

## Конечно-элементное моделирование динамики мостов при воздействии подвижной нагрузки

*Д.т.н., заведующий кафедрой «Строительная механика» Г.М. Кадисов,  
ФГБОУ ВПО «Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ)»;  
инженер В.В. Чернышов,  
ООО НПО «МОСТОВИК»*

**Аннотация.** Получены и проанализированы решения задачи о динамике вантового моста в двух вариантах моделирования.

В первом варианте применены конечные элементы в пространстве и во времени; для изучения колебаний вантового моста под воздействием перемещающейся с постоянной скоростью вертикальной силы и построения графиков изменения во времени усилий в фиксированных сечениях пролетного строения изображены первые три собственные формы колебаний моста.

Во втором варианте подвесное пролетное строение представлено складкой с абсолютно жесткими поперечными диафрагмами в местах прикрепления вант, пилон представлен стержнем; получены собственные формы колебаний моста путем решения однородной системы уравнений смешанного метода. Изображены узловые линии складки для первых четырех собственных форм.

Дано сравнительное описание применимости вышеуказанных методов в решении задач динамики под воздействием подвижной нагрузки.

**Ключевые слова:** динамика; вантовый мост; подвижные нагрузки; собственные формы

### Введение

В связи с активным строительством транспортных сооружений и увеличением массогабаритных параметров транспортного потока возникает вопрос об учете данного вида динамического воздействия на мостах. Решения задач о воздействии подвижной нагрузки на пролетные строения мостов приведены в работах [1–6]. Колебания висячих и вантовых мостов совместно с подвижными нагрузками рассмотрены в работах [7–15]. Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом представлено в работах [16–22]. Воздействия высокоскоростных, сейсмических, ударных и ветровых нагрузок на мосты рассмотрены в работах [23–28]. В большинстве вышеперечисленных исследований решены и описаны плоские задачи. Пространственные задачи о колебаниях мостов с подвижными нагрузками представлены в работах [29–34], где пролетное строение смоделировано складчатой системой. В связи с широким внедрением программных комплексов, основанных на методе конечных элементов, в практику проектирования сложных пространственных сооружений актуальным является использование этих комплексов и в задачах с подвижной нагрузкой.

Постановка задачи. При помощи программного комплекса Midas Civil требуется численно получить решение динамики вантового моста под воздействием перемещающейся с постоянной скоростью вертикальной силы с определением усилий в пролетном строении в каждый момент времени и сравнить с решениями, полученными другими численными методами.

### Решение задачи методом конечных элементов

В качестве примера принят вантовый мост, представленный на рисунке 1. Балка жесткости имеет коробчатое поперечное сечение с ортотропными плитами, габаритные размеры представлены на рисунке 2.

В узлах примыкания вант предусмотрены диафрагмы. Материал балки – сталь с модулем упругости  $E = 2.06E + 08 \text{ кН/м}^2$  и объемным весом  $\rho = 76.98 \text{ кН/м}^3$ . Рамный пилон коробчатого сечения: у основания габарит  $3 \times 3 \text{ м}$ , толщина  $0.6 \text{ м}$ , на вершине  $2 \times 2 \text{ м}$ , толщина  $0.4 \text{ м}$ . Материал пилона – бетон с модулем упругости  $E = 3.6E + 07 \text{ кН/м}^2$  и объемным весом  $\rho = 24.52 \text{ кН/м}^3$ . Ванты  $d = 0.1 \text{ м}$  из стали с модулем упругости  $E = 1.95E + 08 \text{ кН/м}^2$  и объемным весом  $\rho = 76.98 \text{ кН/м}^3$ .

По данным параметрам была смоделирована расчетная схема вантового моста. Общий вид расчетной схемы представлен на рисунке 3. Конечно-элементная модель балки жесткости и пилона представлена стержневыми балочными элементами, ванты – элементами, работающими только на растяжение. Балка жесткости имеет три шарнирно-подвижные вдоль оси моста точки опирания на концах и на перемычке пилона. У основания пилон закреплен жестко. С целью оптимизации работы системы выполнено регулирование напряженного состояния путем изменения усилий в вантах, проведены проверочные расчеты по прочности и устойчивости по действующим нормам.

