

**Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Институт информационных технологий и управления
Кафедра управления проектами**

ЧЕЧУРИН С.Л.

Параметрический резонанс- боль и радость

**Издательство СПбГПУ
2014**

АННОТАЦИЯ

Из многообразия изучаемых процессов современная классическая теория колебаний выделяет вынужденные колебания, параметрические колебания и автоколебания. Для этих колебаний практический интерес представляют условия возникновения или возбуждения колебаний и условия их существования или устойчивости. В решении этих вопросов главная роль принадлежит параметрическим колебаниям: при возбуждении параметрического резонанса теряют устойчивость и физическое существование, как вынужденные колебания, так и автоколебания. Более того, есть основания считать, что автоколебания - это установившиеся параметрические колебания. Сфера влияния параметрических колебаний и параметрического резонанса быстро расширяется. Недавно обнаружены параметрические колебания в экономических моделях, параметрический путь активации «живой воды» в биологии, параметрический характер воздействия полей и вибраций на живые организмы в медицине. В чем же заключается порой неуловимая магическая сила параметрических колебаний и резонанса? Об этом пойдет речь.

Настоящая научно-популярная публикация в первую очередь предназначена для инженеров, конструкторов, специализация которых далека от теории колебаний. Она будет полезной для молодежи физико-математического направления, а знание свойств и особенностей параметрических колебаний в объеме несложной первой части может принести пользу специалистам не технических направлений в деле интеграции физики, химии, биологии, медицины и других наук на основе математического моделирования.

С о д е р ж а н и е

О т а в т о р а	4
В в е д е н и е	6
Часть I. Явления параметрического резонанса	8
Немного о колебаниях	8
Параметрический резонанс в механике	11
Параметрический резонанс в электротехнике	19
Параметрический резонанс в гидродинамике	22
Параметрический резонанс в аэродинамике	24
Автоколебания или параметрические колебания?	28
Парадоксы обыкновенных качелей	31
Параметрические колебания и человек	34
Часть II. Краткий путеводитель к загадкам параметрических колебаний	36
Вынужденные колебания	36
Параметрические колебания	42
Примеры	47
Обыкновенные качели	52
Неуловимые мстители	55
Численное моделирование	61
З а к л ю ч е н и е	66

От автора

Шел 1942-ой – самый тяжелый для страны год Великой Отечественной войны. Чаша весов еще склонялась на сторону Германии, фашисты рвались за Волгу. Я, эвакуированный из-под Ленинграда в Сибирь мальчишка, попал в лагерь. Пионерский. Отец был на Ленинградском фронте. Бесплатную путевку сыну фронтовика предоставил военкомат. В лагере меня откормили, обогрели. Пропала дистрофия. Потом была школа, институт, завод, аспирантура, работа преподавателя, научная работа. Среди моих прекрасных учителей было немало фронтовиков. Вот почему я благодарен Советской власти и советским людям. Вот почему считаю и эту последнюю работу своим долгом.

Как-то, готовя команду Ленинградского Политехнического института к олимпиаде по технической кибернетике, я обратил внимание на одного из студентов. Какие бы задачи я ни предлагал из прошлых олимпиад, он блестяще решал все. Звали студента Миша Островский. Наша команда стала победительницей олимпиады. Позднее, встретив Михаила, уже студента пятого курса, я сказал ему: «Вы хорошо решаете задачи, имеющие ответ. Не хотите ли попробовать задачи, не имеющие ответа?». И получил согласие. Так началась наша совместная работа. Первое задание он получил по периодически нестационарным системам и пропал на две с небольшим недели. Появившись, он показал мне решение. Так он впервые получил условие возбуждения параметрического резонанса в одночастотном гармоническом приближении. В этом направлении началась наша совместная работа. Потом Михаил провел много расчетов конкретных параметрических систем и, связанных с проблемой, технических систем, поступил в аспирантуру и защитил диссертацию (см. Островский М.Я., Чечурин С.Л. Стационарные модели систем автоматического управления. Л. Энергоатомиздат, 1989).

Когда Осторожный трус и Решительный дурак разрушили мое Королевство, бывшая Принцессой наука перешла на милостыню. В этом состоянии она пребывает по настоящее время. К моему большому сожалению, когда не стало работы, Миша покинул Россию, подобно десяткам тысяч талантливых молодых ученых, выросших в Союзе.

Пожив при социализме и капитализме, пришел я к следующему выводу. Настоящая демократия, которой не было в истории человечества, возникнет лишь тогда, когда законодательно будет установлено уголовное преследование любых форм присвоения труда человека со стороны кого бы то ни было: организаторов производства, предпринимателей, государственных органов или государства. Вся история человечества есть история многовекового выстраивания шкалы цен и ценностей жизни. В Советском Союзе существовала выстроенная на качественном уровне справедливая шкала ценностей, и он был в одном шаге от такой демократии. Но этот шаг в развитии, в замене командного производства на свободное производство народных предприятий так и не был сделан (попытка на базе количественной шкалы ценностей построения сравнительной политэкономии выполнена недавно, см. Росин В. Штрихи и грани. Изд. СПбГПУ, 2012). Интересно, что в своем последнем выступлении Сталин говорил только о главной задаче –

развитии демократии. Краткое завещание оказалось забытым на все последующие годы. Существующие ныне в мире атрибуты демократии, такие как голосование, свобода слова и мнений, свобода предпринимательства и другие представляют собой муляж и бутафорию, основное назначение которых - скрыть отсутствие подлинной демократии. Действительно, разве можно назвать демократией Российской Федерации, заменившей командное производство на свободное, в котором все администрации «свободно» установили свои оклады по принципу «каждому по потребностям, от каждого по возможностям»? Несмотря на то, что моя страна оказалась отброшенной к периоду раннего европейского капитализма, магистральный ее путь развития демократии еще впереди. Пишу об этом уже в преклонном возрасте, понимая, что похож на известного петуха, заявившего: «Главное - прокукарекать, а наступит утро или нет – это не мое дело».

Прошу читателя простить меня за это отступление, которое, тем не менее, связано с моей работой преподавателя. В подготовке настоящей работы, в расчетах качелей и экспериментах принимали участие студенты Д. Водомеров, Е. Мудрова, А. Оловянников. Численное исследование параметрической обратной связи провел Антон Мандрик, рисунки в компьютерной графике выполнила Катя Исаева, а обложка подготовлена Дарьей Чечуриной.

Основная трудность в написании этой небольшой работы заключалась в нелегком выборе между простотой изложения и сложностью его обоснования. Принять лишь одну из этих сторон не удалось. Поэтому изложение состоит из двух частей: простой популярной первой части и относительно сложной второй. Содержание второй части, в основном, базируется на школьном курсе физики и математики старших классов. Незначительные отклонения от этого курса связаны с необходимостью более глубокого понимания материала и имеют дополнительные иллюстрации, пояснения и ссылки. Более подробные доказательства и пояснения содержатся в книгах: Чечурин С.Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. Изд. ЛГУ, 1983; Чечурин С.Л., Чечурин Л.С. Физические основы теории колебаний. Изд. СПбГПУ, 2005.

Таким образом, основная цель работы заключается в начальном знакомстве читателя с параметрическими колебаниями и явлениями параметрического резонанса. В соответствии с поставленной целью все иллюстрации ведутся на простейших примерах одночастотных гармонических колебаний. Принятый путь изложения объясняется также двоякой адресацией работы: интересующимся физико-математическим направлением молодым людям, а также инженерам и техникам общего профиля для специализации по части параметрических колебаний. Внимательный читатель найдет много интересного в явлениях параметрического резонанса, которые нередко являются строгим судьей в оценке законченности и основательности конструкций и технических решений.

Введение

Существование параметрических колебаний связано с существованием вселенной и их история, насчитывающая миллиарды лет, уходит в историю создания и развития миров. Во всех случаях, наблюдая как обезьяна, используя параметрические колебания, перелетает с ветки на ветку, понятно, что использование параметрических колебаний относится к дочеловеческой эпохе. А вот изучение человеком параметрических колебаний и параметрического резонанса началось совсем недавно, каких-нибудь сто с небольшим лет назад. И это, при том, что за свою историю параметрический резонанс «наломал немало дров».

Начало изучения параметрических колебаний относят к исследованию уравнений Матье и Хилла. В 1868 году Матье, изучая колебания мембраны, пришел к простому дифференциальному уравнению второго порядка с гармонически изменяющимся свободным (не содержащим производной) членом. Удивительным оказалось даже числовое решение уравнения, содержащее бесчисленное количество чередующихся областей возбуждения параметрических колебаний. Впоследствии, они были представлены диаграммами Айнса-Стретта, которыми пользовались вплоть до нашего времени. Занимаясь задачей определения лунной орбиты, Хилл рассмотрел также дифференциальное уравнение второго порядка, в котором свободный член периодически изменяется в произвольной форме. Решение он представил в виде бесконечного определителя, названного впоследствии определителем Хилла. Столкнувшись со сложностью этих решений, некоторое время исследования в этом направлении ослабли.

Исключительная заслуга в указании важной роли исследования уравнений с периодическими коэффициентами принадлежит выдающемуся русскому математику А.М.Ляпунову. В начале прошлого века он доказал, что устойчивость *равновесия* динамических систем определяется устойчивостью линейных стационарных систем или уравнениями в приращениях, составленными в первом линейном приближении. А устойчивость *движения* динамической системы (в т.ч. колебаний) определяется устойчивостью равновесия также линейной, но нестационарной системы с изменяющимися во времени параметрами, или также уравнениями в приращениях,

составленными в первом линейном приближении. Иными словами, задача устойчивости *движения* свелась к задаче устойчивости *равновесия* линейной нестационарной (параметрической) системы.

Интерес к исследованию линейных нестационарных систем резко вырос. В начале и в середине прошлого века в работах К.Г.Валеева, В.М.Волосова, Л.А.Заде, А.Леонгарда, Е.Н.Розенвассера, В.А.Тафта, В.Н.Фомина, В.А.Якубовича, В.М.Старжинского и многих других появляются строгие и приближенные методы исследования линейных нестационарных (параметрических) систем высокого порядка, в том числе систем с распределенными параметрами.

В настоящей небольшой работе основное внимание концентрируется на физической стороне проблемы параметрических колебаний и резонанса. Этому соответствует и выбор частотного метода анализа, имеющего наглядную геометрическую и физическую интерпретацию. Вторая часть работы содержит местами несложные математические выводы, приведенные мелким шрифтом. При желании (когда не возникает вопрос «Почему?») их вполне можно без ущерба опустить.

Часть первая

Явления параметрического резонанса

Немного о колебаниях.

Колебания и колебательные процессы существовали и существуют независимо от воли человека в полях и средах: гравитационных, жидкостных, газообразных, электрических, магнитных и их комбинациях. Долгое время колебания воспринимались с единых позиций, как периодические движения тел, полей и сред, вызванные действием внешних сил, моментов, влиянием сторонних колебательных процессов и других, как теперь называют, возмущений, в том числе периодических. Такая точка зрения широко распространена и среди наших современников, сфера деятельности которых далека от физико-математических понятий. Недостаток подобной точки зрения заключается в том, что она не позволяет объяснить ряд загадочных явлений, таких как самовозбуждение колебаний, неожиданные скачки колебаний, причины возбуждения и устойчивости автоколебаний и другие. Лишь сравнительно недавно из многообразия колебательных процессов были выделены и получили пристальное внимание ученых так называемые параметрические колебания.

О колебаниях написано немало книг. Полное даже популярное изложение всех проблем теории и практики колебаний не помещается в настоящее пособие. Крайне желательно, чтобы неосведомленный читатель предварительно познакомился с научно-популярной книгой «Колебания» американского ученого Р. Бишоп, изданной у нас в 1968 под редакцией замечательного преподавателя и ученого Я.Г. Пановко. В настоящей работе также изложение предельно ограничено необходимыми в дальнейшем определениями.

Сейчас различают свободные колебания, вынужденные колебания, параметрические колебания и, частный случай установившихся свободных колебаний нелинейных систем, – автоколебания. Свободные колебания, показанные на Рис. 1.1, вызываются ударным возмущением, например ударом по колоколу, который издает звон – затухающие колебания воздуха.

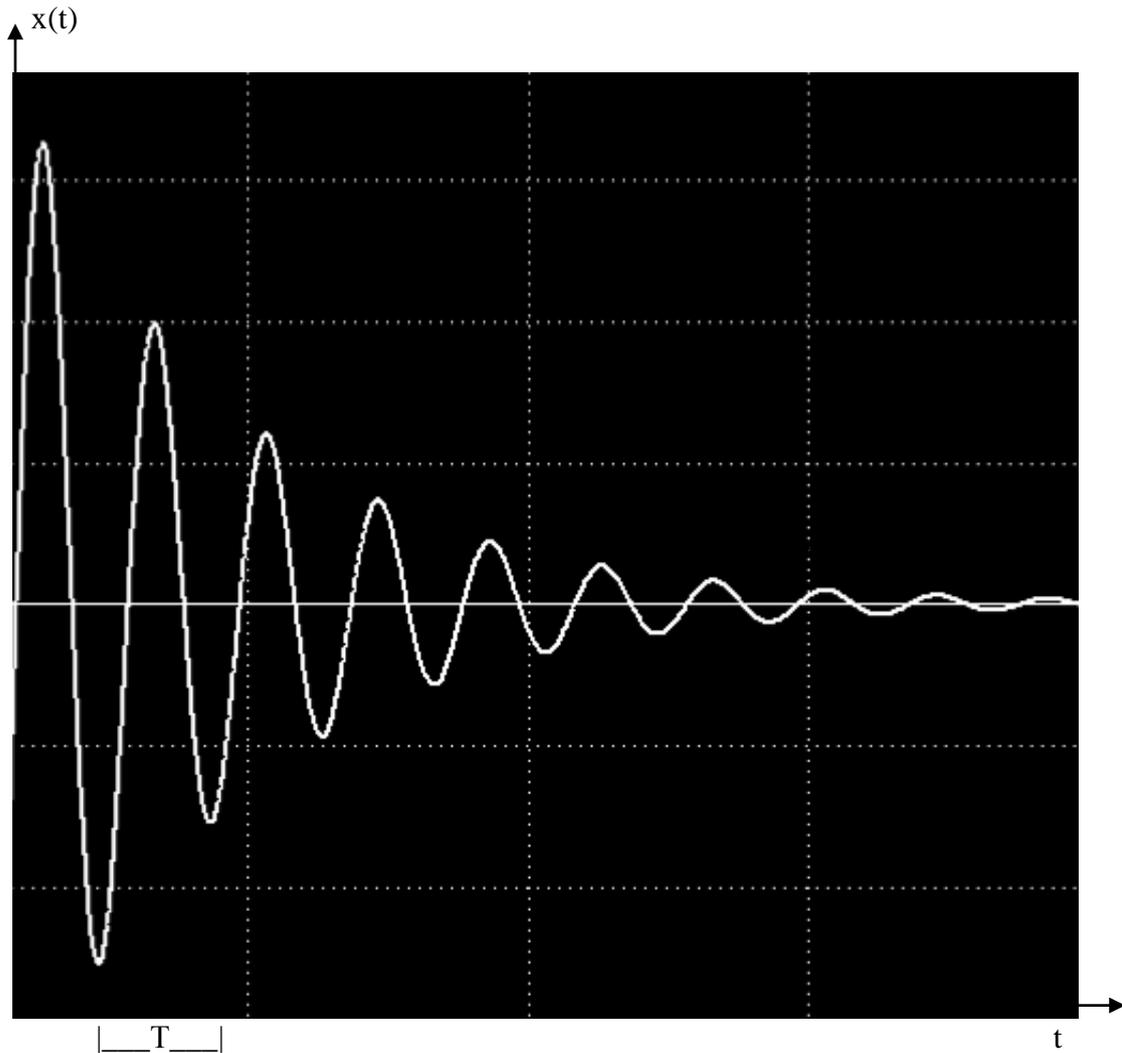


Рис.1.1. Свободные колебания

Частоту свободных колебаний периода T называют собственной частотой $\omega_0 = 2\pi/T$ колебательного объекта. Если частота вынуждающего периодического возмущения совпадает с собственной частотой объекта, то установившиеся вынужденные колебания той же частоты, показанные на Рис.1.2, имеют максимальный уровень, или максимальную амплитуду A , пропорциональную уровню, или амплитуде, вынуждающих колебаний.

Приведенные на Рис.1.2 установившиеся колебания характеризуются, помимо амплитуды A , круговой частотой $\omega=2\pi/T$ (радиан/сек) или линейной частотой $f=1/T$ (герц), где T (сек) – период колебаний. Часто вместо текущего времени t по оси абсцисс используют текущую фазу $\psi=\omega t$ (рад). Важной характеристикой колебательного процесса служит относительная фаза колебаний, или просто фаза $\varphi=\omega t$ (рад), определяющая временной сдвиг τ колебаний относительно некоторого опорного гармонического сигнала той же частоты. В качестве опорного сигнала, обычно принимают вынуждающие (внешние) колебания, показанные на Рис.1.2 тонкой линией.

$x(t)$

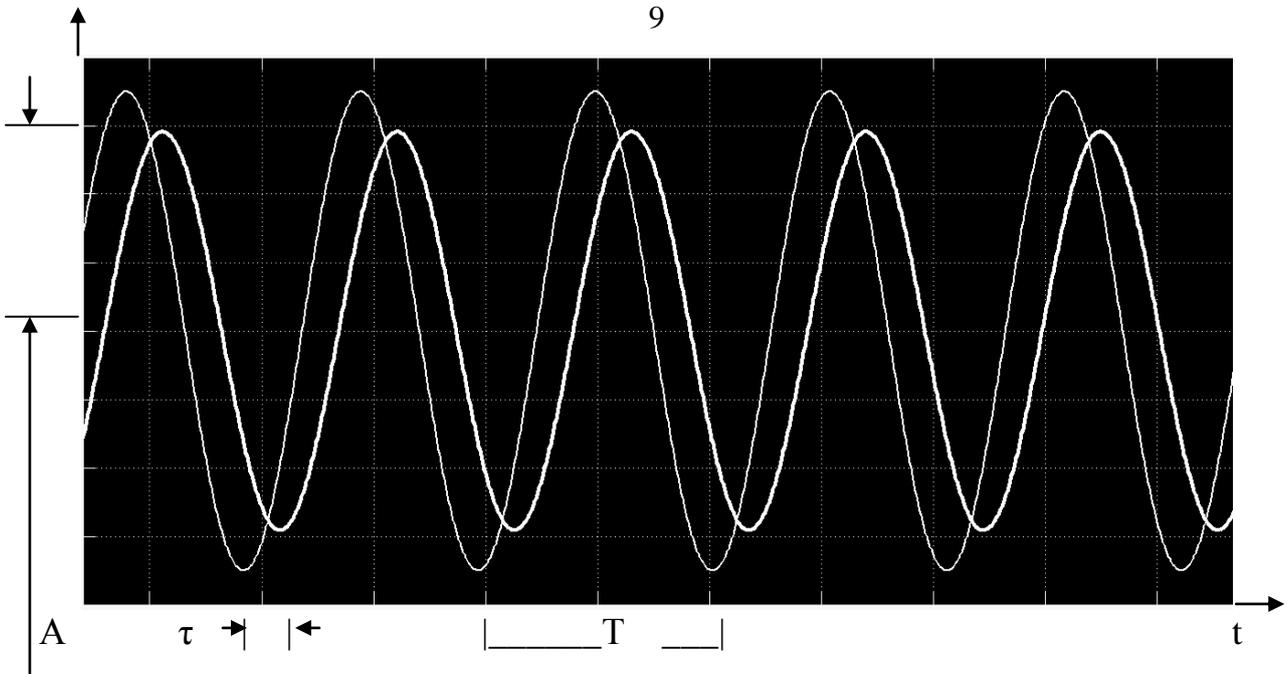


Рис.1.2. Вынужденные колебания

Колебательные объекты характеризуются координатами и параметрами. Изменение во времени координат образует в общем случае движение динамического объекта и, в частности, периодическое движение колебательного объекта. Количеством координат, которыми можно описать состояние колебательного объекта, оценивается сложность объекта и порядок описывающего его уравнения. При возбуждении свободных или вынужденных колебаний связанные или зависимые друг от друга координаты также колеблются в разной степени. Эта степень и связи координат между собой определяются параметрами колебательного объекта.

Параметры объекта это, как правило, постоянные величины, которые образуют коэффициенты уравнения в соответствии с физическими принципами его действия. Так, например, система кровообращения живого организма содержит преобразователь давления крови – сердце, сосуды – артерии, вены и капилляры; кроветворный орган – печень; систему управления – мозг и нервные волокна. Координатами системы является давление крови в разных точках организма, скорости изменения давления, скорости и объемы протекания крови. Параметрами системы являются вязкость крови, сопротивление (размеры) сосудистой системы, размеры сердца, состояние нервной системы и другие. Сердце работает периодическими импульсными колебаниями, давление крови, поэтому также колеблется периодически. Внешними воздействиями (возмущениями) для системы кровообращения являются колебания атмосферного давления, колебания окружающей температуры, колебания физических и моральных нагрузок. В соответствии с колебаниями возмущений подсистема управления в первую очередь изменяет (сжимает или разжимает) состояние сосудов, в дальнейшем изменяет частоту и наполнение ударов сердца, увеличивая или уменьшая давление крови. Таким образом, периодически меняются параметры системы кровообращения. Разумеется, это лишь упрощенное

описание гораздо более сложной динамической системы, которой является система кровообращения. В связи с поставленной в работе целью популяризации научных знаний в дальнейшем сложные динамические системы не рассматриваются.

Если параметры объекта постоянные, то объект или система называются стационарными. Когда же параметры изменяются во времени, объект называется нестационарным. Если параметры нестационарного объекта изменяются периодически, то такой объект или систему называют периодически нестационарной или параметрической. Стационарные и нестационарные системы по виду описания могут быть линейными и нелинейными. Таким образом, основным и главным предметом внимания в дальнейшем изложении являются линейные и нелинейные периодически нестационарные колебательные объекты и системы. Параметрические системы получили широкое распространение в таких направлениях научно-технической деятельности как механика, электротехника, радиотехника, автоматическое управление, приборостроение, гидродинамика, аэродинамика и другие. По всем признакам приоритет в изучении параметрических систем принадлежит механике. С нее и начнем рассказ.

Параметрический резонанс в механике

Цель настоящего раздела заключается в том, чтобы на простых и понятных примерах механики познакомиться с явлением параметрических колебаний, их особенностями и подготовиться к знакомству с более сложной природой параметрических явлений. Следует отметить, что не так уж много примеров колебательных объектов и систем, в которых параметрический резонанс открыто появляется в чистом «обнаженном» виде, предпочитая чаще таинственно скрываться в сложных колебательных процессах. Одним из простых примеров служит маятник с вибрацией точки подвеса.

