Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Л. Баденко, Г.В. Баденко

Специальные разделы высшей математики. Математическая физика

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2014

УДК 517. 9

Баденко В.Л., Баденко Г.В. **Специальные разделы высшей математики. Математическая физика**: Учеб. пособие. 2014., 55 с.

В учебном пособии рассмотрены аналитические методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрены основные дифференциальные операторы, классификация уравнений с частными производными, постановка краевых задач и вывод некоторых уравнений математической физики. подробно изложен метод Фурье. Рассмотрено решение неоднородных задач, в том числе метод конечных интегральных преобразований (метод Гринберга). Рассмотрено использование специальных функций, в частности, функций Бесселя.

Предназначено для студентов, обучающихся по магистерским программам по направлению 270800 "Строительство". Может быть также полезно студентам, обучающихся по другим направлениям бакалавриата и магистратуры.

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Основные дифференциальные операторы математической физики

Пусть $\mathbb{R}^n$ - n-мерное евклидово пространство

$x \in \mathbb{R}^n \colon x = (x_1, \ldots, x_n), x_i$ - *координата* точки x

$(x, y) = x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n$ - *скалярное произведение*

$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ - *норма* в $\mathbb{R}^n$

Множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих $\|x - x_0\| < r$ - *открытый шар* радиуса r, где $\|x - x_0\|$ - *евклидово расстояние* между x и x_0

Множество *ограничено* в $\mathbb{R}^n$, если существует шар, содержащий это множество

x_0 есть *внутренняя точка множества*, если существует шар с центром в x_0, содержащийся в этом множестве

Множество *открыто*, если все его точки внутренние

Множество *связное*, если любые две точки можно соединить кусочно-гладкой кривой, лежащей в этом множестве

Связное открытое множество есть *область*

Основные дифференциальные операторы математической физики:

1. *Градиент функции u*

   Пусть дана скалярная функция $u(x, y, z)$

   Градиентом этой функции называется вектор с координатами $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$:

   $\operatorname{grad} u = \vec{i} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial z}$

2. *Дивергенция векторной функции*

   Пусть $\vec{A}$ - векторная функция точки $M(x, y, z) \colon \vec{A}(A_x, A_y, A_z) = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}$

   Дивергенцией $\vec{A}$ называется скалярная величина $\operatorname{div} \vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

3. *Ротор (вихрь)*

   Ротор векторной функции $\vec{A}$ есть $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{i} \cdot \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \right)$

   Символически ротор удобно представлять в виде определителя матрицы:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

4. *Оператор Лапласа*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Если применить его к скалярной функции $u(x, y, z)$, то получим:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Если к вектору $\vec{A}$: $\Delta\vec{A} = \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}$

Так как $\vec{A} = \vec{i}\cdot A_x + \vec{j}\cdot A_y + \vec{k}\cdot A_z$, то $\Delta\vec{A} = \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$

5. *Оператор Гамильтона*

$$\nabla = \vec{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}$$

Если $u(x, y, z)$ - скаляр, то $\nabla u = \operatorname{grad} u$

Скалярное произведение $(\nabla\cdot\vec{A}) = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{A}$

Векторное произведение $\nabla\times\vec{A} = \vec{i}\cdot\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\cdot\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\cdot\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \operatorname{rot}\vec{A}$

Таким образом $\Delta u = \nabla^2 u$, где $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$, то есть $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$

Операторы инвариантны по отношению к повороту и переносу координатных осей

1.2 Основные интегральные тождества

1.2.1 Формула Остроградского

Пусть есть система координат $Oxyz$ и область D, ограниченная гладкой или кусочно-гладкой поверхностью S (это поверхность, состоящая из конечного числа кусков с непрерывно меняющейся на них касательной)

Пусть $\vec{A}$ - векторная функция точки $M \in D$, непрерывная вместе со своими первыми производными на D, включая границу S

Тогда справедлива *формула Остроградского:*

$$\int\limits_{(D)} \operatorname{div}\vec{A}\,dd = \int\limits_{(S)} A_n\,ds, \qquad A_n = \vec{A}\cdot\vec{n},\ \vec{n} \text{ - вектор внешней нормали к } S$$

Если $\vec{A} = \operatorname{grad} u$, то $\operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$; но $A_n = \vec{A}\cdot\vec{n} = \operatorname{grad} u\cdot\vec{n} = \dfrac{\partial u}{\partial n}$. Тогда:

$$\int\limits_{(D)} \Delta u\,dd = \int\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds, \qquad u \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{D}),\ \overline{D} = D\cup S$$

Заменим u на $u^2/2$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = u\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{u^2}{2}\right) = u\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{u^2}{2}\right) = u\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{u^2}{2}\right) = u\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$\Delta\left(\frac{u^2}{2}\right) = u\cdot\Delta u + (\operatorname{grad} u)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{u^2}{2}\right) = u\,\frac{\partial u}{\partial n}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{(D)} \left(u\Delta u + (\operatorname{grad} u)^2\right)\, dd = \int\limits_{(S)} u\,\frac{\partial u}{\partial n}\, ds, \qquad u\in\mathbb{C}^2(\overline{D})$$

Рассмотрим теперь плоскость Oxy и плоскую область D, ограниченную контуром Γ:

$$\int\limits_{(D)} \Delta u\, dd = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\, dl$$

$$\int\limits_{(D)} \left(u\Delta u + (\operatorname{grad} u)^2\right)\, dd = \int\limits_{\Gamma} u\,\frac{\partial u}{\partial n}\, dl, \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos(\vec{n},x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos(\vec{n},y)$$

1.2.2 Формула Грина

$\displaystyle\int\limits_{(D)} v(\Delta u)\, dl = \int\limits_{(S)} (v \ \cdot \operatorname{grad} u)\ ds - \int\limits_{(D)} (\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v)\, dd$ - *Первая формула Грина (однократное интегрирование по частям в векторной форме)*

Частный случай: если v $\equiv 1$, то

$$\int\limits_{(D)} (\Delta u)\, dd = \int\limits_{(S)} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\ ds$$

$\displaystyle\int\limits_{(D)} (u\Delta v - v\Delta u)\, dl = \int\limits_{(S)} \left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)\ ds$ - *Вторая формула Грина (двукратное интегрирование по частям)*

Так как $\operatorname{div}(f\cdot\vec{A}) = \vec{A}\cdot\operatorname{grad} f + f\cdot\operatorname{grad}\vec{A}$, то:

$$\operatorname{div}(u\cdot\operatorname{grad} v) = \operatorname{grad} v\cdot\operatorname{grad} u + u\cdot\operatorname{div}(\operatorname{grad} v) = \operatorname{grad} v\cdot\operatorname{grad} u + u\Delta v$$

Подставим в формулу Остроградского вместо $\vec{A}$ вектор $(u\cdot\operatorname{grad} v)$:

$$\int\limits_{(D)} (u\Delta v + \operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v)\, dd = \int\limits_{(S)} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\, ds \quad (1)$$

Меняя роли функций u и v, находим:

$$\int\limits_{(D)} (v\Delta u + \operatorname{grad} v\cdot\operatorname{grad} u)\, dd = \int\limits_{(S)} v\,\frac{\partial u}{\partial n}\, ds \quad (2)$$

Вычитая из выражения (1) выражение (2) получим формулу Грина

Формула Грина для плоской области:

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{(L)} P\, dx + \int\limits_{(L)} Q\, dy$$

1.3 Криволинейные координаты в пространстве

1.3.1 Определение криволинейных координат

Пусть имеется трехмерное пространство и декартова система координат $Oxyz$. Введем новые независимые переменные q_1, q_2, q_3:

$x = x(q_1, q_2, q_3)$

$y = y(q_1, q_2, q_3)$

$z = z(q_1, q_2, q_3)$, x, y и z однозначны, непрерывны и дифференцируемы

Предположим также, что функциональный определитель Остроградского (Якоби) не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда имеем взаимно-однозначное соответствие между x, y, z и q_1, q_2, q_3 и положение точки в пространстве можно описывать в переменных q_1, q_2, q_3, которые называются *криволинейными координатами*

Важной характеристикой любой криволинейной системы координат является ее *метрика*, то есть выражение квадрата линейного элемента, определяющего расстояние между двумя бесконечно близкими точками:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y}{\partial q_i} dq_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial q_i} dq_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g_{ik} dq_i dq_k$$

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_k}$$

Система криволинейных координат *ортогональна*, если $g_{ik} = 0$ при $i \neq k$

Для ортогональной системы имеем:

$$(dl)^2 = g_{11}(dq_1)^2 + g_{22}(dq_2)^2 + g_{33}(dq_3)^2 = H_1^2(dq_1)^2 + H_2^2(dq_2)^2 + H_3^2(dq_3)^2$$

$H_i^2 = g_{ii} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2$ - *коэффициент Лямэ (Ламе)*

H_i имеет смысл коэффициента пропорциональности в равенстве, выражающем связь между элементарным приращением dl_i длины отрезка вдоль i-ой координатной оси и приращением соответствующей криволинейной координаты dq_i: $dl_i = H_i \cdot dq_i$

1.3.2 Выражение основных операторов в ортогональных криволинейных координатах

$$(\operatorname{grad} u)_{q_i} = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_i}, i = 1, 2, 3$$

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \frac{H_2 H_3}{H_1} \left(\frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{H_1 H_3}{H_2} \left(\frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{H_1 H_2}{H_3} \left(\frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (A_{q_1} H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_{q_2} H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_{q_3} H_1 H_2) \right)$$

$$\operatorname{rot}_{q_1} \vec{A} = \frac{1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial (A_{q_3} H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (A_{q_2} H_2)}{\partial q_3} \right)$$
$$\operatorname{rot}_{q_2} \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_3} \left(\frac{\partial (A_{q_1} H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (A_{q_3} H_3)}{\partial q_1} \right)$$
$$\operatorname{rot}_{q_3} \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial (A_{q_2} H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (A_{q_1} H_1)}{\partial q_2} \right)$$

1.3.3 Цилиндрические координаты

Координатными поверхностями являются: круговые цилиндры с осью Oz; плоскости, перпендикулярные плоскости Oz; полуплоскости, проходящие через Oz

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & \qquad H_r &= 1 \\ y &= r\sin\varphi & \qquad H_\varphi &= r \\ z &= z & \qquad H_z &= 1 \end{aligned}$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \operatorname{grad} u = \vec{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{r} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

1.3.4 Сферические координаты

Координатными поверхностями являются: сфера с центром в 0 и радиуса ρ; круговые конусы с вершиной в 0, образующие которых составляют с осью вращения Oz угол θ; полуплоскости, проходящие через Oz под углом φ к плоскости Oxz

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\theta\cos\varphi & \qquad H_\rho &= 1 \\ y &= \rho\sin\theta\sin\varphi & \qquad H_\varphi &= \rho\sin\theta \\ z &= \rho\cos\theta & \qquad H_\theta &= \rho \end{aligned}$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \qquad \operatorname{grad} u = \vec{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \vec{e}_\theta \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$
$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2 A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Глава 2

Уравнения математической физики в частных производных

2.1 Классификация уравнений с частными производными второго порядка (с двумя независимыми переменными)

2.1.1 Метод характеристик

$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$ (1) - *уравнение с частными производными второго порядка*
Аналогично записывается уравнение и для большего числа переменных

Уравнение называется *линейным относительно старших производных*, если оно имеет вид:
$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ (1.1) a_{11}, a_{12}, a_{22} - функции x, y

Если a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят не только от x, y, но и от u, u_x, u_y, то уравнение называется *квазилинейным*

Уравнение *линейное*, если оно линейное относительно старших производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} и относительно u, u_x, u_y, а именно:
$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0,$ (2) $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ - функции x, y

Если $f \equiv 0$, то уравнение (2) называется *однородным*

Если коэффициенты (2) не зависят от x и y, то это *уравнение с постоянными коэффициентами*

Упростим (2) с помощью замены переменных:

$$\begin{cases} \zeta = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \qquad (3)$$

Предполагая (3) взаимно-однозначным отображением преобразуем производные к новым переменным:

$$u_x = u_\zeta \cdot \zeta_x + u_\eta \cdot \eta_x$$
$$u_y = u_\zeta \cdot \zeta_y + u_\eta \cdot \eta_y$$
$$u_{xx} = u_{\zeta\zeta} \cdot \zeta_x^2 + 2u_{\zeta\eta} \cdot \zeta_x \cdot \eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\zeta \cdot \zeta_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}$$
$$u_{yy} = u_{\zeta\zeta} \cdot \zeta_y^2 + 2u_{\zeta\eta} \cdot \zeta_y \cdot \eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\zeta \cdot \zeta_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$$
$$u_{xy} = u_{\zeta\zeta} \cdot \zeta_x \cdot \zeta_y + u_{\zeta\eta}(\zeta_x \cdot \eta_y + \zeta_y \cdot \eta_x) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x \cdot \eta_y + u_\zeta \cdot \zeta_{xy} + u_\eta \cdot \eta_{xy}$$

Подставим это все в уравнение (1.1):

$\overline{a}_{11}u_{\zeta\zeta} + 2\overline{a}_{12}u_{\zeta\eta} + \overline{a}_{22}u_{\eta\eta} + \overline{F} = 0 \qquad (4)$

$\overline{a}_{11} = a_{11} \cdot \zeta_x^2 + 2a_{12} \cdot \zeta_x \cdot \zeta_y + a_{22} \cdot \zeta_y^2$

