**Санкт-Петербургский государственный политехнический университет**

**Инженерно-экономический институт**

**Международная высшая школа управления**

**Кафедра «Международный бизнес»**

Тихомиров А.Ф

# ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2013

# СОДЕРЖАНИЕ

# 1. ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

## 1.1. Проценты и процентные вычисления

Процентом (%) какой-либо величины называется сотая доля этой величины – от лат. pro centum («на сотню»). **Процент как число**, указывающее на часть целой величины, или ее долю, хорошо знаком нам со средней школы и широко используется в экономике – при исчислении сумм налоговых платежей, амортизационных отчислений и проч.

В частности, законодательно установлена величина налога на доходы физических лиц – НДФЛ (в России – 13%); налога на добавленную стоимость (НДС) (18% от стоимости товара, услуги). В первом примере **базой** для начисления налога является доход гражданина, во втором - стоимость товара. Правильное определение базы является залогом успешного решения задач на нахождение процентных чисел.

Примеры.

**1.1. В некоторых странах (например, в США) при продаже товаров и услуг применяется налог с продаж, ставка которого устанавливается правительством каждого штата. Этот налог не указывается в цене и начисляется при оплате покупки.**

**Покупатель приобрел в супермаркете товары на сумму $ 25,86. Какую сумму S он должен будет заплатить в кассе, если налог с продаж составляет 8,5%?**

Базой для начисления налога является стоимость товаров, составляющая в нашем случае $ 25,86. Сумма налога составляет известную (8,5%) долю от базы. В кассе покупатель должен заплатить как стоимость товаров, так и сумму налога, т.е.:

S = $25,86 + 0,085*$25,86 =$25,86 +$2,20 = **$28,06**

**1.2. В РФ налог с продаж не используется, но применяется НДС. В платежных поручениях при оплате товаров и услуг указывают сумму сделки и отдельно величину НДС. Какова будет сумма НДС, если сумма всего платежа S составляет 12 479, 68 руб.?**

Очевидно, базой для расчета процента как доли всего платежа является стоимость товара.

Цена + НДС = P + 0,18P = (1+0,18)P = S.

Отсюда: P = S:1,18 = 12479,68:1,18 = 10576 руб.

НДС = 12 479,68 – 10576 = **1903,68 руб.**

В сфере финансов используют и другое, основное в данном направлении, понятия процента. Речь идет о начислении некоторых сумм, называемых **процентными платежами**, за определенные промежутки времени. При этом термин «процент» в финансах можно понимать двояко:

- как собственно сумму платежа, полученную или уплаченную тем или иным лицом. Эту сумму в прежние времена называли *интересом* (interest), что достаточно точно, как станет ясно ниже, отражает смысл финансовых операций, связанных с уплатой процентных платежей;

- как **процентную ставку** (ставку процента, interest rate), используемую при начислении процентного платежа.

Например, размещая деньги на банковский депозит, клиент учитывает годовую процентную ставку (interest rate) – предположим, 10%, а по истечении срока депозита получает доход, пропорциональный первоначально вложенной сумме. При размещении на депозите 100.000 руб. на один год доход («интерес») составит 10.000 руб.

Вопросы, связанные с исчислением процентных платежей и будут подробно рассмотрены нами в данном курсе.

***Задачи для самостоятельной работы***

1. В РФ применяется налог на добавленную стоимость – НДС, равный 18 %. В платежных поручениях при оплате товаров и услуг указывают сумму сделки и отдельно величину НДС. Чему будет равен НДС, если сумма всего платежа составляет 157 860 руб.?
2. При покупке станка производственная фирма заплатила НДС в размере 215.856 руб. В какую сумму обошелся станок фирме?
3. В результате двукратного повышения цены на одно и то же число процентов цена автомобиля увеличилась с 650,0 до 786,5 тыс. рублей. На сколько процентов повышалась цена каждый раз? ***(10%)***
4. На сколько процентов увеличилась конечная цена автомобиля в задаче 3?***(21%)***
5. Налог на доходы физических лиц (НДФЛ) в России составляет 13%. Какой среднемесячный доход получал гражданин N в 2008 году, если сумма уплаченного им НДФЛ за год составила 48 256 руб.? ***(30933,3)***

## 1.2. Деньги и время. Операции наращения и дисконтирования.

Одной из базовых концепцией финансов является концепция временной стоимости денег (**Time Value of Money**) [1-4]. В ее основе лежит достаточно очевидное положение, согласно которому деньги, в зависимости от времени их поступления к субъекту, имеют для него различную ценность. Наибольшую ценность имеют наличные средства, поскольку они могут быть немедленно использованы для потребления. Чем далее отстоит от настоящего момента дата поступления денежных средств к субъекту, тем меньшую ценность они представляют для него.

Пример.

**1.3. Вы хотите приобрести мобильный телефон за 10.000= рублей, но денег на эту покупку нет. Данная сумма появиться у Вас только через год, но потребность в ней существует в данный момент. Чтобы приобрести телефон сейчас нужно взять деньги взаймы и вернуть заем через год.**

**Предположим, что Вы договорились с банком о кредите на 10.000=руб. и через год должны вернуть в банк 12.000= рублей.**

**Таким образом, получается, что 1 рубль сегодня равен 1,2 рублям, которые будут у Вас через год.**

В современном мире деньги, однако, могут быть использованы не только на потребление. Их можно направить на расширение производства, развитие торговли, инфраструктуры, социальной сферы. В этом случае речь идет об инвестициях. Собственник денежных средств – *инвестор, кредитор* – ожидает в будущем получить сумму, которая компенсировала бы ему отказ от сиюминутного, сегодняшнего потребления, т.е. своеобразную **плату** за передачу денежных средств во временное пользование заемщику. При этом фактор времени при инвестициях также играет важнейшую роль. Стремление собственника денежных средств заработать, отказавшись от сиюминутного потребления, лежит в основе важнейшей экономической категории – **кредита**.

Простейшим видом финансовой сделки является однократное предоставление в долг некоторой суммы **PV** (Present Value) с условием возвращения через некоторое время суммы **FV** (Future Value). В рассмотренном нами примере 10 000 рублей – это Present Value , а 12 000 рублей - Future Value суммы, которую необходимо уплатить за телефон.

В этом случае лицо, предоставившее заем – кредитор - рассчитывает в будущем на возвращение не только выданной в долг суммы PV, но и некоторой «компенсирующей» ему отказ от немедленного использования денег добавки $\Delta(PV)$:

$$\mathbf{FV = PV + \Delta(PV)}$$

Величина этой добавки есть предмет соглашения сторон сделки. Очевидно, ее удобно привязать к величине выдаваемой суммы, выразив как долю r от PV. Кроме того, она должна зависеть и от времени t, на которое осуществляется заем. Следовательно, можно записать:

$$\mathbf{FV = PV + r(t)*PV = PV[1+r(t)]} \qquad \mathbf{(1.1)}$$

Таким образом, экономический смысл операции наращивания состоит в определении той суммы, которой будет обладать инвестор по окончании сделки (наращенной суммы).

Эффективность данной сделки для кредитора и принято оценивать с помощью **ставки процента,** которую рассчитывают по формуле**:**

$$\mathbf{r(t) = (FV - PV)/ PV} \qquad \mathbf{(1.2)}$$

Примеры

**1.4.Определите ставку процента в предыдущем примере 1.3.**

В соответствие с формулой **(1.2),**

*r(t) =(FV-PV)/PV = (12000-10000)/10000 = 0,2=**20%***

**1.5. Какую сумму необходимо будет вернуть кредитору, если получен заем 10,0 млн. руб. сроком на 1 год по ставке 20 % годовых?**

В соответствие с **(1.1)**,

*FV =PV(1+r(t))= 10,0(1+0,2)=**12,0 (млн.руб.)***

В практике финансовых сделок встречается и другой вид операций, получивший название «**дисконтирование**». Дисконтом (англ. discount - скидка) называют вид процентного дохода, вычитаемый из суммы ссуды в момент ее выдачи. Дисконтирование сумм связано прежде всего с обращением **векселей**.

Простой вексель есть безусловное абстрактное письменное обязательство одного лица выплатить другому лицу указанную в векселе сумму (номинал векселя) в указанную дату и в определенном месте. Вексель является ценной бумагой и всегда выпускается в документарной (т.е. бумажной) форме. Таким образом, в векселе фиксируется сумма, которую заемщик должен выплатить в будущем при погашении данного долгового обязательства. Очевидно, что, с учетом (1.1), сумма, которую он получает на руки (PV) будет меньше номинала векселя (FV) на величину дисконта:

$$PV = FV - FV*d(t) = FV[1-d(t)] \tag{1.3}$$

Вексель несколько столетий широко используется в хозяйственном обороте. Несмотря на то, что это инструмент преимущественно краткосрочных сделок (не более одного года, а на практике – несколько месяцев), у держателей векселей часто возникает потребность получить денежные средства не дожидаясь срока погашения. Такая операция называется **учетом** векселя. Учетом векселей занимаются специализированные фирмы - «факторы», либо коммерческие банки. При учете векселя используется операция дисконтирования, важнейшим параметром которой, как и при выдаче ссуды, является **ставка дисконта (учетная ставка)**:

$$d(t) = (FV - PV) / FV \tag{1.4}$$

Экономический смысл дисконтирования заключается в определении стоимости в настоящий момент той суммы, которую инвестор получит по окончании операции (текущей стоимости PV “будущих” денег).