Обыкновенный маятник. На Рис.1.3 показан обыкновенный маятник. Будем полагать, что сопротивление среды (воздуха) и силы трения в подвесе O небольшие, т.е., маятник близок к идеальному. Если отклонить маятник от вертикали вправо на угол $+\alpha$ или влево на $-\alpha$ и отпустить, то свободные колебания маятника затухают, подобно изображенному на Рис.1.1. При вертикальной вибрации $\Delta x(t) = a \sin \Omega t$ точки O подвеса, как показано на Рис.1.3, на маятник действует дополнительное ускорение $\varepsilon(t) = a\Omega^2 \sin \Omega t$, максимальное и минимальное значения которого $\pm a\Omega^2$. Таким образом, сила веса маятника становится периодически изменяющейся $P = m(g - a\Omega^2 \sin \Omega t)$. На частоте вибрации Ω , близкой к удвоенной собственной частоте ω_0 , и при амплитуде вибрации, превышающей некоторое пороговое значение $a > a_{\text{прг}}$, затухающие колебания маятника начинают возрастать. **Это возбуждаются нарастающие параметрические колебания, и наступает параметрический резонанс.**

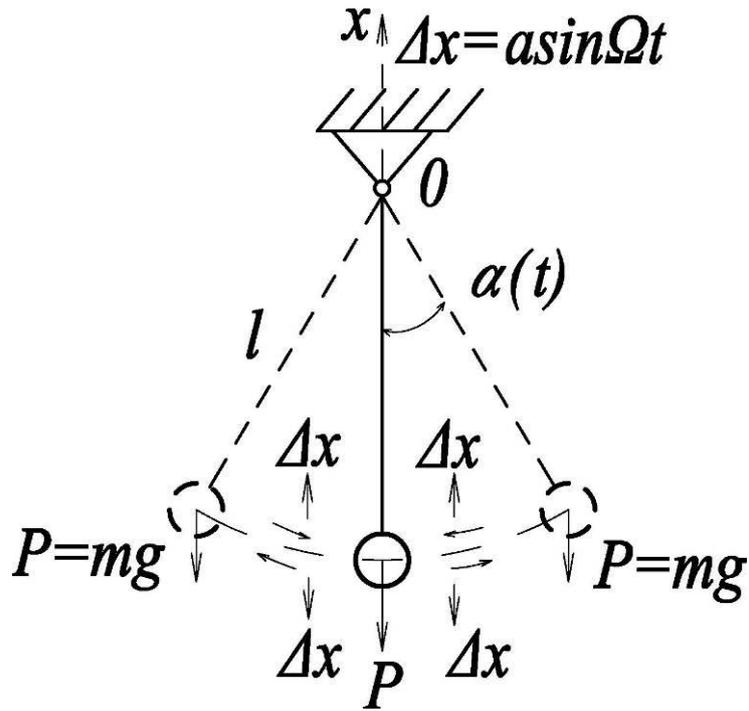


Рис.1.3. Маятник с вибрацией точки подвеса.

Зависимость от времени параметрических колебаний маятника и вибраций точки подвеса приведена на Рис.1.4.

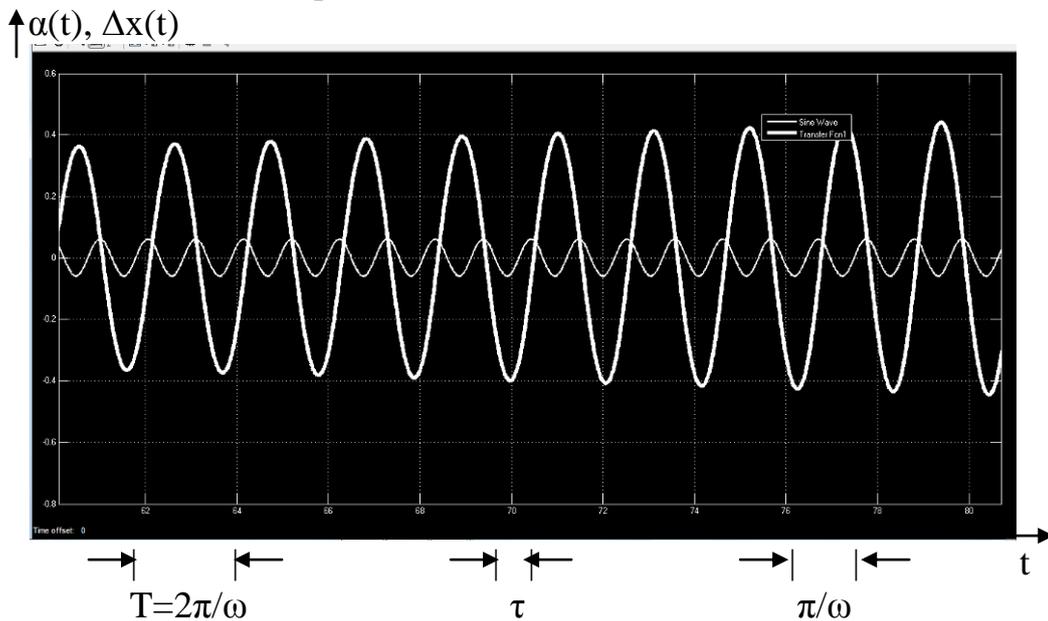


Рис.1.4. Линейно нарастающие параметрические колебания маятника

Важно отметить уже на этом простом примере, что возбуждение параметрического резонанса происходит при определенном сдвиге τ между колебаниями подвеса $\Delta x(t)$ (параметра – тонкая линия) и колебаниями маятника $\alpha(t)$ (жирная линия). Этот сдвиг примерно равен половине периода колебаний параметра, что соответствует четверти периода колебаний маятника или фазовому сдвигу $\psi = \omega\tau = 2\pi\tau/T$ радиан, равному 90 градусам.

Физически необходимость подобного сдвига объясняется просто. Период колебаний маятника содержит четыре четверти. Первая четверть I от вертикали до максимума $+\alpha$ (см. Рис.1.3, а также Рис.1.19) и третья III от вертикали до минимума $-\alpha$ есть четверти торможения, так как момент силы тяжести (произведение длины маятника и проекции силы тяжести на направление движения) направлен против движения. Вторая II и четвертая IV четверти являются четвертями ускорения, так как момент силы тяжести совпадает с направлением движения маятника. Таким образом, для эффективного раскачивания необходимо на участках торможения момент силы тяжести уменьшать, уменьшая силу тяжести, а на участках ускорения – увеличивать. Отсюда следует необходимый характер изменения вибрации (параметра): на участках торможения опора маятника O должна перемещаться вниз (сила веса уменьшается, так как из гравитационного ускорения вычитается ускорение вибрации), а на участках ускорения опоры следует перемещать вверх (сила веса маятника увеличивается, так как эти ускорения складываются). **Так возбуждается параметрический резонанс.**

Отметим также принципиальную разницу между параметрическими и вынужденными колебаниями. Вынужденные колебания маятника возникают, когда к маятнику прикладывается извне периодический момент, например, когда Вы качаете маятник. При этом частота колебаний маятника совпадает с частотой изменения внешнего воздействия, в то время как частота параметрических колебаний в два раза меньше частоты изменения параметра (вибраций). Фаза параметрических колебаний фиксирована, в то время как фаза вынужденных колебаний зависит от свойств колебательного объекта и частоты вынуждающего воздействия.

Пружинный маятник. Рассмотрим следующий пример – пружинный маятник в гравитационном поле, представленный на Рис.1.5. Маятник имеет устойчивое состояние равновесия в точке $x = \ell_0$, когда сила веса P уравновешивается противодействующей силой растянутой пружины F. Если слегка оттянуть груз вниз, или приподнять вверх и отпустить, то при наличии небольших сил сопротивления наблюдаются затухающие свободные колебания $\Delta x(t)$ груза по вертикальной оси x.

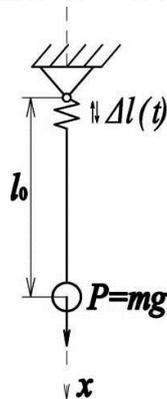


Рис. 1.5. Пружинный маятник

При определенном увеличении размаха периодических вертикальных колебаний возникают новые угловые колебания $\alpha(t)$ маятника в плоскости рисунка. Это параметрические колебания. Объясняется это явление просто: при вертикальных колебаниях вместе с периодическим растяжением и сжатием пружины периодически изменяется длина маятника $l(t) = l_0 + \Delta l(t)$. В свою очередь периодическое изменение длины маятника ведет к периодическому уменьшению момента силы тяжести в четвертях торможения и к увеличению его в четвертях ускорения. Поэтому, аналогично предыдущему примеру, возникают параметрические колебания $\alpha(t)$, как показано на Рис.1.6. Причем, временная диаграмма колебаний также совпадает с Рис.1.4, где вместо вибраций $\Delta x(t)$ имеют место колебания длины $\Delta l(t)$.

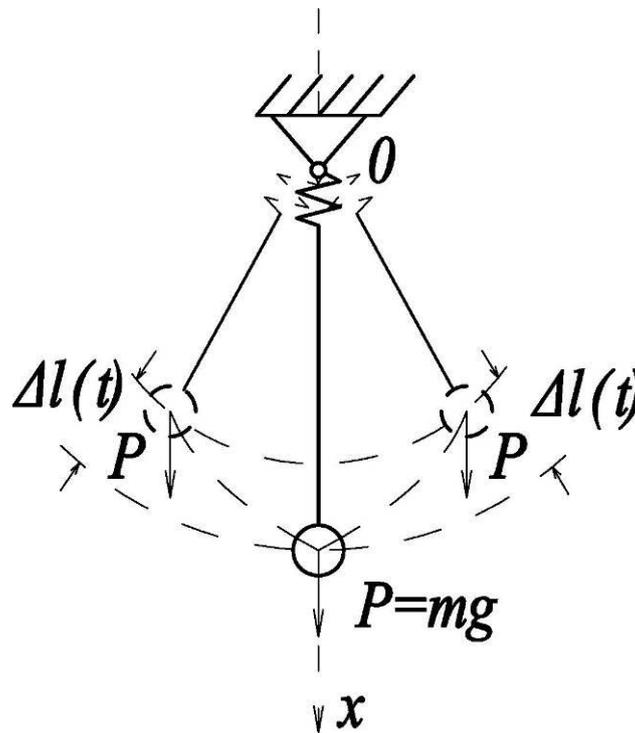


Рис.1.6. Колебания пружинного маятника

Разумеется, при затухании вертикальных колебаний длины, параметрические колебания также исчезают. Если же вертикальные колебания груза поддерживаются периодически вынуждающим возмущением, то тем самым поддерживаются незатухающие параметрические колебания. Интересно, что если поддерживать незатухающими вынужденные колебания угла отклонения маятника, то также возникают вертикальные колебания груза с частотой, равной удвоенной частоте колебаний угла. Но эти колебания также оказываются вынужденными, так как они возбуждаются не переменным параметром (например, переменной жесткостью пружины), а связаны с растяжением пружины в моменты $\alpha=0$ за счет максимальных проекций на вертикаль силы тяжести и центробежной силы вращения маятника.

Рассмотренные здесь параметрические колебания были давно обнаружены при изучении раскачивания сцепок вагонов паровозных составов на заре их эксплуатации, когда пружины сцепок имели невысокую жесткость. При колебаниях пружин и состава в горизонтальной плоскости вдоль железнодорожного полотна, возникали угрожающие авариями поперечные параметрические колебания.

Вращение упругого вала. На Рис.1.7 показан упругий вал прямоугольного сечения, горизонтальная c_x и вертикальная c_y жесткости на изгиб которого различны, а жесткость на кручение c_z неизменна. Вал консольно закреплен одним концом в шпинделе, а второй его конец свободен. При вращении шпинделя вокруг оси z свободный конец вала под действием силы тяжести прогибается по оси y на величину, обратно пропорциональную чередующимся жесткостям c_x и c_y . Упругий однородный вал имеет равномерно распределенную массу и жесткость его также зависит

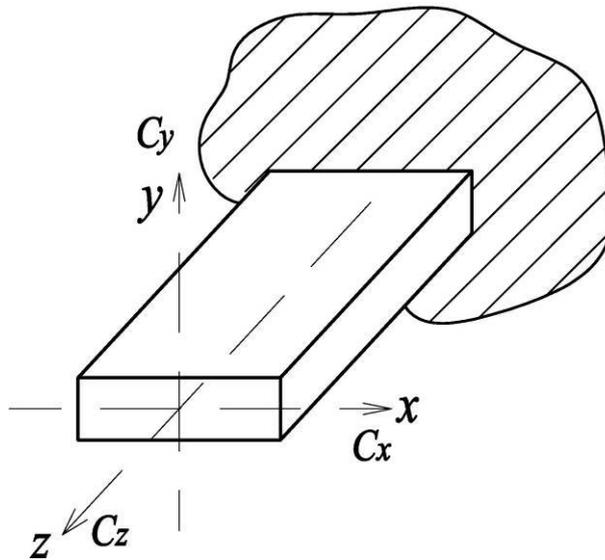


Рис.1.7. Вращение упругого вала

от расстояния до точки приложения силы тяжести. Иными словами, упругий вал имеет, в отличие от сосредоточенных параметров маятника, распределенные по длине параметры: массу и жесткость.

Известно, что объекты с распределенными параметрами, описываемые в математической физике уравнениями в частных производных, могут иметь бесконечное множество собственных частот и сложные комбинационные колебания. В приближенных расчетах, включая реализованный во всех инженерных пакетах численный метод конечных элементов, описания систем с распределенными параметрами заменяются дискретными аналогами обыкновенных дифференциальных уравнений – разностными уравнениями или уравнениями в конечных разностях. Системы, описываемые приближенными разностными уравнениями, также имеют периодические частотные

характеристики и неограниченный ряд собственных частот $\omega_n = n\omega_0$, где $n=1,2,3,\dots$, и ω_0 - первая или основная собственная частота.

В иллюстративных целях заменим распределенную массу сосредоточенной, находящейся в середине вала и висящей на безынерционной пластине, имеющей все три жесткости, показанные на Рис.1.7. Для простоты будем полагать жесткость по оси y много меньшей жесткости по оси x . В этом приближении модель вращающегося вала для небольших частот вращения представлена на Рис.1.8. Сосредоточенный груз весом $P=mg$ периодически опускается два раза за период вращения на величину $\Delta y = mg/c_y$, т.е., имеют место незатухающие вынужденные изгибные колебания пластины с удвоенным периодом. Простая модель этих колебаний в виде пружинного маятника приведена на Рис.1.8,b, эквивалентном Рис.1.5 предыдущего примера.

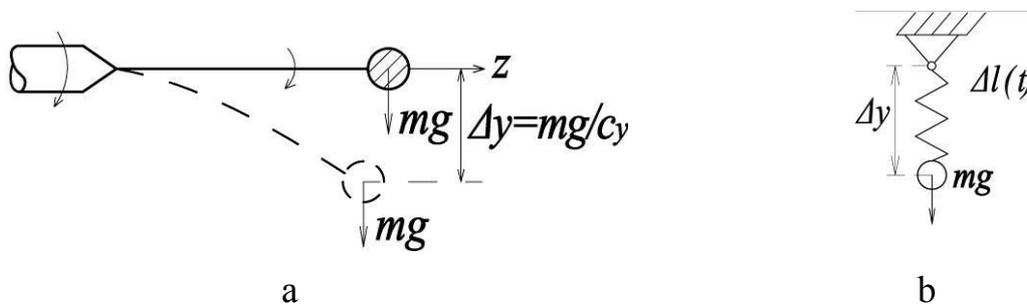


Рис.1.8. Упрощенная модель колебаний упругого стержня

Как и ранее при колебаниях параметра – длины маятника возникают в соответствии с Рис.1.6 параметрические колебания $\alpha(t)$ вокруг оси z с частотой вращения вала. Таким образом, изгибные колебания $\Delta y(t)$ вызывают крутильные параметрические колебания $\alpha(t)$.

Этот вид обычно разрушительного параметрического резонанса, называемого изгибно-крутильный флаттер, имеет место, например, при токарной обработке валов, имеющих даже небольшой эксцентриситет и большие скорости вращения. Как упоминалось, объекты с распределенными параметрами имеют множество собственных частот колебаний. По мере увеличения частоты вращения вначале возникает чаще всего наиболее опасный первый резонанс на частоте ω_0 . Именно этот случай приведен на Рис.1.8. Он опасен тем, что имеет низкую частоту колебаний и, как правило, большую амплитуду при малой степени затухания. Чтобы не допустить разрушений приходится либо уменьшать обороты шпинделя, либо их увеличивать. При увеличении оборотов до следующей собственной частоты $n\omega_0$ вновь возбуждается параметрический резонанс, колебания которого имеют меньшую амплитуду, но более сложную форму (моду), когда по длине вала укладывается одна или несколько четвертей волны колебаний.

В разобранный примере вращение вала приводит к периодическим вынужденным колебаниям и, как следствие, к возбуждению параметрических колебаний. Для возбуждения крутильно-изгибного флаттера вращательное движение не обязательно. Он наступает при обтекании колебательных объектов жидкостью или газом, в том числе воздушным потоком, приводя нередко к катастрофам строительных сооружений, мостов, летательных аппаратов, описание небольшой части которых приведено в разделах гидродинамики и аэродинамики.

Рассмотрим в заключение раздела один из примеров, в котором параметрический резонанс играет не разрушительную, а созидательную роль.

Обращенный маятник. В разделе «Обыкновенный маятник» (Рис.1.3) показано, что при вертикальной вибрации точки подвеса возникающие параметрические колебания приводят к потере устойчивости состояния равновесия. На Рис.1.9 показан обращенный вертикальный маятник. В отсутствие внешних поддерживающих сил его вертикальное положение является неустойчивым. Подобные объекты называются структурно неустойчивыми, так как их невозможно привести в устойчивое состояние при любых значениях постоянных параметров (длины или веса).

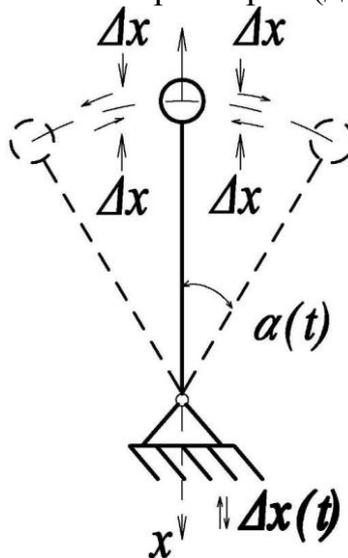


Рис.1.9. Колебания обращенного маятника

При вертикальной вибрации точки опоры $\Delta x = a \sin \Omega t$ периодическое вибрационное ускорение $-a\Omega^2 \sin \Omega t$, так же как в обыкновенном маятнике, периодически складывается и вычитается из гравитационного ускорения g с частотой Ω . В результате подобного периодического изменения параметра (веса маятника) возникающие в противофазе параметрические колебания и резонанс стабилизируют неустойчивое положение маятника. Необходимым условием стабилизации является очевидное неравенство $a\Omega^2 > g$.

Впервые этот резонанс обнаружил в середине прошлого века П.Л.Капица, который показал, что обращенный маятник приобретает устойчивое вертикальное состояние при выполнении условия

$$a\Omega > \sqrt{2gl},$$

где a - амплитуда вибрации, l - длина маятника. Это условие означает, что максимальная линейная скорость перемещения опоры должна превышать скорость свободного падения маятника с высоты, равной его длине. В литературе устойчивый при вибрации обращенный маятник называется маятником Капицы. Наглядная иллюстрация маятника Капицы демонстрируется с давних времен в детских состязаниях на время удержания вертикальной палочки на ладони, колеблющейся в вертикальной или горизонтальной плоскости.

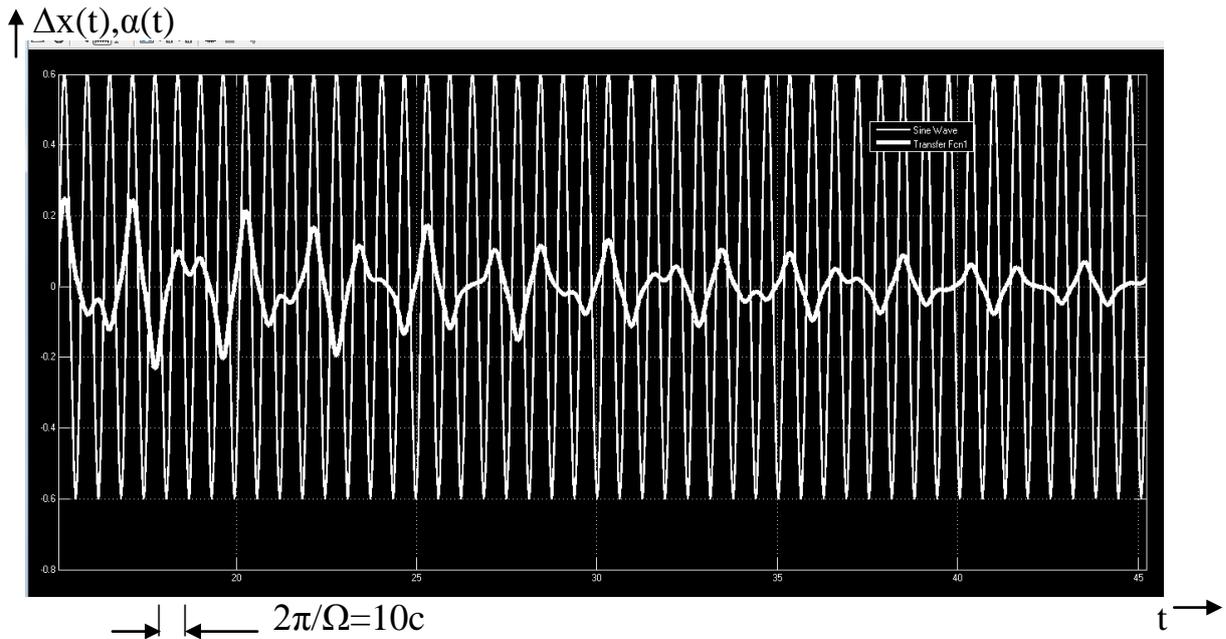


Рис.1.10.Переходный процесс стабилизации обращенного маятника

Переходный процесс получен численным моделированием (см. часть 2, Численное моделирование) маятника Капицы длиной 1м. Как следует из Рис.1.10 устойчивость достигается при амплитуде вибрации 0,6 м. и ускорении 60 м/с^2 .

Параметрический резонанс в электротехнике.

Параметрический колебательный контур. В конце тридцатых годов прошлого столетия академики Л.И. Мандельштам и Н.Д. Папалекси предложили использовать параметрический резонанс для построения генераторов колебаний. Для генерации применялся колебательный электрический контур RLC, в котором периодически изменялась емкость C конденсатора (Рис.1.11). Емкость конденсатора периодически изменялась при периодическом изменении расстояния между его пластинами, но более удобным оказался предложенный ими способ модуляции электрического

поля конденсатора проводящим диском с прорезями при вращении его между пластинами электрическим двигателем. Изменяя скорость вращения двигателя, изменяли частоту колебаний параметра (емкости конденсатора) и в районе резонансной частоты контура возбуждались параметрические колебания тока и напряжения на элементах контура. При этом частота параметрических колебаний, примерно совпадая с собственной частотой контура, в два раза меньше частоты колебаний параметра.

