

## Общая потеря устойчивости и оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях на вероятность безотказной работы

*К.т.н., старший научный сотрудник О.А. Сергеев,*

*ООО «Экспресс Плюс»;*

*к.т.н., доцент В.Г. Киселев,*

*ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»;*

*к.ф.-м.н., доцент С.А. Сергеева,*

*ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»*

**Аннотация.** Целью работы является формулировка и решение задачи оптимизации стержневых конструкций по массе с ограничениями на вероятность безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости и на предельные значения управляемых параметров. Метод оптимизации основан на квадратичной аппроксимации целевой функции и линейной аппроксимации ограничений на вероятность безотказной работы стержневой конструкции со случайными несовершенствами.

В настоящей работе начальные глобальные несовершенства рассматриваются как независимые случайные малые величины, распределенные по нормальному закону, и критическая нагрузка общей потери устойчивости тоже случайная величина. Исследуется случай, когда при случайных несовершенствах значение некротной критической нагрузки потери устойчивости конструкции, соответствующей предельной точке, изменяется, а тип некротной критической точки не меняется.

**Ключевые слова:** оптимизация; геометрически нелинейные стержневые конструкции; случайные глобальные несовершенства; вероятность безотказной работы; общая потеря устойчивости; некротные предельные точки

### Введение

Все конструкции имеют небольшие несовершенства, которые приобретаются в процессе изготовления, транспортирования, монтажа и эксплуатации. В 1945 г. голландский профессор В.Т. Койтер первым установил, что поведение конструкции с несовершенствами в значительной степени определяется поведением конструкции без несовершенств [1]. Общая потеря устойчивости [2–5] связывается с несколькими типами некротных критических точек [6–10]: асимметричная точка бифуркации, устойчивая симметричная точка бифуркации, неустойчивая симметричная точка бифуркации и предельная точка. В.Т. Койтер также показал, когда и каким образом значение некротной критической нагрузки общей потери устойчивости конструкции без несовершенств может значительно уменьшиться при наличии несовершенств. Некротная нагрузка потери устойчивости [11–15] есть степенная функция с показателем степени  $2/3$  для неустойчивой симметричной точки бифуркации и  $1/2$  для асимметричной точки бифуркации [1]. Критическая нагрузка общей потери устойчивости для предельной точки, которую В.Т. Койтер не рассматривал, есть линейная функция. В большинстве работ рассматриваются несовершенства, которые считаются известными в дискретных точках конструкции [16]. Обычно вектор несовершенств  $\boldsymbol{\varepsilon}$  представляют в виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mu \mathbf{d}, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  – вектор координат узлов (площадей элементов, длин элементов) конструкции без несовершенств;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – вектор координат узлов (площадей элементов, длин элементов) конструкции с несовершенствами;  $\mathbf{d}$  – первая форма потери устойчивости [17–19] конструкции без несовершенств;  $\mu$  – масштабирующий множитель. В некоторых случаях фиксируется форма несовершенств  $\mathbf{d}$  и ищется множитель  $\mu$ , а в других задачах масштабирующий множитель  $\mu$  фиксируется и можно сформулировать задачу нахождения самой худшей формы несовершенств  $\mathbf{d}^{\text{наихудший}}$  [20, 21], которая дает максимальное уменьшение значения критической нагрузки общей потери устойчивости конструкции. Использование этих двух представлений все-таки дает

Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Общая потеря устойчивости и оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях на вероятность безотказной работы

приближенное значение критической нагрузки общей потери устойчивости, так как вид несовершенств (1) не является общим.

В настоящей работе начальные глобальные несовершенства рассматриваются как независимые случайные малые величины, распределенные по нормальному закону, и некратная критическая нагрузка общей потери устойчивости тоже как случайная величина. Рассматривается ситуация, когда при случайных несовершенствах значение критической нагрузки общей потери устойчивости конструкции, соответствующей предельной точке, изменяется, а тип критической точки – предельная точка – не меняется. Ограничение на вероятность безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости включается в ограничения задачи оптимизации [22–24].

## 1. Постановка задачи оптимизации

Требуется определить такие значения управляемых параметров  $\mathbf{X}^*$  из области допустимых значений  $F$ , для которых масса  $W$  конструкции минимальна:

$$W(\mathbf{X}^*) = \min_{\mathbf{X} \in F} W(\mathbf{X}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{X}$  – вектор управляемых параметров. Область допустимых значений  $F$  определяется следующими ограничениями:

- на вероятность безотказной работы конструкции [25]:

$$1 - P(0 < \Lambda^{imp}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}) < 1) \geq \delta, \quad (3)$$

где  $\Lambda^{imp}$  – некратный критический пропорциональный множитель внешней консервативной нагрузки  $\mathbf{P}_0$ ;  $P$  – вероятность общей потери устойчивости стержневой конструкции;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – вектор случайных глобальных несовершенств, которые имеют нормальное распределение, компоненты вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  являются малыми величинами;  $\delta$  – заданный допуск. Для конструкции без несовершенств  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{0\}$ ;

- на предельные значения управляемых параметров:

$$\mathbf{X}_{\min} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{\max}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{X}_{\min}$  и  $\mathbf{X}_{\max}$  – нижние и верхние значения параметров проектирования.

Метод оптимизации [26] основан на квадратичной аппроксимации целевой функции и линейной аппроксимации ограничений на вероятность безотказной работы стержневой конструкции со случайными несовершенствами для одного типа критической точки – предельной точки.