<u>Пример.</u>

**1.6. Какую сумму получит на руки заемщик, если кредит выдан на 1 год со ставкой дисконта 20% при условии возврата 3,0 млн. руб.?**

В соответствие с **(1.3)**, *PV = FV(1-d(t)) = 3,0(1-0,2) = 2,4. (млн.руб.)*

Настоящая и будущая стоимости денег, таким образом, связаны между собой соотношением:

$$PV = FV/[1+r(t)] = FV\,[1 - d(t)] \tag{1.5}$$

Отсюда находим, что обе ставки – процента и дисконта - взаимосвязаны между собой (закон эквивалентности процентной и учетной ставок):

$$r(t)=d(t)/[1 - d(t)]; \quad d(t)= r(t)/[1 + r(t)] \tag{1.6}$$

Таким образом, для операции дисконтирования можно использовать ту же ставку процента **r**, что и при определении наращенной суммы, что удобно в практической деятельности финансовых учреждений и имеет свое объяснение:

обе ставки определяют **величину вознаграждения**, которое получает кредитор или инвестор от заемщика, получающего денежные средства во временное пользование.

Пример.

**1.7. Коммерческий банк учитывает векселя по учетной ставке 12,5%. Определить, процентную ставку, по которой он выдает кредиты.**

В соответствие с (1.6), *r(t)=d(t)/[1 - d(t)] = 0,125/(1-0,125) = 0,1429 или* ***14,29%***

## 1.3. Приведение к базовому периоду. Простые и сложные проценты

Очевидно, что результаты операций наращения и дисконтирования, а также величины r(t) и d(t) будут зависеть от времени t, которое длится операция. Чтобы избежать неоднозначности, в финансовых расчетах принято указывать величину ставки процента (**r**) и дисконта (**d**), отнесенные к базовому периоду времени t = 1 год, или в **процентах годовых.** Величины ставки процента и ставки дисконта за фактический период времени **t** определяются по некоторым стандартным правилам.

Приведение к базовому периоду по схеме **простых процентов** используется при длительности периода менее 1 года. В этом случае:

$$\mathbf{r(t) = rT\,,\ \ d(t) = dT} \qquad (1.7)$$

где r – величина ставки, выраженная в процентах годовых; T = n/365(или 366) = k/12 – безразмерная относительная длительность фактического периода времени, составляющего n дней или k месяцев.

Примеры

**1.8. Выдана ссуда 120,0 млн. руб. из расчета 24% годовых на 4 месяца. Какова будет сумма погасительного платежа?**

В соответствие с (1.1) и (1.7) :

*FV = PV(1+rT) = 120,0[1 + 0,24(4/12)] =* ***129,6 (млн.руб.)***

**1.9. Вексель на 2,0 млн. рублей, выданный на 1 год со сроком погашения 16 мая, был предъявлен к учету 01 апреля. Банк согласился учесть вексель со ставкой дисконта 24% годовых. Какую сумму получил держатель векселя?**

Согласно (1.4) и (1.7):

*PV = FV(1-dT) = 2,0[1 – 0,24(45/360)] =* ***1,941 (млн.руб.)***

Приведение к базовому периоду по схеме **сложных процентов** используется при расчетах, охватывающих периоды времени более одного года. В частности, сумма, получаемая единовременно по истечении **n** полных лет при ставке процента $\mathbf{r_i}$ (будущая стоимость):

$$\mathbf{FV_n = PV\,(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_n)} \qquad (1.8)$$

По итогам каждого года капитал как бы изымается из оборота с начисленными простыми процентами и тут же вкладывается вновь (**реинвестируется**) по новой ставке процента.

В случае, если процентная ставка остается неизменной на протяжении n периодов, соотношение (1.8) несколько упрощается:

$$\mathbf{FV = PV\,\underbrace{(1+r)\,(1+r)\ldots(1+r)}_{n} = PV(1+r)^n} \quad \mathbf{(1.9)}$$

Приведенная (настоящая) стоимость суммы $\mathbf{FV_n}$ , предназначенной к получению через **n** периодов:

$$\mathbf{PV = FV_n / (1 + r)^n}$$

Выражение $\mathbf{1/(1 + r)^n}$ называют также **дисконтирующим множителем,** а $\mathbf{(1 + r)^n}$ **– факторным множителем.**

В случае, если рассматривается период, не кратный целому числу лет, то для части фактического периода, кратного целому числу лет, используется соотношение (1.8), а для остатка интервала, длительностью менее года - соотношение (1.2) с учетом (1.7).

Пример.

**1.10. Вклад в размере 100,0 тыс. руб. размещен в коммерческом банке сроком на 2 года на условиях, согласно которым на него ежегодно будут начисляться проценты в размере 80% от ставки рефинансирования Банка России. В 2007 г. ставка рефинансирования составила 12,5%; в 2008 -–11% годовых. Какая сумма оказалась на счете 1 января 2009 г.?**

Согласно (1.8),

$FV=PV(1+r_1)(1+r_2)=100{,}0(1+0{,}125*0{,}8)(1+0{,}11*0{,}8)=100*1{,}1*1{,}088=$***<u>119,68</u>*** *(тыс.руб.)*

Сложные проценты могут начисляться и за период, не равный году – при т.н. внутригодовом начислении процентов. Схема наращения при внутригодовом начислении:

$$\mathbf{FV_m = PV\,[1+(r/m)]^{mT}} \quad \mathbf{(1.10)}$$

где m – число начислений в году; T – относительное время.

Пример.

**1.11. Выдан кредит 20,0 млн. рублей под 24% годовых сроком на 1,5 года с ежеквартальным начислением процентов. Какова будет сумма погасительного платежа?**

Воспользуемся соотношением (1.10):

$FV_6 = 20{,}0(1+0{,}24/4)^{4x1{,}5} = 20{,}0(1+0{,}06)^6 =$***<u>28,370(млн.руб.)</u>***

**1.12.Какой будет сумма платежа при ежемесячном начислении процентов?**

Воспользуемся тем же соотношением (1.10):

$FV_{12} = 20{,}0(1+0{,}24/12)^{12x1{,}5} = 20{,}0(1+0{,}02)^{18} =$ ***<u>28,565 (млн.руб.)</u>***

**1.13.Какой будет сумма платежа при начислении процентов 2 раза в год?**

В соответствие с (1.7)

$FV_1 = 20{,}0(1+0{,}12)^3 =$ ***<u>28,099(млн.руб.)</u>***

Таким образом, из приведенного примера видно, что чем чаще производится начисление процентов в пределах фиксированного промежутка времени, тем больше сумма платежа. Покажем, что при неограниченном увеличении m наращенная сумма стремится к конечному пределу: $FV_m \rightarrow FV_\infty$.

Действительно,

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{FVm} = \lim_{m\to\infty} \mathbf{PV} \left[\mathbf{1} + (\mathbf{r}/\mathbf{m})\right]^{\mathbf{mT}}.$$

Обозначим $r/m$ через x. Тогда m = r/x и при m→∞ x→0, и:

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{PV} \left[\mathbf{1} + (\mathbf{r}/\mathbf{m})\right]^{\mathbf{mT}} = \lim_{x\to 0} \mathbf{PV} \left[\mathbf{1} + x\right]^{\frac{r}{x}\mathbf{T}} = \lim_{x\to 0} \mathbf{PV} \left[\mathbf{1} + x\right]^{\frac{1}{x}\mathbf{T}r},$$

где $\lim_{x\to 0} [1 + x]^{\frac{1}{x}} = e = 2{,}71828\ldots$-основание натурального логарифма. Отсюда:

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{FVm} = \mathbf{PVe^{rT}}$$

Данное соотношение описывает случай **непрерывного начисления процентов** по годовой ставке, которая в этом случае называется силой роста $r_\infty$. Наращенная за время T сумма определяется соотношением:

$$\mathbf{FV_\infty = PV}e^{rT} = \mathbf{PVe^{Tr_\infty}} \qquad \mathbf{(1.11)}$$

<u>Пример.</u>

**1.14. Определить сумму платежа при непрерывном начислении процентов по условиям примера 1.11.**

В соответствие с (1.11):

$FV_\infty = PVe^{Tr_\infty} = 20{,}0e^{1{,}5x0{,}24}$ = ***<u>28,667(млн.руб.)</u>***

Сравнив полученный результат с результатом примера 1.12, видим, что сумма, полученная при непрерывном начислении процентов лишь немногим больше, чем при ежемесячном.

Соответственно, дисконтирование при непрерывном начислении процентов необходимо осуществлять по формуле:

$$\mathbf{PV = FV_\infty e^{-Tr_\infty}} \qquad \mathbf{(1.12)}$$

## <u>1.4. Эквивалентность ставок. Эффективная ставка процента.</u>

Участники финансовых сделок используют различные по величине ставки при различных методах начисления процентов. Ставки простых процентов отличаются от ставок сложных процентов, а те, в свою очередь, могут изменяться в зависимости от периода начисления и т.д. При этом каждая сторона стремиться к наиболее выгодным для себя условиям. Для сравнения контрактов с различными условиями необходимо уметь приводить различные процентные ставки к одному виду исходя из принципа эквивалентности процентных ставок.

Согласно этому принципу, **две процентные ставки считаются эквивалентными, если применение их к одинаковым суммам в течение одинаковых промежутков времени дает одинаковые наращенные (или дисконтированные) суммы**.

Пример.