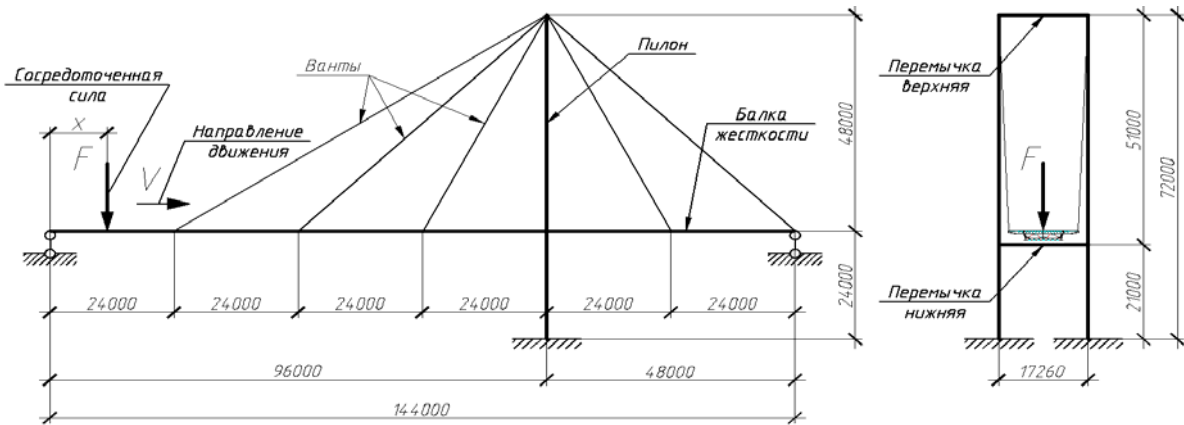


Рисунок 1. Общий вид вантового моста

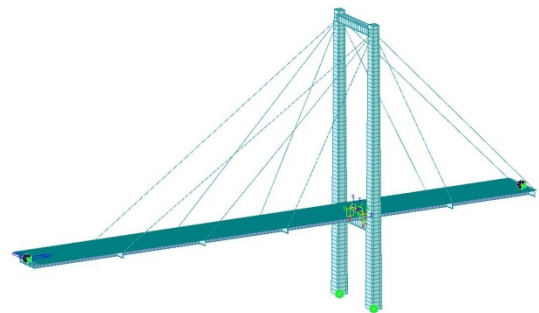
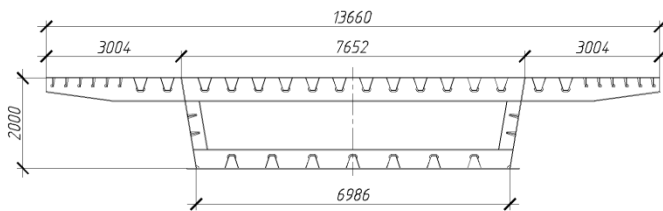


Рисунок 2. Поперечное сечение балки жесткости

Рисунок 3. Общий вид расчетной схемы

Вычисление собственных форм и периодов колебаний произведено программным комплексом Midas Civil по методу Ланцоша [35]. В расчете учтено 100 форм. Первые две формы, а также значения периодов собственных колебаний представлены на рисунке 4.

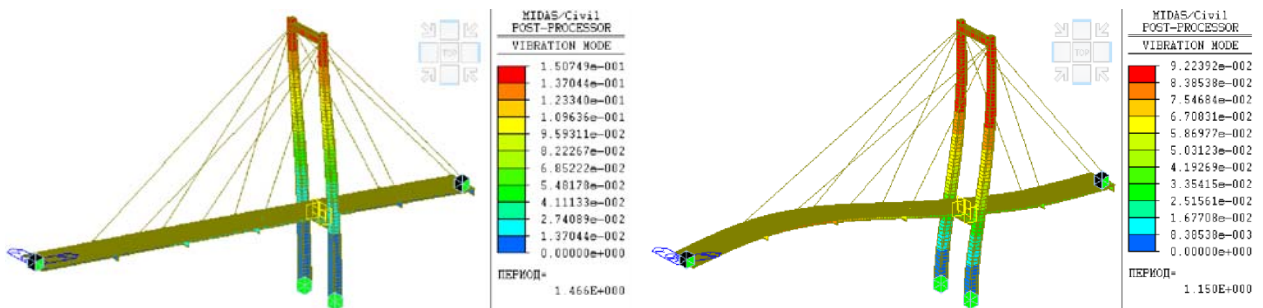


Рисунок 4. Формы колебания вантового моста

Рассмотрим динамическое воздействие от перемещения силы  $F = 981 \text{ кН}$  по оси балки жесткости со скоростью  $V$  по направлению, указанному на рисунке 1. Балка жесткости разбита на конечные элементы длиной  $a$ , на каждый  $j$ -й узел прикладывается сила  $F_j$ , изменяющаяся во времени по закону  $F_j = f(t)$  согласно рисунку 5. Каждая функция включается в строго определенной последовательности и ограничена промежутком времени, равным  $t = 2a / V$ . Общее время расчета зависит от скорости прохождения силы по балке жесткости и равно  $t = L_{\text{МОСТ}} / V$ . Распределение каждой сосредоточенной силы на узлы конечно-элементной модели выполняется с учетом узловой передачи нагрузки. В фиксированный момент времени оказываются загруженными два узла, если сила находится между ними, или один при нахождении силы над узлом, тем самым создается эффект непрерывного «перетекания» силы от узла к узлу.