## 2. Основные уравнения

Рассмотрим нелинейную упругую конструкцию, для которой полная потенциальная энергия  $\Pi$  зависит от вектора перемещений  $\mathbf{u}$ , пропорционального множителя нагрузки  $\Lambda$ , случайного вектора глобальных несовершенств  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Все компоненты внешней консервативной нагрузки пропорциональны одному изменяющемуся параметру  $\Lambda$ . Полная потенциальная энергия стержневой конструкции со случайными несовершенствами имеет вид:

$$\Pi(\mathbf{u}, \Lambda, \boldsymbol{\varepsilon}) = \varphi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}) - \Lambda \mathbf{u}^T \mathbf{P}_0, \quad (5)$$

где  $\varphi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon})$  – энергия деформации,  $\mathbf{P}_0$  – вектор внешних консервативных нагрузок.

Уравнения равновесия стержневой конструкции для критического состояния имеют вид:

$$\mathbf{r}^c(\mathbf{u}^{imp}, \Lambda^{imp}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \left\{ \frac{\partial \Pi^c}{\partial u_i} \right\} = \{0\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Общая потеря устойчивости и оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях на вероятность безотказной работы

так как полная потенциальная энергия стационарна в точке. Верхний индекс *imp* в (6) означает зависимость от вектора несовершенств  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Уравнения равновесия (6) определяют равновесные кривые в  $(n+1)$ -мерном пространстве переменных  $(\mathbf{u}, \Lambda)$  при фиксированных несовершенствах  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . На равновесных кривых имеются критические точки – точки, в которых выполняется условие:

$$\det \left| \frac{\partial r_i^c}{\partial u_j} \right| = \det \left| \mathbf{K}^c \right| = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{K}^c$  – касательная матрица жесткости стержневой конструкции [27–30].

Альтернативным условием для определения критической точки является равенство нулю первого собственного значения касательной матрицы жесткости конструкции, которое определяется из следующей проблемы собственных значений:

$$\mathbf{K}^c \boldsymbol{\Phi}_1 = \{0\}. \quad (8)$$

Условие (7) или (8) трактуется как общая потеря устойчивости конструкции, так как при выполнении (7) или (8) возможны неоднозначные решения уравнений равновесия (6).

При варьировании несовершенств  $\boldsymbol{\varepsilon}$  критические точки будут образовывать  $m$ -мерную поверхность критических состояний, где  $m$  – размерность вектора случайных несовершенств  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Дифференцируя уравнения равновесия (6) по параметрам продвижения  $t_1, t_2, \dots, t_m$  вдоль  $m$ -мерной поверхности критических состояний, во всех точках которой касательная матрица жесткости  $\mathbf{K}^c = \partial \mathbf{r}^c / \partial \mathbf{u}$  является особенной, запишем:

$$\mathbf{K}^c \dot{\mathbf{u}}^{imp} + \mathbf{r}_\Lambda^c \dot{\Lambda}^{imp} + \mathbf{r}_\varepsilon^c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = [0], \quad (9)$$

где точка сверху обозначает дифференцирование по  $\mathbf{t}^T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ .

Уравнение (9) будет использоваться для определения критической точки – предельной точки.

### 3. Определение предельной точки

Умножим слева уравнение (9) на  $\boldsymbol{\Phi}_1^T$ , где  $\boldsymbol{\Phi}_1$  – первая форма потери устойчивости стержневой конструкции без несовершенств. Тогда можно записать:

$$\boldsymbol{\Phi}_1^T (\mathbf{K}^c \dot{\mathbf{u}}^{imp} + \mathbf{r}_\Lambda^c \dot{\Lambda}^{imp} + \mathbf{r}_\varepsilon^c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \{0\}^T. \quad (10)$$

Из (10) приходим к условию потери устойчивости стержневой конструкции [25]:

$$\boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \dot{\Lambda}^{imp} + \boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{0\}^T, \quad (11)$$

которое будем использовать для определения некротной предельной точки.

Точка, для которой выполняется

$$\boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \neq 0, \quad \boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c \neq \{0\}^T, \quad \dot{\Lambda}^{imp} \neq \{0\}^T, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq [0], \quad \boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \dot{\Lambda}^{imp} = - \boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (12)$$

называется предельной точкой. Влияние одного случайного несовершенства  $\varepsilon_1$  на предельную точку показано на рисунке 1, а. Критический множитель  $\Lambda^{imp}$  внешней консервативной нагрузки зависит линейно от  $\varepsilon_1$  в окрестности  $\varepsilon_1 = 0$  [25] (рис. 1, б). На рисунке 1 предельные точки развиваются вдоль прямой критических состояний 1, а критический множитель нагрузки, соответствующий предельной точке, для конструкции без несовершенств обозначен  $\Lambda^c$ .

Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Общая потеря устойчивости и оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях на вероятность безотказной работы

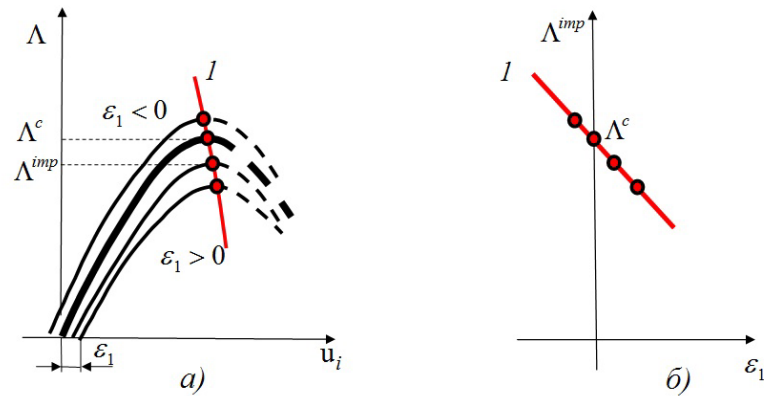


Рисунок 1. Прямая критических состояний

#### 4. Анализ чувствительности критического множителя нагрузки для некратной предельной точки

Для разложения в ряд Тейлора критического множителя и критических перемещений  $\Lambda^{imp}$  и  $\mathbf{u}^{imp}$  необходимо определить их производные по параметрам продвижения  $t_1, t_2, \dots, t_m$  вдоль  $m$ -мерной поверхности критических состояний.