$\overline{a}_{12} = a_{11} \cdot \zeta_x \cdot \eta_x + a_{12}(\zeta_x \cdot \eta_y + \eta_x \cdot \zeta_y) + a_{22} \cdot \zeta_y \cdot \eta_y$

$\overline{a}_{22} = a_{11} \cdot \eta_x^2 + 2a_{12} \cdot \eta_x \cdot \eta_y + a_{22} \cdot \eta_y^2$

$\overline{F}$ не зависит от вторых производных

Если исходное уравнение было линейным, то и преобразованное останется таким же

Уравнение (4) становится особенно простым, если $\overline{a}_{11}$ и $\overline{a}_{22}$ равны нулю. Для этого переменные ζ и η выбираются особенным образом

Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка:

$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0$ (*нелинейное*) $\qquad (5)$

Теорема:

Для того, чтобы функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяла уравнению (5) необходимо и достаточно, чтобы семейство $\varphi(x, y) = C$ было общим интегралом уравнения:

$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}(dx)^2 = 0 \qquad (6)$

Тогда, чтобы $\overline{a}_{11} = 0$, нужно положить $\zeta = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = C$ - общий интеграл уравнения (6)

Уравнение (6) называется *характеристическим* для уравнения (1.1), а его интегралы - *характеристиками*

Характеристическое уравнение (6) есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, но второй степени. Разрешая его относительно y' получаем два уравнения:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (7)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (8)$$

Если общий интеграл (7) имеет вид $\varphi(x, y) = C$, то полагая $\zeta = \varphi(x, y)$, обращаем в нуль коэффициент при $u_{\zeta\zeta}$

Если $\psi(x, y) = C$ является общим интегралом (8), то полагая $\eta = \psi(x, y)$, обращаем в нуль коэффициент при $u_{\eta\eta}$

Такой метод упрощения уравнения (1.1) называется *методом характеристик*

Знак подкоренного выражения уравнений (7) и (8) определяет тип уравнения (1.1):

1. Если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, то уравнение *гиперболического* типа
2. Если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то уравнение *эллиптического* типа
3. Если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, то уравнение *параболического* типа

Знак определяется в каждой точке области определения. В различных точках области уравнение может быть различного типа

2.1.2 Уравнения гиперболического типа

Так как $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, то правые части (7) и (8) действительны и различны. Общие интегралы $\varphi(x,y) = C$ и $\psi(x,y) = C$ определяют действительные семейства характеристик

Полагая $\zeta = \varphi(x,y)$ и $\eta = \psi(x,y)$ приведем уравнение (4), поделив на коэффициент при $u_{\zeta\eta}$, к виду:

$u_{\zeta\eta} = \Phi(\zeta, \eta, u, u_\zeta, u_\eta)$, где $\quad \Phi = -\dfrac{\overline{F}}{2\overline{a}_{12}}$

Это *каноническая* форма уравнений гиперболического типа

Часто пользуются другой формой, полагая $\zeta = \alpha + \beta$ и $\eta = \alpha - \beta$: $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 4\Phi = \Phi_1$

2.1.3 Уравнения эллиптического типа

Так как $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то правые части (7) и (8) комплексны

Пусть $\varphi(x,y) = C$ - комплексный интеграл (7), тогда $\varphi^*(x,y) = C$ - сопряженная к φ функция, представляющая общий интеграл (8)

Перейдем к комплексным переменным, полагая $\zeta = \varphi(x,y)$ и $\eta = \varphi^*(x,y)$. При этом получим такого же вида уравнение, что и гиперболическое

Чтобы остаться в действительной области, положим $\alpha = \dfrac{\varphi + \varphi^*}{2}$ и $\beta = \dfrac{\varphi - \varphi^*}{2i}$

Тогда $\zeta = \alpha + i\beta$, $\eta = \alpha - i\beta$ и уравнение (1.1) примет вид:

$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$, где $\Phi_1 = -\dfrac{\overline{F}}{\overline{a}_{22}}$

2.1.4 Уравнения параболического типа

Так как $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, то уравнения (7) и (8) совпадают и получаем один общий интеграл $\varphi(x,y) = C$

Положив $\varphi = \varphi(x,y)$ и $\eta = \eta(x,y)$ (где $\eta(x,y)$ - любая функция, не зависящая от φ) получим каноническую форму для уравнений параболического типа:

$u_{\eta\eta} = \Phi_1(\zeta, \eta, u, u_\zeta, u_\eta)$, где $\Phi_1 = -\dfrac{\overline{F}}{\overline{a}_{22}}$

2.2 Классификация задач математической физики по типу дополнительных условий

Пусть $D \in \mathbb{R}^n$ - область, где проходит процесс, описываемый дифференциальным уравнением; S - граница области, которую считаем кусочно-гладкой поверхностью

Чтобы полностью описать процесс, нужно, кроме уравнения, задать начальное состояние процесса (*начальные условия*) и режим на границе (*граничные условия*). Задача с заданными начальными и граничными условиями называется *краевой задачей*

Различают три основных типа краевых задач:

1. Задача Коши (для уравнений гиперболического и параболического типов)

   Задаются начальные условия, область D совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, граничные условия отсутствуют

2. Краевая задача (для уравнений эллиптического типа)

   Задаются граничные условия на границе S, начальные условия отсутствуют

   Граничные условия могут быть следующими:

   (a) $u\big|_S = f_1$ - *первая краевая задача (задача Дирихле)*

   (b) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f_2$ - *вторая краевая задача (задача Неймана)*

   (c) $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_S = hf_3$ - *третья краевая задача*

   (d) На различных участках границы задаются различные условия

   f_1, f_2, f_3 - заданные функции, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к поверхности S

3. Смешанная задача (для уравнений гиперболического и параболического типов)

   Задаются начальные и граничные условия, $D \neq \mathbb{R}^n$

2.2.1 Единственность и устойчивость решения первой краевой задачи

Пусть дана область D, ограниченная замкнутой поверхностью S, на которой задана некоторая функция f

Требуется найти функцию u, которая:

1. Определена и непрерывна в замкнутой области D, включая границу $(D \cup S)$

2. Удовлетворяет внутри области уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$

3. Принимает на границе S значения f

Теорема единственности:

Первая краевая задача для уравнения Лапласа не может иметь двух различных решений

Доказательство:

Докажем от противного: пусть есть две различных функции u_1 и u_2, которые являются решениями задачи

Рассмотрим функцию $u = u_1 - u_2$:

1. $\Delta u = 0$

2. u - непрерывная в замкнутой области $D \cup S$

3. $u\big|_S = 0$

То есть, u непрерывна и гармонична в D и равна нулю на S. Всякая непрерывная функция в замкнутой области достигает своего максимума.

Убедимся в том, что $u \equiv 0$:

Если это не так, то она должна достигать положительного максимального значения внутри D, что невозможно. Также, u не может принимать нигде внутри D отрицательного значения, а значит $u \equiv 0$

Покажем, что есть непрерывная зависимость решения первой краевой задачи от граничных условий:
Пусть u_1 и u_2 непрерывные в $D \cup S$ и гармонические внутри D функции, для которых $\|u_1 - u_2\| \leqslant \varepsilon$ на S

Тогда, то же неравенство выполняется внутри D, то есть доказана непрерывная зависимость решения от граничных условий

При доказательстве использовались свойства гармонических функций (без доказательства):

1. Если v - функция, гармоническая в D, ограниченной поверхностью S, то
   $\iint\limits_{S_*} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds = 0$, S_* - любая замкнутая поверхность, лежащая в области D

2. Если функция $u(M)$ гармоническая в некоторой области D, а M_0 - какая-нибудь точка, лежащая внутри D, то:
   $$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{S_a} u\, ds = 0$$
   S_a - сфера радиуса a с центром в M_0, целиком лежащая в D (теорема среднего значения)

3. Принцип максимального значения

   Если функция $u(M)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $D \cup S$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$, то максимальные и минимальные значения функции достигаются на S

4. Если u_1, u_2 непрерывны в $D \cup S$, гармоничны в D и $u_1 \leqslant u_2$ на S, то $u_1 \leqslant u_2$ всюду внутри D

5. Если u_1, u_2 непрерывны в $D \cup S$, гармоничны в D и $\|u_1\| \leqslant u_2$ на S, то $\|u_1\| \leqslant u_2$ всюду внутри D

2.2.2 Теорема единственности решения второй краевой задачи

Решением второй краевой задачи называется функция u, непрерывная в области $D \cup S$ и удовлетворяющую условию $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(M)$

Теорема:

Если вторая краевая задача (Неймана) разрешима, то решение определяется с точностью до константы

Доказательство:

Предположим дополнительно, что функция u имеет непрерывные первые производные в $D \cup S$

Условие разрешимости:

Функция u имеет непрерывные первые производные в области $D \cup S$ и удовлетворяет условиям $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = g(x, y, z)$ и $\Delta u = -F(M)$

Тогда $\displaystyle\int\limits_{(D)} \Delta u \, dd = -\int\limits_{(D)} F \, dd$

$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ и используя формулу Остроградского:

$$\int\limits_{(D)} \Delta u \, dd = \int\limits_{(S)} (\operatorname{grad} u)_n \, ds = \int\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \int\limits_{(S)} g \, ds$$

$$\int\limits_{(D)} F \, dd = \int\limits_{(S)} g \, ds$$

Таким образом, для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы g и F были связаны вышеприведенным равенством

Единственность:

Докажем от противного: пусть u_1 и u_2 - две непрерывно-дифференцируемые в $D \cup S$ функции, удовлетворяющие уравнению $\Delta u_i = 0$ в $D \cup S$ и условию $\left.\dfrac{\partial u_i}{\partial n}\right|_S = f(M)$, $i = 1, 2$

Для $u = u_1 - u_2$: $\Delta u = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$

По формуле Остроградского: $\displaystyle\int\limits_{(D)} \left(u \cdot \Delta u + (\nabla u)^2\right) dd = \int\limits_{(S)} u \cdot \frac{du}{dn} \, ds$

Но $\Delta u = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$, тогда: $\displaystyle\int\limits_{(D)} (\nabla u)^2 dd = 0$

Тогда, в силу непрерывности функции u и ее первых производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad u = const$$

2.2.3 Единственность решения третьей краевой задачи

Для решения третьей краевой задача требуется найти функцию $u \in \mathbb{C}^2(D)$ и непрерывную в $D \cup S$, удовлетворяющую в области D уравнению Пуассона (или Лапласа) и граничным условиям на поверхности S: $\Delta u = -F$, $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_S = f$

Теорема:

Решение третьей краевой задачи единственно

Доказательство:

Докажем от противного: пусть u_1 и u_2 различные решения

Пусть $u = u_1 - u_2$: $\Delta u = 0$, $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_S = 0$

Пользуясь тождеством из доказательства единственности решения второй краевой задачи:

$$\int\limits_{(D)} (\nabla u)^2 \, dd = -\int\limits_{(S)} hu \, ds$$

$$\int\limits_{(D)} (\nabla u)^2 \, dd + \int\limits_{(S)} hu \, ds = 0$$

Такое равенство возможно, если оба интеграла равны нулю, а значит:

$\nabla u = 0$ на D и $u = 0$ на $S \quad \Rightarrow \quad u = 0$

2.2.4 Понятие о корректно поставленной задаче математической физики

Поскольку задачи математической физики представляют собой модели реальных задач, то их постановки должны удовлетворять следующим естественным условиям:

1. Решение должно существовать в каком-то классе функций A_1
2. Решение должно быть единственным в некотором классе функций A_2
3. Решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (начальных и граничных условий, свободного члена, коэффициентов уравнения)

Задача, удовлетворяющая этим требованиям называется *корректно поставленной*, иначе *некорректно поставленной*

Множество функций $A_1 \cap A_2$ называется *классом корректности*

Каждый тип задач имеет свои условия, обеспечивающие корректность постановки той или иной задачи.

Например, для уравнения Лапласа можно выделить группу условий, гарантирующих корректность постановки

2.3 Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач

2.3.1 Уравнение малых поперечных колебаний струны

Струной называется натянутая нить, не сопротивляющаяся изгибу, то есть которая свободно изгибается, но плохо тянется

Каждую точку струны длины l можно охарактеризовать значением ее абсциссы x. Описание процесса колебаний струны проведем при помощи задания положения точек струны в различные моменты времени

Пусть $u = u(x,t)$ - смещение точки струны с абсциссой x в момент времени t. Эта функция характеризует вертикальное перемещение струны (предполагаем, что смещения струны лежат в одной плоскости (x,u) и вектор смещения $\vec{u}$ перпендикулярен к оси x)

В плоскости струна совершает малые поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью x

Так как колебания малы, то считаем, что $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \ll 1$

Так как струна не сопротивляется изгибу, то ее натяжение $\vec{T}(x,t)$ в точке x в момент времени t направлено по касательной к струне в точке x

Любой участок струны (a,b) не изменит своей длины после отклонения от положения равновесия:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dl \cong b - a$$

Тогда, по закону Гука, величина натяжения не будет меняться со временем: $\|\vec{T}(x,t)\| = T_0$.