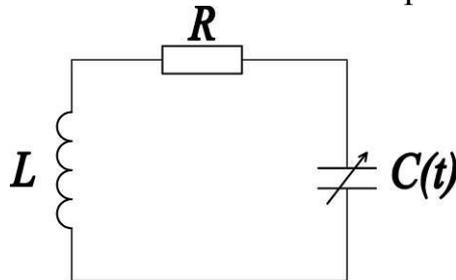


Рис.1.11. Колебательный электрический контур

Процесс возбуждения параметрических колебаний сопровождается накоплением энергии колебаний контура. Если в моменты достижения экстремума напряжения на конденсаторе раздвинуть пластины, т.е., уменьшить емкость конденсатора, то увеличивается напряжение U на конденсаторе, так как заряд конденсатора $q=CU$ в связи с инерционностью индуктивности быстро измениться не может. С ростом напряжения пропорционально его квадрату растет энергия контура. Если же в момент нулевого напряжения на конденсаторе пластины сдвигаются, то энергия контура не уменьшается. Таким образом, происходит накопление энергии контура, если ее рост превышает потери энергии на активном сопротивлении R . Следует отметить, что рост энергии параметрических колебаний в контуре происходит за счет затрат энергии на перемещение пластин конденсатора или за счет энергии вращения диска, модулирующего электрическое поле конденсатора. Рассмотренный пример также относится к нечастым случаям, когда параметрические колебания возникают, как уже упоминалось, в «чистом» виде.

В настоящее время энергия параметрически возбуждаемых колебаний используется редко, в связи с появлением мощных полупроводниковых ключей (тиристоров) и построенных на этой основе мощных электронных генераторов переменного напряжения (инверторов). Развитие и широкое использование параметрически возбуждаемых колебаний пошло не в энергетическом направлении, а в направлении генерации и усиления колебаний сверх высоких частот (СВЧ) в радиосвязи и радиолокации. Для генерации и усиления параметрических СВЧ колебаний используют весьма малых размеров резонаторы (контура), имеющие к тому же высокую помехоустойчивость.

Феррорезонанс - скрытый параметрический резонанс. В электротехнике давно известно явление феррорезонанса, которое случается с

вынужденными колебаниями в RLC контуре, индуктивность L которого содержит стальной сердечник. Это явление выражается, при определенных условиях, в скачках амплитуды вынужденных колебаний, когда амплитуда или частота вынуждающих колебаний изменяется плавно.

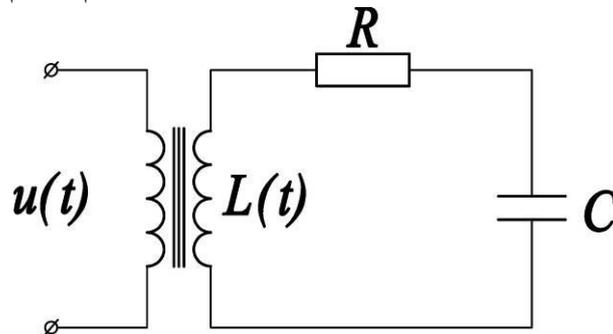


Рис.1.12. Трансформаторный колебательный контур

На Рис.1.12 представлен колебательный контур RLC, аналогичный контуру Рис.1.11, но имеющий трансформаторный вход переменного напряжения $u(t)=u\sin\omega t$. В качестве индуктивности контура используется вторичная обмотка трансформатора, выполненного на стальном сердечнике. С ростом амплитуды u входного напряжения пропорционально растет амплитуда вторичного напряжения на индуктивности L до некоторого определенного момента, после чего рост вторичного напряжения замедляется. При дальнейшем увеличении входного напряжения происходит скачком увеличение напряжения контура – скачкообразный резонанс или так называемый феррорезонанс. Характерной особенностью этих скачков является обязательное наличие стального сердечника в катушке индуктивности, откуда и происходит название «феррорезонанс». При отсутствии сердечника скачки отсутствуют. Оказывается, что истинной причиной скачков является возбуждение в контуре параметрического резонанса. Переменным параметром на схеме Рис.1.12 является индуктивность. С увеличением амплитуды намагничивающего сердечник тока магнитная проницаемость сердечника уменьшается до малой величины – магнитной проницаемости воздуха. В этом случае говорят о насыщении магнитного материала сердечника. Таким образом, пока насыщение не наступает, на линейном участке намагничивания индуктивность максимальна и примерно равна нулю при насыщении. Так как насыщение наступает два раза за период $T=2\pi/\omega$, когда амплитуда намагничивающего тока максимальна, колебания индуктивности имеют частоту $\Omega=2\omega$ и растущие новые параметрические колебания имеют частоту, равную частоте вынужденных колебаний. Происходит сложение вынужденных колебаний и колебаний первого параметрического резонанса, при котором наблюдается скачок амплитуды. Отличить при этом параметрические колебания от вынужденных невозможно, чем и объясняется таинственность проявления этого резонанса.

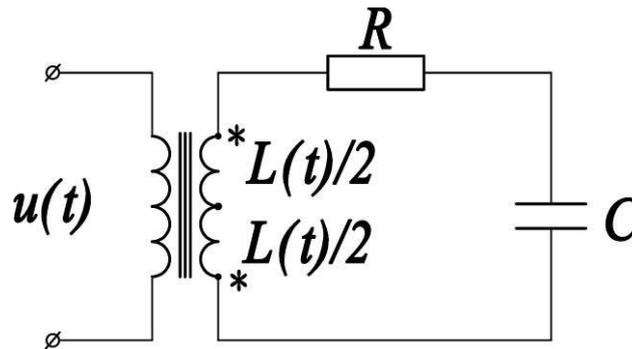


Рис.1.13. Индуктивный параметрический резонанс

Отличить действительно нельзя, но выделить параметрические колебания в «чистом» виде можно. Для этого обмотка индуктивности выполняется в виде двух встречно включенных одинаковых обмоток, индуктивность каждой из которых равна $L/2$, как показано на Рис.1.13. В этом случае первичное вынуждающее напряжение трансформируется в каждую из обмоток контура в противофазе и результирующее напряжение на вторичных клеммах трансформатора равняется нулю. Иными словами, вынужденные колебания в контуре отсутствуют. Однако, тем не менее, на той же частоте скачка или феррорезонанса схемы Рис.1.12 в контуре схемы Рис.1.13 возникают и не малые колебания. Это есть невидимые ранее параметрические колебания, выделенные в «чистом» виде, т.е., истинная причина явления феррорезонанса. Эффект выделения параметрических колебаний из вынужденных колебаний объясняется тем, что, несмотря на отсутствие вынужденных колебаний в контуре Рис.1.13, намагничивание стального сердечника вынуждающим напряжением первичной цепи продолжается и величина индуктивности контура, равная сумме индуктивностей двух обмоток, продолжает изменяться от максимального значения до значения, близкого к нулю.

Известный в механике изгибно-крутильный резонанс присутствует и в задачах электромеханики, например, в производстве и эксплуатации мощных турбогенераторов гидроэлектростанций. Ошибки и неточности балансировки в изготовлении и установке многотонных вращающихся роторов могут привести к изгибно-крутильному резонансу в эксплуатации, как это произошло с разрушением лобовых частей ротора после запуска Красноярской ГЭС в эксплуатацию.

Параметрический резонанс в гидродинамике

В многочисленных сложных задачах гидроаэродинамики рассматривается, либо движение среды (жидкости, газа, воздуха), в которой находится объект, либо движение объекта (самолета, ракеты, корабля) в среде, и их взаимное влияние. Эти задачи, как правило, аналитических

решений не имеют и решаются численными методами или физическим моделированием среды и объекта. В затронутых ниже простейших задачах гидроаэродинамики просматривается их аналогия с изложенными ранее простыми задачами механики и электротехники.

Влияние течения и волнообразования жидкости (воды) на колебательные объекты издавна и по настоящее время привлекают внимание при проектировании и эксплуатации речных и морских подвижных объектов. Например, это связано с безопасностью судоходства. Опасность судоходства подтверждают бесчисленные катастрофы в его истории и в наше время. Судно на воде представляет собой в первом приближении устойчивый маятник, благодаря тому, что центр тяжести его расположен в воде ниже ватерлинии. При волнении воды, частота которого равна или кратна собственной частоте судна, маятник может раскачиваться до углов, способных вызвать опрокидывание. Это состояние особенно опасно при транспортировке плохо закрепленных грузов или частично заполненных жидкостью трюмных танков (баков, контейнеров). Так, около 40 лет назад в средствах массовой информации появилось сообщение о гибели сухогруза «Комсомолец Узбекистана», вызванное не самым большим волнением и связанным с ним смещением грузов. К счастью, команда сухогруза была спасена береговой охраной США. (Возможно, по этой причине появилась в СМИ указанная информация, которая нередко умалчивалась). В этих случаях периодическое перемещение грузов (параметров), вызванное качкой, периодически изменяет положение центра тяжести и усиливает опрокидывающий момент. Вот почему, в инструкциях судоводителям запрещается транспортировать плохо закрепленные грузы и неполные контейнеры жидкости. В инструкциях также рекомендуется для уменьшения качки менять курс судна, направляя его под углом к фронту волны. Хотя длина волны остается прежней, уменьшается период и амплитуда качки, удаляясь от частоты собственных колебаний. Не так давно обнаружены параметрические колебания судна, движущегося попутно ветру и волне. При этом на гребне волны вначале поднимается и опускается корма, а затем нос судна, т.е. дважды за период волны проходят продольные колебания судна и возникают, подобно пружинному маятнику поперечные параметрические колебания.

Причиной вынужденных и параметрических колебаний в жидкости является не только волнообразование. Другой природой колебаний служит обтекание колебательных объектов потоком жидкости. Как показано на Рис.1.14 при обтекании тела, например, цилиндрической формы, образуются вихревые вращения жидкости. При отрыве вихрей от поверхности формируются приложенные к телу периодические силы, способные вызвать поперечные вынужденные колебания. Эти колебания, возникающие вместе с параметрическими и автоколебаниями, называют срывным флаттером.

В целом, следует отметить, что колебательные процессы в жидкости имеют сложную природу и являются чаще всего комбинированными:

вынужденными, параметрическими и нелинейными самовозбуждающимися (автоколебаниями).

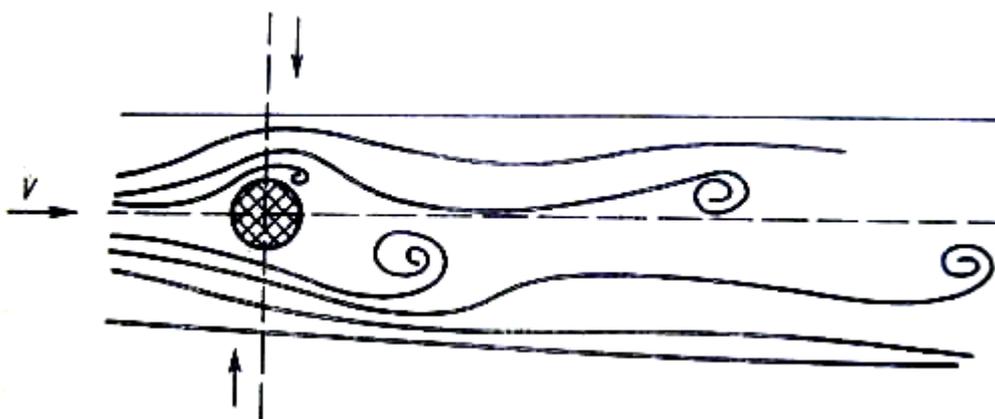


Рис.1.14. Отрыв вихрей

Рассмотрим простые примеры.

Во время Великой Отечественной войны для безопасности северных портов и военно-морских баз использовались специальные мины, расположенные на затопленных недалеко от поверхности буях, закрепленных заякоренными тросами. Вскоре обнаружилось, что некоторые мины взрываются при отсутствии каких либо судов поблизости. Внимательное изучение взрывов показало, что ложные взрывы мин связаны с небольшим течением, которое при обтекании затопленного буя приводит к срывному флаттеру и образующиеся колебания вызывают детонацию мин.

Для отвлечения от военной тематики предлагается следующий, скорее комический пример. Срывной флаттер хорошо знаком любителям рыбной ловли. Он проявляется в медленных поперечных колебаниях лодки, закрепленной носовым якорем на течении. Эти движения особенно «опасны» при ловле на донную удочку. При этом короткое удище постепенно изгибается в дугу, а неопытный рыболов в предчувствии улова хватается за сачок. Но, увы, крупная рыба берет насадку не так!

В качестве еще одного примера приводится случай из авторского опыта плавания. «В небогатой молодости решил я для летних путешествий семьи построить самодельный катер. Заказал деревянный каркас на верфи маломерных лодок Новой Ладоги, ведущей свое начало, быть может, с петровских времен. Установил старый мотор отслужившей «Победы» и оборудовал сравнительно просторную каюту. Поскольку бензин в те времена стоил копейки, мне стали доступны все водные просторы Северо-Запада от Онежского озера до Финского залива.

Как-то ранней весной перегонял я свой баркас из Ладожского озера в Финский залив. Вошел в Неву к вечеру и, когда начало темнеть, приближался к Ивановским порогам. Течение реки в этом месте всегда сильное, а в паводок становится стремительным. Вдруг, впереди, в сумерках я увидел странное явление: из-под воды медленно поднималось некоторое существо.

Поднявшись над водой в двухметровый рост, оно также медленно стало опускаться и исчезло под водой. Спустя некоторое время странное явление повторилось. К этому времени я уже имел немалый опыт плавания: в штормовую ночь переплывал Ладожское озеро от Валаама до Новой Ладоги, в ясную погоду удивлялся миражам на воде, тонул однажды от столкновения с топляком, но к счастью сумел подвести под пробоину брезентовый пластырь. Но тут мне стало как-то неуютно: что это? Проплывая рядом с «чудовищем», я увидел поднимающийся из воды большой притопленный речной буй».

Приближенный анализ колебаний буя приведен в разделе «Буйный резонанс» части 2. Оказалось, что вынужденные колебания притопленного буя, вызванные, например, срывным флаттером, вызывают параметрический резонанс, который, в свою очередь, вызывает скачок амплитуды исходных вынужденных колебаний. Появление скрытых параметрических колебаний связано с тем, что выталкивающий буй из воды момент M нелинейно зависит от угла отклонения $M = M_0\alpha + M_1\alpha^3$. Поэтому при вынужденных колебаниях угла $\alpha(t) = A\sin\omega t$ периодически изменяется параметр - скорость изменения момента $dM/d\alpha|_{\alpha(t)} = M_0 + 3M_1A^2\sin^2\omega t = M_0 + 1,5M_1A^2(1 + \cos 2\omega t)$. Как видим, на удвоенной частоте изменения параметра возникает «невидимый» первый параметрический резонанс с частотой, равной частоте вынужденных колебаний ω .

Параметрический резонанс в аэродинамике.

В гидродинамике чаще всего рассматривается влияние движущейся среды (жидкости) на колебательные объекты. В аэродинамике обычно рассматривают влияние неподвижной среды (воздуха) на подвижный колебательный объект или на отдельные колебательные элементы этого объекта (самолета). По сути, также к аэродинамике относятся задачи о колебаниях и устойчивости строительных сооружений при действии ветряных нагрузок. К таким сооружениям относятся, прежде всего, мосты, высотные башни и здания. Хотя ветряные нагрузки не идут в сравнение с влиянием воздуха на летательные аппараты, тем не менее, пренебрежение ими дорого обходится.

Широко известна история Такомакого моста. Один из двенадцати шедевров американского мостостроительства Такомакий висячий мост, раскачиваясь на не очень сильном ветру постоянного направления, рухнул в 1940 году. На снимках колебаний оказавшегося поблизости кинолюбителя отчетливо видны нарастающие крутильные и изгибные колебания конструкции. При ветровом обтекании моста из-за вихреобразования и разности верхнего и нижнего давлений воздуха с подветренной стороны возникли изгибные колебания, которые вызвали параметрическое возбуждение крутильных колебаний, а последние, в свою очередь увеличили

амплитуду изгибных колебаний и так далее.... Мост рухнул от изгибно-крутильного флаттера. Конечно, в прошлом веке чего только не было, а вот в нашем...

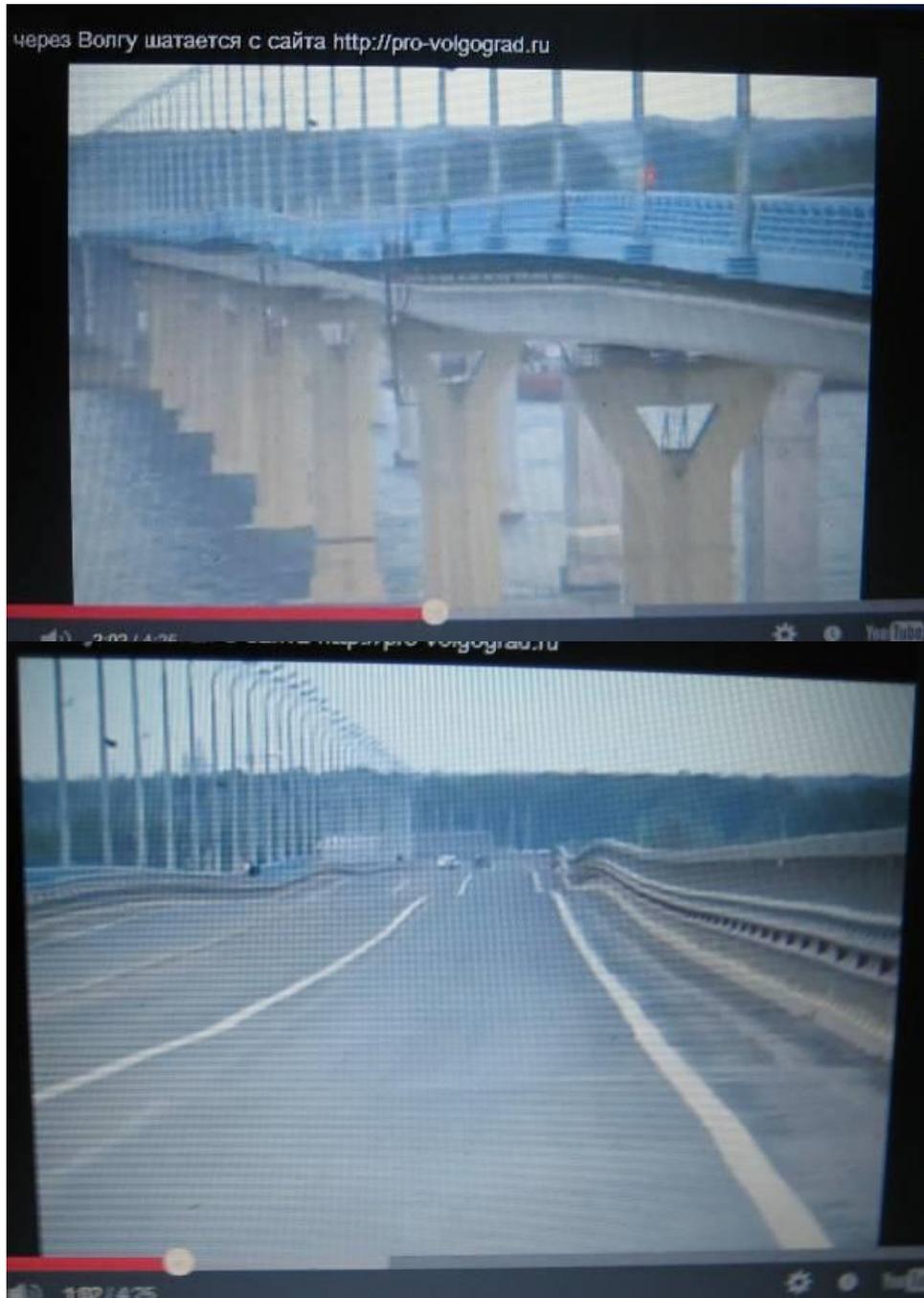


Рис.1.15. Новый мост через Волгу

Вот в мае 2010 года было перекрыто движение автотранспорта по новому мосту через Волгу у Волгограда, торжественно сданному полгода назад в октябре 2009 года. Было также остановлено движение судов по Волге в этом районе. Причина экстренных мер автоинспекции и МЧС объяснялась угрожающими колебаниями моста. Размах колебаний на отдельных участках достигал двух метров.

Новый мост длиной семь километров строился под патронажем партии «Единая Россия» около 10 лет. Стройка обошлась примерно в 25 миллиардов

рублей. В интернете имеется видеозапись «Мост через Волгу» колебаний моста, где также видны между отдельными пилонами изгибные и крутильные колебания (см. фото Рис.1.15) К счастью, обошлось без катастрофы. В настоящее время мост закрыт. В мае 2010 года наблюдались порывы ветра, достигающие 30 метров в секунду. В результате больших ветровых нагрузок ослабли болты крепления отдельных пролетов мостового полотна к опорам. На фотоснимке Рис.1.15 запечатлены изгибно-крутильные колебания этих пролетов при ветре, значительно меньшем 30м/с (судя по волнообразованию) из-за ослабления креплений. Предстоит срочный и немалый ремонт нового моста. Вот как обошлась нам объявленная большая экономия строительства. Так параметрический резонанс может наказывать за просчеты и «экономии».

Летательным аппаратам приходится преодолевать воздушные потоки со скоростью на несколько порядков больше ветровой скорости. Отсюда следует, что воздушную среду для летательного аппарата можно считать неподвижной. И второй вывод состоит в том, что, в связи с большими скоростями полета и возможностью возбуждения колебательных процессов, при создании новых летательных аппаратов проверка модели конструкции или ее частей в аэродинамических трубах является обязательной.

Крыло самолета, как правило, имеет небольшую жесткость на изгиб и может совершать в полете небольшие колебания в вертикальной плоскости. Эти колебания иногда видны из иллюминатора. Жесткость крыла на кручение вокруг продольной оси значительно больше, поэтому крутильные колебания можно регистрировать только приборами. Упрощенно крыло самолета можно представить некоторой консольно закрепленной в его корпусе балкой, имеющей усредненные по крылу жесткости на изгиб и кручение. В силу того, что вертикальное поперечное сечение крыла имеет несимметричную выпуклость сверху и снизу, т.е., имеет в полете разные условия обтекания сверху и снизу, то образуется разность давления, способная вызвать небольшие изгибные и крутильные колебания. Если опять представить аналогию с пружинным маятником, то заключим о возможности крутильно-изгибного флаттера: вынужденные изгибные колебания при определенных условиях вызовут параметрические крутильные колебания. Иллюстрация изгибно-крутильного флаттера представлена на Рис.1.16. Здесь на вертикальные изгибные колебания наложены крутильные (поворотные) колебания, т.е., вынужденные колебания связаны с параметрическими и наоборот, так что разобраться «кто виноват?» не так уж просто.