Не нарушая общности, для упрощения рассмотрим два случайных несовершенства  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  ( $m = 2$ ). Параметрические уравнения 2-мерной поверхности критических состояний имеют вид:

$$\mathbf{u}^{imp} = \mathbf{u}^{imp}(t_1, t_2), \quad \Lambda^{imp} = \Lambda^{imp}(t_1, t_2), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(t_1, t_2). \quad (13)$$

Все значения  $t_1$  и  $t_2$ , меняющиеся в некоторой области, дают координаты всех точек 2-мерной поверхности критических состояний.

Разложим  $\Lambda^{imp}$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(t_1^0, t_2^0)$ , где  $t_1^0, t_2^0$  соответствуют отсутствию несовершенств у стержневой конструкции, т. е.  $\varepsilon_1(t_1^0, t_2^0) = 0$ ,  $\varepsilon_2(t_1^0, t_2^0) = 0$ . Можно записать, пренебрегая компонентами второго и более порядков малости,

$$\Lambda^{imp}(t_1, t_2) = \Lambda^{imp}(t_1^0, t_2^0) + \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial t_1}(t_1^0, t_2^0) \Delta t_1 + \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial t_2}(t_1^0, t_2^0) \Delta t_2; \quad (14)$$

$$\varepsilon_1(t_1, t_2) = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t_1}(t_1^0, t_2^0) \Delta t_1 + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t_2}(t_1^0, t_2^0) \Delta t_2; \quad (15)$$

$$\varepsilon_2(t_1, t_2) = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t_1}(t_1^0, t_2^0) \Delta t_1 + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t_2}(t_1^0, t_2^0) \Delta t_2, \quad (16)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  – параметры продвижения вдоль поверхности критических состояний, а производные  $\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial t_1}(t_1^0, t_2^0)$ ,  $\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial t_2}(t_1^0, t_2^0)$  по параметрам продвижения  $t_1$  и  $t_2$  вдоль 2-мерной поверхности критических состояний определяются из уравнения (11) следующим образом:

$$\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial t_1} = - \frac{\boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c}{\boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t_1}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial t_2} = - \frac{\boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c}{\boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t_2}. \quad (18)$$

Предположим, что  $t_1 = \varepsilon_1$ , а  $t_2 = \varepsilon_2$ . Тогда

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t_1} = 1, \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t_2} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t_2} = 1. \quad (19)$$

Используя (19) в уравнениях (15) и (16), получим

$$\Delta t_1 = \varepsilon_1, \quad \Delta t_2 = \varepsilon_2. \quad (20)$$

Следовательно, уравнение (14) приводится к виду:

$$\Lambda^{imp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \Lambda^c + \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1}(0, 0) \varepsilon_1 + \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_2}(0, 0) \varepsilon_2. \quad (21)$$

Формула (21) легко обобщается на случай  $m$  несовершенств:

$$\Lambda^{imp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) = \Lambda^c + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i}(0, 0, \dots, 0) \varepsilon_i, \quad (22)$$

где  $\Lambda^c$  – критический множитель нагрузки  $\mathbf{P}_0$  для конструкции без несовершенств, соответствующий предельной точке.

### 5. Анализ чувствительности вектора перемещений для некротной предельной точки

Пренебрегая компонентами второго и более порядков малости, можно записать:

$$\mathbf{u}^{imp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) = \mathbf{u}^c + \frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(0, 0, \dots, 0) \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (23)$$

Матрица  $\mathbf{K}^c$  в уравнении (9) является особенной, и нахождение  $\dot{\mathbf{u}}^{imp} = \frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  из (9)

становится невозможным. Так как критическая точка – некротная точка, то необходимо записать только одно дополнительное уравнение. Для получения этого дополнительного уравнения дифференцируем уравнение (8) по  $\varepsilon_1$ . Тогда можно записать:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon_1} \right) \boldsymbol{\Phi}_1 + \mathbf{K}^c \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_1}{\partial \varepsilon_1} = \{0\}. \quad (24)$$

Умножим слева уравнение (24) на  $\boldsymbol{\Phi}_1^T$  и получим одно дополнительное уравнение для определения  $\frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_1}$ :

$$\boldsymbol{\Phi}_1^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon_1} \right) \boldsymbol{\Phi}_1 = 0. \quad (25)$$

Итак, имеем  $n$  уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{K}^c \frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_1} = \{0\}, \\ \boldsymbol{\Phi}_1^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon_1} \right) \boldsymbol{\Phi}_1 = 0 \end{cases} \quad (26)$$

для определения производной  $\frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_1}$ . Аналогично определяются остальные производные  $\frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_2}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_3}$ , ...,  $\frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \varepsilon_m}$ , входящие в неизвестную матрицу  $\frac{\partial \mathbf{u}^{imp}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ .

Теперь мы имеем методику определения производных критического множителя нагрузки и критических перемещений по параметрам продвижения по  $m$ -мерной поверхности критических состояний. В частности, имеем производные от  $\Lambda^{imp}$  и  $\mathbf{u}^{imp}$  по случайным несовершенствам  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

## 6. Вероятность критической нагрузки общей потери устойчивости для некратной предельной точки

Рассмотрим пока два независимых нормально распределенных случайных несовершенства  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Их плотности распределения вероятностей определяются как

$$f_1(\varepsilon_1) = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_1} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon_1 - m_{\varepsilon_1})^2}{2\sigma_{\varepsilon_1}^2}},$$

$$f_2(\varepsilon_2) = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon_2 - m_{\varepsilon_2})^2}{2\sigma_{\varepsilon_2}^2}},$$
(27)

где  $m_{\varepsilon_1}$ ,  $m_{\varepsilon_2}$  – математические ожидания нормальных случайных несовершенств  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ;  $\sigma_{\varepsilon_1}$ ,  $\sigma_{\varepsilon_2}$  – средние квадратичные отклонения нормальных случайных несовершенств.

Сначала найдем плотность распределения вероятностей случайной величины  $\Lambda^{imp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  при фиксированных  $\Lambda^c$ ,  $\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1}$  и  $\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_2}$  в уравнении (21). Функция  $\Lambda^{imp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  представляет собой плоскость 1 в пространстве  $\Lambda^{imp}$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  (рис. 2). Плоскость 2, параллельная плоскости  $\varepsilon_1 O \varepsilon_2$ , на текущем расстоянии  $\lambda^{imp}$  пересечет плоскость 1 по прямой  $\lambda^{imp} = \Lambda^c + \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_2} \varepsilon_2$ . Эта прямая 3 разделит плоскость  $\varepsilon_1 O \varepsilon_2$  на две области.

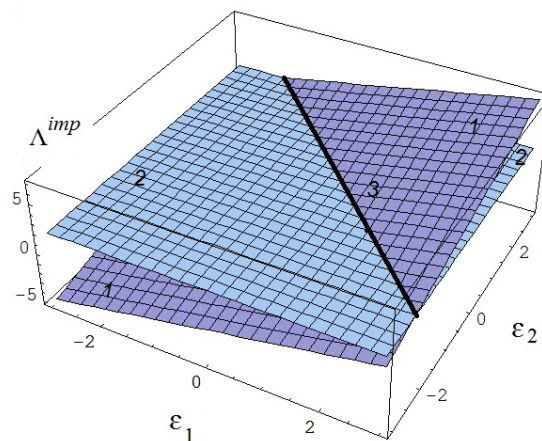


Рисунок 2. Функция  $\Lambda^{imp}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Общая потеря устойчивости и оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях на вероятность безотказной работы

Запишем функцию распределения случайной величины :

$$G(\Lambda^{imp}) = P\left(\Lambda^c + \frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2} \varepsilon_2 < \lambda^{imp}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{\lambda^{imp} - \Lambda^c - \frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1} \varepsilon_1}{\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}}} f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) d\varepsilon_2 \right\} d\varepsilon_1 \quad (28)$$

Так как случайные несовершенства  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  независимы, то совместная плотность распределения  $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  определяется как [31]

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = f_1(\varepsilon_1) f_2(\varepsilon_2). \quad (29)$$

Используя теорему Барроу для (28), т. е. дифференцируя функцию распределения случайной величины  $\Lambda^{imp}$  по переменной  $\lambda^{imp}$ , получим плотность распределения вероятностей случайной величины  $\Lambda^{imp}$ :

$$g(\Lambda^{imp}) = \frac{dG(\Lambda^{imp})}{d\lambda^{imp}} = \frac{1}{\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\varepsilon_1) f_2 \left( \frac{\Lambda^{imp} - \Lambda^c - \frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1} \varepsilon_1}{\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}} \right) d\varepsilon_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 + \left(\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_2}^2}} e^{-\frac{\left(\Lambda^{imp} - \left(\Lambda^c + \frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1} m_{\varepsilon_1} + \frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2} m_{\varepsilon_2}\right)\right)^2}{2\left(\left(\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 + \left(\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_2}^2\right)}}. \quad (30)$$

Аналогичное выражение было получено в работе [31] другим способом.

Таким образом, плотность распределения вероятностей случайной величины  $\Lambda^{imp}$  есть нормальный закон с математическим ожиданием

$$m_{\Lambda^{imp}} = \Lambda^c + \frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1} m_{\varepsilon_1} + \frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2} m_{\varepsilon_2} \quad (31)$$

и средним квадратичным отклонением

$$\sigma_{\Lambda^{imp}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_1}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 + \left(\frac{\partial\Lambda^{imp}}{\partial\varepsilon_2}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_2}^2}. \quad (32)$$

По методу математической индукции линейная функция  $\Lambda^{imp} = \Lambda^c + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i} \varepsilon_i$  с  $m$  независимыми нормальными случайными несовершенствами  $\varepsilon_i$  распределена нормально:

$$g(\Lambda^{imp}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2}} e^{-\frac{\left(\Lambda^{imp} - \left(\Lambda^c + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i} m_{\varepsilon_i}\right)\right)^2}{2 \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2}} \quad (33)$$

