущерба. Проблема состоит в определении значения q.

Исследуем задачу максимизации ожидаемой полезности финансового состояния индивидуума в ситуации, когда с вероятностью p страховой случай происходит и с вероятностью $(1-p)$ – не происходит. Тогда задача сводится к поиску максимума по q ожидаемой полезности капитала индивида: $\left[pu(W-L-\pi q+q)+(1-p)u(W-\pi q)\right]\to \max!$

Применим необходимое условие оптимальности − продифференцируем выражение в квадратных скобках и приравняем производную к нулю (предполагается, что функция полезности вогнута − ЛПР не склонен к риску): $\left[pu'(W-L-\pi q+q)(1-\pi)+(1-p)u'(W-\pi q)(-\pi)\right]=0$.

Оптимальное значение q находится как решение получившегося уравнения в предположении, что вид функции полезности известен. Рассчитаем ожидаемую прибыль страховой компании, учитывая, что страховой случай имеет вероятностный характер.

Если страховой случай произошел, компания получает доход $(\pi q-q)$, иначе ее доход равен πq, ожидаемая прибыль страховой компании равна $q(\pi-p)$. Конкуренция между страховыми компаниями уменьшает прибыль, которая в условиях совершенной конкуренции стремится к нулю, т.е. $\pi\approx p$. Если это соотношение ввести в условие ожидаемой полезности, получим $u'\left(W-L+(1-\pi)q^*\right)=u'\left(W-\pi q^*\right)$.

Если ЛПР не склонен к риску (вторая производная функции полезности отрицательна), то из равенства первых производных следует равенство аргументов: $q^*=L$, т.е. страховаться целесообразно на сумму возможного ущерба.

4.8. Упражнения

1. При вложении средств в проект A прибыль 12 д.е. была получена в 50 случаях из 200, 15 д.е. - в 100 случаях, 20 д.е. - в 25 случаях. В 15 случаях прибыль не была получена, а в 10 случаях убытки составили 5 д.е. Определить: среднюю прибыльность проекта; коэффициент риска; дисперсию; стандартное отклонение; полудисперсию; коэффициент вариации, оценить вариабельность проекта.

2. Текущая цена акции некоторой компании равна 25 д.е. После работы группы финансовых менеджеров получены данные о цене акции в конце периода (табл. 14). Дать обоснованные рекомендации о целесообразности приобретения акций.

Таблица 14

Вероятность события	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

Цена акции в конце года, д. е.	20	22.5	25	30	40

3. Информация о доходности двух инвестиционных проектов в зависимости от состояний природы приведена в табл.15. Связаны ли эти проекты: отношением абсолютного доминирования; отношением доминирования по состояниям; отношением доминирования по вероятности?

Таблица 15

Состояния природы	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Вероятности	0.3	0.1	0.4	0.2
Проект *A*	10	30	25	20
Проект *B*	15	20	40	25

4. Акционерному обществу предлагаются два рискованных проекта *A* и *B*, информация о которых приведена в табл.16. Учитывая, что фирма имеет долг в 80 д.е., какой проект должны выбрать акционеры и почему (предполагается, что доходность проектов распределена по нормальному закону)?

Таблица 16

Проект *A*			
Вероятность события	0.2	0.6	0.2
Наличные поступления, д.е.	40	50	60
Проект *B*			
Вероятность события	0.4	0.2	0.4
Наличные поступления, д.е.	0	50	100

5. Фермер может выращивать либо кукурузу, либо соевые бобы. Вероятности того, что цены на будущий урожай этих культур повысятся, останутся на том же уровне или понизятся, равны соответственно 0.25, 0.3, 0.45. Если цены возрастут, урожай кукурузы даст 30000 д.е. чистого дохода, а урожай соевых бобов – 10000 д.е. Если цены останутся неизменными, фермер лишь покроет расходы. Но если цена станут ниже, урожай кукурузы и соевых бобов приведет к потерям 35000 и 5000 д.е. соответственно. Какую культуру следует выращивать фермеру?