(Закон Гука: $\sigma = E\varepsilon$, где σ - напряжение, E - модуль упругости, ε - относительное удлинение)

Обозначим через $F(x,t)$ *плотность внешних сил*, действующих на струну в точке x в момент времени t и направленных перпендикулярно оси x в плоскости (x,u)

$\rho(x)$ - *линейная плотность струны* в точке x; тогда $\rho(x)\triangle x$ - *масса* элемента $(x; x + \triangle x)$

Составим уравнение движения струны, для этого рассмотрим, какие силы действуют на элемент $(x; x + \triangle x)$, это:

- силы натяжения $\vec{T}(x + \triangle x, t)$ и $-\vec{T}(x,t)$
- внешняя сила $\vec{F}(x,t)$

По закону Ньютона, суммарная сила равна произведению массы на ускорение

Рассмотрим эту сумму в проекциях вертикальную ось:

$$T_0 \sin\alpha|_{x+\triangle x} - T_0 \sin\alpha|_x + F(x,t)\triangle x = \rho\triangle x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (*)$$

С другой стороны: $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \approx \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

Поделим уравнение $(*)$ на $\triangle x$:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{\triangle x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \triangle x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + F(x,t) \quad \Big| \quad \triangle x \to 0$$

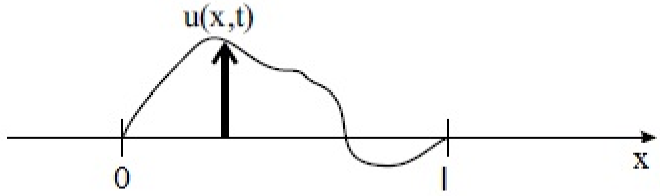
$\rho(x) \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F$ - *уравнение поперечных колебаний струны*

Если $F \neq 0$, то колебания *вынужденные*, иначе *свободные*

Пусть $\rho(x) = \rho = const$: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{F(x,t)}{T_0}$ - волновое уравнение, где $v = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$

Граничные и начальные условия:

1. Задача о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах



Если концы струны длины $l\,(0 \leqslant x \leqslant l)$ закреплены, то должны выполняться *граничные условия*:
$u(0,t) = 0$
$u(l,t) = 0$

Но процесс колебаний зависит и от ее начальной формы и распределения скоростей, то есть нужно задать и *начальные условия*:
$u(x,0) = \varphi_0(x)$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x)$ (скорость)

2. Концы струны движутся по заданному закону:
$u(0,t) = \mu_1(t)$
$u(l,t) = \mu_2(t)$
μ_1, μ_2 - заданные функции

2.3.2 Уравнение малых продольных колебаний упругого стержня

Стержень - тело, для растяжения или изгибания которого надо приложить усилие

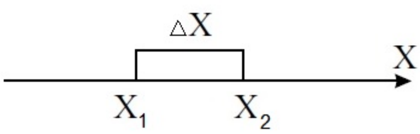
Упругий прямолинейный стержень выведен из состояния покоя тем, что его поперечным сечениям (S - *площадь сечения*) в момент времени $t = 0$ сообщены малые продольные смещения и скорости

Задача состоит в том, чтобы определить смещения поперечных сечений стержня при $t > 0$

Ось Ox направлена вдоль стержня. Каждое поперечное сечение имеет абсциссу x в положении равновесия, а в момент времени t - абсциссу $\overline{x} = x + u(x,t)$, где $u(x,t)$ - величина продольного смещения того поперечного сечения, которое в равновесном состоянии имело абсциссу x

Характеризующая функция $u(x,t)$ - смещение поперечного сечения вдоль оси Ox

Рассмотрим элемент стержня, торцы которого имели абсциссы x_1 и x_2, в момент времени t:



$x_1 \to x_1 + u(x_1, t)$
$x_2 \to x_2 + u(x_2, t)$

$$\varepsilon = \frac{x_2 + u(x_2,t) - x_1 - u(x_1,t) - \triangle x}{\triangle x} = \frac{u(x_2,t) - u(x_1,t)}{\triangle x}$$

$\lim\limits_{\triangle x \to 0} \varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ - *относительное удлинение элемента*

$\sigma = E \cdot \varepsilon$ - *закон Гука*, где σ - напряжение, E - модуль упругости

Сила, действующая на элемент :
$T(x,t) = \sigma \cdot S = E \cdot \varepsilon \cdot S = E \cdot S \cdot u_x(x,t)$

По закону Ньютона: $T(x_2,t) - T(x_1,t) = \rho \cdot S \cdot \triangle x \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, ρ - плотность, $\rho S \triangle x = m$ - масса

Так как $ES\left(u_x|_{x=x_2} - u_x|_{x=x_1}\right) \xrightarrow[\triangle x \to 0]{} ES \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \triangle x$, то:

$$ES \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \triangle x - \rho S \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \triangle x = 0 \quad \Bigg| \quad \frac{1}{ES \cdot \triangle x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Пусть $v^2 = \dfrac{E}{\rho}$, тогда: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ - в среде без сопротивления (волновое уравнение)

Если на стержень вдоль оси x действует плотность внешней силы f , то уравнение выглядит так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f}{E}$$

Возможные граничные условия:

1. Концы стержня жестко закреплены:
   $u(0,t) = u(l,t) = 0$
2. Концы двигаются по заданному закону:
   $u(0,t) = \varphi(t)$, $u(l,t) = \psi(t)$
3. Концы свободны:
   $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$
4. Концы закреплены упруго

Рассмотрим случай, когда конец $x = l$ закреплен упруго:

Слева на граничный элемент действует остальная часть стержня с силой $f = -ES \cdot u_x(l - \triangle x, t)$
Справа - упругая опора с силой $f = -k \cdot u(l,t)$, где k - коэффициент упругости заделки

По закону Ньютона:

$$\rho S \cdot \triangle x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -ES \cdot u_x(l - \triangle x, t) - k \cdot u(l, t) \quad | \quad \triangle x \to 0$$

$ES \cdot u_x(l, t) + k \cdot u(l, t) = 0$

$u_x(l, t) + h \cdot u(l, t) = 0$, где $h = \dfrac{k}{ES}$

Аналогично для конца $x = 0$:

$u_x(0, t) - h \cdot u(0, t) = 0$ (предполагается, что k на обоих концах одинаков)

2.3.3 Уравнение малых поперечных колебаний мембраны

Мембрана - тонкая натянутая плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу, но оказывающая сопротивление растяжению

Рассмотрим мембрану, натянутую на плоский контур C. Будем изучать поперечные колебания мембраны, в которых смещение перпендикулярно плоскости мембраны, за которую примем плоскость xOy

Пусть $u = u(x, y, t)$ - величина смещения точки с координатами (x, y) в момент времени t

Критерий малости колебаний: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \ll 1, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \ll 1$

Пусть ds - элемент дуги некоторого контура, лежащего на поверхности мембраны; на этот элемент действует сила натяжения $\vec{T}\,ds$. M - точка этого элемента.

Так как отсутствует сопротивление изгибу и сдвигу, то вектор $\vec{T}$ лежит в касательной плоскости к поверхности мембраны и перпендикулярен элементу ds в точке M. Натяжение T не зависит от направления элемента ds, содержащего точку M

Так как колебания малые, то:

1. Проекция $T_{\text{пр}}$ на плоскость Oxy равна T

   Так как $T_{\text{пр}} = T \cdot \cos\alpha$, где α - угол между $\vec{T}$ и Oxy, то α не может быть больше угла γ между касательной плоскостью к поверхности мембраны, в которой лежит $\vec{T}$, и плоскостью Oxy:

   $$\alpha \leqslant \gamma \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha \geqslant \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha \approx 1 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{пр}} = T$$

2. Натяжение T не зависит от t

   Рассмотрим участок S мембраны. Его площадь в невозмущенном состоянии равна $\iint\limits_S dxdy$

   а в момент времени t равна $\iint\limits_S \dfrac{dxdy}{\cos\gamma} \approx \iint\limits_S dxdy$

   Таким образом, площадь фиксированного участка не меняется со временем. Тогда по закону Гука и T не меняется со временем. Так как $\vec{T}$ перпендикулярен элементу дуги ds, то T не зависит от x и y

Рассмотрим элемент мембраны, для которого $N(x, y, u)$ - средняя точка. На этот элемент действуют силы натяжения $\vec{T}$ и внешняя нагрузка $q(x, y, t)$, распределенная по поверхности. Нагрузка рассчитывается на единицу площади и перпендикулярна к поверхности мембраны

Пусть $\rho(x, y)$ - *поверхностная плотность* мембраны, тогда $\rho(x, y)\,dxdy$ - *масса* элемента

По закону Ньютона:

$$\rho(x, y)\,dxdy\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, y, t)\,dxdy + \text{равнодействующая сил натяжения} \quad (*)$$

Равнодействующая сил натяжения равна:

$$T\,dy\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x+\frac{dx}{2}} - T\,dy\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x-\frac{dx}{2}} + T\,dy\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{y+\frac{dy}{2}} - T\,dy\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{y-\frac{dy}{2}} = T\underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}_{\triangle u} dxdy$$

Тогда из $(*)$: $\triangle u - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{q(x,y,t)}{T}, \quad v = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

Если $q = 0$, то колебания *свободные*: $\triangle u - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

Чтобы поставить задачу о колебаниях мембраны, нужны начальные и граничные условия:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x,y) \quad \text{и граничные условия на контуре } u\big|_{\Gamma} = 0$$

Таким образом, задача о колебаниях мембраны сводится к интегрированию уравнения и подстановке условий

Задача о равновесии мембраны:

Так как $q = q(x,y)$, то уравнение для $u(x,y)$ выглядит так: $\triangle u = -\dfrac{q(x,y)}{T}$ - *статический прогиб*

Специальные колебания (установившиеся синусоидальные колебания мембраны):
$q(x,y,t) = Q(x,y)\cdot\cos(\omega t)$ (или $q(x,y,t) = Q(x,y)\cdot\sin(\omega t)$), ω - частота внешних возмущающей силы

Решение целесообразно искать в виде:

$$u(x,y,t) = U(x,y)\cdot\cos(\omega t) \text{ (или } u(x,y,t) = U(x,y)\cdot\sin(\omega t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{v^2}U = -\frac{Q(x,y)}{T}$$

Задача о равновесии мембраны относится к задачам эллиптического типа (только граничные условия)

2.3.4 Вывод телеграфного уравнения

Рассматрим *однородную линию*, то есть линию, для которой даны сопротивление R, самоиндуктивность L, утечка изоляции G и емкость C, которые распределены вдоль провода непрерывно и равномерно. Для наглядности будем считать линию двухпроводной

Обозначим за $u = u(x,t)$ напряжение, $I = I(x,t)$ - силу тока в сечении цепи на расстоянии x от конца $x = 0$

По закону индукции, который применим к элементу цепи dx, получаем, что падение напряжения в этом элементе равно:

$$u - (u + du) = -du = -\frac{\partial u}{\partial x}\,dx$$

Это падение состоит из омического $(R\cdot I\cdot dx)$ и индуктивного $\left(L\cdot dx\cdot\dfrac{\partial I}{\partial t}\right)$:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = R\,dx\cdot I + L\,dx\cdot\frac{\partial I}{\partial t} \quad \Big| \quad \cdot\frac{1}{dx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + L\frac{\partial I}{\partial t} + R\cdot I = 0 \qquad (1)$$

Разность между токами, входящими и выходящими из элемента dx

$I - (I + dI) = -dI = -\dfrac{\partial I}{\partial x}\,dx$

Она складывается из токов заряжения $\left(C\,dx\,\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)$ и утечки $(G\,dx\cdot u)$:

$-\dfrac{\partial I}{\partial x}\,dx = C\,dx\,\dfrac{\partial u}{\partial t} + G\,dx\cdot u$

$\dfrac{\partial I}{\partial x} + C\,\dfrac{\partial u}{\partial t} + G\cdot u = 0 \qquad (2)$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + L\,\dfrac{\partial I}{\partial t} + R\,I = 0 \\ \dfrac{\partial I}{\partial x} + C\,\dfrac{\partial u}{\partial t} + G\,u = 0 \end{cases}$$

Хотелось бы иметь одно уравнение. Если R, L, C, G - константы, то это просто:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L\,\dfrac{\partial^2 I}{\partial t\partial x} + R\,\dfrac{\partial I}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 I}{\partial x\partial t} + C\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Исключаем ток:

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L\left(C\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G\,\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - R\left(C\,\dfrac{\partial u}{\partial t} + Gu\right) = 0$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (CG + RC)\,\dfrac{\partial u}{\partial t} + RGu = 0$ - *телеграфное уравнение*

где $v = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ - скорость передачи сигнала (возмущений волн)

Для I можно получить аналогичное уравнение

Если есть линия без потерь ($R = 0$, $G = 0$), то это волновое уравнение (v тогда есть скорость распространения волны)

Если $L = 0$ (тогда линия называется *кабелем*), то уравнение принимает вид: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - RC\,\dfrac{\partial u}{\partial t} - RGu = 0$

Важное значение имеют начальные и граничные условия

Начальные условия можно в общем случае сформулировать так: $I|_{t=0} = \varphi(x)$, $u|_{t=0} = \psi(x)$

Граничные условия ($R_0, C_0, L_0 = const$):

В начале линии $x = 0$ включен источник питания с ЭДС $E(t)$, а конец $x = l$ замыкается на землю через омическое сопротивление R_0: $u|_{x=0} = E(t)$, $u|_{x=l} = R_0\cdot I(l,t)$

Если конец $x = l$ коротко замкнут, то $u|_{x=l} = 0$

На конец $x = l$ может быть включена сосредоточенная емкость $u|_{x=l} = \dfrac{1}{c_0}\int\limits_0^t I(l,t)\,dt$

На конец $x = l$ может быть включена сосредоточенная индуктивность: $u|_{x=l} = L_0\,\left.\frac{\partial I}{\partial t}\right|_{x=l}$