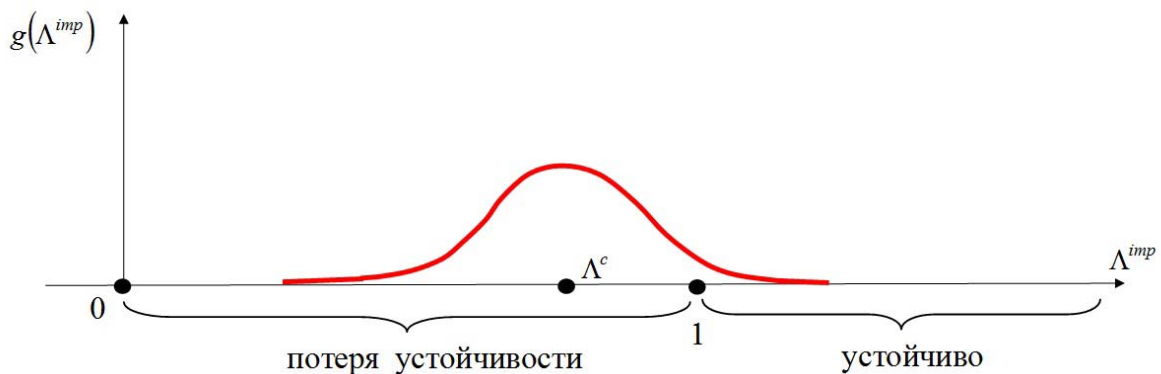
с математическим ожиданием

$$m_{\Lambda^{imp}} = \Lambda^c + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i} m_{\varepsilon_i} \quad (34)$$

и средним квадратичным отклонением

$$\sigma_{\Lambda^{imp}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2} \quad (35)$$

На рисунке 3 показана форма функции плотности распределения вероятности нагрузки общей потери устойчивости для некротной предельной точки.



**Рисунок 3. Функция плотности распределения вероятности  $\Lambda^{imp}$**

Важно отметить, что функция плотности распределения вероятности критической нагрузки общей потери устойчивости  $\Lambda^{imp}$  зависит от управляемых параметров конструкции  $\mathbf{X}$ . Поэтому график плотности вероятности случайной величины  $\Lambda^{imp}$  смещается относительно точки потери устойчивости  $\Lambda^{imp} = 1$  (рис. 3).

Вероятность попадания значений нормальной случайной величины  $\Lambda^{imp}$  в интервал общей потери устойчивости  $(0, 1)$  (рис. 3) равна определенному интегралу от плотности распределения вероятности  $g(\Lambda^{imp})$ :

$$P(0 < \Lambda^{imp} < 1) = \int_0^1 g(\Lambda^{imp}) d\Lambda^{imp} \quad (36)$$



Выражение (36) позволяет подсчитать искомую вероятность критической нагрузки общей потери устойчивости для предельной точки. Функция плотности  $g(\Lambda^{imp})$  распределения вероятностей случайной величины  $\Lambda^{imp}$  определяется по (33), где производные  $\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i}$  находятся по формуле:

$$\frac{\partial \Lambda^{imp}}{\partial \varepsilon_i} = - \frac{\Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c}{\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_i}, \quad (37)$$

а  $m_{\varepsilon_i}, \sigma_{\varepsilon_i}$  – заданные параметры случайных нормальных несовершенств  $\varepsilon$ .

## 7. Пример расчета

Рассмотрим пространственный купол с тремя степенями свободы, нагруженный в узле 1 сосредоточенной силой  $P_0 = 3,041 \cdot 10^7$  Н (рис. 4). На рисунке 5 также представлен вид купола сверху. Модуль упругости  $E = 6,895 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, удельный вес  $\rho g = 26977,5$  Н/м<sup>3</sup>.  $A$  – площади поперечных сечений элементов. Независимые случайные несовершенства  $\varepsilon$  подчинены нормальному закону распределения с математическими ожиданиями, равными нулю, и заданными средними квадратичными отклонениями.

Расстояние  $S = 1$  м;  $\varepsilon_1$  – несовершенство модуля упругости  $E$  элементов фермы 1 и 3;  $\varepsilon_2$  – несовершенство координаты  $z$  узла 1;  $\varepsilon_3$  – несовершенство модуля упругости  $E$  элементов фермы 2 и 4. Средние квадратичные отклонения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  для трех независимых несовершенств  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  равны 1962 МПа, 0,005 м, 981 МПа.

Параметрами проектирования являются площади поперечных сечений  $A$ , м<sup>2</sup>, элементов и высота  $H$ , м, купола. Допустимая область  $F$  определяется следующими ограничениями на параметры проектирования:  $0,0012 \leq A \leq 0,002$ ,  $0,5 \leq H \leq 0,6$  и также ограничением на вероятность безотказной работы конструкции  $1 - P(0 < \Lambda^{imp} < 1) \geq 0,99$ .

Полная потенциальная энергия купола записывается в виде:

$$\Pi = -\Lambda P_0 u_z + \frac{2A}{\sqrt{(S^2 + 4(H - \varepsilon_2)^2)^3}} \left[ S^2 (u_x^2 (E + \varepsilon_1) + u_y^2 (E + \varepsilon_3)) + (2E + \varepsilon_1 + \varepsilon_3) (u_x^2 + u_y^2 + u_z (-2H + u_z + 2\varepsilon_2))^2 \right].$$

Критический множитель нагрузки общей потери устойчивости купола определяется из уравнения (22) и имеет вид:

$$\Lambda^{imp} = \frac{32AEH^3}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^3}} + \frac{16AH^3}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^3}} \varepsilon_1 - \frac{32AEH^2 S^2}{P_0 \sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^5}} \varepsilon_2 + \frac{16AH^3}{P_0 3\sqrt{3}\sqrt{(4H^2 + S^2)^3}} \varepsilon_3.$$

Оптимальный проект купола определяется некратной предельной точкой  $\{X^*\} = \{1321,93 \text{ мм}^2; 600 \text{ мм}\}$  с весом  $W_{opt} = 11,357 \text{ кг}$  (рис. 6), где 1 соответствует ограничению, состоящему в том, что вероятность безотказной работы конструкции равна 0,99; 4, 5, 6 – кривые уровней целевой функции. На рисунке 6 показаны ограничения 2 и 3, где вероятность безотказной работы конструкции равна 0,95 и 0,90 соответственно.