6. Предположим, имеется возможность вложить деньги либо в 7.5%-ые облигации, которые продаются по номинальной цене, либо в специальный фонд, который выплачивает лишь 1% дивидендов. Если существует вероятность инфляции, процентная ставка возрастет до 8%, и в этом случае номинальная стоимость облигации увеличится на 19%, а цена акций фонда – на 20%. Если прогнозируется спад, то процентная ставка понизится до 6%. При

этих условиях ожидается, что номинальная стоимость облигаций поднимется на 5%, а цена акций фонда увеличится на 20%. Если состояние экономики останется неизменным, цена акций фонда увеличится на 8%, а номинальная стоимость облигаций не изменится аналитики оценивают в 20% шансы наступления инфляции и в 15% – наступление спада. Будете ли Вы покупать акции фонда или облигации, если решение относительно инвестиций принимается с учетом экономических условий следующего года?

7. Допустим, у Вас имеется возможность вложить деньги в три инвестиционных фонда открытого типа: простой, специальный, обеспечивающий максимальную долгосрочную прибыль от акций мелких компаний, и глобальный. Прибыль от инвестиций может измениться в зависимости от условий рынка. Существует 10%-ая вероятность, что ситуация на рынке ценных бумаг ухудшится, 50%-ая – что рынок останется умеренным и 40%-ая – рынок будет возрастать. Табл.17 содержит значения процентов прибыли от суммы инвестиций при трех вариантах развития рынка. Какой фонд открытого типа Вы выберете?

Таблица 17

Фонды	Ухудшающийся рынок	Умеренный рынок	Растущий рынок
Простой	+5	+7	+8
Специальный	–10	+5	+30
Глобальный	+2	+7	+20

8. Фирма планирует производство новой продукции быстрого питания в национальном масштабе. Исследовательский отдел убежден в большом успехе новой продукции и предлагает внедрить ее немедленно, без рекламной кампании на рынке сбыта фирмы. Отдел маркетинга положение дел оценивает иначе и предлагает провести активную рекламную кампанию. Такая кампания обойдется в 100000 д.е. и в случае успеха принесет 950000 д.е. годового дохода. В случае провала рекламной кампании (вероятность этого составляет 3%) годовой доход оценивается в 200000 д.е. Если рекламная кампания не проводится вовсе, годовой доход оценивается в 400000 д.е. при условии, что покупателям понравился товар (вероятность этого равна 0.8), и в 200000 д.е. с вероятностью 0.2, если покупатели останутся равнодушными к новой продукции. Как должна поступить фирма в связи с производством новой продукции

9. Автомобильный завод получает реле сигнала поворота от двух поставщиков *A* и *B*. Качество изделий характеризуется данными табл.18

Таблица 18

Процент брака	1	2	3	4	5
Вероятность для поставщика *A*	0.7	0.1	0.09	0.07	0.04
Вероятность для поставщика *B*	0.4	0.3	0.15	0.1	0.05

Полные затраты, связанные с ремонтом одного бракованного реле, составляют 5 д.е.. Реле поступают партиями по 20000штук; поставщик *B* уступает партию на 500 д.е. дешевле, чем *A*. Какого поставщика следует выбрать?

10. В производственном процессе партии товаров, имеющие 8, 10, 12 и 14% брака, выпускаются с вероятностями 0.4. 0.3, 0.25 и 0.05 соответственно. Производитель связан контрактами с тремя потребителями *A*, *B*, *C*. Условиями контрактов оговорено, что процент брака в партиях, направляемых потребителям, не должен превышать 8, 12, 14% соответственно. Если процент брака превышает обусловленный, штраф составляет 100 д.е. за 1% превышения. С другой стороны, производство партии более высокого качества, чем требуется, увеличивает затраты производителя на 50 д.е. за 1%. Кто из потребителей будет иметь наибольший приоритет в выполнении заказа?

11. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине может принимать значения 100, 150, 200, 120, 300 штук с вероятностями 0.2, 0.25, 0.3, 0.15, 0.1 соответственно. Если булочка не продана в тот же день, она может быть реализована за 0.15 д.н. к концу дня, свежие булочки продаются по 0.49 д.е. за штуку, затраты магазина на 1 булочку составляют 0.25 д.е. Определить, какое наибольшее число булочек следует заказывать ежедневно.

12. Компания, производящая стиральный порошок, работает в условиях свободной конкуренции. Порошок выпускается блоками, причем цена одного блока в будущем месяце является неопределенной: 10 д.е. с вероятностью 0.3, 15 д.е. с вероятностью 0.5 или 20 д.е. с вероятностью 0.2. Затраты на производство x блоков определяются зависимостью: $f(x) = 1000 + 5x + 0.0025x^2$. Определить суточный выпуск продукции компании, при котором ее средняя прибыль будет максимальной.

13. Спрос на некоторый товар, производимый монополистом, определяется зависимостью $x = 100 - 5p + 5y$, где y – достоверно неизвестный уровень дохода потребителей, который по оценкам экспертов принимает значения 2 с

вероятностью 0.6 и 4 с вероятностью 0.4, p – цена товара. Полные затраты на производство товара задаются функцией $f(x) = 4 + 4x + 0.05x^2$. Сколько товара должен выпускать монополист и по какой цене продавать, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль?

14. Компания «Вкусный сыр» поставляет сырную пасту в страны ближнего зарубежья. Вероятности того, что спрос на сырную пасту в течение месяца составит 6, 7, 8 или 9 ящиков, равны 0.1, 0.3, 0.5 и 0.1 соответственно. Затраты на производство одного ящика равны 45 д.е., компания продает каждый ящик за 95 д.е.; непроданный в течение месяца ящик портится и подлежит уничтожению. Сколько ящиков сырной пасты должна производить фирма, если исходить из критерия максимизации прибыли с учетом риска?

15. Магазин «Свежее молоко» продает сметану в розницу. Вероятности того, что спрос на сметану в течение недели составить 7, 8, 9 или 10 бидонов, соответственно равны 0.2, 0.2, 0.5 и 0.1. Покупка одного бидона сметаны обходится магазину в 70 д.е., а продается сметана по цене 110 д.е. за бидон. Если сметана не продается в течение недели, то она портится и магазин терпит убытки. Сколько бидонов сметаны целесообразно приобретать для продажи? Насколько рискованным является это решение?

16. Для отопления дома в зимний период используется уголь, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом тонна угля стоит 6 д.е., в мягкую зиму – 7 д.е., в обычную – 7.5 д.е., в холодную – 8 д.е. Расход угля в отопительный сезон определяется характером зимы: на мягкую зиму достаточно 4 т угля, на обычную требуется 5 т, а в холодную зиму расходуется 6 т угля. Вероятности зим: мягкой – 0.35, обычной – 0.5, холодной – 0.15. При необходимости недостающее количество угля можно приобрести и зимой. Дать рекомендации по созданию запаса угля, руководствуясь критерием минимума затрат с учетом риска.

17. Спрос на некоторое изделие принимает значения 0, 1, 2, 3. 4, 5 с вероятностями 0.1, 0.15, 0.4, 0.15, 0.1, 0.1 соответственно. Определить уровень запасов, при котором вероятность полного истощения запасов не превысит 0.45. Определить также уровень запасов при условии, что средние значения дефицита и излишков не превысят 1 и 2 единицы соответственно.