Если конец $x = l$ оборван, то $I|_{x=l} = 0$, а конец $x = 0$ заземлен и $u|_{x=0} = 0$

2.4 Уравнение теплопроводности

Пусть есть твердое тело D, заполняющее все пространство или часть его, в теле идет распространение тепла

Пусть $T(x,t)$ - функция температуры тела в точке x в момент времени t, $x = (x_1, x_2, x_3)$

Если различные точки тела имеют различную температуру, то будет происходить движение тепла от более нагретых точек к менее нагретым. Процесс передачи тепла можно характеризовать вектором плотности потока тепла $\vec{q}$, направление которого совпадает с направлением потока тепла в теле в данный момент времени

Экспериментально установлено:
$\vec{q} = -k\nabla T$ - *закон Фурье*
k - коэффициент теплопроводности в точке x (возможно, $k = k(x)$)

Будем считать среду *изотропной* (т.е. ее физические свойства одинаковы во всех направлениях). Тем не менее, некоторые тепла анизотропны, например, кристаллические

Выделим в теле маленький объем $dv = dx_1dx_2dx_3$ со средней точкой M

Составим баланс тепла для этого объема:

1. Количество тепла, выделяемого в объеме dv за время $\triangle t$, равно:

   $dQ_1 = F(x,t)dv\triangle t$

   $F(x,t)$ - интенсивность внутренних источников тепла в точке x в момент времени t

2. Количество тепла, израсходованного за время $\triangle t$ в dv на нагрев этого объема, равно:

   $dQ_2 = c\rho\, dv(T(x,t+\triangle t) - T(x,t)) = c\rho\, dv\dfrac{\partial T}{\partial t}\triangle t$

   c - удельная теплоемкость ρ - плотность, (c и ρ - не обязательно $const$)

3. Количество тепла, уходящее через поверхность dS объема dv, равно (см. закон Фурье):

   $dQ_3 = \left(\dfrac{\partial q_{x_1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial q_{x_2}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial q_{x_3}}{\partial x_3}\right) dx_1dx_2dx_3\,\triangle t = (\nabla\vec{q})\, dv\,\triangle t = \nabla(-k\nabla T)\, dv\,\triangle t$

По закону сохранения энергии: $dQ_1 = dQ_2 + dQ_3$

$c\rho\, dv\,\dfrac{\partial T}{\partial t}\triangle t + \nabla(-k\nabla T)\, dv\triangle t = F(x,t)\, dv\triangle t$ ($:dv\ \triangle$ t)

$c\rho\,\dfrac{\partial T}{\partial t} + \nabla(-k\nabla T) = F(x,t)$

Если среда однородная, то c, ρ, k — константы, и тогда:

$c\rho\,\dfrac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T = F(x,t)$

$\Delta T - \dfrac{c\rho}{k}\,\dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{F(x,t)}{k}$ - *уравнение теплопроводности (уравнение Фурье)*

Это уравнение справедливо во всех точках внутри рассматриваемого тела. Температура зависит от координат точки и времени

Если тепловое явление стационарно (нет зависимости от времени), то $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$ и если нет внутренних источников тепла, то $\Delta T = 0$ - *уравнение Лапласа*

Для полного описания процесса распространения тепла необходимо задать начальное распределение температуры в теле (начальные условия) и режим на границе (граничные условия)

Примеры граничных условий:

1. На границе S поддерживается заданное распределение температуры:

   $$T\Big|_S = T_0$$

2. На границе S поддерживается заданный поток тепла q:

   $$\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S = -\frac{q}{k}$$

3. На границе S происходит теплообмен по закону Ньютона:

   $$-k\,\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S = \lambda(T - T_{\text{ср}})\Big|_S$$

   $-k\,\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S$ - количество тепла, уходящего через границу, $\lambda(T - T_{\text{ср}})\Big|_S$ - количество тепла, которое среда принимает, λ - коэффициент теплопроводности среды.

   $$\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S + h\,T\Big|_S = h\,T_{\text{ср}}, \quad h = \frac{\lambda}{k}$$

4. Граница S является границей раздела двух сред:

   $$k_1\frac{\partial T_1}{\partial n}\Big|_S = k_2\frac{\partial T_2}{\partial n}\Big|_S, \quad T_1\Big|_S = T_2\Big|_S$$

5. Другие условия

2.5 Уравнение диффузии

Уравнение выводится аналогично уравнению теплопроводности:

$$\Delta w - \frac{1}{D}\,\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{F(x,t)}{D}$$

w - плотность частиц в точке x в момент времени t
D - коэффициент диффузии

2.6 Уравнение электростатики

Это уравнение относится к уравнениям эллиптического типа

Предположим, что в пространстве распределен электрический заряд с плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$
Этот заряд создает электрическое поле, которое характеризуется вектором напряженности $\vec{E}$

Известно, что поле является потенциальным, то есть $\vec{E} = -\operatorname{grad} u$, $u = u(x, y, z)$ - электрический потенциал

Потенциал поля в точке x - скалярная величина, численно равная потенциальной энергии П единичного положительного заряда, помещенного в эту точку: $u = \dfrac{\Pi}{q}$

Электростатическое поле, каждая точка которого характеризуется некоторым потенциалом - пример потенциального поля

Выделим малый элемент объема со средней точкой $M(x, y, z)$ со сторонами dx, dy, dz: $dv = dxdydz$

Вычислим поток вектора $\vec{E}$ через поверхность объема dv:

$$E_x\Big|_{x+\frac{dx}{2}} dydz - E_x\Big|_{x-\frac{dx}{2}} dydz + E_y\Big|_{y+\frac{dy}{2}} dxdz - E_y\Big|_{y-\frac{dy}{2}} dxdz + E_z\Big|_{z+\frac{dz}{2}} dxdy - E_z\Big|_{z-\frac{dz}{2}} dxdy = \operatorname{div} \vec{E}\, dv$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса, поток через замкнутую поверхность пропорционален заряду, заключенному в этом объеме:

$\operatorname{div} \vec{E}\, dv = 4\pi\rho(x, y, z)\, dv$

$\Delta u = -4\pi\rho(x, y, z)$ - *уравнение Пуассона*

2.7 Замечания

Уравнения эллиптического типа обычно получаются при исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и проч.)

Наиболее распространенным является уравнение Лапласа: $\Delta u = 0$

Функция u называется *гармонической в области D*, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа

Задачи, приводящие к уравнению Лапласа:

1. Задача о равновесии мембраны
2. Стационарная задача теплопроводности

   Если процесс стационарен, то устанавливается распределение температуры $u(x, y, z)$, не меняющееся с течением времени, т.е. $\Delta u = 0$

   Если есть источники тепла, то $\Delta u = -\dfrac{F}{k}$

   F - плотность тепловых источников

   k - коэффициент теплопроводности
3. Уравнение электростатики

   $\triangle u = 0$, $(\rho = 0)$

2.8 Общие решения некоторых дифференциальных уравнений

1. Уравнение $y'' + \lambda y = 0$

$$y = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x);$$

2. Уравнение $y'' - \lambda y = 0$

$$y = C_1 \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}x) = D_1 \exp(\sqrt{\lambda}x) + D_2 \exp(-\sqrt{\lambda}x);$$

3. Уравнение Бесселя (цилиндр) $(xy')' + (\lambda x + n^2/x)y = 0$

$$y = C_1 J_n(\sqrt{\lambda}x) + C_2 Y_n(\sqrt{\lambda}x);$$

4. Модифицированное уравнение Бесселя (цилиндр) $(xy')' - (\lambda x + n^2/x)y = 0$

$$y = C_1 I_n(\sqrt{\lambda}x) + C_2 K_n(\sqrt{\lambda}x);$$

5. Уравнение $(x^2y')' + \lambda x^2 y = 0$

$$y = C_1 \tfrac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{x} + C_2 \tfrac{\cos(\sqrt{\lambda}x)}{x};$$

6. Уравнение $(x^2y')' - \lambda x^2 y = 0$

$$y = C_1 \tfrac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)}{x} + C_2 \tfrac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}x)}{x};$$

7. Уравнение Эйлера $(x^2y')' - n(n+1)y = 0$

$$y = C_1 x^n + C_2 x^{-n-1};$$

8. Уравнение $(xy')' + \lambda \frac{y}{x} = 0$

$$y = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} \ln x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} \ln x);$$

9. Уравнение $(xy')' - \lambda \frac{y}{x} = 0$

$$y = C_1 x^{\sqrt{\lambda}} + C_2 x^{\sqrt{-\lambda}};$$

2.9 Простейшие свойства δ-функции

Определение:

$$\int\limits_a^b f(x)\delta(x-\xi)\,dx = \begin{cases} f(\xi), \text{если } x \in [a,b] \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Решение уравнения с δ-функцией в правой части

$$(p(x)y')' + q(x)y = \delta(x-\xi), x, \xi \in [a,b],$$

"склеивается"из двух решений однородного уравнения $(p(x)y')' + q(x)y = 0$. Одно решение y_1-задано на отрезке $[a,\xi]$ и удовлетворяет граничному условию в точке a, другое - y_2 - задано на отрезке $[\xi,b]$ и удовлетворяет граничному условию в точке b. В точке ξ выполняются условия $y_1(\xi) = y_2(\xi)$ (непрерывность) и $y_1'(\xi) - y_2'(\xi) = 1/p(\xi)$ (скачок производной). Всего, таким образом, имеется 4 условия, из которых однозначно определяются 4 постоянные в выражениях для y_1 и y_2.
Ряд Фурье δ-функции по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля:

$$\delta(x-\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{X_k(\xi)}{\|X_k\|^2} X_k(x)$$

Глава 3

Метод Фурье

3.1 Уравнение с разделяющимися переменными

Метод Фурье разделения переменных является наиболее распространенным методом решения задач с уравнениями в частных производных. Решение будет успешным, если уравнение задачи будет линейным

Дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными x и y в частных производных второго порядка $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}) = 0$ есть *линейное*, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно функции u и ее первых производных:

$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0$

$a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ - функции только аргументов x и y

Если $f = 0$, то уравнение *однородное*

Именно линейные дифференциальные уравнения занимают особое место в теории дифференциальных уравнений, так как теория для них хорошо разработана, а сами они описывают множество реальных процессов в физике и технике

$L(u) = a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = 0$ - *линейный дифференциальный оператор*, коэффициенты уравнения - функции от x и y

$L(u) = 0$ - запись однородного уравнения

$L(u) = f(x)$ - запись неоднородного уравнения

Принцип суперпозиции:

Если каждая из функций $u_1, \ldots, u_n$ является решением однородного уравнения $L(u) = 0$, то и их линейная комбинация является решением этого уравнения, то есть $u = c_1u_1 + \ldots + c_nu_n$, $c_1, \ldots, c_n$ - произвольные константы

Проверим, что это так, учитывая правила дифференцирования:

$L(u) = L(c_1u_1 + \ldots + c_nu_n) = L(c_1u_1) + \ldots + L(c_nu_n) = c_1L(u_1) + \ldots + c_nL(u_n) = c_1 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 = 0$

Обобщенный принцип суперпозиции:

Если каждая из функций $u_1, u_2, \ldots$ является решением однородного дифференциального уравнения, то сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_nu_n = u$ также является решением уравнения $L(u) = 0$ (доказывается аналогично)

В качестве достаточного условия для возможности почленного дифференцирования ряда мы будем пользоваться равномерной сходимостью ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_nL(u_n)$, получаемого в результате дифференцирования

В случае линейного дифференциального уравнения в частных производных можно выбрать бесконечное множество линейно-независимых частных решений. Это позволяет выделить из общего решения то, которое удовлетворяет еще и дополнительным условиям

Будем говорить, что уравнение:

$L(u) = 0 \quad (1)$

относится к классу *уравнений с разделяющимися переменными*, если оно допускает бесконечное множество решений в виде:

$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2)$

$X(x), Y(y)$ получаются путем подстановки (2) в исходное уравнение (1)

Для того, чтобы переменные в уравнении (1) разделялись, нужно, чтобы оператор L имел определенную структуру ,в частности:

$L(u) = L_x(x) + L_y(y) \quad (3)$
где $L_x(u)$ - линейный диффереинциальный оператор от переменной x

Рассмотрим методику разделения переменных:

Пусть уравнение имеет вид (3), подставим решение $u(x, y) = X(x)Y(y)$ в уравнение:
$YL_x(X) + XL_y(Y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{L_x(X)}{X} = -\dfrac{L_y(Y)}{Y} = -\lambda, \quad \lambda = const$ - параметр разделения

Получили обыкновенные дифференциальные уравнения:
$\begin{cases} L_x(X) + \lambda X = 0 \\ L_y(Y) - \lambda Y = 0 \end{cases} \quad (4)$

Решения уравнений (4) зависят от параметра λ и постоянных интегрирования. Таким образом получаем бесконечную совокупность частных решений

Аналогично делятся переменные, если у u больше аргументов: $u = u(x_1, \dots, x_n)$

В задачах математической физики часто встречается уравнение вида $\Delta u = 0$ (или уравнение, куда входит Δu). В лапласиане переменные делятся во многих системах координат (декартовой, сферической, цилиндрической и т.д.), тогда имеет смысл переходить в более удобную для заданных граничных условий систему координат

3.2 Задача Штурма-Лиувилля

В математической физике важны методы, при которых решение получается в виде ряда (или интеграла), то есть в виде разложения по некоторой системе функций

Естественная система функций, по которой можно произвести разложение, получается из задачи Штурма-Лиувилля (ЗШЛ)

Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:
$(p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0 \quad (5)$ (самосопряженная форма)

$p(x), r(x), q(x)$ - вещественные функции от x
$y(x)$ - искомая функция от x

Предполагаем также, что $p(x), p'(x), r(x), q(x)$ - непрерывные на $(a;b)$, $p(x), r(x) > 0$ на $(a;b)$
λ - произвольный параметр

Перепишем (5) в нормальной форме: $y''(x) + \dfrac{p'(x)}{p(x)}\,y'(x) + \left(\lambda\,\dfrac{r(x)}{p(x)} - \dfrac{q(x)}{p(x)}\right)y(x) = 0 \quad (6)$

В (6) коэффициенты тоже непрерывны (следует из непрерывности функций $p(x), p'(x), r(x), q(x)$)

Каждая точка из $(a;b)$ есть обыкновенная точка уравнения (6), концы a, b могут быть как обычными, так и особыми (*сингулярными*)

Если при некотором x_0 хотя бы один из коэффициентов имеет бесконечный разрыв или $p(x_0) = 0$, то говорят, что коэффициенты имеют особенность в точке x_0

$$\begin{array}{l} \alpha_1^2 y(a) + \alpha_2^2 y'(a) = 0 \\ \beta_1^2 y(b) + \beta_2^2 y'(b) = 0 \end{array} \quad (7) \qquad \text{- граничные условия}$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\colon \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\colon \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$

Понятно, что тривиальная функция $y \equiv 0$ удовлетворяет и уравнению задачи, и граничным условиям - тривиальное решение

Требуется найти λ, при которых существует нетривиальное решение, удовлетворяющее уравнению задачи и граничным условиям

Тогда λ называется *собственным числом*, а найденное решение - *собственной функцией*. Множество собственных чисел образует *спектр*

Введем дифференциальный оператор $L* = \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\,\dfrac{d*}{dx}\right) - q(x)\cdot * \quad (8)$

Перепишем уравнение ЗШЛ в операторной форме: $Ly + \lambda r y = 0 \quad (9)$

Введем оператор для граничных условий: $\begin{array}{l} l_1 * = \alpha_1 \cdot *(a) + \alpha_2 \cdot *'(a) \\ l_2 * = \beta_1 \cdot *(b) + \beta_2 \cdot *'(b) \end{array} \quad (10)$

Перепишем граничные условия в операторной форме: $\begin{array}{l} l_1 y = 0 \\ l_2 y = 0 \end{array}$

Задача называется *регулярной*, если:

1. интервал (a, b) конечен и концы интервала - обыкновенные точки уравнения
2. $\frac{p'(x)}{p(x)}; \frac{r(x)}{p(x)}; \frac{q(x)}{p(x)} \not\xrightarrow[x\to a, x\to b]{} \infty$

иначе задача *сингулярная*

Типовые граничные условия:

1. I рода: $\begin{array}{l} y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{array}$

2. II рода: $\begin{array}{l} y'(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{array}$

3. III рода: $\begin{array}{l} -y'(a) + h_a\, y(a) = 0 \\ y'(b) + h_b\, y(b) = 0, \quad h_a, h_b > 0 \end{array}$

4. IV рода: $\begin{array}{l} y(a) = y(b) \\ y'(b) = y'(b) \end{array}$ (периодические условия)

Для сингулярной задачи: если конец (или оба) сингулярен, то ставится условие ограниченности функции y

Пример 1: Решение регулярной задачи Штурма-Лиувилля с граничными условиями первого рода

$y'' + \lambda y = 0, x \in [0, a]$
$y(a) = 0$
$y(b) = 0$

а) $\sqsupset \lambda = 0,$ тогда $y'' = 0 \Rightarrow y(x) = B_0 x + C_0$
$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow C_0 = 0 \\ y(a) = B_0 \cdot a = 0 \rightarrow B_0 = 0 \end{cases}$
то есть λ - не является собственным число

б) $\sqsupset \lambda \neq 0,$ тогда $y(x) = Csin\sqrt{\lambda}x + Dcos\sqrt{\lambda}x$
$\begin{cases} y(0) = Csin\sqrt{\lambda} \cdot 0 + Dcos\sqrt{\lambda} \cdot 0 = 0 \Rightarrow D = 0 \\ y(a) = Csin\sqrt{\lambda} \cdot a + Dcos\sqrt{\lambda} \cdot a = 0 \Rightarrow sin\sqrt{\lambda} \cdot a = 0 \end{cases}$
тогда собственные числа $\lambda_k = (\frac{\pi k}{a})^2$, где k - натуральное число
А собственные функции имеют вид: $y_k(x) = C_k sin\frac{\pi k}{a}x$

Пример 2: Решение регулярной задачи Штурма-Лиувилля с граничными условиями второго рода

$y'' + \lambda y = 0, x \in [0, a]$
$y'(a) = 0$
$y'(b) = 0$

а) $\sqsupset \lambda = 0,$ тогда $y'' = 0 \Rightarrow y(x) = B_0 x + C_0$
$\begin{cases} y'(0) = B_0 = 0 \Rightarrow B_0 = 0 \\ y'(a) = B_0 = 0 \Rightarrow B_0 = 0 \end{cases}$
то есть $\lambda_0 = 0$ - собственное число, $y_0(x) = C_0$ - собственная функция

б) $\sqsupset \lambda \neq 0,$ тогда $y(x) = Ksin\sqrt{\lambda}x + Ecos\sqrt{\lambda}x$
$\begin{cases} y'(0) = -E\sqrt{\lambda}sin\sqrt{\lambda} \cdot 0 + K\sqrt{\lambda}cos\sqrt{\lambda} \cdot 0 = 0 \Rightarrow K = 0 \\ y'(a) = -E\sqrt{\lambda}sin\sqrt{\lambda} \cdot a = 0 \Rightarrow sin\sqrt{\lambda} \cdot a = 0 \end{cases}$
тогда собственные числа $\lambda_k = (\frac{\pi k}{a})^2$, где $k = 1, 2, 3...$
А собственные функции имеют вид: $y_k(x) = E_k cos\frac{\pi k}{a}x$

Пример 3: Разложение функции $f(x) = x$ по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля с граничными условиями II рода

$y'' + \lambda y = 0, x \in [0, a]$
$y'(a) = 0$
$y'(b) = 0$
$r(x) = 1$

Собственные числа: $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = (\frac{\pi n}{a})^2$
Собственные функции: $y_0 = C_0$, $y_n(x) = C_n cos(\frac{\pi n}{a} x)$

Разложение в ряд Фурье:
$f(x) = b_0 \cdot C_0 + \sum_1^\infty b_n \cdot y_n(x)$, где b_k - коэффициенты разложения имеют вид:
$b_0 = \frac{\int\limits_0^a f(x) \cdot r(x) \cdot C_0 dx}{\int\limits_0^a r(x) \cdot C_0^2 dx} = \frac{\int\limits_0^a x dx}{C_0 \int\limits_0^a dx} = \frac{a}{2 \cdot C_0}$
$b_n = \frac{\int\limits_0^a f(x) \cdot r(x) \cdot C_n \cdot cos(\frac{\pi n}{a} x) dx}{\int\limits_0^a r(x) \cdot C_n^2 \cdot cos^2(\frac{\pi n}{a} x) dx} = \frac{\int\limits_0^a x \cdot cos(\frac{\pi n}{a} x) dx}{C_n \int\limits_0^a cos^2(\frac{\pi n}{a} x) dx} = \frac{2 \cdot a^2((-1)^n - 1)}{a \pi^2 n^2} = \frac{2 \cdot a((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} =$

То есть:

$$x = \frac{a}{2} + \sum_1^\infty \frac{-4 \cdot a}{(2 \cdot k + 1)^2} cos(\frac{\pi(2k + 1)}{a})$$

3.3 Некоторые свойства собственных чисел и собственных функций регулярной задачи Штурма-Лиувилля

1. Всякая регулярная задача Штурма-Лиувилля имеет по крайней мере одно собственное число (без доказательства)

2. Всякая регулярная задача Штурма-Лиувилля имеет счетное множество собственных чисел (без доказательства)

3. Все собственные числа регулярной задачи Штурма-Лиувилля вещественны

   Пусть это не так и существует $\lambda = \alpha + i\beta$, которому соответствует собственная функция $y(x) = A(x) + i\,B(x)$

   Так как все коэффициенты уравнения и граничных условий вещественные, то должно существовать комплексно сопряженное собственное значение $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ и соответствующая функция $\overline{y}(x) = A(x) - i\,B(x)$

   Запишем тождества:

$$-\begin{array}{ll|l} (p(x)y'(x))' + (\lambda\, r(x) - q(x))\, y(x) = 0 & \quad | \quad \cdot\, \overline{y}(x) & \displaystyle\int_a^b dx \\ (p(x)\overline{y}'(x))' + (\overline{\lambda}\, r(x) - q(x))\, \overline{y}(x) = 0 & \quad | \quad \cdot\, y(x) & \end{array}$$

$$\int_a^b \left((p(x)y'(x))'\, \overline{y}(x) - (p(x)\overline{y}'(x))'\, y(x) \right) dx + (\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b r(x)y(x)\overline{y}(x)dx = 0$$

$$\underbrace{(p(x)y'(x))'\, \overline{y}(x) - (p(x)\overline{y}'(x))'\, y(x) \Big|_a^b}_{=0} + (\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b r(x)y(x)\overline{y}(x)dx = 0$$

$$2i\beta \int_a^b r(x)(A^2(x) + B^2(x))dx = 0$$

   Так как $A^2(x) + B^2(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \alpha$, то есть, вещественное

4. Спектр регулярной задачи Штурма-Лиувилля дискретный, то есть он состоит из множества собственных чисел, отделенных друг от друга, и не имеет точек сгущения

   (без доказательства)

5. Условиям I, II и III рода соответствует одна собственная функция, условию IV рода - две собственных функции

   (без доказательства)

6. Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля образуют ортогональную систему функций

   Система собственных функций ортогональна на (a, b) с весом $r(x)$ - теорема:

$$\int_a^b r(x)y_k(x)y_n(x)\, dx = \begin{cases} 0,\ k \neq n \\ \|y_k\|^2 = N_k^2,\ k = n \end{cases}$$

7. Все собственные числа регулярной задачи Штурма-Лиувилля ограничены снизу

Пусть λ - собственное число, $y(x)$ - соответствующая собственная функция (пусть вещественная)

Тогда $y(x)$ удовлетворяет уравнению задачи:

$$(p(x)y'(x))' + (\lambda\, r(x) - q(x))\, y(x) = 0 \quad \Big| \quad \cdot\, y(x) \quad \Big| \quad \int\limits_a^b dx$$

$$\int\limits_a^b (p(x)y'(x))'y(x)\, dx + \lambda \int\limits_a^b r(x)y^2(x)\, dx - \int\limits_a^b q(x)y^2(x)\, dx = 0$$

$$p(x)y'(x)y(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b p(x)y'(x)y'(x)\, dx + \lambda \int\limits_a^b r(x)y^2(x)\, dx - \int\limits_a^b q(x)y^2(x)\, dx = 0$$

$$\lambda \int\limits_a^b r(x)y^2(x)\, dx = \int\limits_a^b p(x)y'^2(x)\, dx + \int\limits_a^b q(x)y^2(x)\, dx - p(x)y'(x)y(x)\Big|_a^b$$

При условиях I, II, IV рода последнее слагаемое обращается в ноль, при условии III рода оно неотрицательно:

$$-p(x)\, y'(x)\, y(x)\Big|_a^b = p(b)h_b\, y^2(b) - p(a)h_a\, y^2(a) > 0$$

Также: $\displaystyle\int\limits_a^b p(x)y^2(x)\, dx > 0$

Тогда, отбросив неотрицательные слагаемые:

$$\lambda \int\limits_a^b r(x)y^2(x)\, dx \geqslant \int\limits_a^b q(x)y^2(x)\, dx = \int\limits_a^b \frac{q(x)}{r(x)}\, r(x)y^2(x)\, dx$$

$\dfrac{q(x)}{r(x)}$ непрервна на (a, b), а значит она имеет нижнюю грань:

$$\frac{q(x)}{r(x)} \geqslant m \quad \Rightarrow \quad \lambda \int\limits_a^b r(x)y^2(x)\, dx \geqslant m \int\limits_a^b r(x)y^2(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \lambda \geqslant m$$

3.4 Разложение в ряд по собственным функциям регулярной задачи Штурма-Лиувилля

Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$

Хочется представить $f(x)$ в виде ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \quad (12)$

Допустим, что такое разложение существует и ряд сходится так, что допускает почленное интегрирование. Тогда можно найти коэффициенты разложения:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \quad \Bigg| \quad \cdot\, r(x) y_k(x) \quad \Bigg| \quad \int\limits_a^b dx$$

$$\int\limits_a^b f(x) r(x) y_k(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int\limits_a^b r(x) y_n(x) y_k(x)\, dx = c_k N_k^2$$

$$c_k = \frac{\int\limits_a^b f(x) r(x) y_k(x)\, dx}{N_k^2} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Теорема:

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и удовлетворяет условиям Дирихле: она кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна

Тогда ряд (12) сходится к значению функции $f(x)$ во всех точках непрерывности

В точке разрыва x_0 ряд сходится к $\dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$

Доказательство:

(без доказательства)

3.5 Сингулярная задача Штурма-Лиувилля

$$y'' + \frac{p'}{p} y' - \frac{q}{p} y + \lambda \frac{r}{p} y = 0,$$

В регулярной задаче $\dfrac{p'}{p}, \dfrac{q}{p}, \dfrac{r}{p} \not\to \infty$, $x \to a, b \quad p, r > 0$

Приходится сталкиваться с ЗШЛ, где нарушаются эти условия. Например, пусть в граничных точках $p(a) = 0$, или $p(b) = 0$, или q, r теряют непрерывность и т.д.