**1.15. Банк начисляет на вклады продолжительностью 3 года сложные проценты по ставке $r^{(1)}$= 12% годовых в конце каждого года. Определить эквивалентную ставку простых процентов $r^{(0)}$.**

Для каждой из схем начисления процентов, в соответствие с (1.1) и (1.9):

$FV^{(1)} = PV^{(1)}(1+ r^{(1)})^3$ ;

$FV^{(0)} = PV^{(0)}(1+ r^{(0)}+r^{(0)} + r^{(0)} )= PV^{(0)}(1+ 3r^{(0)} )$;

В соответствие с принципом эквивалентности ставок:

$PV^{(1)} = PV^{(0)}; \quad FV^{(1)} = FV^{(0)}$

Следовательно,

$(1+ r^{(1)})^3 =(1+ 3r^{(0)} )$; откуда:

$r^{(0)} = \frac{1}{3}[ (1+ r^{(1)})^3 -1] = \frac{1}{3} [(1+0,12)^3 -1]= 0,135 =$ **13,5%**

Широко используемым видом эквивалентной ставки является так называемая **эффективная ставка процента $r_e$.** Эффективной называется годовая ставка сложных процентов, задающая соотношение между PV и FV, которое получается при любых схемах выплат. Иными словами, эффективной ставкой называется значение $r_e$ , обеспечивающее переход от PV к FV при заданных значениях этих показателей по формуле:

$$\mathbf{FV = PV(1 + r_e)^T},$$

откуда:

$$\mathbf{r_e = (FV/PV)^{1/T} - 1} \qquad \mathbf{(1.13)}$$

Пример.

**1.16. Инвестору предлагают вложить 2.0 млн. руб. в строительство коттеджа, реализация которого через 2 года принесет 3,0 млн. руб.**

**Какова эффективная ставка процента $r_e$ в данной финансовой операции?**

**Что выгоднее для инвестора – участвовать в этой операции или положить деньги на банковский депозит, ставка по которому, r = 22% годовых ?**

Согласно (1.13),

$r_e = (3,0/2,0)^{1/2} – 1 = \sqrt{1,5} - 1 =$ **0,225 (22,5%)**

Таким образом, $r_e$ больше, чем r.

**1.17. Изменится ли мнение инвестора, если начисление процентов по депозиту будет происходить ежеквартально при том же значении ставки r?**

Вычислим эффективную ставку по депозиту в изменившихся условиях. В соответствие с (1.10),

$FV_m = PV [1+(r/m)]^{mT} = 2,0(1+0,22/4)^{4x2} =2(1,055)^8 =3,07$ *(млн.руб.);*

а эффективная ставка составит:

$$r_e = (3{,}07/2{,}0)^{1/2} - 1 = \sqrt{1{,}535} - 1 = \underline{\mathbf{0{,}239\ (23{,}9\%)}}$$

***<u>Задачи для самостоятельной работы к разделу 1</u>***

**1.1.**Выдана ссуда в размере 30 000 рублей сроком на 18 месяцев с условием возврата 48000 рублей. Какова эффективная ставка процента в этой сделке? ***(37%)***

**1.2**. Рассчитайте будущую стоимость 1000 рублей для следующих ситуаций:
а) срок 5 лет, ставка 8 % годовых при ежегодном начислении процентов;
б) срок 5 лет, ставка 8 % годовых при ежеквартальном начислении процентов. ***(1469; 1486)***

**1.3**.Среднемесячная инфляция составляет 7 %. Какой должна быть годовая ставка по банковскому депозиту, чтобы полностью компенсировать инфляционные потери инвесторов за год? ***(125%)***

**1.4.** Предприятие получило банковскую ссуду в размере 2.400.000 рублей сроком на 9 месяцев под 42% годовых. Договор предусматривает возврат суммы долга равными частями путем ежеквартальных выплат вместе с начисленными процентами. Определить размер каждого платежа.(***1052000; 968000 и 884000 руб.)***

**1.5.** Оцените эффективную процентную ставку в торговой операции, связанной с приобретением партии товара оптом на сумму 1.046.500 рублей и продажей в розничной торговле с получением выручки от реализации в сумме 1.365.000 рублей через 4 месяца. Издержки реализации и налоги составляют 134.500 рублей. ***(62,6% годовых)***

**1.6.** По окончании третьего года на счете инвестора находится сумма 21 074 руб. Начисление происходило по схеме сложного процента по ставке 12% в конце каждого года. Рассчитайте первоначальную сумму вклада. ***(15000)***

**1.7.** По окончании 2-го года на счете клиента банка находится сумма 13 685.7 руб. Начисление процентов в банке происходило по схеме сложного процента в конце каждого квартала по ставке 16% годовых. Рассчитайте первоначальную сумму вклада. ***(10000 руб.)***

**1.8.** Банк А выплачивает сложные проценты раз в полгода по ставке 15% годовых. Банк Б выплачивает простые проценты. Вкладчик разместил по 10 000 руб. в банках А и Б сроком на 3 года. Какую процентную ставку должен начислять банк Б, чтобы по итогам 3-х лет суммы в банках А и Б были одинаковы? ***(17,36%)***

**1.9.** Вкладчик положил в банк некоторую сумму в начале 1996 г. Банк начисляет с периодичностью раз в полгода простые проценты по следующим годовым процентным ставкам: 1996 г. - 90% от ставки рефинансирования ЦБ РФ; 1997 г.- 80% от ставки рефинансирования ЦБ РФ; 1998 г. - 70% от ставки рефинансирования ЦБ РФ. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите, какую сумму он положил в банк, если на его счете в середине 1997 г. было 55 000 руб. Для ставки ЦБ РФ принять значения: 1996 г. - 150%; 1997 г. - 100%; 1998 г. - 50%. ***(20000 руб.)***

**1.10.** Определить годовую процентную ставку начисляемых ежегодно сложных процентов при условии, что сумма вклада удваивается за 4 года. ***(18,92%)***

**1.11.**Банк выплачивает сложные проценты. Вкладчик разместил в банке 10 000 руб. Какую минимальную процентную ставку должен обеспечить банк для того, чтобы вкладчик через два года имел на счете 25 000 руб. ***(58,11%)***

**1.12.** Вкладчик положил в банк некоторую сумму в начале года. Банк начислял простые проценты на первоначальную сумму вклада, причем за второй год в полтора раза выше, чем за первый. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите процентную ставку за второй год, если в начале третьего года на счете вкладчика была сумма, в 2 раза превышающая первоначальную**.** ***(60%)***

**1.13**. Банк начисляет на вклады продолжительностью 3 года сложные проценты по ставке r = 10% годовых по окончании каждого года. Определить эквивалентную ставку процентов, начисляемых ежеквартально. **(9,65%)**

**1.14.** Банк начисляет на вклады продолжительностью 2 года сложные проценты по ставке r = 12% годовых в конце каждого полугодия. Определить эквивалентную ставку процентов, начисляемых ежемесячно. **(11,71%)**

# 2. МЕТОД DCF И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ФИНАНСАМИ

## 2.1. Денежный поток. Дисконтирование денежных потоков

Одним из ключевых понятий финансового менеджмента является понятие денежного потока, или потока платежей (cash flow, **CF**) [3,4] - суммы денежных средств, полученных или выплаченных компанией в тот или иной период времени **t**. Принято считать денежный поток положительным, если денежные средства поступают на счета компании, и отрицательным, если денежные средства выплачиваются компанией. С точки зрения финансового менеджера любой проект, реализуемый компанией в сфере производства, торговли, инвестирования и т. д., либо функционирование какого-либо актива представляется в виде последовательности генерируемых этим активом денежных потоков $CF_i$ (***рис.2.1*)**.

Суммарный денежный поток можно определить путем суммирования всех $CF_i$ с учетом знака. Однако, поскольку отдельные элементы суммарного денежного потока генерируются в различные временные интервалы t, непосредственное суммирование этих элементов **противоречит принципу временной стоимости денег.**

Оценка суммарного денежного потока может выполняться путем решения двух задач: прямой и обратной.

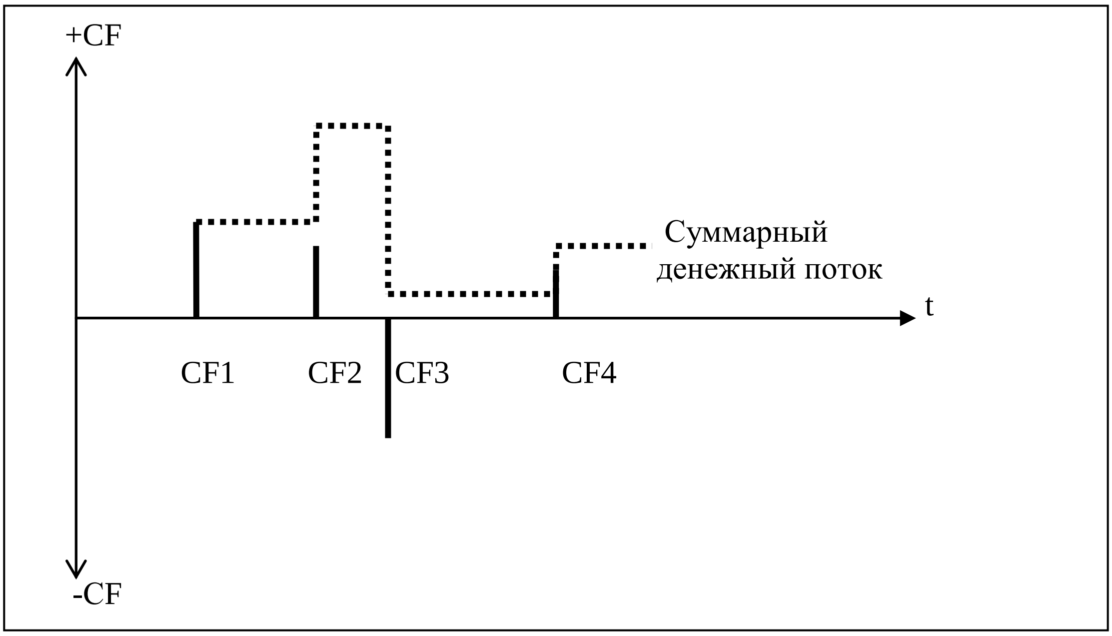



***Рис. 2.1.*** План денежных потоков

**Прямая задача** состоит в определение наращенного денежного потока, или будущей стоимости потока денежных средств.

**Обратная задача** состоит в суммарной оценке дисконтированных денежных потоков, т.е. приведении денежных потоков к одному, начальному моменту времени (Discounted Cash Flows, **DCF**). Для решения обеих задач используется базовое соотношение (1.6.), а также другие расчетные соотношения.