18. Фирма для технических целей использует в одном из своих производственных процессов химические препараты (химикалии). Срок годности этих препаратов составляет один месяц, после чего оставшуюся часть

их уничтожают. Объем используемых фирмой химических препаратов x (в литрах) является случайной величиной, распределенной по закону $f(x)=\begin{cases}\dfrac{200}{x^2}, & x\in[100,200]\\ 0, & x\notin[100,200]\end{cases}$. Реально химикалии используются на протяжении месяца в соответствии с равномерным распределением. Определить необходимое количество химических препаратов так, чтобы среднее количество оставшихся химикалий не превышало 20 л, а среднее количество недостающих химикалий не превышало 40 л в месяц.

19. Электроэнергетическая компания использует парк из 20 автомобилей для обслуживания электрической сети. Компания планирует периодический профилактический ремонт автомобилей. Вероятность поломки автомобиля по истечении t месяцев после профилактического ремонта равна p_t; числовые значения вероятностей даны в табл.19. Случайная поломка одного автомобиля обходится компании в 200 д.е., а профилактический ремонт в 50 д.е. Определить оптимальный период времени между планируемыми профилактическими ремонтами.

Таблица 19

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	≥10
p_t	0.05	0.07	0.1	0.13	0.18	0.23	0.33	0.43	0.5	0.55

20. Станок из группы в n=3 станков ремонтируется индивидуально, если он остановился из-за неисправности. Через T интервалов времени выполняется профилактический ремонт всех станков. Определить оптимальную длину цикла для профилактического ремонта, если вероятность выхода из строя одного станка в первый момент времени равна 0.03 и увеличивается на 0.01 для каждого последующего месяца, по десятый включительно. Начиная с одиннадцатого месяца, вероятность поломки сохраняется на уровне 0.13. Затраты на ремонт вышедшего из строя станка c_1=200 д.е., а затраты на профилактический ремонт одного станка c_2=15 д.е.

21. Автомат производит α тысяч единиц продукта ежедневно, при увеличении α доля брака p возрастает. Плотность распределения с.в. p задается формулой: $f(p)=\begin{cases}\alpha p^{\alpha-1}, & p\in[0,1]\\ 0, & p\notin[0,1]\end{cases}$. Годное изделие дает прибыль 5 д.е., бракованное − приносит убыток 50 д.е. При каком значении α ожидаемая прибыль принимает максимальное значение?

22. Предположим, что Вы хотите вложить на фондовой бирже 10000 д.е. в акции одной из двух компаний A или B. Акции компании A являются рискованными, но могут принести 50% прибыли от суммы инвестиций на протяжении следующего года. Если условия фондовой биржи будут неблагоприятны, сумма инвестиций может обесцениться на 20%. Компания B обеспечивает безопасность инвестиций с 15% прибыли в условиях повышения котировок на бирже и только 5% – в условиях понижения котировок. Все аналитические публикации, с которыми можно ознакомиться, с вероятностью 60% прогнозируют повышение котировок и с вероятностью 40% – их понижение. В какую компанию следует вложить деньги?

Предположим, что вместо того, чтобы полностью полагаться на эти данные, Вы решили посоветоваться с консультантом, который высказывает мнение «за» или «против» инвестиций. Это мнение количественно оценивается следующим образом: при повышении котировок его мнение с 90%-ой вероятностью будет «за», при снижении котировок вероятность мнения «за» уменьшится до 50%. Каким образом можно извлечь пользу из этой информации?

Предположим, что у Вас есть дополнительный вариант вложения средств, связанный с инвестированием 10000 д.е. в надежный депозит, который приносит 8% прибыли. Совет консультанта, по-прежнему, относится к инвестированию через биржу. Повлияет ли дополнительный вариант на Ваш выбор?

23. Информация для принятия решения в условиях риска задана матрицей доходов A (табл.20).

Таблица 20

Состояния природы	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Вероятности	0.2	0.1	0.3	0.4
A_1	10	20	-20	13
A_2	12	14	0	15
A_3	7	2	18	9

Проведен эксперимент, результаты которого Ω_1 и Ω_2 описываются условными вероятностями (табл.21).