В тех граничных точках, где это происходит, нельзя поставить условия $l_1 y = 0$ и $l_2 y = 0$

Точки, в которых происходит нарушение есть *особые точки*

В случае особой точки, граничные условия заменяются на требование ограниченности решения в этой точки

В зависимости от поведения p, q, r может оказаться, что хоть точка и особая, но сохраняются свойства собственных чисел и собственных функций такие, как вещественность, дискретность спектра и ортогональность. Если эти свойства сохраняются, то особая точка называется *правильной особой*; иначе *неправильной особой*

3.6 Общее изложение метода Фурье для случая двух независимых переменных

Задача состоит в нахождении $u(x, y)$, которая удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению:

$L_x(u) + M_y(u) = 0 \quad (14) \quad a < x < b,\ c < y < d$

$L_x(u) = \dfrac{1}{r(x)}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u\right) \qquad M_y(u) = A(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B(y)\dfrac{\partial u}{\partial y} + C(y)u$

$r(x), p(x), q(x) -$ вещественные функции от x

$A(y), B(y), C(y) -$ вещественные функции от y, непрерывные на (c, d), $y \in (c, d)$

$A(y) -$ знакопостоянная

$p(x), p'(x), r(x), q(x) -$ непрерывны на (a, b), $p(x), r(x) > 0$

По переменной x выполняются граничные условия: $\begin{array}{l} l_a u = \left(\alpha_a \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta_a\, u\right)\Big|_{x=a} = 0 \\ l_b u = 0 \end{array} \qquad (15)$

Перепишем (14) в другом виде: $\dfrac{p(x)}{r(x)}\dfrac{\partial u}{\partial x} + A(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, u)$

Такому уравнению соответствует следующая квадратичная форма: $G = \dfrac{p}{r}X^2 + AY^2$

Тип уравнения (14) определяется знаком $A(y)$:

1. Если $A(y) > 0$, то уравнение эллиптического типа

   Условия на концах c, d: $\begin{array}{l} \left(\alpha_c \dfrac{\partial u}{\partial y} + \beta_c\, u\right)\Big|_{y=c} = f_c(x) \\ \left(\alpha_d \dfrac{\partial u}{\partial y} + \beta_d\, u\right)\Big|_{y=d} = f_d(x) \end{array}$

2. $A(y) = 0$, уравнение параболического типа, y - время, условия по y - начальные

   $y \in (c, +\infty) \qquad u\big|_{y=c} = \varphi_0(x)$ (чаще всего $c = 0$) - одно условие

3. $A(y) < 0$, уравнение гиперболического типа, y интерпретируется как время, по y - начальные условия

   $u\big|_{y=c} = \varphi_0(x) \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=c} = \psi_0(x)$ - два условия

Таким образом, (14) - однородная задача математической физики и допускает разделение переменных; условия по x - однородные

Будем искать решение вида $u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (16)$

Подставим (16) в (14):

$Y \cdot L_x(X) + X \cdot M_y(Y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{L_x(X)}{X} = -\dfrac{M_y(Y)}{Y} = -\lambda = \text{const}$

$\begin{cases} L_x(X) + \lambda X = 0 \text{ - это в явном виде уравнение Штурма-Лиувилля с граничными условиями} \\ M_y(Y) - \lambda Y = 0 \text{ первого рода } (l_a(x) = 0,\ l_b(x) = 0) \end{cases}$

По x для X имеем однородные граничные условия из (15), то есть имеем регулярную задачу Штурма-Лиувилля, откуда определяем X_n, λ_n

Подставим λ_n во второе уравнение: $M_y(Y) - \lambda_n Y = 0 \quad (17)$

Для определенности будем считать, что $A(y) < 0$, тогда:
$Y_n(y) = C_n\, Y_{n_1}(y) + D_n\, Y_{n_2}(y) \quad Y_{n_1}, Y_{n_2}$ - линейно-независимые решения ДУ (то есть, $W[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \neq 0$)

Получили бесконечную совокупность частных решений:
$u_n = Y_n(y)X_n(x) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (C_n\, Y_{n_1}(y) + D_n\, Y_{n_2}(y))X_n(x) \quad (18)$ - общее решение в виде разложения в ряд Фурье

Постулируем, что ряд (18) имеет такую сходимость, что допускается предельный переход и дифференцирование под знаком суммирования (удовлетворяем условиям по y) :

$$u\Big|_{y=c} = \varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n\, Y_{n_1}(c) + D_n\, Y_{n_2}(c))X_n(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=c} = \psi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n\, Y'_{n_1}(c) + D_n\, Y'_{n_2}(c))X_n(x)$$

Откуда:

$$C_n\, Y_{n_1}(c) + D_n\, Y_{n_2}(c) = \frac{\int\limits_a^b r(x)\varphi_0(x)X_n(x)\,dx}{N_n^2}$$
$$C_n\, Y'_{n_1}(c) + D_n\, Y'_{n_2}(c) = \frac{\int\limits_a^b r(x)\psi_0(x)X_n(x)\,dx}{N_n^2}$$

Определитель этой системы есть вронскиан, который отличен от нуля из-за линейной независимости Y_{n_1} и Y_{n_2}:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_{n_1}(c) & Y_{n_2}(c) \\ Y'_{n_1}(c) & Y'_{n_2}(c) \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда система разрешима относительно C_n и D_n

Глава 4

Неоднородные задачи математической физики

Существует класс задач, который описывается неоднородными уравнениями и неоднородными дополнительными (граничными) условиями, то есть правые части которых есть некоторые функции. Левые части уравнений и условий сохраняют структуру однородной задачи

Будет рассмотрено два метода: приведения к однородной задаче и метод конечных интегральных преобразований (Гринберга)

4.1 Метод приведения к однородной задаче

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных:

$$L_x(u) + M_y(u) = f(x,y)$$
$$L_x(u) = \frac{1}{r(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)\,u\right) \quad p,q,r \text{ заданы и непрерывны на } [a,b]$$
$$M_y(u) = A(y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B(y)\,\frac{\partial u}{\partial y} + C(y)\,u \quad A \text{ знакопостоянна, } A,B,C \text{ непрерывны на } [c,d]$$
$$l_a(u) = \left.\left(\alpha_a\,\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_a u\right)\right|_{x=a} = f_a(y) \quad l_b(u) = \left.\left(\alpha_b\,\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_b u\right)\right|_{x=b} = f_b(y)$$

l_a и l_b есть граничные условия

Если $F \not\equiv 0$, то уравнение неоднородное
Если $f_a \neq 0$ или $f_b \neq 0$, то условия неоднородные

Будем искать общее решение в виде: $u(x,y) = u_{однород}(x,y) + u_{частн}(x)$
Подставим в уравнение:

$$L_x(u_{частн}) + L_x(u_{однород}) + M_y(u_{однород}) = F(x)$$

Разобъем на две подзадачи, однородную и неоднородную:

$$L_x(u_{однород}) + M_y(u_{однород}) = 0 \quad l_a(u_{однород}) = 0 \quad l_b(u_{однород}) = 0 \quad \left.u_{однород}\right|_{y=c} = u(x,c) - u_{част}(x)$$
$$L_x(u_{частн}) = F(x) \qquad l_a(u_{частн}) = f_a \quad l_b(u_{частн}) = f_b$$

Таким образом, вместо уравнения в частных производных имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения, решая которые найдем общее решение

Пример

Изучить колебания струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$, вызванные внезапно приложенной нагрузкой, распределенной с постоянной плотностью q по длине струны и остающейся в дальнейшем неизменной. В начальный момент времени струна находилась в покое

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q}{T} \qquad T \text{ - натяжение струны}$$

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad u\Big|_{x=l} = 0 \quad u\Big|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

Пусть $u = u_{част}(x) + u_{одн}(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u_{част}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{одн}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 u_{част}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_{одн}}{\partial t^2}\right) = -\frac{q}{T}$$

$$\frac{\partial^2 u_{одн}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u_{одн}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_{част}}{\partial x^2} = -\frac{q}{T}$$

Задача распалась на две:

$$\frac{\partial^2 u_{одн}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u_{одн}}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u_{част}}{\partial x^2} = -\frac{q}{T}$$

$$u_{одн}\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0 \qquad u_{част}\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0$$

$$u_{одн}\Big|_{t=0} = -u_{част}(x)$$

$$\frac{\partial u_{одн}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

Найдем сначала частное решение неоднородного уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_{част}}{\partial x^2} = -\frac{q}{T} \qquad u_{част}\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0$$

$$u'_{част} = -\frac{qx}{T} + c_1$$

$$u_{част} = -\frac{qx^2}{2T} + c_1 x + c_2$$

$$u_{част}\Big|_{x=0} = c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{част} = -\frac{qx^2}{2T} + c_1 x$$

$$u_{част}\Big|_{x=l} = -\frac{ql^2}{2T} + c_1 l = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{ql}{2T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_{част} = -\frac{qx^2}{2T} + \frac{qlx}{2T}}$$

Найдем общее решение однородного уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_{одн}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u_{одн}}{\partial t^2} = 0 \qquad u_{одн}\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0 \qquad u_{одн}\Big|_{t=0} = -u_{част} \qquad \frac{\partial u_{одн}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

$$u_{одн} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{\pi n v t}{l}\,\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$u_{одн}\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{\pi n x}{l} = u_{част}$$

Получили разложение $u_{част}$ в ряд Фурье; найдем коэффициенты разложения:

$$B_n = \int_0^l u_{част}\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}\cdot 1\cdot dx \;\Big/\; \int_0^l \sin^2\frac{\pi n x}{l}\cdot 1\cdot dx = \int_0^l u_{част} X_n dx\cdot\frac{2}{l}$$

Из соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0 \quad\Rightarrow\quad X_n = \frac{X_n''}{\lambda_n} \quad\Rightarrow\quad B_n = \frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l u_{част} X_n'' dx$$

Решаем по частям:

$$\frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l u_{част} X_n'' dx = \frac{2}{l\lambda_n}\Bigg(\underbrace{u_{част}\,X_n'\Big|_0^l}_{=0} - \int_0^l u_{част}'\,X_n'\,dx\Bigg) = -\frac{2}{l\lambda_n}\Bigg(\underbrace{u_{част}'\,X_n\Big|_0^l}_{=0} - \int_0^l \underbrace{u_{част}''}_{=-q/T}\,X_n\,dx\Bigg) =$$

$$= \frac{2ql}{l\lambda_n T\pi n}\,\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l = \frac{2q}{\lambda_n T\pi n}((-1)^n - 1) = -\frac{4q}{\lambda_{2k+1}T\pi(2k+1)} \qquad n = 2k+1$$

Тогда:

$$u_{одн} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4q}{\lambda_{2k+1}T\pi(2k+1)}\cos\frac{\pi(2k+1)vt}{l}\,\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}$$

$$u = -\frac{qx^2}{2T} + \frac{qlx}{2T} - \frac{4ql^3}{T\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\frac{\pi(2k+1)vt}{l}\,\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}$$

4.2 Метод Гринберга

4.2.1 Изложение метода Гринберга

Это обобщение метода Фурье для неоднородной задачи

Рассмотрим уравнение $L_x(u) + M_y(u) = F(x,y) \quad (1) \quad a < x < b, c < y < d$

$$L_x(u) = \frac{1}{r(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u \right)$$

$$M_y(u) = A(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B(y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(y)u$$

Интервал $[a,b]$ - конечный, $p(x), p'(x), q(x), r(x)$ - непрерывны на $[a,b]$, $p(x) > 0$, $r(x) > 0$

Возможные условия на u по x :

$$\begin{array}{ll} u\Big|_{x=a} = f_a(y) & u\Big|_{x=b} = f_b(y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = f_a(y) & \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=b} = f_b(y) \\ \left(-\dfrac{\partial u}{\partial x} + h_a\, u\right)\Big|_{x=a} = f_a(y) & \left(-\dfrac{\partial u}{\partial x} + h_b\, u\right)\Big|_{x=b} = f_b(y) \end{array} \qquad (2)$$

Возможные условия на u по y :

$$\begin{array}{ll} u\Big|_{y=c} = \varphi_c(x) & u\Big|_{y=d} = \varphi_d(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=c} = \psi_c(x) & \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=d} = \psi_d(x) \\ \left(-\dfrac{\partial u}{\partial y} + h_c\, u\right)\Big|_{y=c} = \varphi_c(x) & \left(-\dfrac{\partial u}{\partial y} + h_d\, u\right)\Big|_{y=d} = \varphi_d(x) \end{array}$$

Если $A(y) > 0$, то уравнение эллиптического типа
Если $A(y) < 0$, то уравнение гиперболического типа
Если $A(y) = 0$, то уравнение параболического типа

Рассмотрим следующую задачу Штурма-Лиувилля, связанную с нашей задачей:
$L_x(X) + \lambda X = 0$ + граничные условия

То же самое в явном виде: $(pX')' + (\lambda r - q)X = 0$ + граничные условия

При сделанных предположениях эта задача регулярна, а значит можно найти вещественные X_n и дискретный спектр λ_n и $\displaystyle\int_a^b r(x) X_n X_m \, dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ N_n^2, m = n \end{cases}$