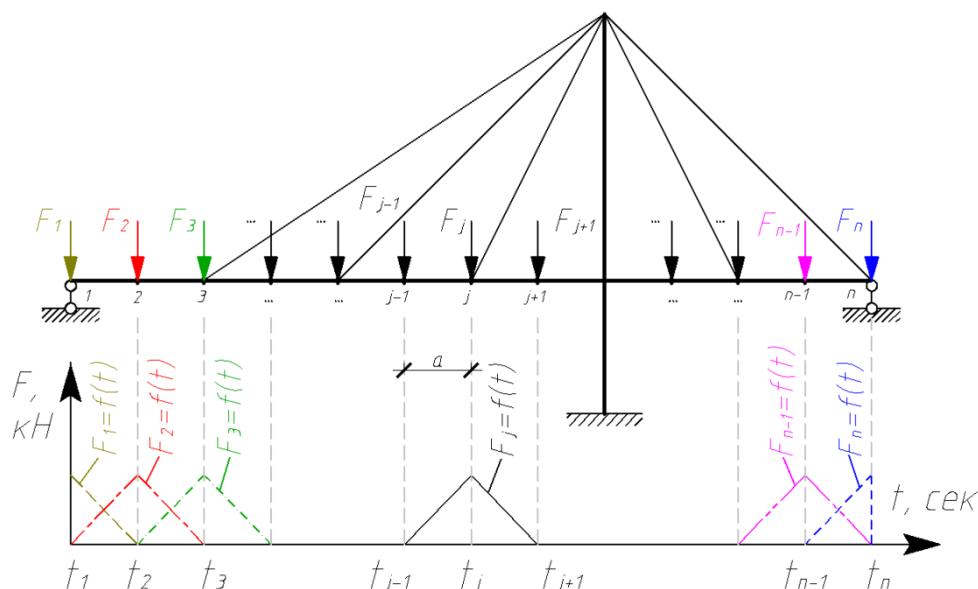


Рисунок 5. Функции изменения сил  $F$  во времени  $t$

Рассмотрено движение силы по балке жесткости со скоростями 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210 и 240 км/ч. Огибающая эпюра динамических моментов в балке жесткости при разных скоростях движения силы приведена на рисунке 6.

По графику видно, что при увеличении скорости движения нагрузки происходит увеличение моментов. Объясняется это тем, что движущаяся сила вызывает колебания вантового моста с частотой, близкой к частоте первой собственной форме системы.

Интерес представляет изменение усилий в фиксированных сечениях в течение времени перемещения с постоянной скоростью  $V$  вертикальной силы в сравнении с квазистатическим состоянием, когда скорость движения близка к нулю. График изменения моментов во времени в сечениях  $x = 36 \text{ м}$  и  $x = 126 \text{ м}$  при движении силы  $F$  со скоростью 210 км/ч представлен на рисунке 7 и со скоростью 5 км/ч – на рисунке 8.

По графикам видно, что при перемещении силы  $F$  со скоростью 210 км/ч усилия в сечении  $x = 36 \text{ м}$  на 30% выше, чем при квазистатическом состоянии. А для сечения  $x = 126 \text{ м}$  значение усилия при перемещении силы со скоростью 210 км/ч, наоборот, ниже на 10%; объясняется это тем, что сила как бы проскакивает пролет, не вызывая большого воздействия. Если обратиться к рисунку 6, видно, что при меньшей скорости в 180 км/ч мы получаем большие значения усилий для сечения  $x = 126 \text{ м}$ .