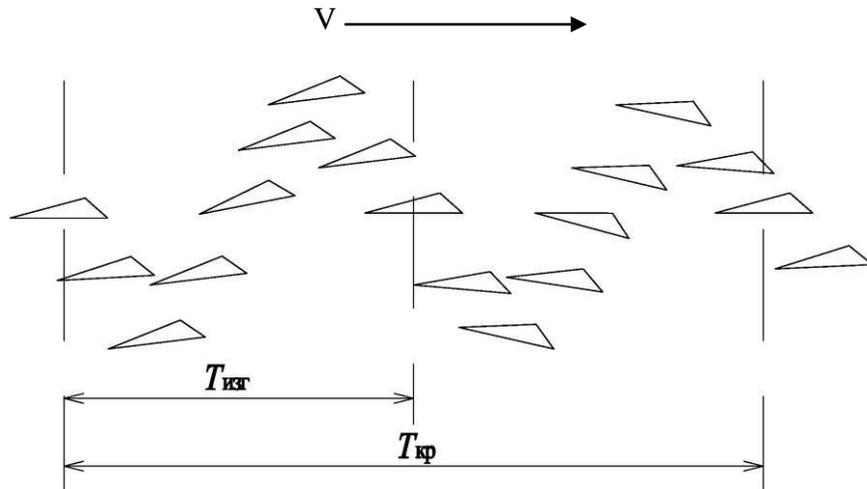


Рис.1.16. Изгибно-крутильные колебания

В пятидесятых годах прошлого века реактивная авиация, достигнув скоростей звука, столкнулась с проблемой преодоления звукового барьера. Проблема заключалась в том, что с приближением скорости самолета к скорости звука 1200 километров в час возникала угрожающая вибрация элементов конструкции и корпуса летательного аппарата. Возникал так называемый звуковой флаттер. Дело в том, что с увеличением дозвуковой скорости частота воздействующих на летательный аппарат звуковых волн уменьшается. На взлете частота звуковых волн совпадает со спектром звука работающего двигателя, который лежит в пределах несколько сот – тысяча герц. С набором скорости частота воздействия звуковых волн уменьшается пропорционально разности скоростей распространения звука и самолета. В процессе этого уменьшения звуковые волны воздействуют, поочередно совпадая со всеми собственными частотами летящего аппарата. Ситуация оказывается близкой к рассмотренному вращению упругого вала прямоугольного сечения, когда скорость вращения вала медленно уменьшается от максимальной к нулевой. Высокочастотные вибрации не оказывают серьезного влияния ни на вал, ни на самолет, но по мере прохождения низких собственных частот амплитуда вибраций увеличивается до максимальной, когда достигается первая собственная частота. Так как первая собственная частота самолета в зависимости от конструкции лежит в пределах нескольких герц, то наиболее опасный звуковой флаттер наступает при достижении разности скоростей звука и самолета, порядка нескольких десятков метров в секунду, т.е. на подлете к звуковому барьеру. Именно здесь возникает проблема увеличивать скорость или уменьшать? В обоих случаях опасная вибрация прекращается. На заре развития реактивной авиации двигатели не имели достаточной мощности для форсажа, и без выбора скорость полета приходилось уменьшать. По мере совершенствования двигателей скорости самолетов увеличились до трех тысяч километров в час и звуковой флаттер удалось преодолеть резким

увеличением скорости, при которой безопасная длительность флаттера не превышает одной секунды. Что касается существа звукового флаттера, то он мало отличается от изгибно-крутильного флаттера. Объемная звуковая волна периодически меняет давление аппарата, вследствие которого периодически меняется, например, вертикальная жесткость крыльев, вызывая параметрические изгибные и далее крутильные колебания.

Возможно возбуждение подобных колебаний не только крыльев, но и системы рулевого управления, хвостовой части самолета. Более того, в зависимости от условий полета и особенностей конструкции возможны другие виды колебаний. В целом флаттер – это серьезное испытание конструкции летательного аппарата и летчика-испытателя. В заключение отметим, что в распоряжении конструкторов есть немало способов борьбы с колебаниями, среди которых приоритетное место занимает выбор собственных частот конструкции за пределами частотного спектра возмущений.

Автоколебания или параметрические колебания?

Итак, стационарные и параметрические линейные динамические системы могут иметь затухающие свободные колебания, когда системы устойчивы, и расходящиеся колебания, когда они неустойчивы. Расходящиеся параметрические колебания называют параметрическим резонансом. Автоколебаниями названы свободные установившиеся (незатухающие и не расходящиеся) колебания автономных нелинейных систем. Введенный в начале прошлого века академиком А.А.Андроновым термин «автоколебания» прочно вошел в теорию колебаний. В то же время введенный термин не дает понимания причин: почему возбуждаются автоколебания и когда они существуют, т.е. устойчивы?

Позднее оказалось, что условия возбуждения автоколебаний в нелинейной системе совпадают с границей возбуждения первого параметрического резонанса в линейной параметрической системе (некоторые пояснения можно найти в разделе 2 «Вынужденные колебания»). Это объясняется тем, что при колебаниях координаты x колеблется наклон нелинейной характеристики $F(x)$, т.е. параметр. Возникающие при этом в нелинейной системе колебания параметрического резонанса (при так называемом мягком возбуждении) выводят на орбиту установившиеся колебания – автоколебания. Эти колебания будут установившимися, если орбита устойчива. В свою очередь орбита автоколебаний будет устойчива, если отсутствуют все виды параметрических резонансов, кроме первого. Важное необходимое условие устойчивости автоколебаний заключается в том, чтобы с увеличением или уменьшением амплитуды, автоколебания смещались с границы возбуждения в область отсутствия или наличия параметрического резонанса.

Таким образом, имеется немало оснований считать автоколебания установившимися параметрическими колебаниями нелинейных систем. Это третий вид параметрических колебаний, который, например, имеет место в колебаниях пружинного маятника и демонстрируется в разделе части 2 «Численное моделирование». Из многих примеров автоколебательных систем ниже приводятся простейшие.

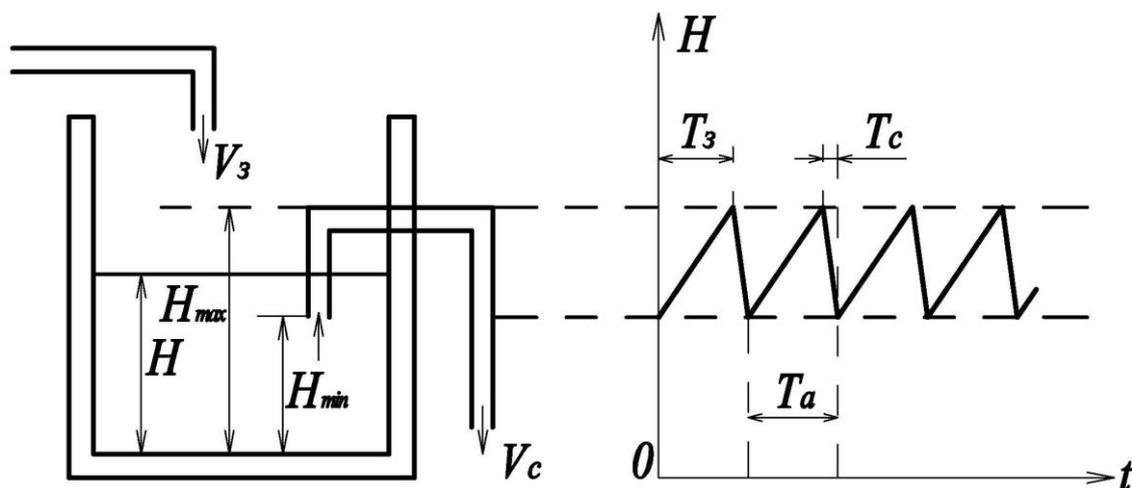


Рис.1.17. Автоколебания уровня жидкости в сосуде Тантала

Рассмотрим пример гидравлической автоколебательной системы (Рис.1.17), называемой сосудом Тантала. В бак заливается вода с постоянной скоростью V_3 . При достижении уровня воды в баке H_{max} вода начинает сливаться со скоростью $V_c > V_3$ до тех пор, пока уровень воды в баке не снизится до минимального H_{min} . На этом слив воды прекращается и начинается вновь заполнение бака до максимального уровня. Временная диаграмма автоколебаний уровня воды в баке приведена справа на Рис.1.17. Изменять скорость слива воды можно, меняя диаметр сливного патрубка или увеличивая длину выпускной вертикальной части патрубка. Представленная гидравлическая система является одновременно нелинейной и параметрической, потому что периодическое с периодом T_a включение и выключение сливного патрубка можно рассматривать как нелинейное (ключевое) звено с запаздыванием или как периодически скачкообразно изменяющийся параметр.

Автоколебания заполнения сливного бачка порой возникают в туалетах при неисправности сливного клапана. Возможно искусственное возбуждение этих колебаний, если под резиновый запорный клапан бачка вставить один конец достаточно тонкой бечёвки, другой конец которой закрепить в баке. В отличие от системы Рис.1.17 эти автоколебания уровня воды возбуждаются периодическим открытием и закрытием впускного клапана. Закончив требуемые исследования по влиянию диаметра бечевки на период автоколебаний, не забудьте вытащить бечевку, так как увеличение расхода

воды при нынешней ее стоимости, приведет к сокращению семейного бюджета.

Примечание. В тяжелом сне мне не могло присниться, что подача и слив воды в квартирах советского времени, а также пользование всеми общественными туалетами стали платными. Теперь я вижу в Петербурге наяву это позорное достижение пост советской России. (Справка: в маленькой южной Корее, где я читал лекции в национальном университете, все общественные туалеты бесплатны и находятся в образцовом санитарном состоянии - умеют же народы уважать себя!).

Электронный аналог сосуда Тантала представлен на Рис.1.18,а. Роль сосуда выполняет конденсатор C , заряд которого осуществляется от источника напряжения U через сопротивление r_1 . По достижении пробивного напряжения $U_{\text{п}}$ диода D (денистора или управляемого тиристора) конденсатор разряжается через сопротивление r_2 . Так как $r_2 \ll r_1$ конденсатор разрядится и большое обратное сопротивление диода восстановится. Вновь начнется медленный заряд конденсатора. Вольтамперная характеристика диода приведена на Рис.1.18,б. Временная диаграмма приведена на Рис.1.18,с, где постоянные времени $T_1 = r_1 C$ и $T_2 = r_2 C$.

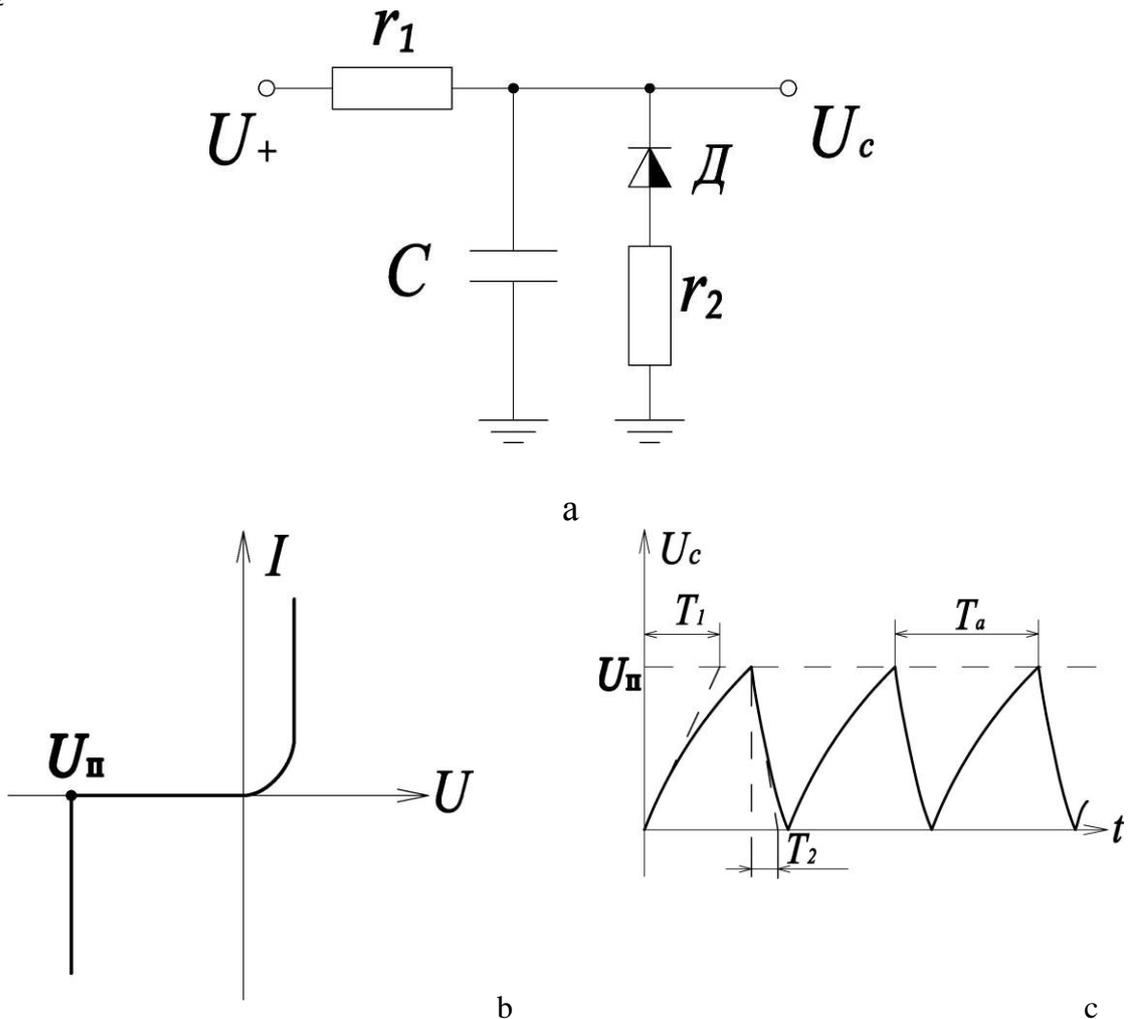


Рис.1.18. Автоколебания напряжения конденсатора.

Немало других механических, электрических и электронных автоколебательных систем, таких как копры, анкерные часовые механизмы, генераторы, а вот...Внимание! На кухне раздался стук: закипела вода в кастрюле, застучала крышка – это параметрический резонанс. Спустя одну-две минуты установятся автоколебания – установившиеся параметрические колебания.

Парадоксы обыкновенных качелей

Использует ли человек параметрические колебания и параметрический резонанс? На сегодняшний день ответ, пожалуй, такой: и да, и нет.

Наверное, все наблюдали выступления на соревнованиях мастеров-гимнастов, изумляясь спортивному мастерству и прекрасному владению тренированным телом. Предельно четко используют параметрические колебания мастера на таких снарядах, как кольца, брусья, перекладина (турник). Так, например, прыгая на перекладину и собравшись, спортсмен выбрасывает тело вперед и после одного – двух управляемых взмахов (колебаний) уже выходит на стойку обращенным маятником. Слегка задержавшись в этом положении, он совершает несколько круговых движений, а, оторвавшись, стремительно вылетает вперед и, сделав в воздухе одно или двойное сальто, приземляется на ноги. Bravo! Истинно bravo четкому использованию переменного параметра (момента инерции) и параметрических колебаний для достижения высшего мастерства. Момент инерции изменяется с изменением длины маятника, вызывая параметрические колебания. При амплитуде колебаний, превышающей $3\pi/4$, параметрические колебания теряют устойчивость и переходят в круговое вращение, которое также поддерживается и развивается с помощью периодического легкого изменения момента инерции.

Самым популярным и любимым снарядом детей и молодежи являются обыкновенные качели. Какие только эмоции не увидишь на качелях: залихватский смех и плач, испуг и радость, восторг и молодецкую удаль. Еще бы, где еще можно испытать чувство невесомости в условиях гравитации? Недаром неоценимой является заслуга качелей в подготовке прошлых, настоящих и будущих космонавтов.

Возбуждение параметрических колебаний качелей осуществляется периодическим перемещением качающегося человека в вертикальной плоскости, как показано на Рис.1.19, т.е. периодическим изменением момента инерции и эффективной длины маятника. Проще и легче всего раскачиваются качели на частоте параметрических колебаний, равной или близкой к собственной частоте свободных колебаний качелей с неподвижным грузом.

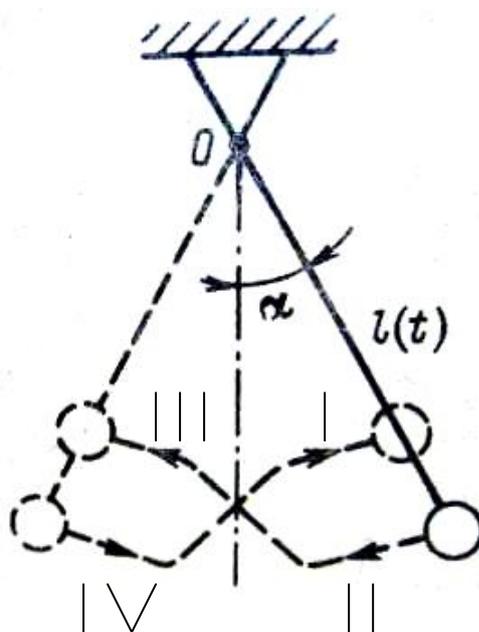


Рис. 1.19. Колебания качелей

При этом частота изменения параметра или частота вертикальных перемещений груза или человека должна вдвое превышать частоту колебаний качелей. (Здесь следует понятное замечание: если раскачиваются два человека, то приседают они по очереди, обеспечивая двукратное изменение параметра за период колебаний качелей). Возникающий при этом параметрический резонанс называется первым или главным параметрическим резонансом. Вместе с тем перечисленных условий возбуждения параметрических колебаний качелей еще недостаточно. Другим важным условием параметрического возбуждения является фаза колебаний параметра по отношению к колебаниям качелей. Перемещение груза или человека вниз (приседания) должны начинаться в момент достижения максимального отклонения качелей в ту или другую сторону (в моменты нулевой угловой скорости колебаний качелей), а перемещения груза или человека вверх, т.е. уменьшения эффективной длины маятника, должны происходить при нулевом отклонении качелей от вертикального положения (в моменты максимальной угловой скорости). Это требование эффективного раскачивания вытекает, например, из описания маятника при вибрации точки подвеса (см. Рис.1.3). Именно, увеличиваться эффективная длина должна во второй и четвертой четвертях (четвертях ускорения) периода колебаний маятника, а уменьшаться – в первой и третьей четвертях (торможения). Здесь уместен вопрос: а как бы Вы, уважаемый Читатель, действовали, если раскачавшись, Вам экстренно нужно как можно быстрее остановиться (естественно, когда выпрыгивать опасно, а рукой и ногой земли не достать)?

В целом следует отметить, что простой снаряд, каким являются обыкновенные качели, удивителен по количеству эффектов и парадоксов, возникающих в процессе параметрических колебаний. Прежде всего, колебания качелей и в целом параметрические колебания, в отличие от

вынужденных колебаний, имеют порог, ниже которого параметрическое возбуждение невозможно. Так в разделе «Обыкновенные качели» части 2 приводится пороговое условие возбуждения колебаний качелей $\lambda \geq \frac{\pi}{6} \xi \approx 0,5\xi$, где длина подвеса качелей $\ell = \ell_0 + \Delta\ell(t)$, относительная амплитуда колебаний параметра $\lambda = \Delta\ell/\ell_0$ и коэффициент затухания ξ . В связи с этим пороговым условием полезно молодым родителям иметь в виду одну давнюю историю с автором о том, как рано мы, порой не замечая, бываем несправедливы к детям (см. Чечурин С.Л. «Параметрические колебания...», 1983)

«Раскачивая как-то на деревянных, срубленных дедом, качелях трехлетнего сына, я решил, что ему пора раскачиваться самому. Объяснив приемы раскачивания, я предоставил ему эту возможность, придавая качелям начальное отклонение. Мальчишка старался изо всех сил, но параметрический резонанс не возбуждался. После нескольких неудачных попыток я демонстративно снял его с качелей. Мы были основательно рассержены друг на друга и..., здоровый детский плач взорвал тишину Шуваловского озера. На этот зов немедленно появилась жена. В такие минуты научные положения ее интересуют меньше моих педагогических принципов, а последние не интересуют совсем. Сын был посажен на качели, и мне без всяких расчетов была точно указана допустимая амплитуда колебаний. Пришлось вновь заняться вынужденными колебаниями...».

Конечно, я был не прав и потому привожу упрощенное правило практической проверки порогового условия возбуждения: $h > 4\ell_0/N$. Это означает, что длина подвеса качелей ℓ_0 , отнесенная к росту ребенка, должна быть меньше четверти N – четверти числа свободных колебаний качелей с неподвижным грузом, полученных при небольшом начальном отклонении. Практическое правило получено при следующих допущениях: приседания возможны на одну треть роста $h/3$, при которых изменение эффективной длины подвеса составляет $h/6$; вес корпуса качелей не учитывается.

Интересна и другая особенность параметрических колебаний качелей, отличающаяся от вынужденных колебаний, а именно. Существует максимальная частота параметрического возбуждения, выше которой параметрический резонанс не возможен. Приведем еще некоторые интересные парадоксы параметрических колебаний. С этой целью мысленно закроем корпус качелей с раскачивающимся человеком непрозрачной сферой для стороннего наблюдателя и первым его парадоксальным вопросом будет: «Почему в отсутствии внешних сил сфера качается, а колебания не затухают?».

Следующий парадокс связан с частотой или периодом параметрических колебаний. Из условия возбуждения параметрических колебаний качелей при $\xi=0$ и малых α (см. раздел «Обыкновенные качели») следует равенство $1 - \gamma^2 = \pm 2\lambda(1 + 2\gamma^2)/\pi$. Здесь каждому значению относительной величины изменения эффективной длины $\lambda = \Delta\ell/\ell_0$ соответствуют два значения относительной частоты колебаний $\gamma = \Omega/2\omega_0$.

Так для $\lambda = 0,2$ следуют значения $\gamma_1^2 = 0,682$ и $\gamma_2^2 = 1,52$. Им соответствуют абсолютные частоты колебаний качелей $\omega_1^2 = 0,682g/\ell_0$ и $\omega_2^2 = 1,52g/\ell_0$. Замерив длину маятника ℓ_0 , сторонний наблюдатель по известной в школе формуле Томпсона найдет частоту колебаний $\omega_0^2 = g/\ell_0$, которая не совпадает ни с одной из возможных и действительных колебаний качелей. Конечно, этот парадокс просто объясняется тем, что наблюдатель не видит колебаний параметра и считает колебания маятника свободными, в то время как параметрические колебания отличаются от свободных колебаний.

Приведем еще один парадокс параметрических колебаний. В случае, если раскачивание качелей, т.е. изменение длины подвеса, осуществляется один раз за период, возбуждается второй параметрический резонанс, при котором параметрические колебания становятся несимметричными относительно вертикали. Сторонний наблюдатель отметит парадокс, состоящий в том, что при отсутствии внешних сил, маятник качается симметрично относительно оси, не совпадающей с вертикалью. Конечно, и этот парадокс объясняется тем, что параметрические колебания это не симметричные вынужденные колебания.

Велика, разумеется, «заслуга» качелей в познании параметрических колебаний. Ведь общеизвестные качели представляют собой прекрасный учебный экспонат, которому нет равных в познании параметрического резонанса.