Метод дисконтированных денежных потоков (DCF) широко используется в финансовом менеджменте для оценки стоимости ценных бумаг, доходности различных активов и проектов, других целей.

Ситуация, когда денежные поступления по периодам варьируются, является наиболее распространенной. В общем случае предположим, что в первый период – например, год - величина денежного потока составляет $CF_1$; во второй – $CF_2$ ; в третий – $CF_3$ и т. д. Тогда с позиции будущего (прямая задача) суммарная величина денежного потока может рассчитываться по исходному потоку по формуле:

$$FV = \sum_{i=1}^{i=n} CF_i (1+r)^{n-i} \qquad \boxed{\mathbf{(2.1)}}$$

С позиций настоящего момента расчеты необходимо вести по приведенному потоку (обратная задача). Приведенная к настоящему моменту стоимость денежного потока (дисконтирование) за первый год составит $CF_1/(1+r)$; за второй год $CF_2/(1+r)^2$; за третий $CF_3/(1+r)^3$ и т. д. Величина суммарного приведенного потока составит:

$$PV = \sum_{i=1}^{i=n} CF_i /(1+r)^i \qquad \boxed{\mathbf{(2.2)}}$$

Важную роль в анализе DCF играет дисконтирующий множитель 1/(1+r). Он показывает текущую цену одной денежной единицы, приходящей к инвестору в будущем. Величина дисконта определяется инвестором через установление величины ставки процента **r** на основе концепции альтернативных затрат (упущенных возможностей). Суть этой концепции заключается в том, что, инвестировав денежные средства в какой-либо актив, инвестор лишается возможности инвестировать их в другие - альтернативные - проекты и активы и, тем самым, теряет возможность получить более высокий доход от этих альтернативных инвестиций. В DCF анализе считается, что ставка процента в дисконтирующем множителе должна отражать доход, который мог бы быть получен при инвестировании в наилучший из возможных альтернативных активов, имеющих одинаковую степень риска.

Пример.

**2.1. Компания продала принадлежащий ей контракт на освоение земельного участка за 5 млн. руб. Покупатель предлагает две возможные схемы платежей. По первой схеме контрагент платит равными долями по 1 млн. рублей в течение 5 лет. Согласно второму варианту, выплачивается 3 млн. рублей по истечении третьего года и 2 миллиона по истечении четвертого года. Какая из схем выгоднее для компании при средней рыночной ставке процента для дисконтирования r = 20%?**

**Составим план денежных потоков для обоих вариантов.**

**Очевидно, что для компании наиболее выгоден вариант с максимальной настоящей стоимостью денежных потоков.**

**В соответствие с (2.2) для первого варианта:**

$PV(1) = 1{,}0/(1+0{,}2) + 1{,}0/(1+0{,}2)^2 + 1{,}0/(1+0{,}2)^3 + 1{,}0/(1+0{,}2)^4 + 1{,}0/(1+0{,}2)^5 = 2{,}991$ (млн. руб.)

**Для второго варианта:**

$PV(2) = 3{,}0/(1+0{,}2)^3 + 2{,}0/(1+0{,}2)^4 = 1{,}736 + 0.965 = 2{,}701$ (млн. руб.)

**Таким образом, предпочтение отдается второму варианту как имеющему большее значение приведенной стоимости суммарного денежного потока.**

## 2.2. Аннуитет (финансовая рента)

Помимо денежных потоков с неравными поступлениями, часто встречаются так называемые **аннуитеты** – денежные потоки, формируемые одинаковыми по размеру платежами, которые следуют через равные интервалы времени, называемые **периодом аннуитета**. Примером таких платежей является арендная плата, взносы в пенсионный фонд и т. д.

Промежуток времени между началом первого и окончанием последнего периода называется **сроком** аннуитета. Аннуитеты бывают срочные и бессрочные. Если платеж следует в начале каждого периода, то говорят, что аннуитет осуществляется по схеме **пренумерандо** (авансированная рента); если в конце периода – по схеме **постнумерандо** (обычная рента).

Для аннуитетов также решается два вида задач – прямая и обратная. **Прямая задача** требует расчета суммы, которая будет накоплена в конце периода с учетом процентов, начисленных на все платежи (наращенного денежного потока). Это задача, которую решает кредитор, инвестор, определяющий эффективность использования своих денежных средств. В частности, для срочного аннуитета постнумерандо наращенная сумма будет определяться выражением:

$$FV = \sum_{i=1}^{n} CF_o \left|1+r\right|^{n-i} = CF_o \sum_{i=1}^{n} \left|1+r\right|^{n-i} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Где $CF_o$ – сумма одного платежа; n – число периодов. Обычно используют формулу для суммы членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|1+r\right|^{n-i} = \frac{(1+r)^n - 1}{r},$$

поэтому в практических расчетах выражение приобретает вид:

$$FV = CF_o\,[(1+r)^n\ -1]/r \qquad \textbf{(2.4)}$$

Для срочного аннуитета пренумерандо

$$FV = CF_o \sum_{i=1}^{n} \left|1+r\right|^{n} = CF_o = CF_o (1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Примеры.

**2.2..Согласно трудовому контракту компания осуществляет взнос в негосударственный пенсионный фонд в пользу своего сотрудника в сумме $1000 в год по схеме постнумерандо . Какая сумма окажется на пенсионном счете через 10 лет при ставке процента r = 10% ?**

**В соответствие с (2.4) :**

FV = $1000[(1+0,1)$^{10}$ –1]/ 0,1 = $15937.

**2.3. По договору аренды компания в начале каждого квартала получает на свой банковский счет от арендатора плату в размере 70000 рублей. Какая сумма аккумулируется на счете компании в течение 2 лет, если банк ежеквартально начисляет на вклад проценты по ставке 12% годовых?**

**Воспользуемся соотношениями (2.5) и (1.10). В данном случае периодом следует считать 1 квартал; следовательно, число периодов n будет составлять 2x4=8, а начисление за период будет осуществляться по ставке r’= r/4 =3% по схеме пренумерандо.**

FV = 70000(1+0,03)[(1+0,03)$^{8}$– 1]/ 0,03 = 641690 (руб.)

**Обратная задача**. В этом случае требуется определить настоящую стоимость будущих выплат по аннуитету с позиций текущего момента. Очевидно, что стоимость каждого будущего денежного потока зависит от времени его поступления и «цены» денег, т.е. величины процентной ставки **r**. Чем дальше от настоящего момента отстоит время платежа, чем «дороже» деньги – тем выше дисконт.

Общая формула для расчета текущей стоимости срочного аннуитета постнумерандо выводится на основе базового соотношения (2.2) и имеет вид:

$$PV = CF_o \sum_{i=1}^{i=n} 1/(1+r)^i \qquad \textbf{(2.6)}$$

Для практических расчетов используют формулу для подсчета суммы членов геометрической прогрессии, и данное соотношение принимает вид:

$$PV = CF_o\,[1-(1 + r)^{-n}]/r \qquad \textbf{(2.7)}$$

Соответственно, для срочного аннуитета пренумерандо:

$$PV = CF_o\,[1-(1 + r)^{-n}](1 + r)/r \qquad \textbf{(2.8)}$$

Соотношения (2.7) и (2.8) позволяют решать класс задач, связанных с обеспечением условий получения аннуитетных платежей (ренты) в будущем. В этом случае нужно рассчитать, какую сумму PV необходимо разместить в банке по процентную ставку r, чтобы обеспечить в будущем n выплат в размере $CF_0$ .

Пример.

**2.4. Какую сумму необходимо положить в начальный момент на банковский счет, чтобы иметь возможность ежегодно в конце года снимать со счета 50000= рублей в течение 5 лет, если банк начисляет на остаток денежных средств проценты по ставке 8% годовых раз в год?**

**По соотношению (2.7)**:

$PV = CF_o[1-(1 + r)^{-n}]/r = 50000[1- (1+0,08)^{-5}]/0,08 = 50000[0,3194]/0,08 =$
$= \underline{199635(\text{руб.})}$

Существует также понятие **бессрочного** аннуитета, когда денежные поступления продолжаются достаточно длительное время (n>>1). На практике к таким аннуитетам относят выплаты с n≥50.

Прямая задача в этом случае не имеет смысла. Практическое применение находит решение обратной задачи при оценке стоимости аннуитета и целесообразности его приобретения. Решение находится по модифицированной формуле (2.7): **(2.9)**

$$PV = \lim_{n\to\infty} \mathrm{CFo}\,[1-(1+\mathrm{r})^{-\mathrm{n}}]/\mathrm{r} \;=\; \frac{CF_o}{r}$$

Пример.

**2.5. Перед выходом на пенсию г-н NN хочет обеспечить себе бессрочную ренту с выплатами 10.000= рублей ежемесячно. Какую сумму необходимо положить в банк, выплачивающий при ежемесячном начислении проценты по ставке 10% годовых?**

**Очевидно, что эта сумма должна равняться приведенной стоимости бессрочного аннуитета, состоящего из ежемесячных пенсионных выплат $CF_0$ = 10000= рублей.**

**По формуле (2.9)**

**PV = 10000/(0,10/12) = 10000:0,00833 = 1.200.000= ( руб.)**

Для того, чтобы ускорить расчеты, разработаны специальные таблицы, в которых рассчитаны значения сумм в формулах (2.3) и (2.7) для различных значений **r** и **n**. Эти таблицы имеются в различных учебниках и монографиях по финансовому менеджменту и финансовому анализу.