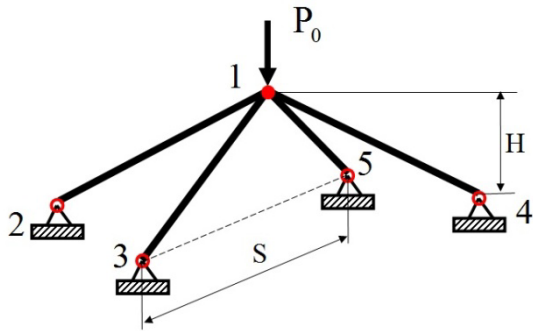


Рисунок 4. Пространственный купол

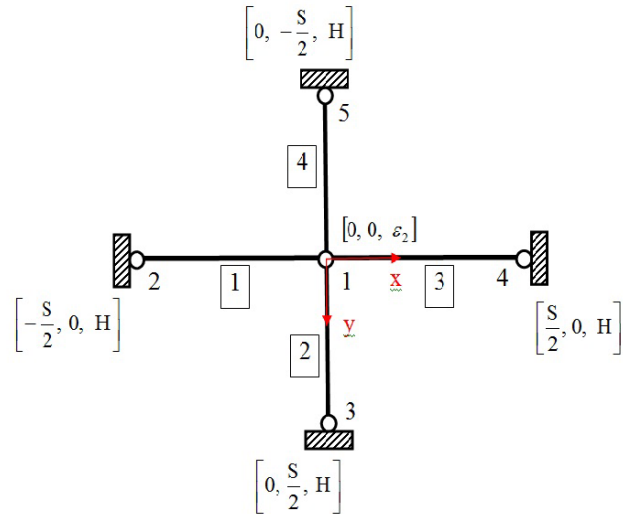


Рисунок 5. Вид пространственного купола сверху

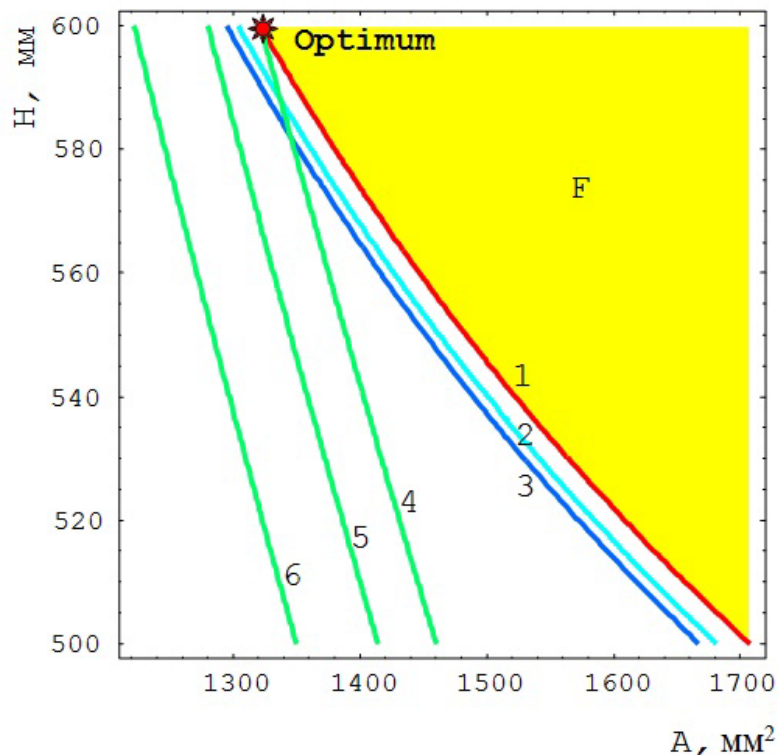


Рисунок 6. Графическое решение задачи оптимизации массы купола

## Заключение

Сформулирована и решена новая задача оптимизации по массе геометрически нелинейных стержневых конструкций с ограничениями на вероятность безотказной работы конструкции по общей потере устойчивости и на предельные значения управляемых параметров. Проанализированы свойства функции плотности распределения вероятности критической нагрузки общей потери устойчивости конструкции при наличии  $m$  независимых нормальных случайных несовершенств. Для некротной предельной критической точки решен тестовый пример.