Параметрические колебания и человек

Пока что человек продолжает лишь познавать расширяющуюся сферу влияния параметрических колебаний. Так недавно, изучая особенности макроэкономического моделирования, обнаружены параметрические колебания в модели динамического многопродуктового баланса и в конъюнктурных циклах модели Гудвина (см. Чечурин Л.С. Прикладные задачи экономики. В кн. Физические основы теории колебаний.). Так же недавно на базе многочисленных измерений (см. Хабарова О.В. Биологоактивные частоты и их связь с собственными частотами живых организмов. Биомедицинские технологии и радиоэлектроника, №5. 2002) ученые пришли к выводу о параметрической природе влияния на живые организмы различных колебательных полей: полей излучения, вибрационных, гравитационных, электрических и магнитных полей. Предположительно это влияние объясняется эффектом «живой воды» (Широсов В.Г. Феномен живой воды и его простое объяснение. XIII международный симпозиум «Международный год воды - 2003»). При воздействии внешнего колебательного поля упорядочивается ориентация диполей воды в клетках живого организма. В результате на частоте, равной половине частоты внешнего воздействия, в воде образуется устойчивая пара диполей, а их совокупность (кластер), или область одинаково ориентированных синхронно колеблющихся пар диполей, вызывает

устойчивый иммунитет к заболеваниям и терапевтический эффект при многих заболеваниях. Следует отметить, что задолго до этих объяснений был обнаружен терапевтический эффект разнообразных приборов, таких как, например, «ВИАТОН», генерирующий вибрации, или «АЛМАГ», генерирующий магнитные колебания, «МАВИТ», генерирующий и то и другое, ультразвуковые приборы и другие. Представляется, что в ряду оздоровительных приборов такого типа и назначения свое место вполне могут занять обыкновенные и, к тому же, бесплатные качели – уникальный параметрический тренажер, генерирующий инфранизкие колебания гравитационного поля. Возможно, этот тренажер полезен пожилым не менее, чем молодым.

Было бы неправильным закончить на этом раздел «Параметрические колебания и человек», не сказав о том, как влияет параметрический резонанс на характер человека и на его жизнь. Так для летчиков-испытателей требуется немалая воля и решительность в преодолении звукового флаттера самолета. Наградой служит радость свободного полета в безмолвной тишине пространства. В иных жизненных коллизиях, в преодолении жизненного флаттера, также требуются немалые волевые качества характера. В жизни все значительно сложнее и эта сложность редко поддается математическому описанию и физико-математическому моделированию. Чтобы как-то выйти из столь тяжелого для автора положения, как избежать флаттера в непростых жизненных ситуациях, не драматизируя их, приведем простой пример.

Едет человек на велосипеде. Совершенно неожиданно перед ним возникает большая лужа. Остановившись или ехать? Не делает ни то, ни это. Притормаживает и велосипед медленно въезжает в лужу. Лужа становится все глубже, а скорости уже нет. При отсутствии скорости велосипедист становится неустойчивым обращенным маятником. Отчаянные колебания рулем не помогают: это колебания не в той плоскости. Результат тяжелый – велосипед с наездником лежат в луже. Конечно, это не жизненный флаттер. Но, как смотреть!

Часть вторая

Краткий путеводитель к загадкам параметрических колебаний

Как следует из предыдущего изложения, параметрический резонанс может вредить, а может и помогать. В то же время, несмотря на наличие колебаний параметра, параметрический резонанс может возбуждаться, но может и не возбуждаться. Цель настоящей главы заключается в том, чтобы понять каковы условия наличия или отсутствия возбуждения. В этом случае появляется осознанная возможность целенаправленного стимулирования либо возбуждения параметрического резонанса, либо его отсутствия.

Вынужденные колебания.

Описание обыкновенного маятника. Схематически колебания маятника иллюстрирует Рис.2.1, где показаны действующие силы: ортогональная к плечу l составляющая $F_p = P \sin \alpha$ силы веса P ; сила сопротивления среды F_c (воздуха или жидкости, сила трения в подшипнике), пропорциональная угловой скорости ω поворота маятника; сила инерции F_y , пропорциональная угловому ускорению ε .

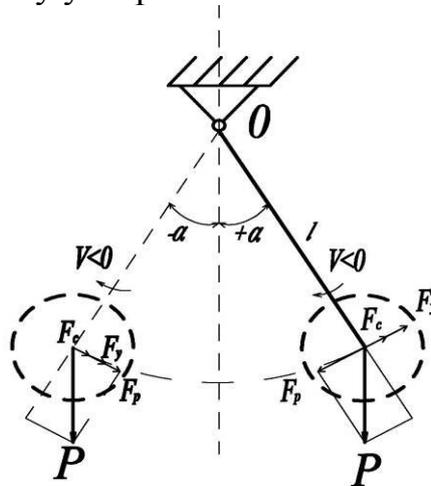


Рис.2.1. Колебания обыкновенного маятника

Моменты этих сил, т.е., произведение сил на плечо ℓ , относительно оси О вращения маятника обозначим соответственно: M_p , M_c , M_y . В соответствии с основным законом механики для вращения твердого тела сумма этих моментов равна нулю, т.е.

$$M_y + M_c + M_p = 0$$

Примем для малых отклонений угла приближение $\sin \alpha \approx \alpha$ и обозначим удельные моменты, отнесенные соответственно к углу, скорости и ускорению: $c = M_p / \alpha$, $b = M_c / \omega$, $a = M_y / \varepsilon$. В этих обозначениях уравнение моментов перепишем в виде

$$a\varepsilon(t) + b\omega(t) + c\alpha(t) = 0,$$

где $\varepsilon, \omega, \alpha$ – координаты - переменные величины, функции времени t ; a, b, c - постоянные параметры. Мы получили линейное дифференциальное уравнение свободных колебаний маятника, потому что угловое ускорение есть вторая производная от угла по времени, а угловая скорость – первая производная от угла по времени. Перейдем к операторной форме записи, заменив первую производную оператором p , вторую - квадратом оператора p^2 :

$$(ap^2 + bp + c)\alpha(t) = 0 \quad *$$

Это алгебраическое уравнение, в котором квадратный полином в скобках называется характеристическим полиномом, а равенство

$$ap^2 + bp + c = 0$$

называется характеристическим уравнением. Характеристическое уравнение и его корни полностью определяют свободные колебания при заданном начальном отклонении. Отклонив маятник в одну из сторон, и отпустив, физически наблюдают процесс его свободных колебаний (см. Рис.1.1). Период колебаний T определяется при $b=0$ известной формулой Томпсона

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}$$

При положительных параметрах a, b, c процесс свободных колебаний маятника имеет колебательный затухающий характер, если корни характеристического уравнения комплексные сопряженные (Рис.1.1), и – монотонный затухающий характер, если корни вещественные. При $b=0$ корни чисто мнимые и происходят незатухающие колебания, амплитуда которых равна начальному отклонению. Наконец, если хотя бы один из коэффициентов (параметров) характеристического уравнения отрицателен, неустойчивый процесс свободного движения маятника - расходящийся монотонный при вещественных корнях и колебательный расходящийся при корнях комплексно сопряженных.

Аналитическое определение корней полиномов высокой степени (больше четвертой) для сложных объектов – задача необычайно трудная, если вообще осуществимая. Численный расчет корней и переходных процессов не представляет труда с помощью современных средств вычислительной техники, но использование этих результатов весьма

ограничено. Дело в том, что конструктору новой техники важен не столько переходный процесс, сколько его качественный характер, например, устойчивый или нет, запас устойчивости, колебательный или монотонный, показатели затухания колебаний, максимальная амплитуда, время процесса и т.д. Наконец, необычайно важна для правильного выбора связь показателей процесса с параметрами. Но и это еще не все. Главное, пожалуй, здесь заключается в том, что составление математического описания, адекватного сложному объекту (самолеты, корабли, мосты, архитектурные сооружения и др.), построенному на разнообразных физических принципах действия, как механики, электромеханики, аэродинамики, гидро- и тепло-динамики, требует большого профессионализма, недостижимого в настоящее время, в связи со значительной дифференциализацией наук.

Частотные характеристики. Конструкторы и инженеры находят выход из тупика в натуральных испытаниях, испытаниях физических моделей проектируемых объектов в различных средах, потоках воздуха или жидкости, а также путем возбуждения и измерения колебаний объекта с помощью генераторов колебаний, вибраторов, вибростендов и специальной измерительной аппаратуры. В частности весьма полезным является знание расчетных либо экспериментальных (а лучше тех и других) частотных характеристик проектируемых объектов.

Снятие экспериментальных частотных характеристик осуществляется в режиме вынужденных колебаний. Гармоническое вынуждающее воздействие генератора или вибратора (входное воздействие, сигнал) подается на одну из выбранных точек (вход) электрической схемы, конструкции, сооружения. Устанавливается фиксированная входная частота и амплитуда колебаний. Измеряется в разных точках (выходах) объекта амплитуда и (реже) фаза установившихся гармонических колебаний. Отношение амплитуды колебаний на выходе к установленной амплитуде колебаний на входе является модулем A частотной характеристики, а разность фаз выходных и входных колебаний является фазой φ частотной характеристики. Далее, изменяют частоту входных колебаний, вновь повторяют измерения, и , получают амплитудно-фазовую частотную характеристику для выбранных входа и выхода:

$$A(\omega) = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}}$$

Чем сложнее объект, тем больше точек входа и выхода, тем больше семейство снятых частотных характеристик. Обычно фазу входного сигнала принимают равной нулю, т.е. отсчитывают сдвиг выходного сигнала относительно входного. В этом случае измеренная фаза выходного сигнала является одновременно фазой частотной характеристики $\varphi(\omega) = \varphi_{\text{вых}}(\omega)$.

Расчетным путем частотные характеристики получают из уравнения установившихся вынужденных колебаний, которое следует из операторного

уравнения свободных колебаний * путем добавления в правую часть вынуждающих гармонических колебаний $F_{\text{вх}}(t)$:

$$(ap^2 + bp + c)\alpha(t) = F_{\text{вх}}(t)$$

Пусть вынуждающие колебания имеют вид $F_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}} \sin \omega t$. Так как уравнение линейное, установившиеся вынужденные колебания маятника имеют такой же вид, ту же частоту ω , но отличаются по амплитуде и фазе, т.е. $\alpha(t) = A_{\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi)$. В таком случае уравнение установившихся вынужденных колебаний принимает вид

$$(ap^2 + bp + c)A_{\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi) = A_{\text{вх}} \sin \omega t$$

Здесь для наглядности используем известный в теоретической электротехнике символический метод. В этом методе одночастотный гармонический сигнал $A \sin(\omega t + \varphi)$ отображают в комплексной плоскости вектором величиной A , расположенным под углом φ к положительной вещественной оси, как показано на Рис.2.2.

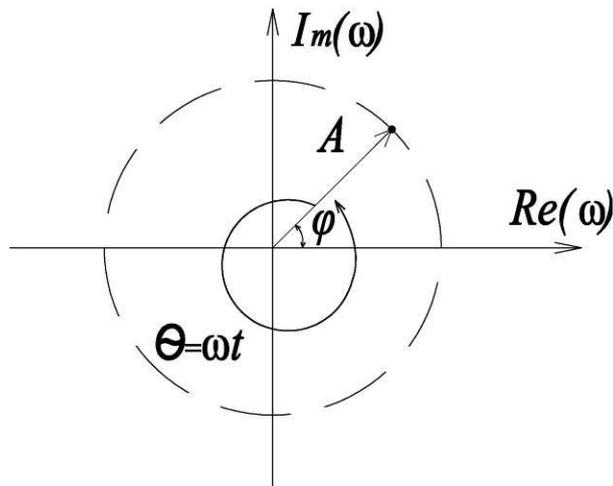


Рис.2.2. Комплексная плоскость частотной характеристики

Точка A на рисунке, имея начальную фазу φ , вращается вокруг начала координат, меняя фазу θ с угловой скоростью ω , так как $\theta = \omega t$. При этом вектор описывает окружность в комплексной плоскости вида $Ae^{j(\omega t + \varphi)} = Ae^{j\omega t} e^{j\varphi}$. Заменяем в уравнении вынужденных колебаний функции синуса на комплексные экспоненциальные функции

$$\left[ap^2 + bp + c \right]_{p=j\omega} A_{\text{вых}} e^{j(\omega t + \varphi)} = A_{\text{вх}} e^{j\omega t}$$

При этом оператор дифференцирования p зависит от частоты и равен $j\omega$. После сокращения левой и правой частей равенства на $\exp(j\omega t)$ приведем его к виду

$$A_{\text{вых}} e^{j\varphi} = \left[\frac{1}{ap^2 + bp + c} \right]_{p=j\omega} A_{\text{вх}} \quad **$$

Здесь дробно-рациональная функция $W(p) = (ap^2 + bp + c)^{-1}$ называется передаточной функцией маятника. Поскольку в знаменателе передаточной функции стоит характеристический полином, она определяет все свойства

колебательного объекта (маятника) по выбранным входной и выходной координатам. Для нас важно, что передаточная функция при замене оператора p на $j\omega$ образует на комплексной плоскости расчетную амплитудно-фазовую частотную характеристику $W(j\omega)$:

$$W(j\omega) = \frac{1}{a(j\omega)^2 + b(j\omega) + c}$$

Как и всякая комплексная функция, амплитудно-фазовая частотная характеристика может быть записана в двух формах: в комплексной (в виде вещественной и мнимой частей) и в показательной. Первая форма имеет вид

$$W(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega),$$

где $\text{Re}(\omega) = \text{Re}W(j\omega)$ – есть вещественная частотная характеристика, $\text{Im}(\omega) = \text{Im}W(j\omega)$ – называется мнимой частотной характеристикой. О показательной форме уже упоминалось выше при описании экспериментального снятия частотных характеристик

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = |W(j\omega)| \arctg \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)},$$

где $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ – амплитудная и фазовая частотные характеристики. Таким

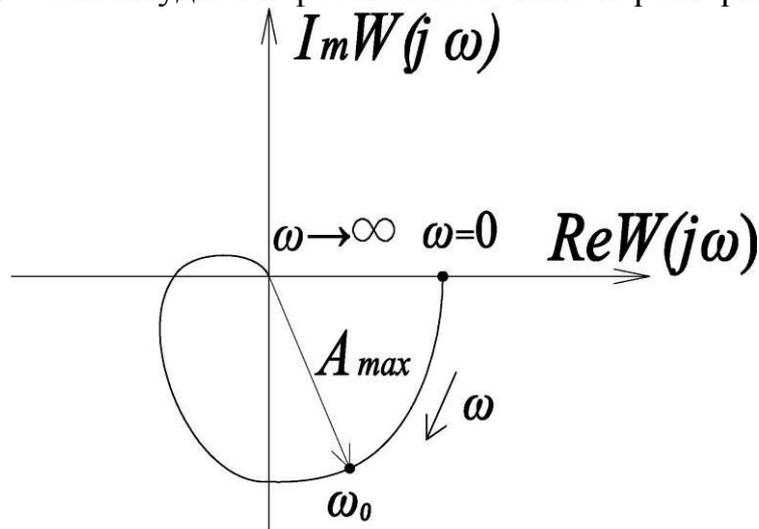


Рис.2.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика маятника

образом, из равенства ** следует, что зависимость фазы выходных колебаний от частоты есть фазовая частотная характеристика объекта, а амплитуда выходных колебаний равна модулю амплитудно-фазовой характеристики, умноженному на амплитуду входных колебаний

Амплитудно-фазовая частотная характеристика маятника показана на Рис.2.3. Характеристика начинается ($\omega=0$) в точке a^{-1} положительной вещественной полуоси и заканчивается ($\omega \rightarrow \infty$) в начале координат, проходя через четвертый и третий квадранты. Характеристика имеет максимальное расстояние до начала координат (максимум модуля) в четвертом квадранте в точке резонансной частоты ω_0

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{2a^2}.$$

При изменении частоты от нуля до бесконечности фазовая характеристика изменяется от нуля до -180 градусов, т.е. вектор ω поворачивается по часовой стрелке на угол $-\pi$ радиан.

Для идеального маятника $b=0$ (затухание колебаний отсутствует) на резонансной частоте $\omega_0 = \sqrt{c/a}$ модуль амплитудной частотной характеристики стремится к бесконечности, а фазовая частотная характеристика на этой частоте претерпевает скачок от нуля до $-\pi$. Для прикидочных расчетов колебательных объектов при малом b полезно оценивать резонансную частоту как $\omega_0 \approx \sqrt{c/a}$ и максимальный модуль $A_{\max} \approx 1/b\omega_0$ с фазой $\varphi(\omega_0) \approx -\pi/2$, т.е. в точке ω_0 , расположенной на мнимой отрицательной полуоси.

В дальнейшем мы не будем вычислять и строить амплитудно-фазовые частотные характеристики, ограничиваясь качественными их иллюстрациями. Точное их построение не составляет труда ни по экспериментальным данным, ни по передаточной функции с помощью компьютера, например, в среде Matlab.

Вернемся к вынужденным колебаниям. Заменяя в уравнении $**$ p на $j\omega$, запишем частотное уравнение:

$$A_{\text{вых}}(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{a(j\omega)^2 + b(j\omega) + c} A_{\text{вх}} = W(j\omega)A_{\text{вх}},$$

или так

$$\frac{A_{\text{вых}}(\omega)}{A_{\text{вх}}} e^{j\varphi(\omega)} = W(j\omega)$$

Таким образом, модуль амплитудно-фазовой частотной характеристики равен отношению амплитуды вынужденных колебаний к амплитуде вынуждающей силы, а фаза вынужденных колебаний равна фазе частотной характеристики (т.к. фаза входного воздействия принята равной нулю). В сущности, в этом состоит физический смысл частотной характеристики. Знание амплитудно-фазовой частотной характеристики позволяет для каждой частоты ω определить амплитуду и фазу вынужденных колебаний при заданной амплитуде входных колебаний, или определить необходимую амплитуду входных колебаний по требуемой амплитуде выходных.

В заключение следует сделать одно важное замечание. Говоря о вынужденных колебаниях в линейной стационарной системе, мы имели в виду, что система устойчива, т.е., устойчиво ее нулевое состояние равновесия. В противном случае вынужденные колебания практически отсутствуют и не наблюдаемы. Мы могли в этом разделе обойтись без такого замечания, потому что рассматривали устойчивый маятник, к тому же все системы, имеющие характеристический полином второй степени с положительными коэффициентами также устойчивы. Но изложенные определения справедливы и для систем более высокого порядка. В этом случае наше замечание существенно. Из многих известных критериев устойчивости линейных стационарных систем в дальнейших пояснениях потребуется амплитудно-фазовый частотный критерий устойчивости

Найквиста. В соответствии с критерием в простейшем случае система устойчива, если комплексная частотная характеристика $W(j\omega)$ не охватывает точку $(-1, j0)$ на отрицательной вещественной полуоси.

Подведем кратко итоги. Частотная характеристика полностью определяет режим вынужденных колебаний в линейной стационарной динамической системе. В такой системе вынужденные колебания возникают при любой амплитуде входных колебаний, не имея порога возбуждения. Частота вынужденных симметричных колебаний совпадает с частотой симметричных входных колебаний.

Параметрические колебания.

Амплитудно-фазовая характеристика периодического параметра. Пусть некоторый переменный параметр, назовем его v , содержит постоянную неизменяемую составляющую v_0 и переменную составляющую $v_1(t)$, так, что $v(t) = v_0 + v_1(t)$. Пока что нас интересует лишь переменная составляющая параметра, поэтому стационарную часть v_0 не будем принимать во внимание, считая, что в целом параметр положителен $v(t) > 0$. Следовательно, положительной является постоянная составляющая $v_0 > |v_1(t)|$. Примем гармонический закон изменения параметра с частотой Ω , т.е.

$$v_1(t) = v_1 \sin \Omega(t - \tau),$$

где сдвиг по времени τ обозначает некоторую фазу $\psi = \Omega\tau$ изменения параметра относительно периодического изменения входной координаты $x_{\text{вх}}(t)$ с частотой ω и амплитудой A :

$$x_{\text{вх}}(t) = A \sin \omega t.$$

Найдем коэффициент передачи параметром первой гармоники.

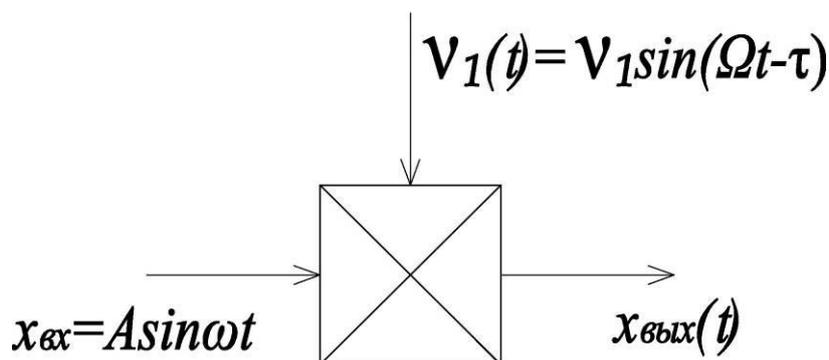


Рис.2.4. Периодически нестационарный параметр

Так как параметр служит коэффициентом пропорциональности к координате – входной координате параметра, то выходная координата является их произведением, как показано на Рис.2.4

$$x_{\text{вых}}(t) = A v_1 \sin(\Omega t - \psi) \sin \omega t$$

Произведение синусов представим суммой

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}}(t) &= Av_1 \sin(\Omega t - \psi) \sin \omega t = Av_1 \sin(\Omega t - \psi) \cos(\omega t - \pi/2) = \\ &= 0,5Av_1 \{ \sin[(\Omega - \omega)t - \psi + \pi/2] + \sin[(\Omega + \omega)t - \psi - \pi/2] \} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что на выходе подобного модулятора (произведения) две гармонические составляющие суммы и разности частот и лишь в единственном случае, когда частота изменения параметра вдвое больше частоты колебаний координаты $\Omega=2\omega$ на выходе модулятора появляются колебания, совпадающие по частоте с колебаниями входной координаты. Именно этот случай нас интересует, когда выходная координата содержит первую гармоническую составляющую входного сигнала с частотой ω (первое слагаемое суммы) и третью гармоническую составляющую с частотой 3ω (второе слагаемое суммы).

Вновь используя символическую запись гармонических сигналов, и, не учитывая, как правило, малую третью гармонику, определим комплексный коэффициент передачи модулятором первой гармоники входной координаты. Запишем

$$X_{\text{вх}}(j\omega) = Ae^{j\omega t}, \quad X_{\text{вых}}(j\omega) = 0,5Av_1 e^{j(\omega t - \psi + \pi/2)} = 0,5Av_1 e^{j\omega t} e^{-j\psi} e^{j\pi/2}.$$

Отношение этих выражений составляет амплитудно-фазовую характеристику гармонически изменяемого параметра или модулятора по первой гармонике. Так как на комплексной плоскости $\exp(j\pi/2)=j$, составив отношение, найдем

$$W(j\psi) = \frac{X_{\text{вых}}(j\omega)}{X_{\text{вх}}(j\omega)} = 0,5jv_1 e^{-j\psi} \quad ***$$

Таким образом, коэффициент передачи изменяемого с удвоенной частотой параметра по модулю равен $v_1/2$, где v_1 – амплитуда первой гармоники изменения параметра. Характерно, что коэффициент передачи не зависит от входной амплитуды A и частоты ω , но зависит от фазы между колебаниями параметра и координаты. Принципиальная особенность изменяемого параметра от постоянного, заключается в том, что изменяемый во времени параметр сдвигает на выходе фазу входных колебаний на произвольный угол ψ , зависящий от временного сдвига колебаний параметра и входной координаты. Для произвольного сдвига фазы ψ амплитудно-фазовая характеристика $W(j\psi)$ в комплексной плоскости представляет собой окружность радиуса $v_1/2$ с центром в начале координат.

Параметрический резонанс. Иллюстрацию возбуждения параметрического резонанса рассмотрим на простейшем примере электрического колебательного RLC контура (Рис.1.11).