Обычно величину суммы в (2.3) называют факторным множителем аннуитета; мы обозначим его как FA(r, n):

$$FA\,(r,n) = \sum_{i=1}^{n} \left|1+r\right|^{n-1} = \frac{(1+r)^n - 1}{r},$$

С учетом этого соотношение (2.3) примет следующий вид:

$$FV = CF_o\ FA(r,n) \qquad \textbf{(2.10)}$$

Величину суммы в соотношении (2.6) называют дисконтирующим множителем аннуитета и мы обозначим его через DA(r,n). Следовательно, данное соотношение можно переписать в виде:

$$\mathbf{PV = CF_0\ DA(r,n)}\ , \qquad \textbf{(2.11)}$$

Где:

$$DA(r,n) = \sum_{i=1}^{i=n} 1/(1+r)^i = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Кроме того, в специальных финансовых калькуляторах существуют программы расчета факторного и дисконтирующего множителей для аннуитетов.

Пример.

**2.6. Компания - владелец бизнес-центра планирует через 7 лет провести ремонт здания стоимостью 4,6 млн. руб. и с этой целью создала специальный фонд, в который планирует перечислять из арендных платежей ежегодно 500,0 тыс. руб. Под какую ставку процента (годовое начисление) необходимо разместить средства этого фонда в банке?**

**Накопления осуществляются в форме серии равных платежей банку (срочного аннуитета), FV которого известна.**

**По соотношению (2.4):**

$FV = CF_o\,[(1+r)^n - 1]/r$ , **или, в нашем случае:**

$FV/CF_o) = [(1+r)^n -1]/r = [(1+r)^7 -1]/r = 4600/500 = 9{,}200$,
**откуда и нужно определять искомую величину r.**

**Решить данное уравнение при n > 3 можно, используя специальные методы. Мы же воспользуемся тем, что выражение в правой части уравнения есть не что иное, как факторный множитель аннуитета из соотношения (2.10), FA(r,n), значение которого 9,200 известно.**

**Известно также и число периодов n = 7. В таблице факторных множителей находим строку с n = 7 и, по известному значению множителя FA(r,7) = 9,200 определяем, что r = 9%.**

## 2.3. Конверсия и консолидация аннуитетов

В практической деятельности встречается процедура конверсии аннуитетов. Под конверсией аннуитета понимается такое изменение начальных параметров аннуитета, при котором новый аннуитет был бы эквивалентен старому. Два аннуитета считаются **эквивалентными,** если **равны их настоящие (текущие) значения, приведенные к одному моменту времени:**

$$PV_1 = PV_2 \qquad (2.12)$$

Необходимость рассчитать параметры эквивалентного аннуитета возникает при изменении условий (реструктуризации) выплаты долга, погашения кредита, операциях с различными контрактами и т.д. К наиболее распространенным случаям конверсии постоянных аннуитетов можно отнести следующие:

1. «Выкуп» аннуитета. Замена единовременного платежа аннуитетом.

Через некоторый промежуток времени (например, $t_1$ после начала выплат) заемщик решает погасить задолженность сразу одним платежом. Очевидно, что сумма платежа в этом случае будет равняться настоящей стоимости остатка аннуитета, рассчитанной на момент погасительного платежа.

Решается также и обратная задача, когда разовый платеж заменяется аннуитетом с теми или иными параметрами.

Примеры.

**2.7. Компания должна погасить задолженность за взятый в лизинг экскаватор ежеквартальными платежами в сумме 360,0 тыс.рублей в течение 3 лет. После двух выплат компания в третий срок решила погасить задолженность одним платежом. Какова будет сумма платежа, если ставка процента для расчетов составляет 16 % годовых?**

**На момент третьего платежа компания должна выплатить очередной платеж 360,0 тыс.руб. и приведенную стоимость оставшейся части аннуитета. С учетом (2.11) и (2.12):**

$S = CF_o + CF_o\ DA[(0{,}16/4),(n-t_1)] = 360{,}0[1 + DA(0{,}04;9)] = 360{,}0(1 + 7{,}435] =$ 3036,6 (тыс.руб.).

**2.7. Фермер взял краткосрочный кредит в банке на 6 месяцев в размере 520,0 тыс.рублей по ставке 16 % годовых с условием возврата суммы кредита и процентов в конце декабря одним платежом. Из-за того, что часть урожая была уничтожена, фермер смог вовремя возвратить в банк только 250,0 тыс. рублей. Остаток долга он предложил банку возвратить ежеквартальными равными платежами в течение следующего года. Какова будет сумма каждого платежа при сохранении ставки процента неизменной?**

**Прежде всего выясним, каков остаток долга по первому кредиту на конец года. Эта сумма и будет приведенной стоимостью предстоящей выплаты в форме аннуитета:**

PV’ = PVo(1+rT) – 250,0 = 520(1+0,16x0,5) – 250,0 = 311,6 тыс.руб.

**С другой стороны,**

PV’ = CFoDA(0,04;4).

**Отсюда:** CFo = PV’/ DA(0,04;4 = 311,6/3,63 = 85,8 (тыс. руб.)

2. Изменение параметров аннуитета. При пересмотре любого из параметров аннуитета неизбежно меняются и все остальные. Базовым соотношением для таких вычислений является (2.12).

Примеры:

**2.8. Для погашения ипотечного кредита, выданного под сложную ставку 4% годовых на срок 10 лет, ежегодно должны вносится платежи в размере $5000 по схеме постнумерандо. Заемщик решил, что он в состоянии ежегодно выплачивать сумму $7500. Определить новый срок кредита.**

**Рассчитаем приведенную стоимость первоначального аннуитета.**

$PV_1 = CF_{01}DA(0{,}04;10)$ = $5000x8,111 =$40555;

**Она равна приведенной стоимости нового аннуитета:**

$PV_1 = PV_2 = CF_{02}DA(0{,}04;X)$.

**Величина нового дисконтирующего множителя**

$DA(0{,}04;X) = PV_2 / CF_{02}$ = $40555/ $7500 = 5,407.

**По известному значению дисконтирующего множителя DA=5,407 находим в таблице или рассчитываем для данной ставки r=0,04 величину периода X: X = 6.**

**Поскольку срок нового аннуитета определен приблизительно, то точная приведенная стоимость составит величину:**

$PV'_2 = CF_{02}DA(0{,}04;6)$ = $7500x5,242 = $39315.

**Эту разницу в сумме выплат, равную $40555 - $39315=$1240 заемщик выплачивает кредитору в начальный момент действия договора.**

3. Перенос срока начала выплат. Начало выплат при заданной ставке процента может быть отсрочено либо при сохранении размера платежа, либо при сохранении срока выплат. Очевидно, что в первом случае должен быть увеличен срок аннуитета n, а во втором – величина каждого платежа $CF_{0.}$ Если t = Δn –

период отсрочки, то уравнение эквивалентности аннуитетов (2.12) в данном случае будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{PV_2 = PV_1\,(1+r)^{\Delta n}},$$

Или:

$$\mathbf{CF_{o2}DA(r,n_2) = CF_{o1}DA(r,n_1)\,(1+r)^{\Delta n}}, \qquad \mathbf{(2.13)}$$

где $n_1$- старый срок аннуитета; $n_2$ – новый срок аннуитета; $CF_{o2}$ и $CF_{o1}$ - размеры старой и новой выплаты по аннуитету.

Пример.

**2.9. Компания взяла в коммерческом банке кредит сроком на три года для покупки оборудования. Согласно кредитному договору, долг погашается равными ежеквартальными платежами 200,0 тыс. руб. начиная со второго года действия договора. Перед наступлением срока первого платежа компания обратилась в банк с просьбой перенести дату начала выплат на полгода при сохранении срока (количества) выплат. Как изменится размер каждого платежа, если процентная ставка в договоре не изменяется и составляет 16 % годовых?**

**Используем соотношение (2.13) отмечая, что в данном случае $n_1 = n_2$. Получаем:**

$CF_{o2}= CF_{o1}DA(r,n_1)\,(1+r)^{\Delta n} / DA(r,n_1) = 200{,}0(1+0{,}04)^2 =$ 216,3 (тыс. руб.)

4. Объединение (консолидация) аннуитетов.

В некоторых случаях может потребоваться объединение нескольких аннуитетов в один – консолидация аннуитетов. При таком объединении по-прежнему необходимо исходить из правила эквивалентности суммы старых и нового (консолидированного) аннуитета, определяемого соотношением (2.12).

Пример.

**2.10. После слияния районных хлебозаводов в производственное объединение выяснилось, что вновь созданной компании, как правопреемнику старых предприятий, необходимо выполнить перед Сбербанком обязательства по двум кредитным договорам. По первому договору необходимо в течение года ежемесячно выплачивать по 40,0 тыс. руб., а по другому – в течение 2 лет ежеквартально по 140,0 тыс. руб. Объединенная компания договорилась с банком о том, что весь долг будет погашен ежеквартальными платежами в течение 18 месяцев при сохранении ставки процента на уровне 24 % годовых. Каков будет размер каждого платежа $CF_0$ по новому договору?**

**Для выполнения правила эквивалентности аннуитетов (2.12) необходимо знать их настоящие стоимости на начало действия нового кредитного договора.**

$PV_1 = 40{,}0\ DA(0{,}02;12) = 40{,}0x(10{,}57) = 422{,}8$ (тыс.руб.);

$PV_2 = 140{,}0\ DA(0{,}06;8) = 140{,}0x(6{,}21) = 869{,}4$ (тыс.руб.).