Произвольную функцию можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

Идея метода Гринберга заключается в том, чтобы искать решение задачи в виде ряда:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(y)\,X_n(x)\quad u_n(y)=\frac{\int\limits_a^b u(x,y)r(x)X_n(x)dx}{N_n^2}=\frac{\overline{u}_n(y)}{N_n^2}$$

Покажем, что исходя из первоначальных уравнений задачи, можно получить уравнения для функции $\overline{u}_n(y)$ (будем называть ее *трансформантой*)

Умножим уравнение (1) на $r(x)X_n(x)$ и проинтегрируем по x от a до b:

$$\int\limits_a^b X_n r(x)\frac{1}{r(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u(x,y)\right)dx+\int\limits_a^b M_y(u)r(x)X_n\,dx=\int\limits_a^b F(x,y)r(x)X_n dx$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\int\limits_a^b X_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u(x,y)\right)dx=X_n\,p(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_a^b-\int\limits_a^b X_n'\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx-\int\limits_a^b X_n\,q(x)u(x,y)dx=$$

$$=X_n\,p\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_a^b-X_n'\,p(x)u(x,y)\bigg|_a^b+\int\limits_a^b\underbrace{(X_n'\,p(x))_x'u-X_nqu(x,y))}_{-\lambda_n r(x)X_n}dx$$

Подставим обратно:

$$p(x)\left(x_n\frac{\partial u}{\partial x}-X_n'u(x,y)\right)\bigg|_a^b-\lambda_n\int\limits_a^b r(x)X_nu(x,y)dx+M_y\left(\int\limits_a^b r(x)X_nu(x,y)dx\right)=F_n(y)$$

Получили уравнение для трансформант:

$$M_y(\overline{u}_n(y))-\lambda_n\overline{u}_n(y)=F_n(y)-p(x)\left(x_n\frac{\partial u}{\partial x}-X_n'u(x,y)\right)\bigg|_a^b$$

Относительно $\overline{u}_n(y)$ это обыкновенное дифференциальное уравнение

Для различных условий (2) видно, что $p(x)\left(x_n\frac{\partial u}{\partial x}-X_n'u(x,y)\right)\bigg|_a^b$ есть известная функция

Аналогичным образом трансформируем условия по y

4.2.2 Общая схема решения задачи методом Гринберга

1. Составить соответствующее однородную задачу:

   $L_x(u) + M_y(u) = 0 \qquad l_a(u) = 0,\ l_b(u) = 0$

   Методом Фурье разделения переменных сводим к задаче Штурма-Лиувилля, откуда получаем собственные числа λ_n, собственные функции $X_n(x)$. Можно сразу вычислить квадрат нормы N_n^2

2. Составить уравнение для трансформант $\overline{u}_n(y)$

3. Трансформировать условия по y:

   $$\int\limits_a^b (\text{условия по } y) r(x) X_n(x) dx$$

4. Решить уравнение из пункта 2, используя условия из пункта 3

5. Записать ответ в виде:

   $$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{u}_n(y) X_n(x)}{N_n^2}$$

4.2.3 Связь метода Гринберга с методом Фурье разделения переменных

Пусть в рассмотренной задаче $F(x,y) = 0,\ f_a(y) = 0,\ f_b(y) = 0$

Таким образом, задача уже однородная и тогда $F_n(y) = 0$ и, так как граничные условия тоже однородны (=0), $M_y(\overline{u}_n)\lambda_n\overline{u}_n = 0$

Это уравнение совпадает со вторым уравнением, полученным при делении переменных в однородной задаче по методу Фурье. Таким образом, однородная задача может быть решена как методом Фурье, так и методом Гринберга; неоднородная - только методом Гринберга

4.2.4 Замечания о сходимости рядов, полученных методом Гринберга

Пусть $u(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(y) X_n(x) \quad (1)$ - решение неоднородной задачи

Если $f_a(y) \neq 0, f_b(y) \neq 0$ (или лишь одна из них), то имеет место неравномерная сходимость ряда (1) на промежутке $[a;b]$

Допустим, что ряд (1) сходится вплоть до точки $x = a$, тогда:

$$\lim_{x\to a} u = 0 = \lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) X_n(a)$$

Но это невозможно, так как $f_a(y) \neq 0$ для $[a;b)$

Аналогично для $(a;b]$: $\lim\limits_{x\to b} u = 0 = \lim\limits_{x\to b} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(y) X_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(y) X_n(b)$

Что невозможно, так как $f_b(y) \neq 0$ для $(a;b]$

Следует отметить, что на промежутке $(a;b)$ все нормально. Таким образом, если граничные условия неоднородные, то имеет место неравномерная сходимость ряда (1). Так получается из-за того, что в ряде (1) мы пытаемся разложить функцию, удовлетворяющую неоднородным условиям, по функциям, удовлетворяющим однородным условиям

4.2.5 Способы улучшения сходимости

Рассмотрим вспомогательную функцию $u^*(x,y) \in C^{(2)}(a;b)$ и удовлетворяющую условиям:

$$u^*\Big|_{x=a} = f_a(y) \quad u^*\Big|_{x=b} = f_b(y)$$

За исключением этих требований u^* может быть вполне произвольной

Разложим u^* в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля:

$$u^* = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(y) X_n(x) \qquad (2) \qquad u_n^*(y) = \frac{\int\limits_a^b u^* \, r(x) \, X_n(x) dx}{N_n^2} \quad a < x < b$$

Ясно, что ряд (2) обладает такой же сходимостью, что и (1). Перепишем его:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) X_n(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^* X_n}_{\substack{\text{медленно}\\ \text{сходится}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_n^*) X_n}_{\substack{\text{хорошо}\\ \text{сходится}}} \quad (3)$$

Имеем функцию $w = u - u^* : \; w\Big|_{x=a} = 0, \; w\Big|_{x=b} = 0$

Ряд (3) дает улучшение сходимости, так как сумма ряда (2) нам известна, а второй ряд справа хорошо сходится, так как функция w удовлетворяет однородным условиям

Пусть условия I рода, тогда u^* можно взять линейной относительно x:

$$u^* = f_a(y) + \frac{x-a}{b-a} \left(f_b(y) - f_a(y) \right)$$

Если условия II рода:

$$u^* = f_a(y)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} \left(f_b(y) - f_a(y) \right)$$

Пример

Пусть имеется плохосходящийся ряд:

$$u = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \, n}{n^2+1} \sin nx \quad 0 < x < \pi$$

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n} + \frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n^2 - 1}{n(n^2+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n^2+1)}$$

Тогда:

$$u = \underbrace{\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx}_{= x/\pi, \, x \in (0;\pi)} - \underbrace{\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+1)} \sin nx}_{\text{быстро сходится}}$$

Глава 5

Специальные функции

В ряде случаев, при использовании метода Фурье разделения переменных или метода Гринберга, при решении задач в сферических или цилиндрических координатах, мы приходим к так называемым *специальным функциям - цилиндрическим или сферическим*

Специальными (высшими трансцендентными) функциями называются все неэлементарные функции

Характерная особенность их состоит в том, что многие из них являются решениями уравнений вида:

$L(y) + \lambda r(x) = 0 \quad (1) \quad a < x < b,\ c < y < d$

$L(y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\,\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) - q(x)\,y \quad p(x) \geqslant 0,\ q(x) \geqslant 0$

$p(x)$ обращается в ноль, по крайней мере, на одном из концов интервала

Если хотим поставить краевую задачу для (1), то на одном или обоих концах $[a; b]$, где $p(x)$ обращается в ноль, будем требовать ограниченность решения уравнения (1)

5.1 Цилиндрические функции

Рассмотрим уравнение:

$$(xy')' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) xy = 0 \quad (2)$$

Или в другом виде, после раскрытия производной и деления на x:

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (2a)$$

Или, после умножения на x^2:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0 \quad (2b)$$

Эти уравнения есть разные виды *уравнения Бесселя ν-го порядка*

ν есть заданное число; может быть целым, вещественным или комплексным (при этом считается, что действительная часть его неотрицательна)

Так как в $x = 0$ уравнение (2) имеет регулярную особую точку, то, согласно теории дифференциальных уравнений, решение будем искать в виде обощенного степенного ряда:

$y = x^\delta(a_0 + a_1 x + \ldots) \quad (3) \quad a_0 \neq 0$

Тогда:

$xy' = x^\delta(a_0\delta + a_1(\delta+1)x + a_2(\delta+2)x^2 + \ldots)$

$x^2y'' = x^\delta(a_0\delta(\delta-1) + a_1(\delta+1)\delta x + a_2(\delta+2)(\delta+1)x^2 + \ldots)$

Подставим в (2b) и соберем члены с одинаковыми степенями x:

$x^\delta(a_0\delta^2 - a_0\nu^2) + x^{\delta+1}(a_1(\delta+1)^2 - a_1\nu^2) + x^{\delta+2}(a_2(\delta+2)^2 - a_2\nu^2 + a_0) + \ldots +$

$+ x^{\delta+n}(a_n(\delta+n)^2 - a_n\nu^2 + a_{n-2}) + \ldots = 0$

Для того, чтобы ряд (3) был решением, нужно:

$$\begin{cases} a_0(\delta^2 - \nu^2) = 0 \\ a_1((\delta+1)^2 - \nu^2) = 0 \\ a_2((\delta+2)^2 - \nu^2) + a_0 = 0 \\ \ldots \\ a_n((\delta+n)^2 - \nu^2) + a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Так как $a_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = \pm\nu$

Возьмем $\delta = \nu$, тогда из второго равенства: $a_1 = 0$ и далее:

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(\delta+n)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{n-2}}{(2\nu+n)n} \quad n = 2, 3, \ldots$$

Рассмотрим четные и нечетные члены:

$a_{2k+1} = 0$ при любых целых неотрицательных k (так как выражается через a_1)

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{(2\nu+2k)2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(\nu+k)(\nu+k-1)\ldots(\nu+1)k!}$$

Пусть $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}$: $\quad a_{2k} = \dfrac{(-1)^{2k}}{2^{2k+\nu}\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}$

Таким образом, построили формальное решение уравнения Бесселя в виде обобщенного степенного ряда: $\quad y = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \quad (5)$

Ряд (5) определяет собой некоторую функцию, которая называется *функцией Бесселя I рода (цилиндрической)*; обозначается $J_\nu(x)$

5.1.1 Сходимость функции Бесселя I рода

Обозначим за y_k общий член ряда: $y_k = \dfrac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$

Рассмотрим отношение:

$$\left|\frac{y_{k+1}}{y_k}\right| = \left|\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2+\nu}}{(k+1)!\,\Gamma(k+\nu+2)} \cdot \frac{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}\right| = \left|\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{(k+1)(k+\nu+1)}\right|$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{(k+1)(k+\nu+1)}\right| = 0 \quad |x| < \infty$$

Тогда, по признаку Даламбера, ряд (5) сходится при любых конечных x, причем сходимость будет равномерная

Таким образом, $J_\nu(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$ определяет некоторую функцию комплексного переменного x, регулярную в области $|z| < \infty$, $|\arg z < \pi|$ с разрезом $(-\infty; 0)$

Покажем, что этот ряд действительно есть решение уравнения (2a):

Продифференцируем его (равномерно сходящийся ряд можно почленно дифференцировать):

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)\, x^{2k+\nu-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)\, 2^{2k+\nu}}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)\,(2k+\nu-1) x^{2k+\nu-2}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)\, 2^{2k+\nu}}$$

Подставим в уравнение (2a):

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k (2k+\nu)\,(2k+\nu-1)\, x^{2k+\nu-2}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)\, 2^{2k+\nu}} + \frac{(-1)^k (2k+\nu)\, x^{2k+\nu-2}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)\, 2^{2k+\nu}} - \; - \frac{\nu^2\,(-1)^k (2k+\nu)\, x^{2k+\nu-2}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)\, 2^{2k+\nu}}\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)\, 2^{2k+\nu}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)\, x^{2k+\nu-2}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)\, 2^{2k+\nu}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)\, 2^{2k+\nu}} =$$

В первой сумме можно заменить нижний предел суммирования с $k = 0$ на $k = 1$, так как при $k = 0$ сумма обращается в ноль; в первой сумме перейдем к переменной суммирования m: $k = m + 1$:

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} 4(m+1)(m+1+\nu)\, x^{2m+2+\nu-2}}{(m+1)!\,\Gamma(m+1+\nu+1)\, 2^{2m+2+\nu}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)\, 2^{2k+\nu}} =$$

$$= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m+\nu}}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)\, 2^{2m+\nu}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)\, 2^{2k+\nu}} = 0$$

Что и требовалось доказать

5.1.2 Функция Бесселя II рода

Так как уравнение (2) есть дифференциальное уравнение второго порядка, то его решение выражается как $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, где y_1 и y_2 линейно-независимые

Если ν нецелое, то в качестве второго линейно-независимого решения берем функцию:
$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{k!\,\Gamma(k-\nu+1)}$$
Но если ν целое, то $J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} = (-1)^n J_{-n}(x)$, то есть они линейно-зависимы

При целочисленном ν $J_n(x)$ есть функция регулярная везде на плоскости (целая функция)

Тогда будем строить второе решение так:

Предположим, что ν нецелое и введем в рассмотрение функцию Бесселя II рода:
$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$
Эта функция линейно-независима с функцией Бесселя I рода

$Y_n(z) = \lim\limits_{\nu\to n} Y_\nu(z)$ - для целых значений ν

Так как и числитель и знаменатель есть целые по ν функции, то такой предел существует и может быть вычислен по правилу Лопиталя:
$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\left.\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n} - \frac{(-1)^n}{\pi}\left.\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}$$