В автономном режиме, когда отсутствуют внешние источники питания и колебаний, электрический ток i , протекающий по всем трем элементам цепи одинаков, а сумма напряжений на всех трех равна нулю. Напряжение на индуктивности L пропорционально скорости изменения тока, напряжение на конденсаторе C накапливается (суммируется) с течением времени протекания тока, т.е. пропорционально интегральному току, и напряжение на

сопротивлении R пропорционально току. Равенство нулю этих напряжений записывается в виде

$$L \frac{di}{dt} + C^{-1} \int i dt + Ri = 0$$

В операторной форме интегралу соответствует деление на оператор p и тогда

$$Lpi + \frac{i}{Cp} + Ri = 0,$$

или

$$Lp^2i + Rpi + C^{-1}i = 0$$

Это уравнение по типу совпадает с уравнением маятника * и записывается в таком же общем виде

$$(ap^2 + bp + c)x(t) = 0, \quad \text{****}$$

где $x(t)$ равно $\alpha(t)$ для маятника и $i(t)$ для контура RLC. Из описанных моделей двух примеров важно отметить, первичные параметры ℓ , m , R , L , C могут входить в обобщенные параметры a, b, c в различных комбинациях. Поэтому переменными по времени может быть как один из обобщенных параметров, так и несколько.

Примем для важного начала гармонически изменяющимся параметр c

$$c(t) = c_0 + c_1 \sin \Omega t,$$

где, как уже упоминалось, постоянная неизменяемая часть c_0 параметра больше амплитуды переменной составляющей c_1 , т.е. $c_0 > c_1$. В соответствии с выражением *** комплексный коэффициент передачи параметра $c(t)$ примет вид

$$W(j\psi) = c_0 + 0.5jc_1e^{-j\psi}$$

Подставив этот коэффициент вместо параметра в уравнение **** и, убрав временную координату $x(t)$, переведем уравнение в комплексную частотную плоскость путем замены $p=j\omega$

$$a(j\omega)^2 + bj\omega + c_0 = -0.5jc_1e^{-j\psi}$$

Обратив левую и правую части уравнения, получим окончательно

$$W(j\omega) = \frac{1}{a(j\omega)^2 + bj\omega + c_0} = -\frac{2}{jc_1} e^{j\psi}$$

Это есть условие возбуждения параметрического резонанса на частоте колебаний параметра, равной $\Omega=2\omega$. Нетрудно найти аналитическое условие возбуждения параметрического резонанса, приравняв модули левой и правой части

$$[(c_0 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2]^{1/2} = 2/c_1$$

Важна, однако, графическая иллюстрация условия возбуждения в комплексной плоскости амплитудно-фазовой частотной характеристики объекта, а именно, возбуждение параметрического резонанса происходит в случае, когда амплитудно-фазовая частотная характеристика $W(j\omega)$ покидает центральный круг с радиусом $2/c_1$ на частотах $\omega=\Omega/2$. Иллюстрация этого

условия приведена на Рис.2.5, для частотной характеристики $W(j\omega)$ колебательных маятника и электрического контура. На рисунке используется сокращенное обозначение вещественной $R=\text{Re}W(j\omega)$ и мнимой $I=\text{Im}W(j\omega)$ осей. Как правило, частотная характеристика выходит из окружности параметрического резонанса на резонансных частотах максимального модуля характеристики, по которым следует определять критический радиус окружности и допустимую амплитуду колебаний параметра. Если выполняется условие возбуждения параметрического резонанса, то линейная динамическая система становится неустойчивой и ее колебания неограниченно растут. Полученное условие возбуждения параметрического резонанса определяет область частот (ω_1, ω_2) , в которой запас устойчивости по модулю равен нулю или отрицателен.

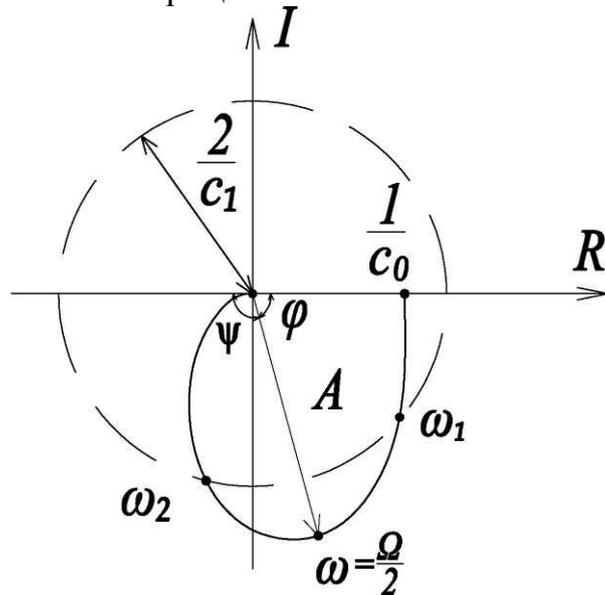


Рис.2.5. Условия возбуждения параметрического резонанса

А как же обстоит вопрос с запасом устойчивости по фазе? Куда он исчезает? Этот вопрос имеет простое объяснение. Поскольку в динамической периодически нестационарной системе отсутствует синхронизация колебаний параметра и его входной координаты, то фаза между ними ψ может установиться любая от нуля до 360 градусов. При этом, как следует из амплитудной частотной характеристики переменного параметра, эта же фаза ψ устанавливается между входными и выходными колебаниями параметра. Интересно, что в динамической периодически нестационарной системе происходит автосинхронизация, при которой устанавливается фаза ψ , равная или превышающая запас устойчивости объекта по фазе.

Особым является случай, когда частотная характеристика начинается вне круга. Этот особый случай отличается тем, что амплитуда изменения параметра на низких частотах больше постоянной составляющей параметра и вместо параметрического резонанса в системе происходит потеря устойчивости свободных колебаний на отрезках, когда $c(t) < 0$.

Виды параметрических колебаний. До сих пор мы рассматривали периодически нестационарные системы с одночастотным гармонически меняющимся с частотой Ω параметром. При этом же получили условие возбуждения параметрического резонанса на частоте $\omega = \Omega/2$. Незатухающие параметрические колебания координат с удвоенной частотой изменения параметра называются главным, или первым параметрическим резонансом, приведенном ранее на Рис.1.4. Кстати, иногда этот вид резонанса называют резонансом на первой субгармонике. Как правило, колебания первого параметрического резонанса имеют порог возбуждения, который определяется радиусом обратной окружности первого параметрического резонанса. Так как $W^{-1}(j\psi) = \frac{2}{jc_1} e^{j\psi}$, порог возбуждения вытекает из равенства $|W(j\omega)| = 2/c_1$.

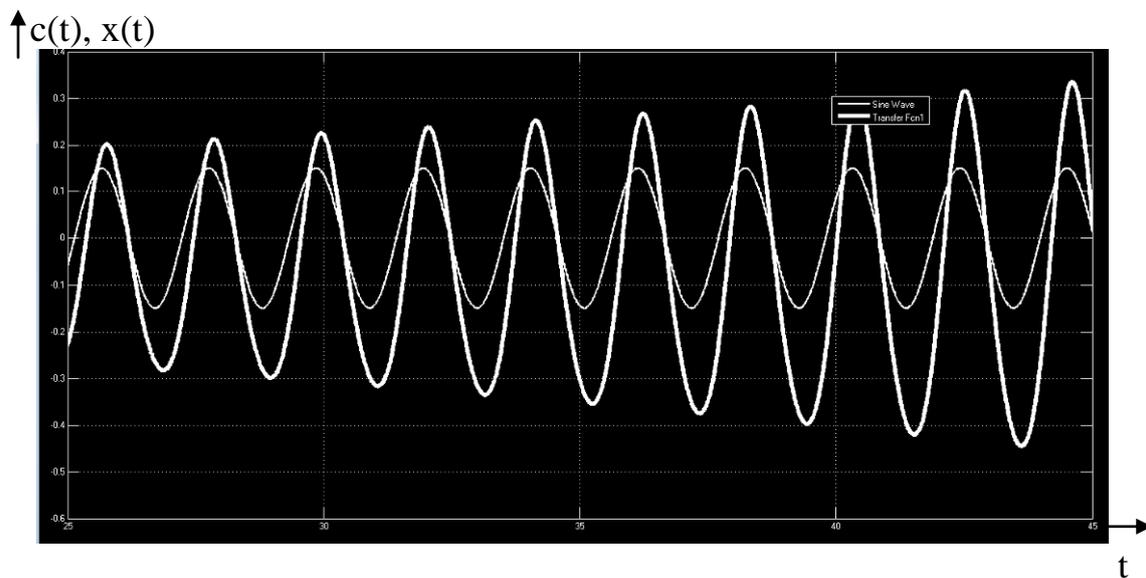


Рис.2.6. Колебания второго параметрического резонанса

Можно наблюдать незатухающие колебания координаты, частота которых совпадает с частотой изменения параметра $\omega = \Omega$. Это колебания второго параметрического резонанса. Их частота совпадает с частотой вынужденных колебаний. Колебания второго параметрического резонанса имеют порог возбуждения, чаще всего превышающий порог возбуждения первого резонанса, и являются несимметричными, так как содержат постоянную составляющую (рис.2.6). Чаще всего, радиус обратной окружности второго параметрического резонанса больше радиуса обратной окружности первого резонанса. Какой из этих двух параметрических резонансов возбуждается в системе, имеющей одну собственную частоту ω_0 , зависит от близости частоты колебаний параметра к одному из приближений: $\Omega \approx 2\omega_0$ или $\Omega \approx \omega_0$.

В случае многочастотного характера изменения параметра, содержащего несколько гармоник в зависимости от резонансной частоты объекта возможно возбуждение первого или второго параметрического резонанса на частоте одной из гармоник. Это резонансы высших порядков и

(третий, четвертый и т.д.) на частоте $\omega=n\Omega/2$, где n - номер высшей гармоники. По сути это есть первый или второй параметрические резонансы на частоте n -ой гармоники. В сложных системах, имеющих несколько собственных частот, в частности, в системах с распределенными параметрами возможно возбуждение параметрических колебаний на нескольких частотах, так называемых комбинационных параметрических колебаний. Дальнейшее изложение не выходит за рамки первого параметрического резонанса.

Примеры

Рассмотрим сначала две противоположно-двойственные задачи параметрического резонанса: задачу параметрической потери устойчивости равновесия идеального маятника и задачу параметрической стабилизации неустойчивого равновесия маятника.

Пример 1. Поставим задачу раскачать обыкновенный маятник Рис.2.1 с помощью колебаний точки подвеса. При колебаниях точки подвеса с амплитудой a и частотой Ω в вертикальной плоскости маятнику добавляется либо вычитается периодически изменяющееся ускорение и соответствующая ему сила $ma\Omega^2 \sin\Omega t$, действующая по линии силы тяжести mg . В идеальном случае при отсутствии сопротивления среды операторное уравнение колебаний маятника с моментом инерции $J = ml^2$ примет вид

$$ml^2 p^2 \alpha(t) + (mg - ma\Omega^2 \sin\Omega t)l\alpha(t) = 0,$$

или

$$p^2 \alpha(t) + \frac{g - a\Omega^2 \sin\Omega t}{l} \alpha(t) = 0$$

Исключим в уравнении время t , заменив гармонически изменяющийся параметр его комплексным амплитудно-фазовым уравнением окружности, и перейдем в частотную плоскость, заменив $p=j\Omega/2$ для первого параметрического резонанса

$$\left(j\frac{\Omega}{2}\right)^2 + \frac{g}{l} = j\frac{a\Omega^2}{2l} e^{-j\psi}$$

Полученное равенство уже пригодно для анализа в плоскости обратной частотной характеристики, но перейдем в плоскость обычной частотной характеристики объекта, обратив левую и правую части равенства

$$\frac{1}{(j\Omega/2)^2 + g/l} = \frac{2l}{ja\Omega^2} e^{j\psi}$$

Здесь левая часть равенства - амплитудно-фазовая частотная характеристика идеального маятника. Эта вещественная характеристика начинается ($\Omega=0$) на положительной вещественной полуоси в точке $(g/l)^{-1}$ и с

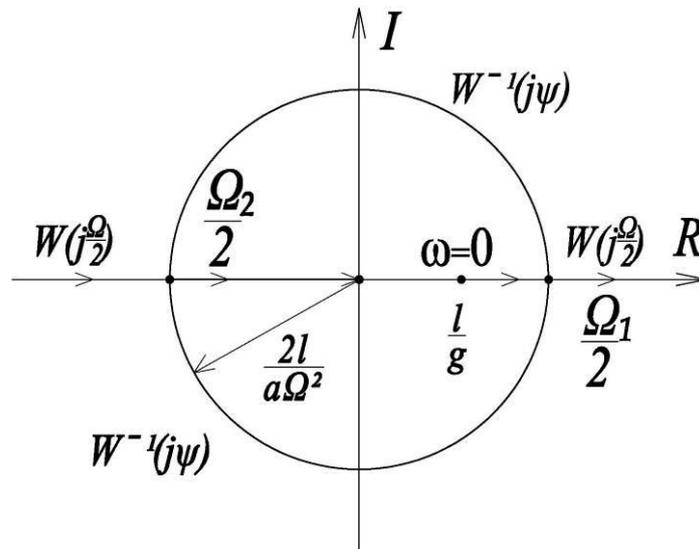


Рис. 2.7. Условие возбуждения параметрических колебаний идеального маятника

увеличением Ω уходит по вещественной оси в $+\infty$ на резонансной частоте $\Omega/2 = \omega_0 = \sqrt{g/l}$. На этой частоте характеристика имеет разрыв с $+\infty$ до $-\infty$ и далее возвращается по отрицательной вещественной полуоси в начало координат. Отсюда следует (Рис.2.7), что существуют две точки пересечения $(\Omega_1/2, \Omega_2/2)$ частотной характеристики с окружностью обратной амплитудно-фазовой характеристики параметра.

В этом простом примере, в отличие от сложных объектов, аналитическое решение проще графического. Приравнявая модули левой и правой частей прямого или обратного равенств, получим условие возбуждения первого параметрического резонанса или потери устойчивости равновесия маятника

$$a \geq |(2g/\Omega^2) - l/2|.$$

Отсюда следует условие

$$a \geq \frac{l}{2} \left| 1 - 4 \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \right|$$

и граничные верхняя и нижняя частоты возбуждения резонанса

$$\frac{\Omega_{1,2}}{2} = \omega_0 (1 \pm 2a/l)^{-0.5}, a < l/2$$

Пример 2. Рассмотрим теперь обратную задачу стабилизации неустойчивого положения обращенного идеального маятника П.Л.Капицы с помощью вибраций оси вращения.

Уравнения обращенного маятника с вибрацией оси вращения отличаются от обыкновенного устойчивого маятника лишь знаком ускорения g . Поэтому запишем частотное условие возбуждения параметрического резонанса

$$\frac{1}{(j\Omega/2)^2 - g/l} = \frac{2l}{ja\Omega^2} e^{j\psi},$$

и вытекающее отсюда условие возбуждения первого параметрического резонанса

$$a\Omega < \frac{l\Omega}{2} + \frac{2g}{\Omega}$$

Это одно из условий стабилизации обращенного маятника.

Второе условие вытекает из того же операторного уравнения обращенного маятника

$$p^2 - \frac{g - a\Omega^2 \sin \Omega t}{l} = 0$$

для случая второго параметрического резонанса при $p=j\Omega=j\omega$

$$(j\Omega)^2 - g/l = W_2(j\psi)$$

Здесь для колебаний второго параметрического резонанса обозначена $W_2(j\psi)$ - амплитудно-фазовая характеристика того же переменного параметра $(a\Omega^2/l)\sin \Omega t$, имеющая так же вид окружности. Приближенная оценка радиуса окружности составляет

$$|W_2(j\psi)| \approx 2(a\Omega^2/l)^2$$

Подставив эту оценку в частотное уравнение, из равенства модулей левой и правой частей получим для частоты колебаний выше резонансной упрощенное второе условие устойчивости - отсутствия возбуждения второго параметрического резонанса

$$a\Omega > \sqrt{2gl}$$

Объединяя первое и второе условия, получим известные условия устойчивости неустойчивого равновесия обращенного маятника

$$\sqrt{2gl} < a\Omega < \frac{l\Omega}{2} + \frac{2g}{\Omega}$$

Приведенные два примера иллюстрируют поразительные свойства параметрического резонанса: способность придавать колебательному объекту прямо противоположные качества.

Строгий читатель вправе возразить: к чему эти банально известные результаты? В ответ можно привести два несвязанных между собой довода. Во-первых, оба примера иллюстрируют очевидную легкость получения результатов. А во-вторых, почему бы, к примеру, не построить на новом параметрическом и забытом старом маятниковом принципах новые электромеханические настенные часы вместо разнообразных электронных кварцевых? Маятник обеспечивает равномерность хода часов, а параметрический резонанс – возбуждение колебаний. Такие часы способны украсить любой дом, но главное – они имеют немалый в наше время виртуальный терапевтический эффект: размеренные колебания массивного маятника внушают их обладателям размеренный и спокойный образ жизни.

В нижеследующих примерах в общем виде, без привязки к физическому принципу действия объекта, для колебательного звена второго порядка проводится качественный анализ возможности возбуждения параметрического резонанса. В этом вопросе важны навыки практической оценки расположения амплитудно-фазовой частотной характеристики.

Исходным во всех случаях является уравнение свободных колебаний****. Случай, когда переменным параметром является коэффициент c , т.е. $v(t) = c(t) = c_0 + c_1(t)$ разобран в разделе «Параметрические колебания».

Пример 3. В этом примере будем считать периодически переменным параметром коэффициент при p^2 , т.е. примем:

$$v(t) = a(t) = a_0 + a_1(t) = a_0 + a_1 \sin \Omega t$$

Заменив, как и ранее, нестационарную часть в соответствии с выражением *** амплитудно-фазовой характеристикой $W(\psi) = 0.5 ja_1 e^{-j\psi}$, перенесем ее в правую часть уравнения **** и получим

$$a_0 p^2 + bp + c = -0.5 p^2 ja_1 e^{-j\psi}$$

Обратив обе части равенства и подставив $p=j\omega=j\Omega/2$, получим условие возбуждения первого параметрического резонанса

$$\frac{(j\omega)^2}{a_0(j\omega)^2 + b(j\omega) + c} = \frac{2}{ja_1} e^{-j\psi}$$

Здесь справа обратная окружность параметрического резонанса $1/W(j\psi)$, слева амплитудно-фазовая частотная характеристика $W(j\omega)$. Для оценки расположения частотной характеристики на комплексной плоскости обратимся к Рис.2.5. Там приведена частотная характеристика, отличающаяся от полученной только числителем. Умножение частотной характеристики на $j\omega$ соответствует ее повороту на угол $+\pi/2$ против часовой стрелки и смещению ее начала $\omega=0$ в начало координат. Поскольку частотная характеристика в сравнении с Рис.2.5 умножается дважды на $j\omega$, то угол ее поворота составит $+\pi$. Таким образом, полученная частотная характеристика, выходя из начала координат, проходит второй и первый квадранты и заканчивается ($\omega \rightarrow \infty$) в точке $1/a_0$ положительной вещественной оси (см. Рис.2.8).

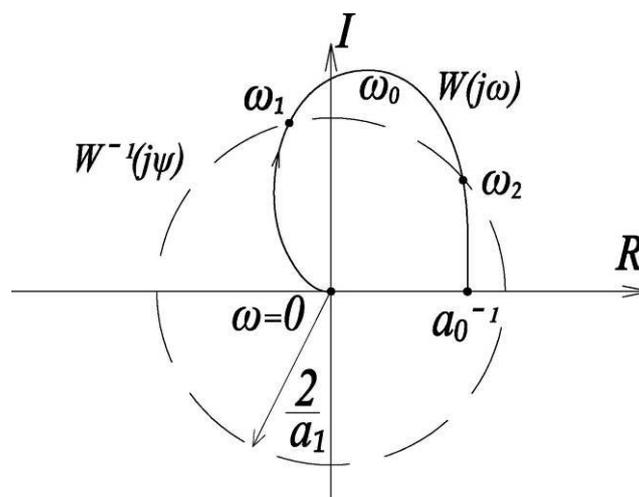


Рис.2.8. Пример условий возбуждения параметрического резонанса

Это значит, что существуют две точки пересечения частотной характеристики с обратной окружностью параметрического резонанса при

достаточно большом $a_1 < a_0$ и максимуме частотной характеристики $\max W(j\omega) > 1/a_0$ для колебательного объекта. Эти две точки пересечения ω_1, ω_2 определяют диапазон частот $\Omega_1 = 2\omega_1, \Omega_2 = 2\omega_2$, на которых возбуждается первый параметрический резонанс.

Может показаться, что для колебательного объекта с любым достаточно большим периодическим параметром возможен параметрический резонанс. Это не так. Следующий пример служит этой иллюстрации

Пример 4. Примем в качестве периодического параметра коэффициент b при скорости изменения координаты в уравнении колебательного объекта ****. Это приводит вместо предыдущего условия возбуждения резонанса, к новому

$$\frac{j\omega}{a(j\omega)^2 + b_0(j\omega) + c} = -\frac{2}{jb_1} e^{-j\psi}$$

В этом случае частотная характеристика уравнения *** поворачивается против часовой стрелки на угол $\pi/2$. Начинаясь в начале координат, она проходит первый и четвертый квадранты и заканчивается вновь в начале

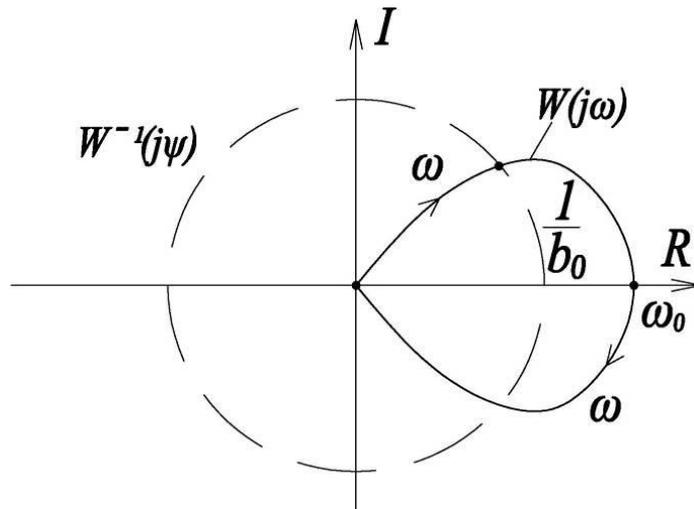


Рис.2.9. Частотная характеристика примера 4.

координат, как показано на Рис.2.9. Причем максимум модуля частотной характеристики достигается в точке положительной вещественной полуоси на собственной частоте $\omega_0 = \sqrt{c/a}$ и равен $1/b_0$. С чисто математической точки зрения параметрический резонанс наступает при $b_1 \geq 2b_0$, причем переменный параметр $b(t)$ периодически принимает отрицательные значения. В реальных объектах весьма редко, в отличие от координат, встречаются отрицательные физические параметры, типа длина, масса, индуктивность, емкость, сопротивление и т.д. Таким образом, если принять физическое ограничение $b(t) > 0$, то следует вывод: возбуждение параметрического резонанса при колебаниях параметра $b(t)$ невозможно.