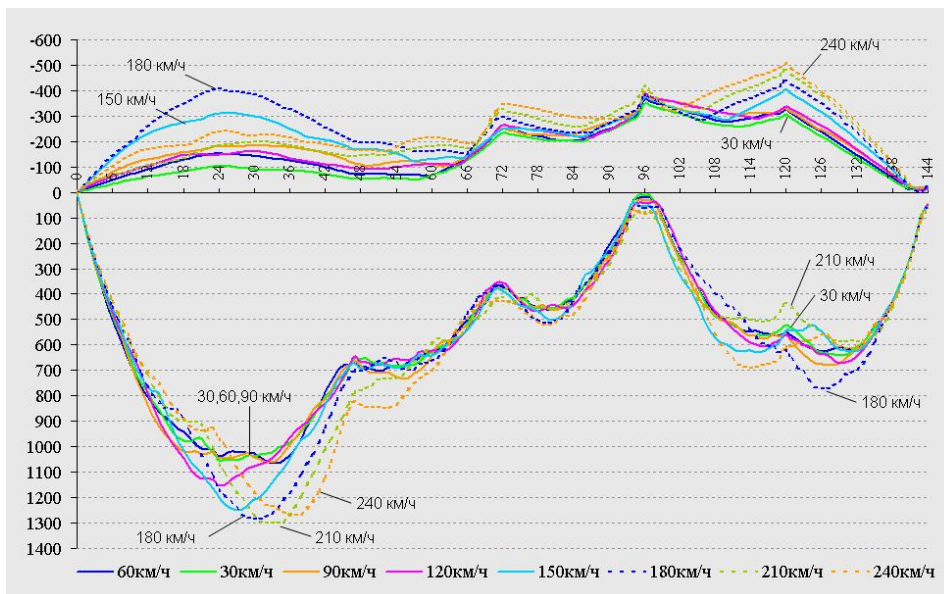


Рисунок 6. Огибающая эпюра динамических моментов в балке жесткости

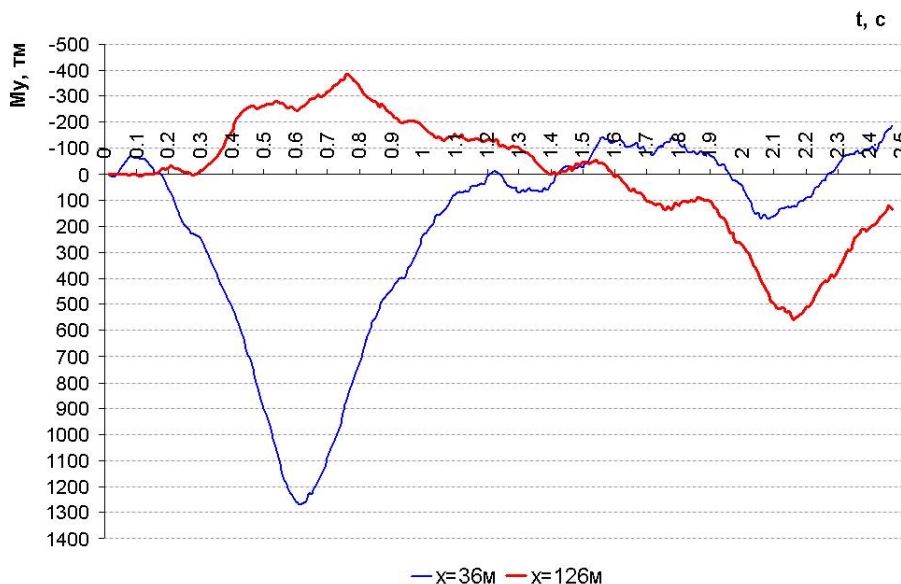


Рисунок 7. Изменение моментов во времени при перемещении силы со скоростью 210 км/ч

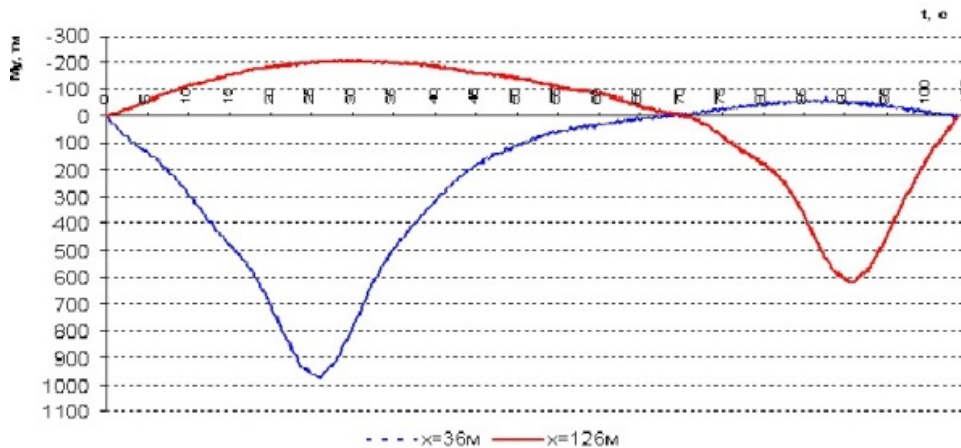


Рисунок 8. Изменение моментов во времени при перемещении силы со скоростью 5 км/ч

### Решение задачи с применением модели складки

Модель складки для расчета пролетных строений мостов предложена В.А. Александровым в работе [29], где представлены метод перемещений для однопролетных складок и смешанный метод для многопролетных. Там же рассмотрена, в частности, задача о движении пары сосредоточенных сил по бездиафрагменному плитно-ребристому пролетному строению. В работе [30] дополнительно рассмотрены некоторые особенности, связанные с расчетом напряженно-деформированного состояния складки, моделирующей тонкостенный стержень. Колебания складчатых систем при движении регулярной колонны автомобилей рассмотрены в работах [31, 32]. Задача на собственные значения колебаний вантового моста рассмотрена в работе [34], где подвесное пролетное строение представлено моделью складки. Ниже модель складки дополнена абсолютно жесткими поперечными диафрагмами в местах прикрепления пролетного строения к вантам. Основные уравнения смешанного метода представлены ниже уравнениями равновесия складки, пилона и диафрагм:

$$(\mathbf{R}_i - \lambda \mathbf{M}_i) \mathbf{z}_i + \mathbf{R}_{ix} \mathbf{X} + \mathbf{R}_{iy} \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (i = \overline{1, n_s}); \quad (1)$$

$$(\mathbf{R}_\pi - \lambda \mathbf{M}_\pi) \mathbf{z}_\pi + \mathbf{R}_{\pi x} \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (\pi = \overline{1, n_p}); \quad (2)$$

$$\mathbf{T} \mathbf{Y} = \mathbf{0}; \quad (3)$$

уравнениями совместности перемещений складки, пилона и вант(4), складки и диафрагм (5), (6):

$$\sum_i \Delta_{xi} \mathbf{z}_i + \sum_\pi \Delta_{x\pi} \mathbf{z}_\pi + \Delta_{xx} \mathbf{X} = \mathbf{0}; \quad (4)$$

$$\sum_i \Delta_{yi} \mathbf{z}_i = \Delta_y; \quad (5)$$

$$\Delta_y = \mathbf{T}^T \mathbf{z}. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_\pi$  – амплитуды узловых перемещений  $i$ -й гармоники складки, пилона;  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  – усилия в вантах и усилия взаимодействия диафрагм и складки;  $\Delta_y$  – перемещения складки в сечениях с диафрагмами по направлению усилий  $\mathbf{Y}$ ;  $\mathbf{z}$  – основные перемещения абсолютно жестких диафрагм;  $\mathbf{T}$  – прямоугольная блочная матрица коэффициентов в уравнении равновесия диафрагм с числом блоков, равным числу диафрагм. Каждый блок этой матрицы содержит 3 строки и столько столбцов, сколько сил взаимодействия одной диафрагмы со складкой. Напомним, что  $\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_{ix}, \mathbf{R}_{iy}$  – реакции дополнительных связей, распределенных вдоль узловых линий складки, от деформирования складки по  $i$ -й гармонике и от усилий  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ;  $\mathbf{M}_i$  – приведенная матрица инерционности для  $i$ -й гармоники складки,  $\mathbf{M}_\pi$  – пилона;  $\mathbf{R}_\pi, \mathbf{R}_{\pi x}$  – аналогичные матрицы в дополнительных связях пилона;  $\Delta_{xi}, \Delta_{x\pi}, \Delta_x, \Delta_y$  – перемещения по направлению усилий  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ .

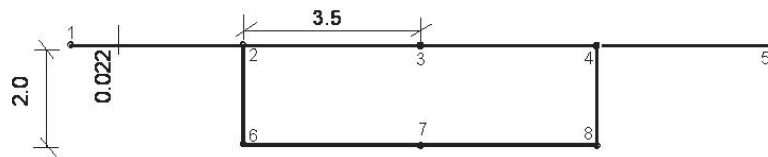
Решение представленной системы уравнений выполняется в следующем порядке. Сначала для каждой гармоники складки и пилона решаются отдельно задачи на собственные значения с определением собственных форм  $\Phi_{ik}, \Phi_{\pi k}$  и квадратов собственных частот  $\lambda_{ik}, \lambda_{\pi k}$ , а затем  $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_\pi$  представляются рядами по собственным формам складки и пилона, как в работе [34].  $z_i$  из уравнения (1) выражается через  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ ,  $z_\pi$  из уравнения (2) – только через  $\mathbf{X}$ . Тогда уравнения (4) и (5) будут содержать в левой части неизвестные  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Учитывая, что усилия взаимодействия  $\mathbf{Y}$  уравновешены (3), их можно выразить через равнодействующие  $\mathbf{R}$  ( $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{R}$ ), и количество неизвестных в системе двух матричных уравнений снижается, при этом правая часть второго уравнения исчезает:  $\mathbf{B}^T \Delta_y = \mathbf{0}$ . Далее однородная система уравнений решается аналогично работе [34]. Отметим, что определитель однородной системы как функция параметра  $\lambda$ , согласно [36], имеет полюсы на спектре отдельных складки  $\lambda_{ik}$  и пилона  $\lambda_{\pi k}$ , а нули – на



спектре вантового моста в целом. Это позволяет сначала объединить спектры складки и пилона, затем их ранжировать и искать нули в промежутках между каждой парой соседних полюсов методом деления отрезка пополам или методом золотого сечения, или, наконец, малыми равномерными шагами найти очередной корень характеристического уравнения. Затем определяются соответствующие ему векторы  $X, Y$  и  $z_i, z_\pi$ .

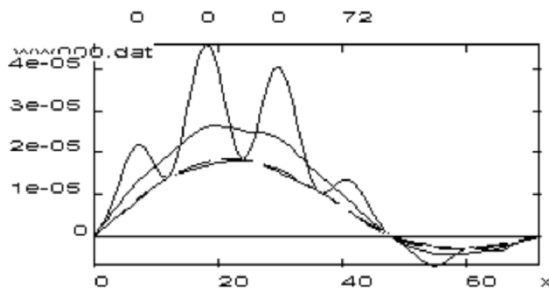
Для решения такой задачи на собственные значения колебаний вантового моста составлена программа на языке программирования C++, с помощью которой вычисляются вертикальные, горизонтальные и угловые перемещения узловых линий складки, перемещения пилона, усилия в вантах и т. п. для каждой собственной формы моста. Эта программа дополнила пакет программного обеспечения для статических и динамических расчетов пространственных упругих систем.

Покажем результаты расчета собственных форм вантового моста, представленного на рисунке 1. Балка жесткости смоделирована складкой с поперечным сечением (рис. 9). Ванты поддерживают 1-ю и 5-ю узловые линии.

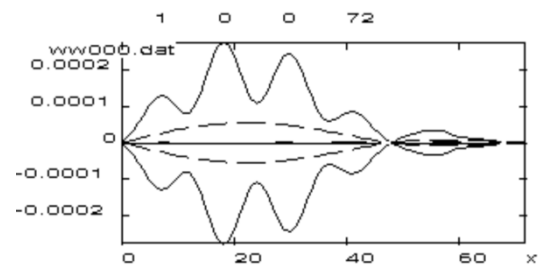


**Рисунок 9. Поперечное сечение балки жесткости. Узловые линии пронумерованы**

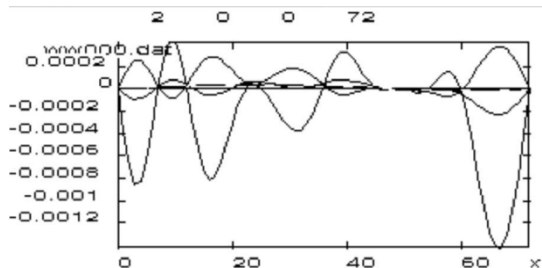
На рисунках 10–13 показаны графики вертикальных перемещений узловых линий складки первых 4 собственных форм вантового моста. Шаг между вычисленными ординатами равен 2 м.