Таблица 21

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Ω_1	0.1	0.2	0.7	0.4

Ω_2	0.9	0.8	0.3	0.6

Определить наилучшую стратегию ЛПР, не используя дополнительной информации и используя экспериментально полученные данные.

24. Электронные детали поступают на предприятие от поставщиков A и B. Поставщик A обеспечивает 75% всех деталей, доля брака в его продукции составляет 1%, доля брака в продукции поставщика B равна 2%. При проверке 5 деталей обнаружено только одна бракованная. Найти вероятность того, что эти детали получены от поставщика A.

25. Автор романа, который обещает быть популярным, имеет возможность либо самостоятельно напечатать роман, либо действовать через издательство. Издательство предлагает 20000 д.е. за подписание контракта. Если роман будет пользоваться спросом, будет продано 200000 экземпляров, в противном случае – лишь 10000 экземпляров. Издательство выплачивает авторский гонорар в сумме 1 д.е. за экземпляр. Исследование рынка, проведенное издательством, свидетельствует о том, что роман будет популярным с 70%-ой вероятностью. Если автор сам напечатает роман, то его затраты на маркетинг и печатание составят 90000 д.е., но в этом случае каждый проданный экземпляр принесет прибыль 2 д.е. Какое решение можно порекомендовать автору?

Предположим, что автор заключил договор с литературным агентом на исследование, связанное с потенциальным успехом романа. Исходя из предыдущего опыта, компания известила его, что, если роман будет пользоваться спросом, исследование предскажет неверный результат в 20% случаев. Если же роман не будет популярен, то исследование предскажет верный результат в 85% случаев. Как эта информация повлияет на решение автора?

26. Фермер может выращивать либо кукурузу, либо соевые бобы. Вероятности того, что цены на будущий урожай этих культур повысятся, останутся на том же уровне или понизятся, равны соответственно 0.25, 0.3, 0.45. если цены возрастут, урожай кукурузы даст 30000 д.е. чистого дохода, а урожай соевых бобов – 10000 д.е. Если цены останутся неизменными, фермер лишь покроет расходы. Но если цена станут ниже, урожай кукурузы и соевых бобов приведет к потерям 35000 и 5000 д.е. соответственно. Предположим, что фермер имеет дополнительный выбор, связанный с использованием земли как пастбища, что гарантированно принесет ему прибыль 7500 д.е. Кроме того, он получил дополнительную информацию от брокера, касающуюся степени

стабильности будущих цен на продукцию. Оценки брокера «благоприятный – неблагоприятный» представляют изменение в будущих ценах: соответственно «понижение», «такие же», «повышение», и выражаются количественно в виде условных вероятностей, заданных матрицей $P = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.5 & 0.85 \\ 0.85 & 0.5 & 0.15 \end{pmatrix}$. Определите оптимальное решение задачи в новых условиях.

27. Предприятие выпускает продукцию партиями фиксированного размера. Из-за сбоев в технологии с вероятностью 0.05 выпускается негодная партия, содержащая 15% бракованной продукции, годная партия содержит 4% брака. Продукция отправляется двум потребителям A и B. Контрактом оговорено, что процент бракованных изделий не должен превышать 5% и 8% соответственно. За 1% превышения установленных пределов брака предусмотрен штраф 100 д.е., производство партии более высокого качества увеличивает затраты на 80 д.е. за один процент. Целесообразно ли проведение эксперимента, состоящего в проверке двух деталей из подготовленной к отправке партии?

28. В производственном процессе партии товаров, имеющие 8, 10, 12 и 14% брака, выпускаются с вероятностями 0.4. 0.3, 0.25 и 0.05 соответственно. Производитель связан контрактами с тремя потребителями A, B, C. Условиями контрактов оговорено, что процент брака в партиях, направляемых потребителям, не должен превышать 8, 12, 14% соответственно. Если процент брака превышает обусловленный, штраф составляет 100 д.е. за 1% превышения. С другой стороны, производство партии более высокого качества, чем требуется, увеличивает затраты производителя на 50 д.е. за 1%. Перед отправкой партии потребителю группа из 2 изделий подвергается проверке. Кому из потребителей будет отправлена партия? Целесообразно ли проведение проверки?

29. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность одну из трех культур: A, B, C. Урожайность культур зависит от количества осадков, выпавших в течение года. Если осадков выпадет меньше нормы, то средняя урожайность культуры A составит 20ц; при количестве осадков, близком к норме – 5ц; если осадков выпадет больше нормы – 15ц. Для культуры B эти цифры равны 7.5, 12.5 и 5ц, для культуры C – 0, 7.5, 10ц. Априорные вероятности состояний природы равны 0.5, 0.3, 0.2 соответственно. Цена за 1ц культуры равна 2, 4, 8 д.е. соответственно. Определить целесообразность проведения идеального эксперимента стоимостью 10 д.е.

30. Возможно строительство четырех типов электростанций: A_1 (тепловых), A_2 (приплотинных), A_3 (безшлюзовых), A_4 (шлюзовых). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов (состояний природы) и задается матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ (д.е.). Определить целесообразность проведения идеального эксперимента стоимость 10 д.е., если априорные вероятности состояний природы равны 0.1, 0.4, 0.2 и 0.3 соответственно.

31. Оценить целесообразность проведения идеального эксперимента стоимостью c=30 д.е., если эффективность стратегий ЛПР (в д.е.) задана матрицей выигрышей (табл.22). Какое решение должен принять ЛПР?

Таблица 22

Состояния природы	Q_1	Q_2	Q_3
Вероятности	0.5	0.3	0.2
A_1	25	35	40
A_2	70	20	30
A_3	35	85	20
A_4	80	10	35

В тех же условиях выяснить, целесообразно ли проводить не идеальный эксперимент, затраты на который c=6 д.е. и который может привести к трем исходам Ω_1, Ω_2 и Ω_3, условные вероятности которых приведены в табл.23. Какую стратегию должен выбрать ЛПР, если эксперимент будет проведен?

Таблица 23

Исходы эксперимента	Q_1	Q_2	Q_3
Ω_1	0.3	0.5	0.6
Ω_2	0.6	0.2	0.4
Ω_3	0.1	0.3	0

32. Данные о доходности двух инвестиционных проектов приведены в табл.24. На основании табличных данных определить коэффициент вариации по каждому проекту, дать оценку неопределенности получения ожидаемых результатов. Найти оптимальную структуру портфеля инвестиций, рассчитать его характеристики: доходность и риск портфеля.

Таблица 24

Будущие состояния экономики	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4

Вероятности	0.05	0.5	0.3	0.15
Проект *A*	8.5	5.6	4.8	2.0
Проект *B*	3.9	6.7	8.2	12.6

33. Данные о доходности трех инвестиционных проектов приведены в табл.25. Выбрать наименее рискованных портфель инвестиций из двух вариантов, если по первому варианту доля проекта *A* составляет 40%, доля проекта *B* - 30%, доля проекта *C* - 30%, а по второму варианту - 15%, 35% и 50% соответственно.

Таблица 25

Будущие состояния экономики	Q_1	Q_2	Q_3
Вероятности	0.1	0.6	0.3
Проект *A*	28	20	15
Проект *B*	10	30	20
Проект *C*	25	18	32

34. Предположим, что Вы являетесь страстным болельщиком и имеете сильное желание присутствовать на очередном футбольном матче. Проблема в том, что входной билет стоит 10 д.е., а у Вас есть только 5 д.е. Вы можете рискнуть 5 д.е. в игре в рулетку с шансами 50 на 50 удвоить сумму или совсем ее потерять. Будете ли Вы, исходя из реальной стоимости денег, искушать судьбу, играя в рулетку? Учитывая ваше сильное желание присутствовать на матче, переведите наличные деньги в функцию полезности. Основываясь на функции полезности, которую Вы построили, примете ли Вы участие в игре?