$PV = PV_1 + PV_2 = 1292{,}2 = CF_0\ DA(0{,}06;\ 6)$.

**Следовательно,**

$CF_0 = 1292{,}2/\ DA(0{,}06;\ 6) = 1292{,}2/4{,}92 =$ 262,6 (тыс.руб.).

***Задачи для самостоятельного решения к разделу 2***

1. Г-н NN принял решение приобрести пенсионный контракт, по которому он мог бы в конце каждого года снимать со счета $ 3000 в течение оставшейся жизни. Страховая компания, используя таблицы смертности населения данного региона, оценила, что клиент сможет прожить еще 20 лет и установила ставку 8 % годовых. Сколько нужно заплатить за контракт? ***(29454)***
2. Решить задачу при условии, что выплаты пенсии будут осуществляться ежеквартально. ***(29808 )***
3. Решить задачу при условии, что выплаты будут осуществляться ежегодно по схеме бессрочного аннуитета. ***(37500)***
4. Инвестор осуществляет взнос в банк в сумме $500 в начале каждого полугодия (т.е. по схеме пренумерандо). Банк делает начисления на данный депозит раз в 6 месяцев из расчета 8 % годовых. Какая сумма будет на счете через 5 лет? ***(6243)***
5. На ежеквартальные (в начале срока) взносы в банк в размере 100 рублей банк начисляет 12 % годовых а) раз в год; б) раз в полгода. Какая сумма будет на счете через три года? ***(1349,6; 1395)***
6. Вы приняли решение приобрести пенсионный контракт, по которому могли бы ежегодно получать $ 4000 в течение оставшейся жизни. Страховая компания, используя таблицы смертности населения данного региона, оценила, что клиент сможет прожить еще 50 лет и установила ставку 7 % годовых. Сколько нужно заплатить за контракт ? ***(55203)***
7. Инвестор осуществляет взнос в банк в сумме $200 в конце каждого полугодия (т.е. по схеме постнумерандо). Банк делает начисления на данный депозит раз в 6 месяцев из расчета 12 % годовых.

Какая сумма будет на счете через 5 лет? Как изменится эта сумма, если делать взносы по схеме пренумерандо? ***(2636; 2794)***
8. Компания собирается оплатить получение высшего образования своему сотруднику стоимостью 100.000= рублей в год в течение 5 лет. Какую сумму нужно внести в банк, чтобы ее хватило на оплату обучения в течение 5 лет, если банк начисляет 11 % годовых по схеме сложных процентов? ***(369590)***
9. Транспортная компания приобрела на условиях лизинга 4 грузовых автомобиля и должна погашать задолженность ежемесячными платежами в размере 15000 рублей в течение 3 лет. В конце второго года действия лизингового соглашения компания решила погасить остаток задолженности за третий год одним платежом. Какова сумма платежа, если ставка процента равна 18 % годовых? ***(178.725)***
10. На основании ежегодно перезаключаемого договора компания должна оплачивать аренду здания путем перечисления 350,0 тыс. руб. на счет арендодателя в начале каждого месяца. Арендатор предложил перейти на график внесения платежей в начале очередного квартала. Какова должна быть сумма платежа в этом случае? Процентная ставка фиксируется на 1 год вперед и составляет 12 % годовых. ***(1039,7)***

11. Владелец здания планирует через 3 года провести его реконструкцию стоимостью 2,1 млн. руб. и с этой целью создал специальный фонд, в который планирует перечислять ежегодно 600,0 тыс. руб. Под какую ставку процента (начисление раз в год) необходимо разместить средства фонда?
***(15,83%)***

12. Владелец загородной базы отдыха планирует через 8 лет провести капитальный ремонт и реконструкцию, требующие 4,3 млн. руб. С целью аккумулирования необходимых средств он создал специальный фонд, в который планирует перечислять ежегодно 350,0 тыс. руб. Банк XX предложил разместить средства фонда под 12% годовых с начислением процентов в конце срока. Стоит ли предпринимателю принять предложение банка?
***(Да)***

Как изменится сумма ежегодного платежа, если воспользоваться предложением банка Y, начисляющего 12,6% по той же схеме?
***(342,0 тыс. руб.)***

# 3. МЕТОД ДИСКОНТИРОВАНИЯ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ В ПРАКТИКЕ ФИНАНСОВОГО МЕНЕДЖМЕНТА

## 3.1. Использование метода DCF для финансового анализа проектов.

1. Метод чистой приведенной стоимости (NPV).

Дисконтирование денежных потоков используется для анализа различных финансовых и инвестиционных проектов. Идея метода состоит в сопоставлении величины исходной инвестиции в осуществление данного проекта **(IC)** с общей суммой дисконтированных денежных поступлений, генерируемых проектом в течение прогнозируемого срока. В силу того, что денежные поступления от реализации проекта распределены во времени, они дисконтируются с помощью коэффициента r, устанавливаемого в конечном счете инвестором исходя из его оценки риска проекта и желаемого дохода на инвестированный капитал.

Разница между начальной инвестицией и текущей стоимостью будущих поступлений от проекта называется **чистой приведенной стоимостью** (Net Present Value, **NPV**):

$$\mathbf{NPV = PV - IC} = \sum_{i=1}^{n} CF_i/(1+r)^i \ \mathbf{- IC} \qquad \mathbf{(3.1)}$$

Если проект предполагает не разовую инвестицию, а последовательные вложения средств в течение, например, **m** периодов, то формула для расчета NPV модифицируется следующим образом:

$$\mathbf{NPV =} \sum_{i=1}^{n} CF_i/(1+r)^i - \sum_{k=0}^{m} IC_k/(1+r)^k , \qquad \mathbf{(3.2)}$$

Таким образом, чистая приведенная стоимость проекта, NPV, равна разности приведенных стоимостей доходов и расходов по проекту.

Очевидно, что при положительном значении NPV проект следует принять. При прочих равных условиях чем выше чистая приведенная стоимость, тем привлекательнее проект для инвестора. Если NPV‹ 0, проект убыточен.

Смысл показателя NPV прост: он показывает, как изменится собственный капитал инвестора после проведения данной финансовой операции **по сравнению с инвестированием в альтернативный проект по ставке r.**

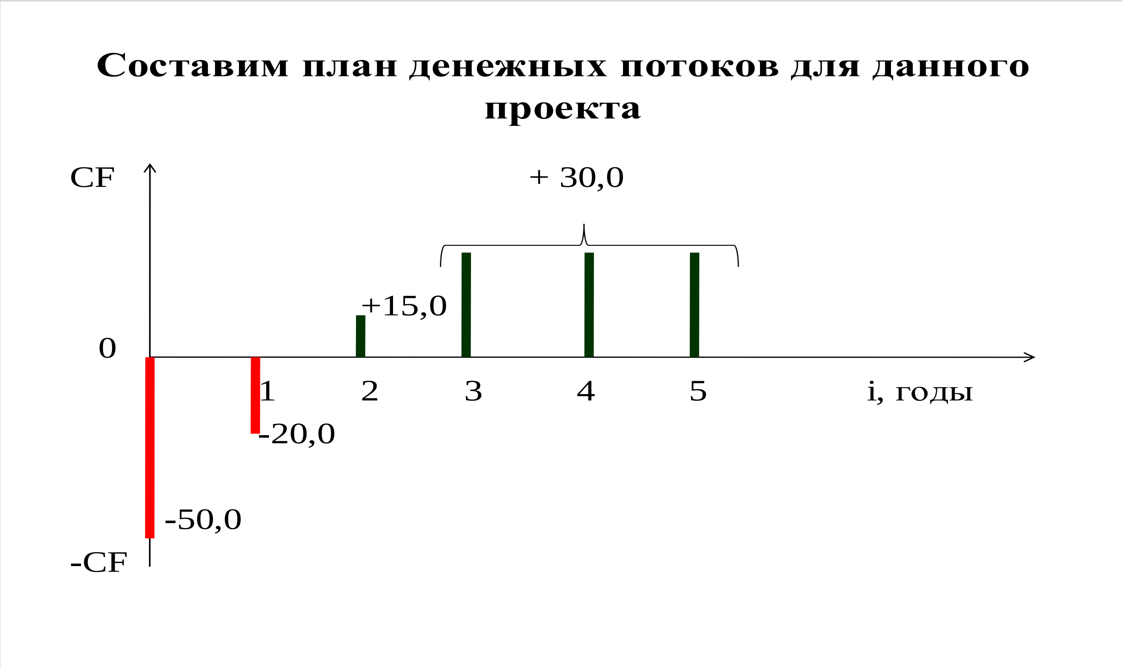
Пример.

**3.1. Инвестор рассматривает проект по строительству завода. В строительство здания следует инвестировать 50,0 млн. рублей в начале первого года. В начале второго года необходимо инвестировать еще 20,0 млн. рублей в монтаж производственной линии, которая к концу второго года даст доход 15 млн. рублей и затем ежегодно будет приносить 30 млн. рублей на протяжении 3 лет.**

**Остаточная стоимость активов по истечение срока проекта равна нулю.**

**Альтернативой является размещение денежных средств на банковском депозите, приносящем 10% годовых.**

1. **Следует ли инвестору браться за осуществление проекта?**
2. **Изменится ли мнение инвестора, если ставка по депозитам поднимется до 14% годовых?**




**Поскольку денежные поступления за период реализации проекта имеют разнонаправленный характер, используем соотношение (3.2):**

$NPV=5/(1+0,1)^2+30/(1+0,1)^3+30/(1+0,1)^4+30/(1+0,1)^5–52–20/(1+0,1)=\underline{5,87}$ (млн.руб.)