## Литература

1. Arnold M.A. van der Heijden. W.T. Koiter's elastic stability of solids and structures. New York: Cambridge University Press, 2009. 230 p.
2. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. М.: Издательство ассоциации строительных вузов, 2005. 736 с.
3. Алфутов Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2003. 256 с.
4. Каган-Розенцвейг Л. М. О расчете упругих рам на устойчивость // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). С. 74–78.
5. Лалин В.В., Розин Л.А., Кушова Д.А. Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней // Инженерно-строительный журнал. 2013. №1(36). С. 87–96.
6. Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Оптимальное проектирование геометрически нелинейных конструкций и анализ чувствительности в кратных критических точках // Морские интеллектуальные технологии. 2010. №1(7). С. 45–48.
7. Сергеев О.А., Киселев В.Г. Оптимизация геометрически нелинейных стержневых конструкций с начальными глобальными несовершенствами // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2010. Вып. 72. С. 100–112.
8. Ohsaki M., Ikeda K. Stability and Optimization of Structures—Generalized Sensitivity Analysis. New York: Springer-Verlag, 2007. 269 p.
9. Wojczuk D., Mroz Z. Nonlinear sensitivity analysis of discrete structures // Foundations of civil and environmental engineering. 2002. No.1. Pp. 19–41.
10. Polynkin A.A., Keulen F., Toropov V.V. Optimization of geometrically nonlinear thin-walled structures using the multipoint approximation method // Structural optimization. 1995. Vol. 9. No.2. Pp. 105–116.
11. Gravesen J., Evgrafov A., Nguyen D.M. On the sensitivities of multiple eigenvalues // Structural and Multidisciplinary optimization. 2011. Vol. 44. Issue 4. Pp. 583–587.
12. Жгутов В.М. Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках // Инженерно-строительный журнал. 2010. №5(15). С. 16–30.
13. Жгутов В. М. Прочность и устойчивость упругих ортотропных и изотропных ребристых оболочек. I // Инженерно-строительный журнал. 2009. №7(9). С. 55–64.
14. Жгутов В. М. Прочность и устойчивость упругих ортотропных и изотропных ребристых оболочек. II // Инженерно-строительный журнал. 2009. №8(10). С. 31–39.
15. Жгутов В.М. Прочность и устойчивость упругих ортотропных и изотропных ребристых оболочек. III // Инженерно-строительный журнал. 2010. №6(16). С. 23–37.
16. Ohsaki M., Ikeda K. Imperfection sensitivity analysis of hilltop branching with many symmetric bifurcation points // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. Issue 16. Pp. 4704–4719.
17. Ikeda K., Murota K., Elishakoff I. Reliability of structures subject to normally distributed initial imperfections // Computers & Structures. 1996. Vol. 59. No.3. Pp. 463–469.
18. Mróz Z., Piekarski J. Sensitivity analysis and optimal design of nonlinear structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1998. Vol. 42. Issue 7. Pp. 1231–1262.

Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Общая потеря устойчивости и оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях на вероятность безотказной работы

19. Балькин С.В., Фрумен А.И. Влияние начальной погиби, соответствующей форме потери устойчивости сферической оболочки из оргстекла, на ее критическое давление // Тезисы докладов XXIII Международной конференции. Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Санкт-Петербург: 28 сентября – 01 октября 2009 г. С. 38–40.
20. Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Оптимизация по массе геометрически нелинейных стержневых конструкций с несовершенствами // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2011. Вып. 4. Часть 5. С. 2232–2234.
21. Lindgaard E., Lund E., Rasmussen K. Nonlinear buckling optimization of composite structures considering “worst” shape imperfections // International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. Issues 22–23. Pp. 3186–3202.
22. Valdebenito M.A., Schuëller G.I. A survey on approaches for reliability-based optimization // Structural and Multidisciplinary optimization. 2010. Vol. 42. Issue 5. Pp. 645–663.
23. Selyugin S.V. On optimal geometrically non-linear trusses // Structural and Multidisciplinary optimization. 2005. Vol. 29. Issue 2. Pp. 113–124.
24. Kruzelecki J., Stawiarski A. Optimal design of thin-walled columns for buckling under loadings controlled by displacements // Structural and Multidisciplinary optimization. 2010. Vol. 42. Issue 2. Pp. 305–314.
25. Любимов А.К., Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях по устойчивости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2012. Вып. 74. С. 134–145.
26. Ohsaki M. Optimization of finite dimensional structures. USA: CRC Press, 2010. 439 p.
27. Belytschko T., Lio W.K., Moran B. Nonlinear finite elements for continua and structures. New York: John Wiley & Sons, 2001. 650 p.
28. Crisfield M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol.1. New York: John Wiley & Sons, 1991. 345 p.
29. Crisfield M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol.2. New York: John Wiley & Sons, 1997. 494 p.
30. Antmann S.S. Nonlinear problems of elasticity. New York: Springer-Verlag, 2005. 835 p.
31. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: КНОРУС. 2010. 480 с.

*Олег Анатольевич Сергеев, г. Нижний Новгород, Россия  
Тел. моб.: +7(910)797-41-90; эл. почта: nnsosa@rambler.ru*

*Владимир Геннадьевич Киселев, г. Нижний Новгород, Россия  
Тел. раб.: +7(831)433-20-10; эл. почта: kivg@mts-nn.ru*

*Светлана Анатольевна Сергеева, г. Нижний Новгород, Россия  
Тел. моб.: +7(904)064-86-51; эл. почта: nnsveta@rambler.ru*

© Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. 2013

doi: 10.5862/MCE.44.4

## Overall instability and optimization of bar structures with random defects in case of constraints on faultless operation probability

**O.A. Sergeev,***Engineering company "Express plus" at Gorky Automobile Plant, Nizhny Novgorod, Russia  
+7(910)7974190; e-mail: nnsa@rambler.ru***V.G. Kiselev,***Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia  
+7(831)4332010; e-mail: kivg@mts-nn.ru***S.A. Sergeeva,***Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russia  
+7(904)0648651; e-mail: nnsveta@rambler.ru*

### Key words

optimization, geometrically nonlinear bar structures, random global imperfections, faultless operation probability, overall instability, non-multiple limit points

### Abstract

The aim of this paper is to pose and solve weight optimization problem of bar structures with constraints on faultless operation probability of a structure and constraints on design variables. Optimization method is based on a quadratic approximation of the objective function and a linear approximation of constraints on faultless operation probability of rod structures with random defects.

In this paper, the initial global imperfections are considered as small independent random variables distributed according to normal law, and buckling load value is also a random variable. We study a case when under random imperfections non-multiple buckling load value is changed and non-multiple critical point type – the limit point is not changed.