В механике и электротехнике объясняют отсутствие возбуждения параметрического резонанса при колебаниях сопротивления среды и подшипников маятника, также как при колебаниях сопротивления в RLC контурах, с энергетической точки зрения. А именно, сопротивление среды и электрическое сопротивление не являются носителями энергии и не способны ее накапливать. Видимо, это правильно, хотя имеются и контр-примеры для более сложных объектов. Но ведь мы, анализируя в этом примере уравнение системы, никак не связывали его с энергетической стороной колебаний. Тогда в чем же дело? Кто виноват? Куда и почему исчезает параметрический резонанс? Объяснение здесь простое: увеличивая амплитуду b_1 и тем самым уменьшая радиус обратной амплитудно-фазовой характеристики $W^{-1}(j\psi)$, мы одновременно из условия $b(t) > 0$ должны увеличивать постоянную составляющую b_0 , что ведет к такому же уменьшению максимума модуля частотной характеристики, откуда следует, что их пересечение невозможно. Иными словами, два условия $b(t) = b_0 + b_1 \sin \Omega t > 0$ и $b_1 \geq 2b_0$ несовместимы.

Добавим к примерам заключительное замечание. Во многих случаях периодически изменяющийся параметр одновременно входит в несколько коэффициентов уравнения колебательного объекта. Это так называемые синхронные многопараметрические системы. Их анализ аналогичен анализу рассмотренных примеров, в которых видоизменяются частотные характеристики. Так, к примеру, если некоторый периодически изменяющийся параметр $\beta(t) = \beta_0 + \beta_1 \sin \Omega t$ одновременно линейно входит в коэффициенты при координате и ее первой производной, то операторное уравнение свободных колебаний имеет вид

$$ap^2 + b\beta(t)p + c\beta(t) = 0.$$

Тогда частотное условие возбуждения параметрического резонанса выглядит так:

$$\frac{b(j\omega) + c}{a(j\omega)^2 + b\beta_0(j\omega) + c\beta_0} = -\frac{2}{j\beta_1} e^{j\psi}$$

Здесь для первого параметрического резонанса $\omega = \Omega/2$.

Ниже приводится заключительный пример параметрических колебаний качелей.

Обыкновенные качели

В качестве наглядного и общеизвестного примера использования параметрических колебаний примем обыкновенные качели. Их математическое описание мало отличается от описания обыкновенного маятника. Как и маятник с колеблющейся точкой подвеса, качели с колеблющейся эффективной длиной подвеса являются колебательной периодически нестационарной системой или параметрической системой. Поэтому первое грубое приближение описания идеальных качелей получим

из уравнения идеального маятника примера 1, убрав колебания подвеса при $a = 0$ и, заменив постоянную длину переменной $\ell = \ell(t)$:

$$m\ell^2(t)p^2\alpha(t) + mgl(t)\alpha(t) = 0$$

Примем сначала гармонический закон изменения длины $\ell(t) = \ell_0 + \ell_1 \sin \Omega t$ и перейдем к условию возбуждения колебаний первого параметрического резонанса на частоте $\omega = \Omega/2$

$$\ell_0 p^2 + g = -p^2 \frac{\ell_1}{2j} e^{-j\psi}$$

Отсюда следует при $p = j\omega$ частотное условие возбуждения резонанса

$$|g - \ell_0 \omega^2| = \omega^2 \ell_1 / 2,$$

или с учетом собственной частоты $\omega_0^2 = g/\ell_0$ и обозначений $\gamma = \omega/\omega_0$, $\lambda = \ell_1/\ell_0$ получим окончательно

$$\lambda > 2 \frac{|1 - \gamma^2|}{\gamma^2}$$

Таким образом, в случае идеальных качелей возбуждение параметрических колебаний на собственной частоте ($\gamma=1$) происходит без порога ($\ell_1 = 0$).

Рассмотрим теперь близкое к практике скачкообразное изменение эффективной длины маятника на примере более строгого описания его модели.

Принятое выше описание качелей получено в предположении малой амплитуды колебаний длины маятника, когда $\ell_1 \ll \ell_0$, и, связанное с малым изменением эффективной длины маятника малое изменение момента инерции. В противном случае необходимо учитывать, что изменение момента инерции маятника $J(t) = m\ell^2(t)$ приводит к пропорциональному изменению угловой скорости $\dot{\alpha} = \omega$. Эту зависимость наглядно демонстрируют мастера фигурного катания, украшая финиш выступления вращением на льду. Первоначально, в момент толчка, расставив руки, ноги и прогнувшись, т.е. при большом моменте инерции, демонстрируют медленное вращение. Затем резко сдвигают ноги вместе и руки вверх, уменьшая скачком момент инерции и, тем самым, эффектно увеличивают скорость вращения. Заканчивается вращение вновь с расставленными руками и ногами.

Таким образом, более строгое описание качелей имеет вид

$$J(t)p^2\alpha(t) + \left[\frac{dJ(t)}{dt} \right] p\alpha(t) + mgl(t)\alpha(t) = 0$$

Здесь множитель в квадратных скобках является скоростью изменения момента инерции, которая вызывает соответствующее изменение угловой скорости $p\alpha(t)$. Подставив $J(t) = m\ell^2(t)$ и, разделив уравнение на постоянный параметр m и координату $\alpha(t)$, получим операторное уравнение

$$l^2(t)p^2 + \left[\frac{dl^2(t)}{dt} \right] p + gl(t) = 0$$

Примем скачкообразный закон изменения эффективной длины качелей, показанный на Рис.2.10 (иногда такой способ возбуждения колебаний называют ударным

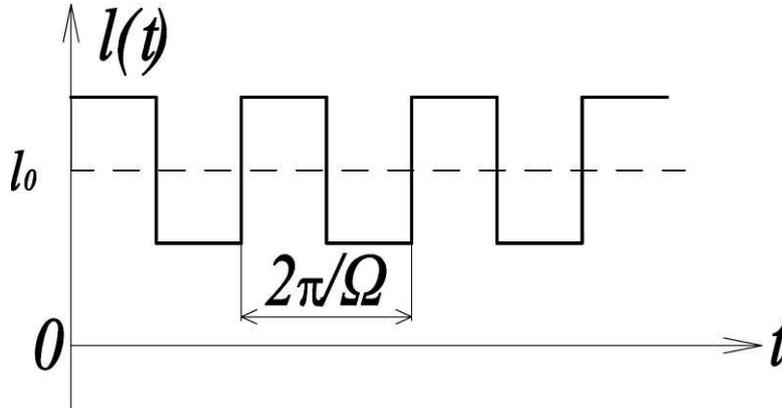


Рис.2.10

возбуждением). Тогда, как следует из Рис.2.10

$$l(t) = l_0(1 + \lambda \operatorname{sgn} \sin \Omega t)$$

$$l^2(t) = l_0^2(1 + \lambda^2 + 2\lambda \operatorname{sgn} \sin \Omega t)$$

Выделим в этих законах изменения параметров главную первую гармонику. Так как амплитуда первой гармоники превышает амплитуду λ скачкообразных колебаний в $4/\pi$ раз, запишем

$$l(t) = l_0 \left[1 + (4\lambda/\pi) \sin \Omega t \right]$$

$$l^2(t) = l_0^2 \left[1 + (4\lambda/\pi)^2 + (8\lambda/\pi) \sin \Omega t \right]$$

и тогда

$$\frac{d[l^2(t)]}{dt} = l_0^2 \frac{8\lambda\Omega}{\pi} \cos \Omega t$$

Заменив в операторном уравнении эти переменные параметры, переведем его в частотную плоскость заменой $p=j\omega$, $\Omega=2\omega$. Заменим также функции времени их амплитудно-фазовыми эквивалентами $\sin \Omega t \rightarrow -e^{-j\varphi}/2j$ и $\cos \Omega t \rightarrow e^{-j\varphi}/2$ и получим частотное равенство

$$(j\omega)^2 \left(1 + \lambda^2 - \frac{4\lambda}{j\pi} e^{-j\psi} \right) + j\omega \frac{8\lambda\omega}{\pi} e^{-j\psi} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{2\lambda}{j\pi} e^{-j\psi} \right) = 0$$

Переместим слагаемые с экспоненциальным множителем в правую часть равенства, и приравняем модули левой и правой частей.

Получим условие возбуждения первого параметрического резонанса

$$\left| 1 - \nu^2(1 + \lambda^2) \right| = \frac{2\lambda}{\pi} (1 + 2\gamma^2)$$

Здесь приняты прежние обозначения: $\lambda = \ell_1/\ell_0$, $\gamma = \omega/\omega_0$, $\omega_0^2 = g/\ell_0$.

В заключение отметим, что полученное условие возбуждения является условием возбуждения первого параметрического резонанса идеальных качелей, т.е. качелей, свободные колебания которых не затухают и не увеличиваются. В реальных качелях, конечно, присутствуют сопротивления

среды (воздуха) и трения в подвесе. Эти силы сопротивления учитывают введением слагаемого δ/m в квадратную скобку операторного уравнения. Повторив вновь проведенные выше преобразования операторного уравнения условие возбуждения параметрического резонанса для реальных качелей примет вид

$$|1 - \gamma^2(1 + \lambda^2) + j\gamma\xi| = \frac{2\lambda}{\pi}(1 + 2\gamma^2), \quad \xi = \delta/m\ell_0^2\omega_0$$

Из этого условия для колебаний, близких к собственным, когда $\gamma \cong 1$, получим

$$\lambda^4 - \frac{36}{\pi^2}\lambda^2 + \xi^2 = 0,$$

откуда при $\lambda < 1$ и $\lambda^2 > \lambda^4$ запишем простое приближенное условие возбуждения

$$\lambda \geq \frac{\pi}{6}\xi \approx 0,5\xi$$

Это пороговое условие используется для объяснений параметрического резонанса качелей в части 1.

Неуловимые мстители

До сих пор мы с Вами рассматривали вынужденные колебания в линейных стационарных системах и параметрические колебания в линейных периодически нестационарных системах. Отмечали, что возбуждение в последних параметрического резонанса приводит к потере устойчивости равновесия устойчивого колебательного объекта, а может придавать устойчивость неустойчивому объекту. Следует заметить, что линейные динамические объекты и системы это, как правило, результат идеализации. В технической практике динамические объекты в подавляющем большинстве, начиная с маятника, качелей, конденсаторов и индуктивностей, не говоря уже о сложных процессах гидроаэродинамики, являются нелинейными. В нелинейных стационарных динамических системах параметры зависят от координат и расчет таких даже несложных систем необычайно трудоемок, а в общем случае доступен лишь численным методам. Вместе с тем в главном вопросе устойчивости колебаний нелинейных систем решающая роль принадлежит параметрическим колебаниям и параметрическому резонансу. Недостаточное внимание к этому вопросу сурово наказывается неуловимыми мстителями – параметрическими резонансами разных видов. Неуловимыми, потому, что они сливаются с устойчивыми колебаниями объекта и не наблюдаемы. Об этом пойдет речь ниже.

Вынужденные колебания нелинейных систем. Примем описание простейшей нелинейной динамической системы, в которой нелинейной функцией является свободный член

$$ap^2x(t) + bpx(t) + cx(t) + F[x(t)] = x_{\text{вх}}(t)$$

Для гармонического возмущения $x_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}} \sin \omega t$ будем по-прежнему искать решение в виде $x(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$. В этом случае нелинейная функция $F[A \sin(\omega t - \varphi)]$ окажется периодической и может быть представлена в виде ряда Фурье. Заменяв нелинейную функцию периодического аргумента первой гармоникой амплитуды A_1 , запишем

$$F[x(t)] = F[A \sin(\omega t - \varphi)] \approx A_1 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{A_1}{A} A \sin(\omega t - \varphi) = W_r(A)x(t)$$

Здесь обозначен $W_r(A) = A_1 / A$ - коэффициент гармонической линеаризации или коэффициент передачи нелинейного элемента по первой гармонике. Этот коэффициент можно вычислять, можно определять графически, либо пользоваться таблицами вычисленных коэффициентов для многих типов нелинейных функций. В общем случае коэффициент гармонической линеаризации является комплексным, вещественная и мнимая части которого могут зависеть не только от амплитуды $x(t)$, но также от частоты, постоянной составляющей и производных координаты. В простейшем случае для симметричной однозначной функции $F(x)$ коэффициент гармонической линеаризации есть вещественная функция амплитуды A .

Используя коэффициент гармонической линеаризации, показательную форму записи гармонических координат и $p = j\omega$, перейдем от уравнения к частотной его записи

$$W^{-1}(j\omega) - [-W_r(A)] = \frac{A_{\text{вх}}}{A} e^{j\varphi} \quad \#$$

при обозначении обратной амплитудно-фазовой частотной характеристики в линейной левой части уравнения $W^{-1}(j\omega) = a(j\omega)^2 + b(j\omega) + c$. В плоскости обратной амплитудно-фазовой частотной характеристики $W^{-1}(j\omega) = R_0(\omega) + jI_0(\omega)$ частотное уравнение вынужденных колебаний нелинейной системы имеет простую графическую интерпретацию, приведенную на Рис.2.11. По отрицательной вещественной полуоси

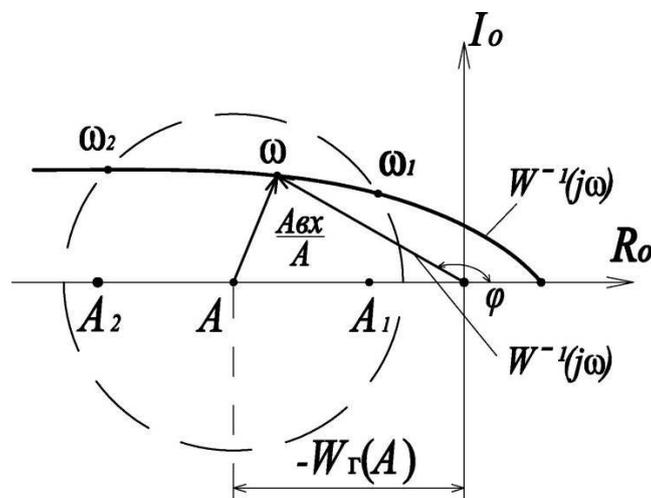


Рис.2.11. Частотные условия вынужденных колебаний

откладываются значения коэффициента гармонической линеаризации для всех положительных значений A . Тогда модуль разности векторов $-W_r(A)$ и $W(j\omega)$ равен отношению $A_{\text{вх}}/A$. Из равенства модулей левой и правой части получим

$$A_{\text{вх}} = A\sqrt{[R_0(\omega) + W_r(A)]^2 + I_0^2(\omega)}$$

Равенство нулю производной этого выражения $dA_{\text{вх}}/dA=0$ приводит к уравнению окружности

$$[R_0(\omega) + v_0(A)]^2 + I_0^2(\omega) = v_1^2(A),$$

радиус которой

$$|v_1(A)| = \frac{A}{2} \left| \frac{dW_r(A)}{dA} \right|,$$

и смещение центра по вещественной оси

$$v_0(A) = W_r(A) + \frac{A}{2} \frac{dW_r(A)}{dA}$$

Так как равенство нулю производной $dA_{\text{вх}}/dA$ имеет место в точках амплитудной кривой $A(A_{\text{вх}})$, имеющих вертикальную касательную, в этих точках происходят скачки вынужденных колебаний, как показано на Рис.2.12. По этой причине первоначально скачки вынужденных колебаний называли скачкообразным резонансом. В действительности полученная окружность является окружностью первого параметрического резонанса, о чем мы узнаем чуть позже. Эта окружность проходит через точку $-W_r(A)$ с центром слева, если $dW_r(A)/dA > 0$, и справа, если $dW_r(A)/dA < 0$. Кстати, отсюда следует утверждение (см. Раздел 1, Автоколебания или параметрические колебания?), что при $A_{\text{вх}} = 0$ условие возбуждения автоколебаний # совпадает с границей возбуждения параметрического резонанса.

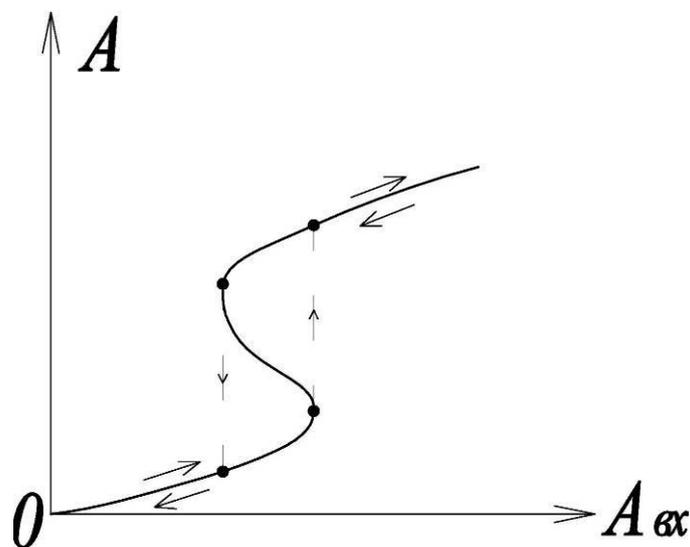


Рис.2.12. Иллюстрация скачкообразного резонанса

Таким образом, если частота ω вынужденных колебаний на обратной амплитудно-фазовой частотной характеристике попадает внутрь окружности параметрического резонанса, вынужденные колебания теряют устойчивость

В основании теории устойчивости, заложенном А.М.Ляпуновым, есть общее положение, по которому движение $x(t)$ динамической системы

$$Q(p)x(t) + G(p)F[x(t)] = S(p)y(t),$$

где Q, G, S – полиномы оператора p , F – нелинейная функция координаты, $y(t)$ – внешнее воздействие (возмущение), устойчиво, если устойчиво нулевое состояние равновесия линейной системы, описываемой уравнением в малых приращениях

$$Q(p)\Delta x(t) + G(p)\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=x(t)}\Delta x(t) = 0.$$

Здесь производная по координате есть зависящий от координаты коэффициент передачи приращения $\Delta x(t)$. При замене координаты x на функцию времени $x(t)$ этот коэффициент становится нестационарным параметром $v(t)$. При периодическом движении $x(t) = A \sin \omega t$ параметр (коэффициент передачи) также является периодическим, период колебаний которого равен половине периода вынужденного движения, т.е. равен π/ω , для нечетно-симметричных нелинейных функций $F(-x) = -F(x)$.

Таким образом, уравнение в приращениях для периодических вынужденных колебаний является описанием линейной периодически нестационарной системы, теряющей устойчивость при возбуждении параметрического резонанса. Поскольку частота изменения параметра $\Omega = 2\omega$, то при выполнении условий возбуждения первого параметрического резонанса частота неограниченно растущих в нелинейной системе параметрических колебаний совпадает с частотой вынужденных колебаний. Вынужденные и параметрические колебания, сливаясь не различимы, и потому выделить и наблюдать параметрические колебания невозможно. Наблюдается лишь скачок фазы и амплитуды вынужденных колебаний, т.е. скачкообразный резонанс. В этом состоит «неуловимость» параметрического резонанса. Ну, а «наказание», связанное с недостаточным вниманием к параметрическому резонансу не заставляет себя ждать. Заключение о том, что скачкообразный резонанс является потерей устойчивости вынужденных колебаний вследствие возбуждения параметрических колебаний, впервые, по-видимому, было получено шестьдесят лет тому назад И.М.Смирновой (см. Смирнова И.М. К приближенному исследованию устойчивости периодических режимов в системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика. №2, 1954.).

Итак, полученные выше центр и радиус $v_0(A)$ и $v_1(A)$ окружности параметрического резонанса зависят от амплитуды A вынужденных колебаний нелинейной системы, а условия возбуждения параметрического резонанса зависят от амплитуды A вынужденных колебаний и от фазы φ параметрического возбуждения:

$$W(A, \psi) = v_0(A) - v_1(A)e^{-j\psi}$$

Более строгое доказательство интересующийся читатель может найти в упоминавшейся книге Чечурина С.Л. «Параметрические колебания и устойчивость периодического движения». Рассмотрим пример.

«Буйный» параметрический резонанс. Речь пойдет об упомянутом в части 1 странном поведении речного буя на сильном течении Невы в районе Ивановских порогов.

Для частично заглубленного (из-за весеннего паводка) герметичного цилиндра на якорном тросе используем уравнение обыкновенного маятника с демпфированием ξ

$$Jp^2\alpha + \xi p\alpha + [M_0 + \Delta M(\alpha)] = 0$$

Здесь M_0 - начальный (при $\alpha=0$) выталкивающий момент, $\Delta M(\alpha)$ - приращение выталкивающего момента, связанное с погружением при отклонении α . Развернув моменты, запишем

$$Jp^2\alpha + \xi p\alpha + [(F_0 - P)\ell + \Delta F(\alpha)\ell]\sin\alpha = 0,$$

где F_0 - начальная выталкивающая сила, при $\alpha = 0$; $\Delta F(\alpha)$ - приращение ее при колебаниях цилиндрического притопленного буя, ℓ - длина троса, P - вес буя. Введем параметры цилиндра: s - площадь основания цилиндра, h_0 - величина начального затопления, d - удельный вес жидкости, $\Delta h(\alpha) = \ell(1 - \cos\alpha)$ - величина погружения при отклонениях, и тогда

$$Jp^2\alpha + \xi p\alpha + \ell[(sh_0d - mg)\sin\alpha + sd\ell(1 - \cos\alpha)\sin\alpha] = 0$$

Введя обозначения

$$b = \xi J^{-1}, \quad c_0 = \ell J^{-1}(sh_0d - mg), \quad c_1 = J^{-1}sd\ell^2,$$

получим

$$p^2\alpha + bp\alpha + c_0\sin\alpha + c_1(\sin\alpha - 0,5\sin 2\alpha) = 0$$

Линеаризуя это нелинейное уравнение до третьей степени α для малых отклонений $|\alpha| > |\alpha^3|$, запишем

$$p^2\alpha + bp\alpha + c_0\alpha + c_1\frac{\alpha^3}{2} = 0$$

Мы получили приближенное уравнение, которое известно как уравнение Дуффинга. Табличный коэффициент гармонической линеаризации нелинейной функции $F(\alpha) = c_1\alpha^3/2$ имеет вид

$$W_r(A) = 3c_1A^2/8$$

Тогда радиус и смещение центра окружностей параметрического резонанса составят

$$|v_1(A)| = \frac{A}{2} \left| \frac{dW_r(A)}{dA} \right| = 3c_1A^2/8, \quad v_0(A) = W_r(A) + \frac{A}{2} \frac{dW_r(A)}{dA} = 3c_1A^2/4$$

На Рис.2.13 в плоскости (R_0, I_0) нанесена обратная амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части

$$W^{-1}(j\omega) = (j\omega)^2 + b(j\omega) + c_0 = -\omega^2 + jb\omega + c_0$$

и окружность параметрического резонанса.