**Поскольку NPV› 0, то данный проект выгоден компании.**

**Для ускорения работы можно составить таблицу EXCEL. Можно также воспользоваться и встроенной в EXCEL «финансовой» функцией ЧПС (Чистая приведенная стоимость).**

**Образец таблицы с расчетами:**

**Таблица 1**

| i | $IC_i$ | $CF_i$ | $(1+r)^i$ | $PV_i$ | NPV | r |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -50 | | 1,000 | -50,00 | -50,0 | **0,10** |
| 1 | -20 | | 1,100 | -18,18 | -68,2 | |
| 2 | | 15 | 1,210 | 12,40 | -55,8 | |
| 3 | | 30 | 1,331 | 22,54 | -33,2 | |
| 4 | | 30 | 1,464 | 20,49 | -12,8 | |
| 5 | | 30 | 1,611 | 18,63 | 5,87 | |
| **Итого** | **-70** | **105** | | **5,87** | | |

**В то же время, если появится альтернативная возможность размещения денежных средств под 14% годовых, то приведенная чистая стоимость проекта составит -2,41 млн.руб.(Таблица 2).**

**Таблица 2**

| i | $IC_i$ | CFi | $(1+r)^i$ | $PV_i$ | NPV | r |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -50 | | 1,000 | -50,00 | -50,0 | **0,14** |
| 1 | -20 | | 1,140 | -17,54 | -67,54 | |
| 2 | | 15 | 1,300 | 11,54 | -56,0 | |
| 3 | | 30 | 1,482 | 20,25 | -35,8 | |
| 4 | | 30 | 1,689 | 17,76 | -18,0 | |
| 5 | | 30 | 1,925 | 15,58 | -2,4 | |
| **Итог** | -70 | 105 | | **-2,41** | | |

**В этом случае проект по сравнению с депозитом оказывается невыгодным, и компания не примет его.**

В рассмотренном примере альтернативой для компании является размещение денежных средств на банковском депозите – как если бы компания разместила в начале операции на депозите 52,0 млн. руб., затем через год еще 20 млн.руб., а затем с интервалом 1 год снимала со счета последовательно некоторые суммы в соответствие с планом денежных потоков. При ставке 10% годовых в распоряжении компании оказалась бы дополнительная, по сравнению с доходом по депозиту, сумма в 0,77 млн. рублей, а при ставке r = 14 % - депозит дал бы доход на 2,41 млн. руб. больше, чем предлагаемый проект.

Показатель NPV обладает важным свойством **аддитивности**. Это означает, что NPV различных проектов можно складывать, и суммарный показатель $(\mathbf{NPV})_{\Sigma}$ равен сумме NPV отдельных проектов:

$$(\mathbf{NPV})_{\Sigma} = \sum (\mathbf{NPV})_{\mathbf{i}} \qquad \textbf{(3.3)}$$

Это важное свойство показателя чистой приведенной стоимости можно использовать при оценке эффективности инвестиционной политики компании в целом, т. Е. эффективность **портфеля** инвестиционных проектов. При этом часть проектов может быть и убыточными, но важно, чтобы суммарный показатель не становился отрицательным.

2. Метод внутренней нормы доходности (IRR)

В различных финансовых проектах часто известен план финансовых потоков и требуется определить, какова будет эффективная ставка процента. Для этого и используется показатель внутренней нормы (ставки) доходности (Internal Rate of Return, **IRR**) проекта.

По определению, внутренней ставкой доходности называется такая величина ставки процента **r** , при которой чистая приведенная стоимость проекта равна нулю (NPV = 0). Таким образом, в соотношении (3.2):

$$\text{IRR} = r, \quad \text{если} \quad \mathbf{NPV} = \sum_{i=1}^{n} CF_i/(1+r)^i - \sum_{k=1}^{m} IC_k/(1+r)^k = \mathbf{0} \qquad \textbf{(3.4)}$$

Величина IRR является важной характеристикой проекта. IRR, в частности, позволяет сравнивать проекты с различными сроками реализации, планами денежных потоков, начальными инвестициями и т.д.

Решение уравнений типа (3.4) в аналитическом виде затруднено. На практике приходится либо проводить подбор значений r, либо использовать специальные финансовые калькуляторы.

Пример.

**3.2. Инвестиционной компании предлагают реализовать проект по строительству жилого комплекса, рассчитанный на 4 года. Проект требует инвестиций в сумме 13,9 млн. руб. в начале первого года и по 7,6 млн. руб. в начале второго и третьего года. Затем, в конце третьего года, инвестор получает доход в сумме 28,8 млн. руб. от реализации квартир в комплексе и в конце 4 года 19,6 млн. руб. от реализации помещений гаража, оздоровительного комплекса и торговой зоны.**

**Альтернативой данному проекту является выдача кредитов торговым компаниям на тот же срок под 18 % годовых.**

**Какой из проектов выгоднее для инвестиционной компании?**

**Очевидно, что проект выгоден инвестиционной компании лишь в том случае, если он приносит доход по ставке не менее, чем 18 % годовых; т.е. для него IRR должна превышать 0,18. Вычислим IRR проекта, воспользовавшись соотношением (3.4) как уравнением, которое необходимо решить относительно r:**

$$NPV = 28{,}8/(1+r)^3 + 19{,}6/(1+r)^4 - 13{,}9 - 7{,}6/(1+r) - 7{,}6/(1+r)^2 = 0$$

**Методом подбора с использованием EXCEL (таблица 3)определяем, что r = 0,2105. Таким образом, доходность инвестиционного проекта (21,05% годовых) оказывается выше, чем операций по кредитованию (18%).**

**Таблица 3**

| i | ICi | CFi | (1+r)i | PVi | NPV | IRR |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -13,9 | | 1,000 | -13,90 | -13,9 | 0,2105 |
| 1 | -7,6 | | 1,211 | -6,28 | -20,2 | |
| 2 | -7,6 | | 1,465 | -5,19 | -25,4 | |
| 3 | | 28,80 | 1,774 | 16,24 | -9,1 | |
| 4 | | 19,60 | 2,147 | 9,13 | 0,0 | |
| **Итого** | **-29,1** | **48,40** | | **0,00** | | |

Показатель внутренней нормы доходности, в отличие от NPV, не обладает свойством аддитивности.

Обычно методы чистой приведенной стоимости и внутренней ставки доходности при анализе инвестиционных проектов используются совместно. Более того, между рассмотренными показателями r, NPV, IRR имеется очевидная связь: если NPV> 0, то одновременно IRR> r;

NPV <0, то одновременно IRR<r;

NPV= 0, то одновременно IRR= r.

Это легко установить на следующем примере.

Пример.

Рассчитать величину показателя IRR для проекта, рассмотренного в примере. Используя EXCEL, находим, что величина IRR= 12,86 % (таблица 4).Таким образом, в первом случае, когда IRR> r = 10%, мы получаем NPV> 0 (+5,87 млн. руб.); во втором случае IRR<r = 14% и, соответственно, NPV <0.

**Таблица 4**

| i | $IC_i$ | $CF_i$ | $(1+r)^i$ | $PV_i$ | NPV | IRR |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -50 | | 1,000 | -50,00 | -50,0 | **0,1276** |
| 1 | -20 | | 1,128 | -17,74 | -67,7 | |
| 2 | | 15 | 1,271 | 11,80 | -55,9 | |
| 3 | | 30 | 1,434 | 20,92 | -35,0 | |
| 4 | | 30 | 1,617 | 18,56 | -16,5 | |
| 5 | | 30 | 1,823 | 16,46 | **0,0** | |
| **Итог** | -70 | 105 | | **0,00** | | |

3. Определение срока окупаемости инвестиций (Payback Period , PB).

В ряде случаев инвестору важно знать, как скоро предлагаемый проект окупится, т.е. затраты вернутся назад. Обычно показатель срока окупаемости инвестиционного проекта приобретает особое значение в условиях заметной инфляции, высокого уровня рисков, а также в проектах с большой длительностью.

Срок окупаемости определяется при заданных (фиксированных) значениях ставки процента и плане денежных потоков. Обычно определяют два значения срока окупаемости - номинальный, бухгалтерский, не учитывающий фактор времени, и реальный срок окупаемости на основе метода DCF.

Номинальный срок окупаемости рассчитывается путем сопоставления суммарных затрат с суммарным денежным потоком, подсчитываемым нарастающим итогом. Период t, в котором при добавлении к сумме $\mathbf{CF_t}$ начинает выполняться условие:

$$\mathbf{CF_1 + CF_2 + \ldots + CF_t \geq IC_1 + IC_2 + \ldots + IC_m} \qquad \mathbf{(3.5)}$$

и является номинальным (бухгалтерским) сроком окупаемости. Смысл этого показателя прост – сроком окупаемости считается период, за который поступившие от проекта доходы в сумме сравняются с произведенными затратами.

Недостатком такого подхода к определению срока окупаемости является то, что он не учитывает временную стоимость денег. Более корректным является расчет с использованием метода DCF, предполагающим дисконтирование всех денежных потоков. В этом случае должно выполняться условие:

$$\sum_{i=1}^{t} CF_i/(1+r)^i \geq \sum_{k=1}^{m} IC_k/(1+r)^k \qquad \mathbf{(3.6)}$$

Пример

**3.3. Определите номинальный и реальный сроки окупаемости проекта по строительству бизнес-центра, требующего инвестиций по 12,0 млн. рублей в начале каждого года на протяжении первых трех лет. После ввода в эксплуатацию, начиная с 4 года реализации проекта, бизнес-центр приносит ежегодно чистый доход в размере 9 млн. руб. в год. Ставка процента – 16 % годовых.**

**Номинальный срок окупаемости: $PB_n$ = (12,0х3,0)/ 9,0 + 3 = 4 +3 = 7 лет.**

**Реальный срок окупаемости, с учетом соотношения (3.6), определим, подсчитав предварительно значения всех компонентов.**

**Затраты:**

$12{,}0 + 12{,}0/(1{,}16) + 12{,}0/1.16)^2 = 31{,}263$ (млн.руб.)