### References

1. Arnold M.A. van der Heijden. W.T. *Koiter's elastic stability of solids and structures*. New York: Cambridge University Press, 2009. 230 p.
2. Slivker V.I. *Stroitel'naya mekhanika. Variatsionnye osnovy* [Structural mechanics. Variational essentials]. Moscow: DIA Press. 2005. 736 p. (rus)
3. Alfutov N.A., Kolesnikov K.S. *Ustoychivost dvizheniya i ravnovesiya* [Motion and equilibrium stability]. Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman, 2003. 256 p. (rus)
4. Kagan-Rozentsveig L. M. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No. 1(27). Pp. 74–78. (rus)
5. Lalin V.V., Rozin L.A., Kushova D.A. *Magazine of Civil Engineering*. 2013. No. 1(36). Pp. 87–96. (rus)
6. Sergeev O.A., Kiselev V.G., Sergeeva S.A. *Morskiye intellektualnyye tekhnologii*. 2010. No. 1(7). Pp. 45–48. (rus)
7. Sergeev O.A., Kiselev V.G. *Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhvuz. sb.* [Problems of Strength and Plasticity. Higher School Collection]. Nizhniy Novgorod: Izd-vo NNGU, 2010. Vol. 72. Pp. 100–112. (rus)
8. Ohsaki M., Ikeda K. *Stability and Optimization of Structures—Generalized Sensitivity Analysis*. New York: Springer-Verlag, 2007. 269 p.
9. Bojczuk D., Mroz Z. Nonlinear sensitivity analysis of discrete structures. *Foundations of civil and environmental engineering*. 2002. No. 1. Pp.19–41.
10. Polynkin A.A., Keulen F., Toropov V.V. Optimization of geometrically nonlinear thin-walled structures using the multipoint approximation method. *Structural optimization*. 1995. Vol. 9. No. 2. Pp. 105–116.
11. Gravesen J., Evgrafov A., Nguyen D.M. On the sensitivities of multiple eigenvalues. *Structural and Multidisciplinary optimization*. 2011. Vol. 44. Issue 4. Pp. 583–587.
12. Zhgutov V.M. *Magazine of Civil Engineering*. 2010. No. 5(15). Pp. 16–30. (rus)
13. Zhgutov V. M. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No. 7. Pp. 55–64. (rus)
14. Zhgutov V. M. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No. 8. Pp. 31–39. (rus)

Sergeev O.A., Kiselev V.G., Sergeeva S.A. Overall instability and optimization of bar structures with random defects in case of constraints on faultless operation probability

15. Zhgutov V.M. *Magazine of Civil Engineering*. 2010. No. 6(16). Pp. 23–37. (rus)
16. Ohsaki M., Ikeda K. Imperfection sensitivity analysis of hilltop branching with many symmetric bifurcation points. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. Issue 16. Pp. 4704–4719.
17. Ikeda K., Murota K., Elishakoff I. Reliability of structures subject to normally distributed initial imperfections. *Computers & Structures*. 1996. Vol. 59. No. 3. Pp. 463–469.
18. Mróz Z., Piekarski J. Sensitivity analysis and optimal design of nonlinear structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1998. Vol. 42. Issue 7. Pp. 1231–1262.
19. Balykin S.V., Frumen A.I. *Tezisy dokladov XXIII Mezhdunarodnoi konferencii. Matematicheskoe modelirovanie v mekhanike deformiruemykh tel i konstrukcii. Metody granichnykh i konechnykh elementov* [Abstracts of XXIII International Conference Mathematical and Computer Simulation in Mechanics of Solids and Structures. Methods of Boundary and Finite Elements]. Saint Petersburg: September 28 – October 01. 2009. Pp. 38–40. (rus)
20. Sergeyev O.A., Kiselev V.G., Sergeyeva S.A. *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*. Nizhni Novgorod: Izd-vo NNGU, 2011. Vol. 4. Part 5. Pp. 2232–2234. (rus)
21. Lindgaard E., Lund E., Rasmussen K. Nonlinear buckling optimization of composite structures considering “worst” shape imperfections. *International Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47. Issues 22–23. Pp. 3186–3202.
22. Valdebenito M.A., Schuëller G.I. A survey on approaches for reliability-based optimization. *Structural and Multidisciplinary optimization*. 2010. Vol. 42. Issue 5. Pp. 645–663.
23. Selyugin S.V. On optimal geometrically non-linear trusses. *Structural and Multidisciplinary optimization*. 2005. Vol. 29. Issue 2. Pp. 113–124.
24. Kruźelecki J., Stawiarski A. Optimal design of thin-walled columns for buckling under loadings controlled by displacements. *Structural and Multidisciplinary optimization*. 2010. Vol. 42. Issue 2. Pp. 305–314.
25. Liubimov A.K., Sergeyev O.A., Kiselev V.G., Sergeyeva S.A. *Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhvuz. sb.* [Problems of Strength and Plasticity. Higher School Collection]. Nizhniy Novgorod: Izd-vo NNGU, 2012. Vol. 74. Pp. 134–145. (rus)
26. Ohsaki M. *Optimization of finite dimensional structures*. USA: CRC Press, 2010. 439 p.
27. Belytschko T., Lio W.K., Moran B. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. New York: John Wiley & Sons, 2001. 650 p.
28. Crisfield M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol. 1. New York: John Wiley & Sons, 1991. 345 p.
29. Crisfield M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol. 2. New York: John Wiley & Sons, 1997. 494 p.
30. Antmann S.S. *Nonlinear problems of elasticity*. New York: Springer-Verlag, 2005. 835 p.
31. Venttsel E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya veroiatnostey i yeye inzhenernyye prilozheniya* [Probability Theory and its Engineering Applications]. Moscow: KNORUS Press. 2010. 480 p. (rus)

**Full text of this article in Russian: pp. 30–41**