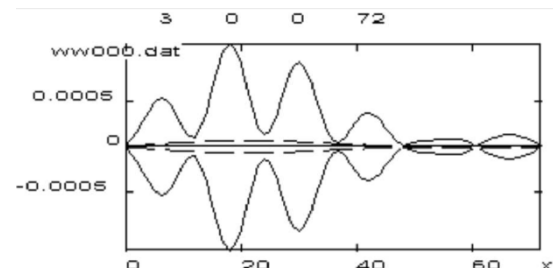
**Рисунок 10. Первая форма колебаний**



**Рисунок 11. Вторая форма колебаний**



**Рисунок 12. Третья форма колебаний**



**Рисунок 13. Четвертая форма колебаний**

На рисунке 10 и рисунке 12 даны симметричные формы относительно продольной оси моста, а на рисунке 11 и рисунке 13 – кососимметричные. Легко заметить, что наибольшие перемещения имеют точки крайних узловых линий, расположенные посередине между диафрагмами.

Следует отметить, что балка жесткости вантового моста в первом примере представлена балочными конечными элементами, а во втором – пространственной тонкостенной складкой. Отсюда и получено некоторое различие в изображенных собственных формах.

## Заключение

На конкретном примере о колебаниях вантового моста с подвижной нагрузкой показано применение конечно-элементного моделирования в пространстве и во времени. Дано сравнение собственных форм, полученных МКЭ и моделью складки.

Программные комплексы, основанные на МКЭ, при правильном их применении позволяют решать и исследовать задачи динамики протяженных конструкций, находящихся под воздействием подвижных нагрузок. В качестве альтернативного метода для оценки и сравнения результатов можно применить метод складки без дискретизации в продольном направлении и во времени.

## Литература

1. Болотин В.В. О воздействии подвижной нагрузки на мосты // Труды МИИТ. 1950. Вып. 74. С. 5–9.
2. Болотин В.В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки // Механика и машиностроение. 1961. №4. С. 109–115.
3. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
4. Киселев В.А. Строительная механика: Специальный курс. М.: Стройиздат, 1980. 432с.
5. Khalifa M.A., Hodhod O.A., Zaki M.A. Analysis and design methodology for an FRP cable-stayed pedestrian bridges // Composites part B: Engineering. 1996. Vol. 27. No.3–4. Pp. 307–317.
6. Рутман Ю.Л., Мелешко В.А. Причины колебаний моста в Волгограде // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №3. С. 55–58.
7. Смирнов В.А. Висячие мосты больших пролетов. М.: Высшая школа, 1970. 407 с.
8. Сафронов В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. Воронеж: ВГУ, 1983. 196 с.
9. Das A., Dutta A., Talukdar S. Efficient dynamic analysis of cable-stayed bridge under vehicular movement using space and time adaptively // Finite Elements in Analysis and Design. 2004. No. 40. Issue 4. Pp. 407–424.
10. Нгуен Тхак Куанг. Оптимизация проектирования вантовых мостов с исследованием их параметров // Архитектура и строительство России. 2007. №3. С. 25–31.
11. Потапов В.Д., Папаев М.А. Об устойчивости висячих и вантовых мостов, находящихся под действием ветровых нагрузок, в детерминированной и стохастической постановках // Строительная механика и расчет сооружений. 2006. №5. С. 32–37.
12. Круглов В.М., Косицын С.Б., Потапов В.Д., Долотказин Д.Б., Лукьянов М.А. Статические расчеты вантового моста с арочным пилоном // Строительная механика и расчет сооружений. 2008. №5. С. 19–23.
13. Chen R.L., Xiao Y.X., Guo X.G. Modal characteristics of A large Span railway cable-stayed bridge // Journal of vibration and shock. 2010. No.2. Pp. 7–10.
14. Дороган А.С. Вантово-висячие мосты. Часть 2: с криволинейными вантами // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. №1. С. 6–14.
15. Дороган А.С. Вантово-висячие мосты с прямолинейными вантами. Часть 1 // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. №5. С. 2–9.
16. Бондарь Н.Г., Козьмин Ю.Г., Ройтбурд З.Г., Тарасенко В.П., Яковлев Г.Н. Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом. М.: Транспорт, 1984. 272 с.
17. Иванченко И.И. К динамическому расчету ферм мостов // Межвузовский сборник научных трудов. М.: МИИТ. 1989. Вып.817. С. 87–89.
18. Fryba L. Dynamics of railway bridges. London: Thomas Tel ford, 2001.
19. Yau J.D., Yang Y.B. Vibration reduction for cable-stayed bridges traveled by high-speed trains // Finite Elements in Analysis and Design. 2004. Vol. 40. Issue 3. Pp. 341–359.
20. Круговова Е.А., Михеев Г.В., Ковалев Р.В. Компьютерное моделирование взаимодействия железнодорожных экипажей и мостов // Вестник брянского государственного технического университета. 2010. №3. С. 39–48.