**Доходы по периодам:**

**4**-й год: $9{,}0/1{,}16^4 = 4{,}971$ млн. руб.; 5-й : $9{,}0/1.16^5 = 4{,}281$; 6-й: 3,695; 7-й: 3,185; 8-й: 2,745; 9-й: 2.367; 10-й: 2,040; 11-й:1.760; 12-й:1.517; 13-й: 1,307; 14-й: 1,127; 15-й: 0,972; 16-й: 0.834 ; 17-й: 0,722.

**В конце 17 года с начала реализации проекта приведенная стоимость доходов от проекта составит 31,525 млн. руб. и превысит приведенную стоимость затрат. Следовательно, реальный срок окупаемости проекта PB составляет 17 лет.**

## 3.2. Использование метода DCF при реализации планов погашения задолженностей.

Важным практическим приложением метода DCF и теории аннуитетов является составление вариантов (планов) погашения различного рода задолженностей.

Рассмотрим основные варианты подобных планов.

1. Погашение долга в один срок.

В этом случае Заемщик возвращает всю сумму долга и проценты в конце срока одним платежом. Сумма платежа рассчитывается, например, по соотношению **(1.2).**

2. Погашение долга частями с выплатой процентов за использованную сумму.

В этом случае составляется график погашения основной суммы долга. Одновременно с выплатой части основного долга в конце очередного периода заемщик выплачивает и проценты, начисленные на ту сумму, которой он пользовался в течение данного периода.

Пример.

**Предприятие получило кредит в коммерческом банке в размере 24,0 млн. руб. под 19 % годовых. По договору оно должно вернуть сумму основного долга тремя частями : 6,0 млн. руб. – в конце первого года; 8,0 млн. руб. – в конце второго года и 10 млн. руб. – в конце третьего года. При осуществлении каждого платежа банку выплачиваются также проценты за пользование кредитом . Определить сумму каждого платежа.**

**В течение первого периода (года) действия кредитного договора предприятие пользовалось суммой 24,0 млн. рублей, проценты за использование которых составят:**

P1 = 24,0х0,19 = 4,56 (млн.руб.).

**Поэтому перечисляемая в банк сумма будет включать в себя не только 6,0 млн. руб. основного долга, но и проценты за использование денег:**

S1 = 6,0 + 4,56 = 10,56 (млн. руб.).

**В течение второго года компания пользуется кредитом в размере 24,0 – 6,0 = 18,0 млн. руб. Сумма процентов за пользование кредитом составит 18,0х0,19 = 3,42 млн. руб., а сумма платежа в конце второго года:**

S2 = 8,0 + 3,42 = 11,42 (млн. руб.).

**Аналогично,**

S3 = 10,0 + 10,0х0,19 = 11,9 (млн. руб.).

3. Погашение долга и процентов равными платежами, следующими через одинаковые промежутки времени (аннуитет).

Обычно такие схемы используют при погашении потребительских кредитов частными лицами чтобы предельно упростить процедуру расчетов, а также при лизинге. В этом случае кредитор рассматривает операцию кредитования как некий финансовый проект и рассчитывает приемлемые для себя параметры r, n, $CF_0$ при предположении, что для данного проекта NPV = 0.

Пример.

**Торговая компания продает автомобили в кредит физическим лицам на следующих условиях: 25% стоимости покупатель выплачивает сразу, а затем в течение двух лет погашает задолженность ежемесячными платежами. В частности, при покупке автомобиля стоимостью $20000 покупателю предлагается ежемесячно выплачивать компании $706.**

**Какова доходность операции кредитования для компании?**

**Рассматриваем операцию по кредитованию клиента как инвестиционный проект, для которого доходность r =IRR. В соответствие с уравнением (3.3), $CF_0$ DA(r,n) – IC = 0 , что применительно к данной задаче можно записать в следующем виде:**

706*DA(r/12; 24) = 20000-5000=15000, откуда DA(r/12;24) = 15000/706 = 21,25.

**Из таблиц определяем, что:**

r/12 = 1%, или r = 12 % годовых

4. Погашение задолженности с использованием «плавающей» ставки процента.

В условиях неопределенности на финансовых рынках, когда величина процентной ставки может изменяться в ту или иную сторону, а также при долгосрочных заимствованиях часто прибегают к использованию так называемой «плавающей» ставки процента. В этом случае кредитор и заемщик договариваются о том, что за величина ставки формируется из двух компонентов – фиксированного и изменяющегося. В качестве изменяющегося компонента обычно используют величину какого-либо рыночного индикатора – например, ставку рефинансирования (учетную ставку) Центрального Банка, ставку LIBOR или др. Эта часть ставки изменяется помимо воли сторон в кредитном договоре. Постоянный компонент рассматривается как своеобразная «премия» за риск в пользу кредитора. Она может равняться нулю.

Пример.

**Российская компания - импортер получила от одного из коммерческих банков Германии кредит в размере 600.000 EUR на 2 года на покупку товаров у германских фирм. Основная сумма кредита возвращается равными долями в конце каждого полугодия, начиная со второго, вместе с процентами за использование соответствующей суммы. Ставка кредитования установлена в размере ставки LIBOR(EUR) + 8% годовых. Определить суммы платежей, сделанных компанией, если ставка LIBOR(EUR) составила на моменты выплат: 2,46%; 2,68 %; 2,88% годовых .**

**Погашение долга происходило в три этапа. Первый этап продолжается 1 год и все это время компания пользуется всей суммой кредита по ставке 2,46 + 8 = 10,46 % годовых. Поэтому сумма первого платежа составит :**

**S1 = 200.000 + 600.000х0,1046 = 200.000 + 62.760 = 262760 (EUR);**

**S2 = 200.000 + 400.000[0,5(2,68+8)/100] = 221360 (EUR);**

**S3 = 200.000 + 200.000[0,5(2,88+8)/100] = 210880 (EUR).**

***Задачи для самостоятельной работы по разделу 3***

1. Предприятие получило банковскую ссуду в размере 2.400.000 рублей сроком на 9 месяцев под 22% годовых. Договор предусматривает возврат суммы долга равными частями путем ежеквартальных выплат вместе с начисленными процентами. Определить размер каждого платежа. ***(932000; 888000; 844000)***

2. Инвестиционно-строительная компания реализует проект строительства торгового центра площадью 2800 кв. м. Проект предусматривает последовательные вложенния по 6,1 млн. рублей в начале каждого квартала на протяжении 2 первых лет. Затем, в конце первого квартала третьего года реализации проекта предполагается продать половину площадей в собственность торговым компаниям по цене 12000 руб. за квадратный метр, а оставшиеся площади сдать в бессрочную аренду с ежемесячной оплатой 320 руб./кв.м.

Выгоден ли данный проект для компании, если ставка по депозитам в коммерческих банках равна 12 % годовых? ***(Да)***

При какой ставке процента он теряет привлекательность для компании? ***(18 %)***

3. Производственная компания получает от банка кредит в сумме 12,34 млн. рублей сроком на 3 года. Возврат суммы долга и процентов осуществляется по следующему графику: 2,60 млн. руб. – в конце первого года; 5,80 млн.руб. – в конце второго года и 6,90 млн. руб. – в конце третьего года. Какова внутренняя норма доходности IRR для банка в этой сделке? ***(10 %)***

4. Банк кредитует покупку частными лицами коттеджей стоимостью $60000 на условиях ежемесячного погашения задолженности и процентов равными платежами. Предлагаются следующие условия: срок кредита – 10 лет, ставка процента 14,4 % годовых. Каков будет размер каждой ежемесячной выплаты? Какую номинальную сумму получит банк от клиента? ***($946,4;$113.560 )***

5. Российская нефтегазовая компания получила кредит от международного банка в размере 22.000.000 долларов США сроком на два года по ставке LIBOR + 6%.

Сумма кредита и начисленные проценты возвращаются банку равными частями в конце каждого полугодового интервала. Определить , какие суммы выплатила компания банку для погашения кредита, если ставка LIBOR составила на 1 полугодие 5,75 %; 2 – 5,50 %; 3 – 5,50 % ; 4 – 5,25 %.***(6792500; 6448750; 6132500 и 5809375)***

6. Господин NN приобрел квартиру за $16000 для последующей сдачи ее в аренду.Квартира приносит чистый доход $120 в месяц. Через какой срок (в месяцах) проект окупит себя, если для частных лиц ставка по депозитам в иностранной валюте составляет 6 % годовых? ***(222 мес.)***

## Литература

1. Финансовый менеджмент. 10-е изд.. / Бригхем Ю, Эрхардт М. — СПб : Питер, 2005. Глава 8.

2.Финансовый менеджмент / Ю.М.Бахрамов, В.В.Глухов — СПб , Питер, 2011. Глава 3.

3. Финансовые вычисления для менеджеров: Учеб.пособие. 2-е изд., испр. и доп. /А.В. Бухвалов, В.В. Бухвалова; Высшая школа менеджмента СПбГУ.- СПб.:Изд-во «Высшая школа менеджмента», 2009-368 с.

4. Финансы и кредит: Учеб. пособие. Часть I:Управление финансами: фундаментальные концепции и инструменты. /А.Ф.Тихомиров, Ю.Н.Домченко - СПб: Изд-во СПбГПУ, 2003. 55 с.