35. Инвестиция в 10000 д.е. в предприятие с высоким уровнем риска имеет шанс 50 на 50 увеличить эту сумму до 14000 д.е. на протяжении следующего года либо уменьшить ее до 8000 д.е.. Таким образом, чистый доход составит либо 4000 д.е., либо (–2000) д.е.

Принимая позицию нейтрального к риску инвестора и шкалу полезности от 0 до 100, определите полезность 0 д.е. чистого дохода и соответствующую «нейтральную» вероятность.

Пусть два инвестора *A* и *B* определили следующие «нейтральные» вероятности (табл.26).

Таблица 26

Чистая прибыль, д.е.	Инвестор *A*	Инвестор *B*
–2000	1.00	1.00
–1000	0.30	0.90

0	0.20	0.80
1000	0.15	0.70
2000	0.10	0.50
3000	0.05	0.40
4000	0.00	0.00

Постройте графики функций полезности инвесторов *A* и *B*, охарактеризуйте их отношение к риску.

Предположим, что инвестор *A* имеет возможность осуществить инвестицию в одно из двух рискованных предприятий. Инвестиция в первое предприятие может принести прибыль в сумме 3000 д.е. с вероятностью 0.4 или убыток в 1000 д.е. с вероятностью 0.6. Инвестиция во второе предприятие может принести прибыль в 2000 д.е. с вероятностью 0.6 или вовсе не принести прибыль с вероятностью 0.4. Используя построенную функцию полезности инвестора *A*, определите предприятие, которое ему следует выбрать. Проделайте то же самое для инвестора *B*.

36. Имеется функция полезности благосостояния $u(W)=\ln(W)$ и текущий уровень благосостояния *W*=5000 д.е. С вероятностью 50 на 50 можно выиграть и проиграть 1000 д.е. Если можно за 125 д.е. купить страховой полис, который полностью устраняет риск, купите вы его или предпочтете игру?

Вы играли в лотерею и проиграли 1000 д.е. Согласитесь ли вы при втором розыгрыше лотереи купить страховой полис на тех же условиях?

37. ЛПР имеет функцию полезности $u(W)=\sqrt{W}$, его начальное состояние равно 4 д.е. У него есть лотерейный билет, по которому с вероятностью 0.5 он может выиграть 12 д.е. и с вероятностью 0.5 не выиграть ничего. Найти ожидаемую полезность игры и вычислить минимальную сумму, за которую он продал бы лотерейный билет.

38. Пусть функция полезности для бизнесмена имеет вид *u*=10+2*M*, где *M* - денежный выигрыш (д.е.). Он имеет возможность вложить 25 д.е. в строительство бара и гриля. С вероятностью 0.5 он потеряет весь капитал и с той же вероятностью выиграет 32 д.е. Определить, следует ли инвестировать вообще? Если будет сделано инвестирование, то какова его ожидаемая полезность?

39. Предположим, что Ваша функция полезности определяется логарифмической зависимостью $u(W)=\ln(W)$ и Вы сталкиваетесь с ситуацией, когда можете с равными шансами выиграть и проиграть 1000 д.е. Сколько Вы

готовы заплатить, чтобы избежать риска, если текущий уровень Вашего благосостояния равен 10000 д.е. Сколько бы Вы заплатили, если бы Ваше состояние было 1000000 д.е.?

40. Управляющий банком во время отпуска желает совершить кругосветное путешествие, которое стоит 10000 д.е. Полезность путешествия зависит от количества денег, потраченных на отдых, и эта зависимость выражается формулой $u(W)=\ln(W)$. Если существует вероятность 0.25 потерять во время путешествия 1000 д.е., то какова ожидаемая полезность кругосветного путешествия?

Отдыхающий банкир может приобрести страховку от потери 1000 д.е. Какова максимальная сумма, которую он готов заплатить за эту страховку?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике. М.: Финансы и статистика, 2000. 368 с.