21. Liu J., Qu W., Pi Y.L. Longitudinal vibration analysis of floating-type railway cable-stayed bridge subjected to train braking // 2010 International conference on mechanic automation and control engineering. 2010. Pp. 2806–2809.
22. Zhang K., Zhao X., Liang X., Liu W. Evaluation method for load-bearing capacity of a single-tower cable-stayed bridge // Wuhan ligong daxue xuebao. 2010. №34. С. 254–257.
23. Иванченко И.И. Динамика транспортных сооружений. Высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки. М.: Наука, 2011. 574 с.
24. Иванченко И.И. Динамическое взаимодействие мостов и высокоскоростных железнодорожных составов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2011. №3. С. 146–160.
25. Круговова Е. А. Оценка влияния колебаний моста на динамику поезда в программном комплексе «Универсальный механизм» // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2012. №6(296). С. 16–23.
26. Yang Y.B., Yau J.D., Wu Y.S. Vehicle-Bridge Interaction Dynamics with Applications to High-Speed Railways. Singapore: World Scientific Publishing, 2004. 530 p.
27. Смирнов М.С. Динамика сооружений. Определение частот и форм собственных колебаний сооружения. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2006. 64 с.
28. Fujino Y., Siringoringo D. Vibration mechanisms and controls of long-span bridges: A Review // Structural Engineering International. 2013. Vol. 23. No.3. Pp. 248–268.
29. Смирнов А.Ф., Александров А. В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Расчет сооружений с применением вычислительных машин. М.: Стройиздат, 1964. 380 с.
30. Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. М.: Стройиздат, 1983. 488 с.
31. Кадисов Г.М. Колебания складчатых систем при подвижных нагрузках. Омск: СибАДИ, 1997. 178 с.
32. Кадисов Г.М. Динамика и устойчивость сооружений: Учебное пособие. М.: Изд-во АСВ, 2007. 272 с.
33. Кадисов Г.М., Чернышов В.В. Динамика вантового моста после обрыва ванта // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. 2011. №22. С. 19–23.
34. Кадисов Г.М. К определению собственных форм вантового моста смешанным методом // Вестник СибАДИ. 2012. №2(24). С. 45–49.
35. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.
36. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970. 328 с.

*Григорий Михайлович Кадисов, г. Омск, Россия  
Тел. моб.: +7(913)615-64-38; эл. почта: kadisov@rambler.ru*

*Виталий Витальевич Чернышов, г. Омск, Россия  
Тел. моб.: +7(913)661-00-07; эл. почта: Chervv@mail.ru*

© Кадисов Г.М., Чернышов В.В., 2013



doi: 10.5862/MCE.44.7

## Finite-element (FE) modelling of bridge dynamics from exposure to moving load

**G.M. Kadisov,***Siberian State Automobile and Highway Academy (SibADI), Omsk, Russia  
+7(913)6156438; e-mail: kadisov@rambler.ru***V.V. Chernyshov,***PLC Scientific Production Association "MOSTOVNIK", Omsk, Russia  
+7(913)6610007; e-mail: Chervv@mail.ru*

### Key words

dynamics; cable-stayed bridge; moving loads; natural modes

### Abstract

Solutions to the problem of cable-stayed bridge dynamics are received and analysed on the basis of two modelling options.

According to the first one space-time finite-elements are used. The first three bridge vibration modes are shown to study cable-stayed bridge fluctuations when exposed to the vertical force moving at a constant speed and compile charts of time history strains in fixed sections of a deck.

According to the second option a suspended superstructure is represented by a fold with absolutely rigid transverse membranes in joints of cables, a bridge tower is represented by a beam. Natural modes of the bridge are received by a solution of homogeneous system equations of the mixed method. Nodal lines of a fold for the first four natural modes are shown.

The comparative description of applicability of the above-mentioned methods of solving problems of dynamics affected by moving load is given.

### References

1. Bolotin V.V. *Trudy MIIT*. 1950. Vol. 74. Pp. 5–9. (rus)
2. Bolotin V.V. *Mekhanika i mashinostroyeniye*. 1961. No. 4. Pp. 109–115. (rus)
3. Filippov A.P. *Kolebaniya deformiruyemykh system* [Oscillations of deformable systems]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1970. 734 p. (rus)
4. Kiselev V.A. *Stroitel'naya mekhanika: Spetsialnyy kurs* [Structural mechanics. The special course]. Moscow: Stroyizdat, 1980. 432 p. (rus)
5. Khalifa M.A., Hodhod O.A., Zaki M.A. Analysis and design methodology for an FRP cable-stayed pedestrian bridges. *Composites part B: engineering*. 1996. No. 3-4. Pp. 307–317.
6. Rutman Yu.L., Meleshko V.A. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2011. No. 3. Pp. 55–58. (rus)
7. Smirnov V.A. *Visyachiye mosty bolshikh proletov* [The large span suspension bridges]. Moscow: Vysshaya shkola, 1970. 407 p. (rus)
8. Safronov V.S. *Raschet visyachikh i vantovykh mostov na podvizhnuyu nagruzku* [The estimate of suspension and cable-stayed bridges under moving load]. Voronezh: VGU, 1983. 196 p. (rus)
9. Das A., Dutta A., Talukdar S. Efficient dynamic analysis of cable-stayed bridge under vehicular movement using space and time adaptively. *Finite elements in analysis and design*. 2004. No. 40. Issue 4. Pp. 407–424.
10. Nguyen Tkhak Kuang. *Arkhitektura i stroitelstvo Rossii*. 2007. No. 3. Pp. 25–31
11. Potapov V.D., Papayev M.A. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2006. No. 5. Pp. 32–37. (rus)
12. Kruglov V.M., Kositsyn S.B., Potapov V.D., Dolotkazhin D.B., Lukyanov M.A. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2008. No. 5. Pp. 19–23. (rus)
13. Chen R.L., Xiao Y.X., Guo X.G. Modal characteristics of A large Span railway cable-stayed bridge. *Journal of vibration and shock*. 2010. No.2. Pp. 7–10.
14. Dorogan A.S. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2013. No. 1. Pp. 6–14. (rus)