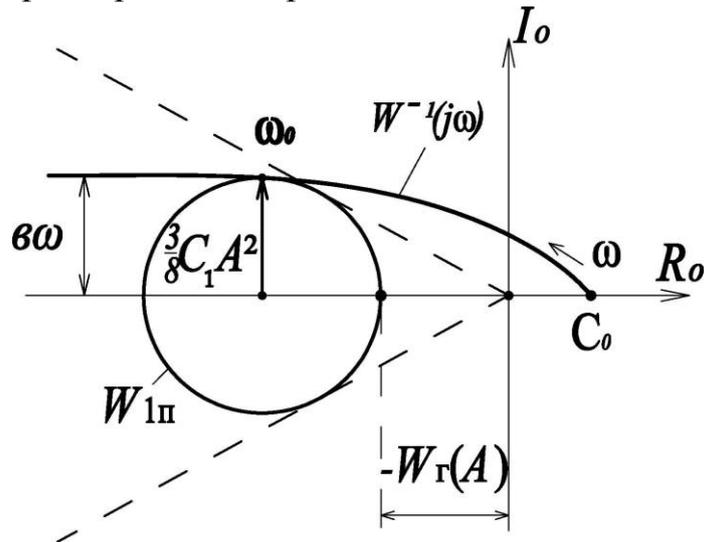


Рис.2.13. Условие возбуждения параметрического резонанса

Непосредственно из рисунка следует, что частота ω_0 и амплитуда A_0 , с которых начинается возбуждение параметрического резонанса, вытекают из равенств $2\text{Re}W^{-1}(j\omega) = \text{Im}W^{-1}(j\omega) = \nu_1(A)$. Из этих равенств получим

$$\omega_0 = b + \sqrt{b^2 + c_0}, \quad A_0^2 = \frac{8}{3} \frac{\omega_0 b}{c_1}$$

Отсюда условия возбуждения, выраженные через параметры бую или условия возбуждения «буйного» параметрического резонанса и потери устойчивости вынужденных колебаний имеют вид

$$A^2 \geq \frac{8}{3} \frac{b\omega_0}{c_1}, \quad \omega > \omega_0 \cong b + \sqrt{b^2 + c_0}$$

С формально-математической точки зрения имеет место скачок в бесконечность амплитуды вынужденных колебаний из-за «очень буйного» параметрического резонанса.

Конечно, с физической точки зрения бесконечного скачка не может быть. Дело в том, что принятое нами математическое описание бую заканчивается, как только буй ложится на воду. Погружаясь при параметрических колебаниях, он до полного погружения опрокидывается течением на воду, а, потеряв энергию движения, выталкивается из воды вновь. При отсутствии течения, в спокойной воде «буйный» параметрический резонанс также возможен в любой вертикальной плоскости, проходящей через ось подвеса. Но и здесь бесконечной величины скачки вынужденных колебаний невозможны, так как при полном погружении вертикального бую исчезает «параметрическая сила» и радиус окружности параметрического резонанса становится равным нулю, так как $\Delta h = 0$.

Внимательный читатель вправе спросить: а где же силы, вызывающие вынужденные колебания? Причин вынужденных колебаний может быть несколько. Это могут быть, например порывы ветра, в том числе ветровое

волнообразование, волнообразования при прохождении судов, а на течении это могут быть известные периодические отрывы водяных вихрей при обтекании притопленного буя.

В заключение, приняв примерные параметры буя: $P=50$ кг., $F_0 = 55$ кг., $\ell = 10$ м., $J=500$ кг.мсек², $s=0,3$ м², $b=0,1$ сек⁻¹, $c_0 = 0,05$ сек⁻², $c_1 = 0,06$ сек⁻², получим близкие к правдоподобным частоту $\omega_0 \approx 0,35$ радсек⁻¹ и амплитуду $A_0 \approx 0,5$ рад.

Численное моделирование колебательных процессов

Как отмечалось, аналитическое исследование нелинейных динамических систем сопряжено в большинстве случаев с серьезными трудностями. Вот почему в инженерной практике широко применяется численное моделирование динамических процессов. С этой целью используется программное обеспечение Matlab и Simulink, которое позволяет по математическому описанию задачи составить структурную схему модели и провести исследование задачи численным методом.

Автоколебания или параметрические колебания? На Рис.2.14 набрана примерная модель простейшей автоколебательной системы – сосуда

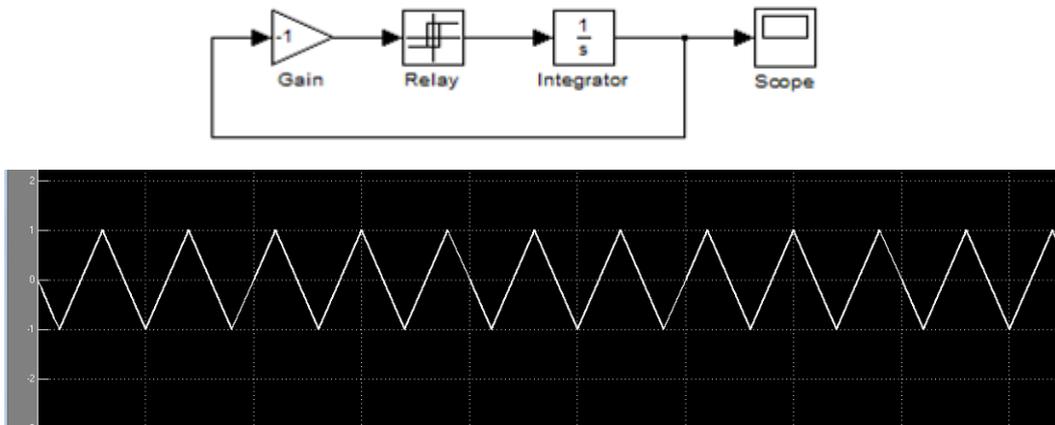


Рис.2.14. Примерная модель автоколебательной системы

Тантала. В модели не учитывается изменение скорости жидкости на этапе слива и процесс автоколебаний имеет пилообразный характер.

Для ответа на вопрос: совпадают ли условия возбуждения автоколебаний с границей первого параметрического резонанса, рассмотрим нелинейную автоколебательную систему третьего порядка, модель которой приведена на Рис.2.15. Объект – колебательное звено имеет передаточную функцию $W(p) = 0,2(p^3 + 0,1p^2 + p)^{-1}$, нелинейное звено типа «насыщение» имеет линейный участок с наклоном 1 в пределах ± 1 , за пределами которого горизонтальный участок характеристики с нулевым наклоном.

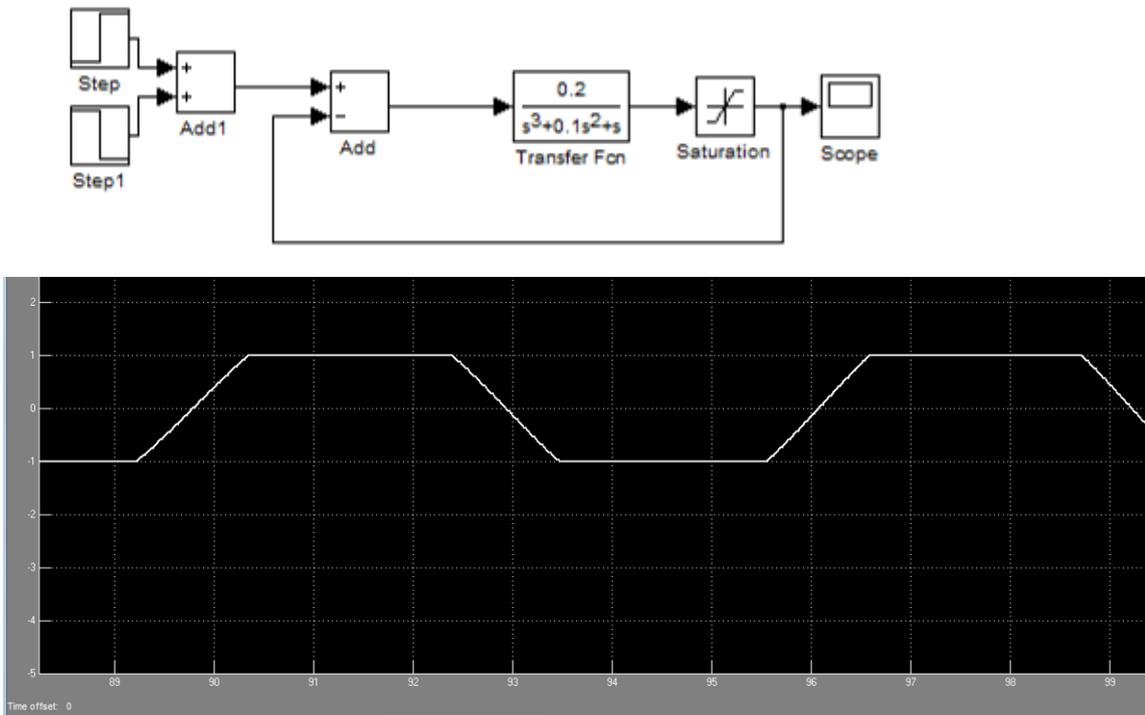


Рис.2.15. Модель динамической системы третьего порядка

Начальные условия задаются коротким одиночным импульсом, формируемым двумя блоками Step и Step1. Период автоколебаний составляет 6,3 секунды. Таким образом, период изменения параметра от нуля до единицы составляет 3,15 секунды, а длительность его единичной величины составляет $\tau=1$ с. На Рис.2.16 набрана модель параметрической системы с тем же объектом.

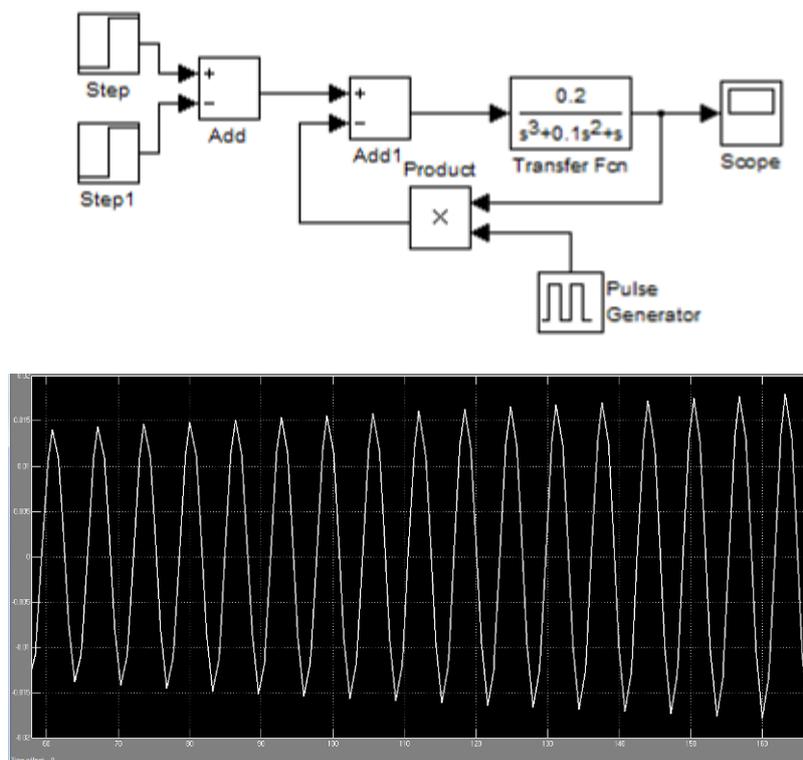


Рис.2.16. Граница возбуждения параметрического резонанса

Периодическим параметром, изменяющимся скачком от нуля до единицы с периодом 3 секунды, является множитель Product, управляемый генератором единичных импульсов длительностью 1 секунда. Временная диаграмма иллюстрирует начало (границу) параметрического резонанса. Таким образом, условия возникновения автоколебаний совпадают с границей возбуждения параметрического резонанса.

Учитывая, что в конструкциях механики, гидродинамики и аэродинамики нередко возникают изгибно-крутильные колебания, рассмотрим модель пружинного маятника, лежащего в основе этих процессов. Пружинный маятник представляет собой нелинейную динамическую систему с двумя степенями свободы: вертикальные вынужденные перемещения по оси x и параметрические отклонения угла α . Рассмотрим составление модели поэтапно.

Параметрическое возбуждение маятника переменной длины. На Рис.2.17 приведена структурная схема модели, позволяющей исследовать процессы параметрического возбуждения маятника.

Здесь Transfer Fcn1 – модель обыкновенного маятника постоянной длины $l_0 = 1\text{ м}$ и весом 1 кг. Характеристическое уравнение маятника * постоянной длины запишем в виде

$$p^2 + \frac{b}{a}p + \frac{c}{a} = 0,$$

или при тех же обозначениях $a = ml^2, c = mgl$

$$p^2 + \frac{b}{ml^2}p + \frac{g}{l} = 0.$$

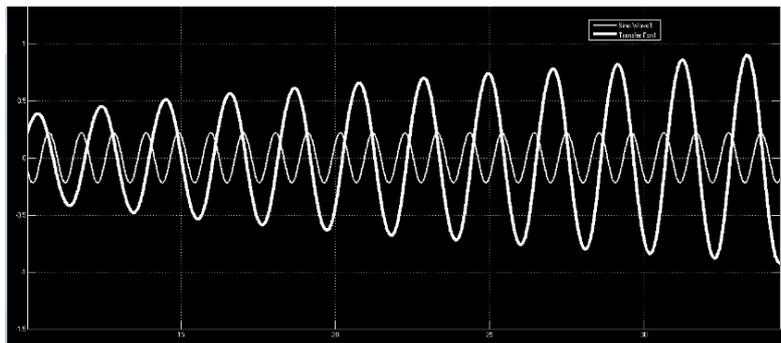
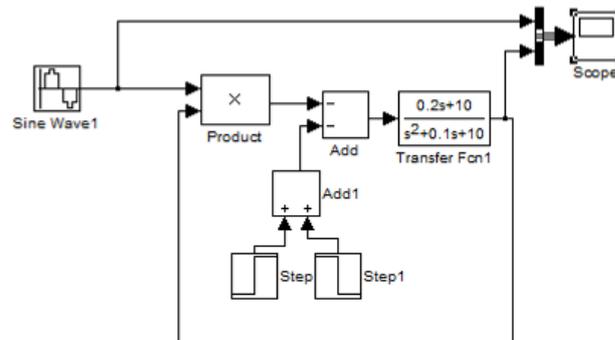


Рис.2.17. Модель маятника переменной длины

Для колебательного объекта с малым демпфированием $b=0,1$ получим при принятых ранее численных значениях в первом приближении уравнение маятника переменной длины $l = l_0 + \Delta l(t)$

$$p^2 + 0.1(l_0^{-2} - 2\Delta l)p + 10(l_0^{-1} - \Delta l) \cong 0.$$

Отсюда при $l_0 = 1\text{ м}$ следует уравнение колебаний маятника переменной длины

$$(p^2 + 0.1p + 10)\alpha(p) = (0.2p + 10)\Delta l(p)$$

и передаточная функция на рисунке 2.17

$$W(p) = \frac{\alpha(p)}{\Delta l(p)} = \frac{0.2p + 10}{p^2 + 0.1p + 10}.$$

Гармонический сигнал колебаний длины маятника $\Delta l(t)$ поступает на модулятор Product колебаний $\alpha(t)$, а два блока Step (положительный и отрицательный) формируют короткий единичный импульс начальных условий. Регистрация колебаний осуществляется блоком Scope. До порога возбуждения $|\Delta l(t)| < 0.21$ колебания маятника отсутствуют. При $|\Delta l(t)| = 0.23$ картина возбуждения параметрического резонанса приведена на Рис.2.17.

Колебания длины маятника (параметра) имеют частоту 6 рад/с (тонкая линия) и амплитуду 0.23 м. Возбуждающиеся линейно нарастающие параметрические колебания $\alpha(t)$ (жирная линия) возникают на частоте 3 рад/с. Это колебания первого параметрического резонанса.

Колебания пружинного маятника. Модель пружинного маятника представлена на Рис.2.18.

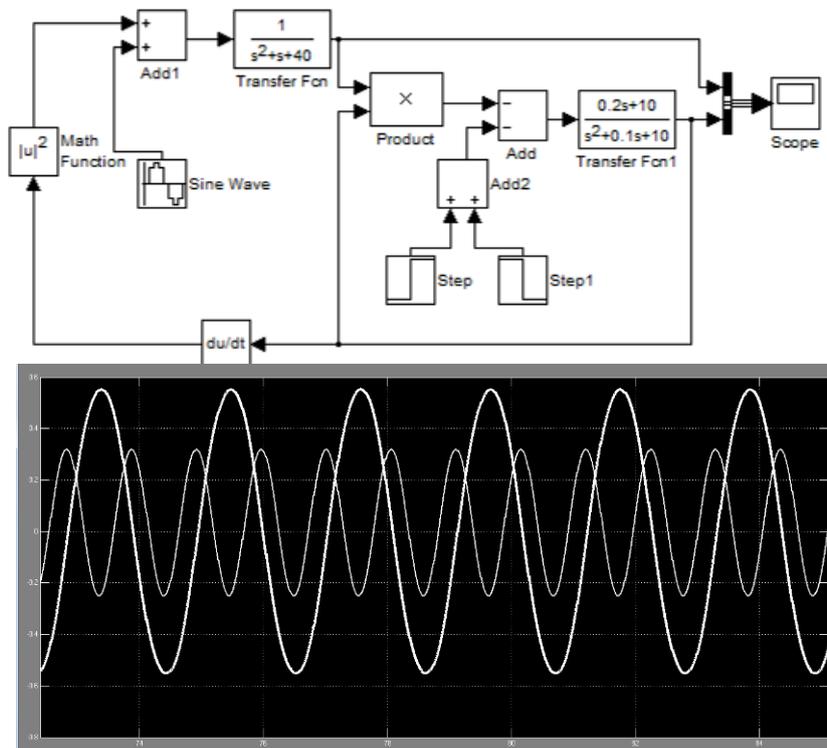


Рис.2.18. Модель пружинного маятника

Справа на схеме Рис.2.18 повторен контур параметрического возбуждения рисунка 2.17. Слева на схеме Рис.2.18 добавлен пружинный контур вынужденных колебаний, возбуждаемых генератором Sine Wave . Груз весом 1 кг на пружине жесткостью 40н/м имеет передаточную функцию Transfer Fcn

$$W(p) = \frac{F(p)}{\Delta l(p)} = \frac{1}{p^2 + p + 40},$$

где F(p) операторная запись гармонической вынуждающей силы f(t). Этот сигнал генератора Sine Wave складывается с центробежной силой, возникающей при колебаниях угла α маятника $f(t) = mv^2 / l_0 = m\omega^2 l_0 = ml_0 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$.

По этой причине в контур вынужденных колебаний включены квадрат модуля (Math Function) и производная (du/dt). Внизу на Рис.2.18 показаны установившиеся (не расходящиеся и незатухающие) колебания пружинного маятника (жирная линия), в то время как амплитуда колебаний длины (тонкая линия), равная 0.3, превышает порог возбуждения параметрического контура. Таким образом, пружина маятника препятствует возбуждению параметрического резонанса и приводит пружинный маятник к **установившимся параметрическим колебаниям**. Причина заключается в том, что сигналы на входе сумматора Add1 оказываются в противофазе и вместо суммирования осуществляется их вычитание.

О применимости моделей маятника. Из Рис.2.18 следует важный вывод: при возбуждении колебаний пружинного маятника вынужденные колебания (тонкая линия), приобретая постоянную составляющую, становятся несимметричными. В свою очередь, рост постоянной составляющей ведет к увеличению коэффициента передачи модулятора Product и к увеличению коэффициента усиления параметрического контура, вызывая при достаточно большой амплитуде генератора Sine Wave потерю устойчивости установившихся параметрических колебаний. В действительности физический пружинный маятник, также как обычный физический маятник, может потерять устойчивость колебаний при переходе в режим вращения. Но для этого рассматриваемые здесь модели неприменимы, так как они являются моделями математического маятника и область применимости их ограничена малыми угловыми колебаниями, например, $|\alpha| < 1$ радиана, как приведено на Рис.2.18.

Заключение

Вот и наступает конец популярной истории о параметрическом резонансе. В качестве начала конца повторим вопрос, поставленный в первой части: использует ли сегодня человек параметрические колебания? Попробуем теперь уточнить тот ответ: да и нет. Без сомнения параметрический резонанс многому научил человека, и эти знания человек использует в техническом творчестве. Но можно ли утверждать, что человек приручил и поставил ему на службу параметрический резонанс? Вот это представляется сомнительным. Дело в том, что, недавняя история их отношений скорее была связана с познанием, изучением параметрических колебаний, параметрического резонанса и борьбой с ними. Вновь сошлемся на книгу профессора Бишоп «Колебания», изданную у нас в 1968 году. В книге отсутствуют понятия параметрических колебаний и резонанса, а обсуждается самовозбуждение колебаний динамических систем. Конечно, такой крупный специалист вправе иметь собственное мнение о классификации и определениях колебаний. Но все-таки, все-таки, это в определенной степени свидетельствует о недавнем неустановившемся мнении в научном мире. Приведенные здесь примеры использования параметрического резонанса, такие как генерация колебаний механическими перемещениями пластин конденсатора, явление феррорезонанса и другие в настоящее время практически не используются. Остаются, пожалуй, системы СВЧ и обыкновенные качели. Таким образом, пока-что, параметрический резонанс остается скорее врагом человека и доставляет ему больше боли, чем радости. Вот почему на поставленный вначале вопрос правомерен ответ: скорее нет.

Давайте ответим на другой вопрос, почему при возбуждении параметрических колебаний автоматически устанавливается фаза точки пересечения окружности параметрического резонанса с частотной характеристикой, а не другая, например, противоположная, при которой устанавливается успокоение колебаний. Ведь в этом случае параметрические колебания вместо увеличения могли бы уменьшать амплитуду вынужденных колебаний (скачков) и радости было бы больше, чем боли. Можно привести такой ответ на этот вопрос. Прежде всего, действует и устанавливается в динамических системах известный в механике физический принцип возможного минимума потенциальной энергии. Согласно этому автоматически устанавливается фаза, соответствующая максимальной степени возбуждения колебаний, при которой потенциальная энергия покоя

переходит в кинетическую энергию колебаний. Таким образом, из произвольной, вносимой со стороны периодически изменяющегося с частотой Ω параметра, фазы колебаний координаты устанавливается та, при которой суммарный фазовый сдвиг колебательного объекта и параметра составляет 180 градусов. При этом частота $\Omega/2$ колебаний координаты называется критической, а параметрическая система имеет минимальную степень устойчивости равновесия. Происходит возбуждение параметрического резонанса, если амплитуда колебаний параметра превысит пороговую величину.

Не вызывает сомнений в том, что человек поставит на службу параметрический резонанс. Одной из попыток является, например, параметрическая коррекция фазы колебательной динамической системы (Мандрик А.В., Чечурин С.Л., Чечурин Л.С. Метод стабилизации выходного сигнала колебательной системы. Патент РФ № 2393520, 2010.). В отличие от известной в классической теории автоматического управления координатной обратной связи используется новый тип обратной связи – параметрической. Выбором величины запаздывания сигнала в цепи параметрической обратной можно установить либо раскачивающий, либо демпфирующий регулятор.

– * –

В заключение, следует обратиться к читателям, у которых хватило терпения добраться до конца. Все, что удалось изложить здесь о параметрических колебаниях и резонансе – это лишь незначительная часть накопленных человеком знаний. Одна только библиография с краткими аннотациями могла бы занять весь объем брошюры. Так что интересующейся молодежи предстоит узнать много интересного о параметрическом резонансе в макро- и микро- мирах. Например, эллиптические орбиты - это всегда источник параметрических колебаний, а загадочная природа шаровых молний вполне вероятно имеет параметрическое происхождение и многое, многое другое. Наконец, превратить домашний компьютер в исследовательскую лабораторию для изучения свойств динамических систем и решения новых задач с помощью численного моделирования – дело несложное. Остается пожелать терпеливым читателям достатка сил и грядущих успехов.