2. Воронцовский А.В. Управление рисками: Учеб.пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб.ун-та, 2000. 206 с.

3. Грачева М.В. Анализ проектных рисков: Учеб.пособие. М.: ЗАО «Финстатинформ», 1999. 216 с.

4. Карданская Н.Л. Принятие управленческого решения: Учебник для вузов. М.: ЮНИТИ, 1999. 407 с.

5. Катулев А.Н., Северцев Н.А. Исследование операций: принципы принятия решений и обеспечение безопасности. Учеб.пособие. М.: Физико-математическая литература, 2000. 320 с.

6. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: Математическое программирование: Учеб. / Под общ.ред. А.В. Кузнецова. Мн.: Выш.шк., 1994. 286 с.

7. Лабкастер Л.Г., Бабешко Л.О. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом: Учеб.пособие. М.: Дело, 2001. 464 с.

8. Михайлов В.И. Как принимать решения: Учеб.пособие. Спб.: ООО «Издательство «Химера», 1999. 200 с.

9. Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе: Учеб.пособие / А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталев, Т.П. Барановская; Под ред. Б.А. Лагоши. - 2-е изд., перераб.и доп. М.: Финансы и статистика, 2001. 224 с.

10. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование: Учеб.пособие / А.В. кузнецов, В.А. Саковиц, Н.И. холод и др. / Под общ.ред. А.В. Кузнецова. Мн.: Выш.шк., 1995. 382 с.

11. Таха Х.А. Введение в исследование операций, 6-е издание.: Пер.с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. 912 с.

12. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации и принятия решений: Учеб.пособие. СПб.: Издательство «Лань», 2001. 384 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике. М.: Финансы и статистика, 2000. 368 с.

2. Воронцовский А.В. Управление рисками: Учеб.пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб.ун-та, 2000. 206 с.

3. Грачева М.В. Анализ проектных рисков: Учеб.пособие. М.: ЗАО «Финстатинформ», 1999. 216 с.

4. Карданская Н.Л. Принятие управленческого решения: Учебник для вузов. М.: ЮНИТИ, 1999. 407 с.

5. Катулев А.Н., Северцев Н.А. Исследование операций: принципы принятия решений и обеспечение безопасности. Учеб.пособие. М.: Физико-математическая литература, 2000. 320 с.

6. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: Математическое программирование: Учеб. / Под общ.ред. А.В. Кузнецова. Мн.: Выш.шк., 1994. 286 с.

7. Лабкастер Л.Г., Бабешко Л.О. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом: Учеб.пособие. М.: Дело, 2001. 464 с.

8. Михайлов В.И. Как принимать решения: Учеб.пособие. Спб.: ООО «Издательство «Химера», 1999. 200 с.

9. Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе: Учеб.пособие / А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталев, Т.П. Барановская; Под ред. Б.А. Лагоши. - 2-е изд., перераб.и доп. М.: Финансы и статистика, 2001. 224 с.

10. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование: Учеб.пособие / А.В. Кузнецов, В.А. Саковиц, Н.И. холод и др. / Под общ.ред. А.В. Кузнецова. Мн.: Высш.шк., 1995. 382 с.

11. Таха Х.А. Введение в исследование операций, 6-е издание.: Пер.с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. 912 с.

12. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации и принятия решений: Учеб.пособие. СПб.: Издательство «Лань», 2001. 384 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

СИЛКИНА Галина Юрьевна

ПРИНЯТИЕ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ:
ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ПРАКТИКА

Учебное пособие
Редактор
Технический редактор
Директор издательства
Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Сдано в набор Подписано в печать Формат 60×84/16.
Печать офсетная. Усл.печ.л. Уч.-изд.л. Тираж 300. Заказ . С

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.
Издательство СПбГПУ, член Издательско-полиграфической ассоциации
вузов Санкт-Петербурга.
Адрес университета и издательства: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.