Kadisov G.M., Chernyshov V.V. Finite-element (FE) modelling of bridge dynamics from exposure to moving load

15. Dorogan A.S. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2013. No. 5. Pp. 2–9. (rus)
16. Bondar N.G., Kozmin Yu.G., Roytburd Z.G., Tarasenko V.P., Yakovlev G.N. *Vzaimodeystviye zheleznodorozhnykh mostov s podvizhnym sostavom* [Interaction of railway bridges and rolling-stock]. Moscow: Transport, 1984. 272 p. (rus)
17. Ivanchenko I.I. *Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov* [Interuniversity collection of scientific papers]. Moscow: MIIT, 1989. Vol. 817. Pp. 87–89. (rus)
18. Fryba L. *Dynamics of railway bridges*. London: Thomas Tel ford, 2001.
19. Yau J.D., Yang Y.B. Vibration reduction for cable-stayed bridges traveled by high-speed trains. *Finite elements in analysis and design*. 2004. Vol. 40. Issue 3. Pp. 341–359.
20. Krugovova Ye. A., Mikheyev G. V., Kovalev R.V. *Vestnik bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2010. No. 3. Pp. 39–48. (rus)
21. Liu J., Qu W., Pi Y.L. Longitudinal vibration analysis of floating-type railway cable-stayed bridge subjected to train braking. *2010 International conference on mechanic automation and control engineering*. 2010. Pp. 2806–2809.
22. Zhang K., Zhao X., Liang X., Liu W. Evaluation method for load-bearing capacity of a single-tower cable-stayed bridge. *Wuhan ligong daxue xuebao*. 2010. No. 34. Pp. 254–257.
23. Ivanchenko I.I. *Dinamika transportnykh sooruzheniy. Vysokoskorostnyye podvizhnyye, seysmicheskiye i udarnyye nagruzki* [Dynamics of transport structures. High-speed moving, seismic and impact loads] Moscow: Nauka, 2011. 574 p. (rus)
24. Ivanchenko I.I. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2011. No. 3. Pp.146–160. (rus)
25. Krugovova Ye.A. *Fundamental and Applied Problems of Technics and technology*. 2012. No. 6 (296). Pp. 16–23. (rus)
26. Yang Y.B., Yau J.D., Wu Y.S. *Vehicle-Bridge Interaction Dynamics with Applications to High-Speed Railways*. Singapore: World Scientific Publishing, 2004. 530 p.
27. Smirnov M.S. *Dinamika sooruzheniy. Opredeleniye chastot i form sobstvennykh kolebaniy sooruzheniya* [Dynamics of structures. Determination frequency and forms of characteristic oscillations of constructions]. Saint-Peterburg: Izd-vo Politekhnicheskogo un-ta, 2006. 64 p. (rus)
28. Fujino Y., Siringoringo D. Vibration mechanisms and controls of long-span bridges: A Review. *Structural Engineering International*. 2013. Vol. 23. No. 3. Pp. 248–268.
29. Smirnov A.F., Aleksandrov A. V., Lashchenikov B.Ya., Shaposhnikov N.N. *Raschet sooruzheniy s primeniyem vychislitelnykh mashin* [The estimate of structures using computing machine]. Moscow: Sroyzdat, 1964. 380 p. (rus)
30. Aleksandrov A.V., Lashchenikov B.Ya., Shaposhnikov N.N. *Stroitel'naya mekhanika. Tonkostennyye prostranstvennyye sistemy* [Structural mechanics. Thin-walled three-dimensional systems]. Moscow: Sroyzdat, 1983. 488 p. (rus)
31. Kadisov G.M. *Kolebaniya skladchatykh sistem pri podvizhnykh nagruzkakh* [Oscillations of folded systems with moving loads]. Omsk: SibADI, 1997. 178 p. (rus)
32. Kadisov G.M. *Dinamika i ustoychivost sooruzheniy: Uchebnoye posobiye* [Dynamics and stability of structures: teaching material]. Moscow: Izd-vo ASV, 2007. 272 p. (rus)
33. Kadisov G.M., Chernyshov V.V. *Vestnik SibADI*. 2011. No. 22. Pp.19–23. (rus)
34. Kadisov G.M. *Vestnik SibADI*. 2012. No. 2(24). Pp. 45–49. (rus)
35. Golub Dzh., Van Loun Ch. *Matrichnyye vychisleniya: Per. s angl.* [Matrix calculations: translation from English]. Moscow: Mir, 1999. 548 p. (rus)
36. Guld S. *Variatsionnyye metody v zadachakh o sobstvennykh znacheniyakh* [Variational methods in tasks about eigenvalue]. Moscow: Mir, 1970. 328 p. (rus)

**Full text of this article in Russian: pp. 56–63**