Покажем, что $Y_n(z)$ удовлетворяет уравнению (2a):
$$L(J_\nu) = J''_\nu + \frac{J'_\nu}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu \equiv 0$$
$$L(J_{-\nu}) = J''_{-\nu} + \frac{J'_{-\nu}}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_{-\nu} \equiv 0$$

Продифференцируем по ν :
$$\left.\begin{array}{ll} L\left(\dfrac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right) - \dfrac{2\nu}{x^2} J_\nu = 0 & \Big| \quad \cdot\,\dfrac{1}{\pi} \\ L\left(\dfrac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right) - \dfrac{2\nu}{x^2} J_{-\nu} = 0 & \Big| \quad \cdot\,\dfrac{(-1)^n}{\pi} \end{array}\right| \quad -$$
$$\frac{1}{\pi} L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right) - \frac{(-1)^n}{\pi} L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right) - \frac{2\nu}{\pi x^2}(J_\nu - (-1)^n J_{-\nu}) = 0 \quad \Big| \quad \cdot \lim_{n\to\nu}$$
$$L\underbrace{\left(\lim_{\nu\to n}\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)\right)}_{=Y_n} - \frac{2n}{\pi x^2}(\underbrace{J_n - (-1)^n J_{-n}}_{=0}) = 0$$

$L(Y_n) = 0,$ то есть Y_n - решение

Таким образом, решением уравнения Бесселя n-го порядка при целочисленных ν является:
$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$

$Y_n(x)$ можно записать в виде ряда:
$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} J_n(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{kn} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

При $x \to 0$ справедливы асимптотические формулы:
$$J_n(x) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \Rightarrow \quad J_0(0) = 1,\ J_n(0) = 0$$
$$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} \qquad Y_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad Y_n(z) \underset{z \to 0}{\to} \infty$$

5.1.3 Асимптотическое представление цилиндрических функций для больших значений аргументов

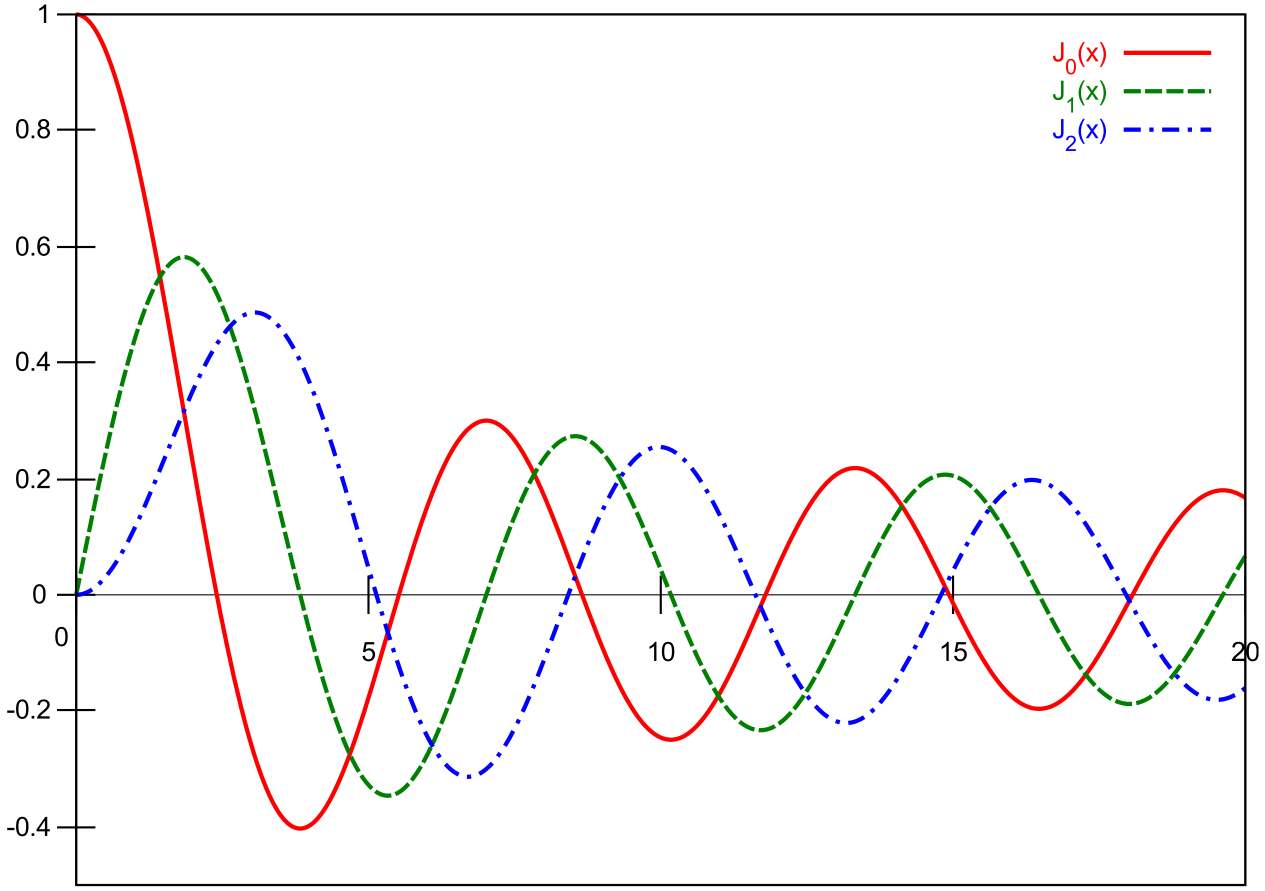
Рассмотрим дифференциальное уравнение:
$$u'' + \frac{u'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) u = 0 \quad (2a)$$
Если $u = \dfrac{w}{\sqrt{z}}$, то: $\quad u' = \dfrac{w'}{\sqrt{z}} - \dfrac{w}{2\sqrt{z}^3} \qquad u'' = \dfrac{w''}{\sqrt{z}} - \dfrac{w'}{\sqrt{z^3}} + \dfrac{3w}{4\sqrt{z}^5}$

Подставим в уравнение: $\quad w'' + \left(1 + \dfrac{1/4 - \nu^2}{x^2}\right) w = 0 \quad (*)$

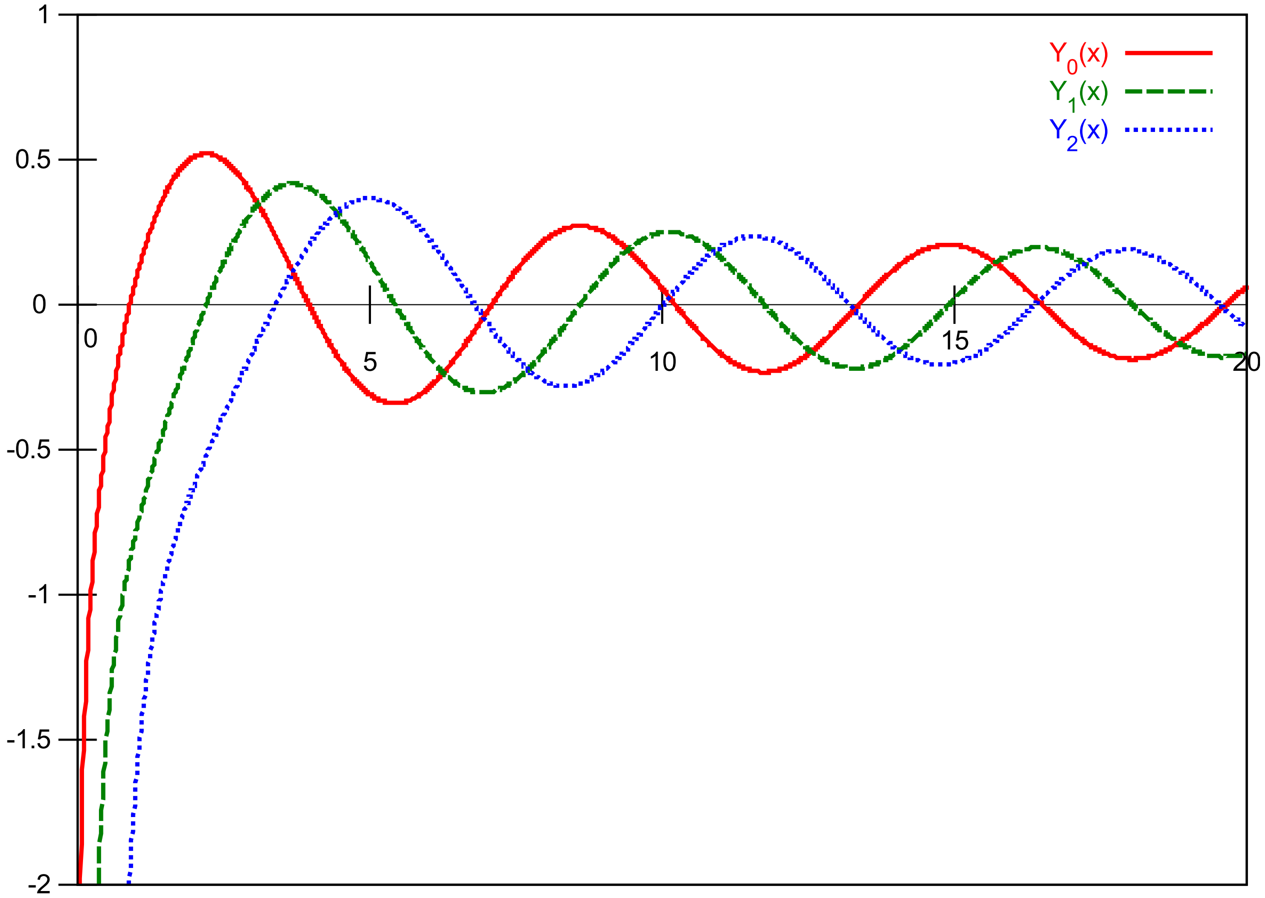
Если ν фиксированное и $|x| \to \infty$, то уравнение $(*)$ примет вид:
$w'' + w = 0$

Это эталонное уравнение для функций Бесселя, его решением будет функция:
$$w = A \cos x + B \sin x = \frac{\overline{A} e^{ix} + \overline{B} e^{-ix}}{\sqrt{x}}$$

$A, \overline{A}, B, \overline{B}$ зависят от ν и от вида рассматриваемой цилиндрической функции:
$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)$$
$$Y_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)$$



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0
5
10
15
20
J0(x)
J1(x)
J2(x)



1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
5
10
15
20
Y0(x)
Y1(x)
Y2(x)

5.1.4 Уравнения Бесселя с параметром

Рассмотрим уравнение, полученное из (2) введением параметра λ:
$(xy')' + \left(\lambda - \dfrac{n^2}{x^2}\right) y = 0$

Введем новую переменную $\zeta = x\sqrt{\lambda}$, тогда $y'_x = y'_\zeta \sqrt{\lambda}$, $y''_{xx} = y''_{\zeta\zeta}\lambda$:
$\lambda\, y''_{\zeta\zeta} + \dfrac{y'_\zeta\sqrt{\lambda}}{\zeta}\sqrt{\lambda} + \left(\lambda - \dfrac{n^2\lambda}{\zeta^2}\right) y = 0$

После сокращения λ получили уравнение без параметра:

$y''_{\zeta\zeta} + \dfrac{y'_\zeta}{\zeta} + \left(1 - \dfrac{n^2}{\zeta^2}\right) y = 0$

Его решением будет функция:
$y(\zeta) = c_1 J_n(\zeta) + c_2 Y_n(\zeta)$

Или в старых координатах:
$y(x) = c_1 J_n(\sqrt{\lambda}x) + c_2 Y_n(\sqrt{\lambda}x)$

5.1.5 Задача Штурма-Лиувилля, связанная с цилиндрическими функциями

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения: $\quad (xy')' + \lambda xy = 0 \quad x \in [0; a]$

Или в приведенном виде: $\quad y'' + \dfrac{y'}{x} + \lambda y = 0 \quad (1)$

$x = 0$ есть особая точка уравнения (1), значит, в ней можно поставить только условие ограниченности в особой точке: $y(0) < \infty$

Возможные варианты условий в точке a : $y(a) = 0$, $y'(a) = 0$, $y'(a) + hy(a) = 0$

Так как у нас уравнение с параметром и это уравнение Бесселя 0-го порядка, то общим интегралом уравнения будет функция:
$y(x) = AJ_0(\sqrt{\lambda}x) + BY_0(\sqrt{\lambda}x) \quad \lambda \neq 0$

По условию ограниченности $B = 0$
Из второго условия: $AJ_0(\sqrt{\lambda}a) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_0(\sqrt{\lambda}a) = 0 \quad (2)$

Покажем, что уравнение (2) имеет бесконечное множество решений:

Будем считать, что $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda \to \infty$

Воспользуемся асимптотическим представлением: $J_0(\sqrt{\lambda}a) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\sqrt{\lambda}a}}\cos\left(\sqrt{\lambda}a - \dfrac{\pi}{4}\right) + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\right)$

Видно, что функция $J_0(\sqrt{\lambda}a)$ при достаточно больших λ имеет колебательный характер. Тогда она бесконечное число раз обращается в ноль, то есть имеет бесконечное число корней

Обозначим $\gamma = \sqrt{\lambda}a$. Тогда γ_n - множество корней уравнения $J_0(\gamma) = 0$
$\lambda = \left(\dfrac{\gamma_n}{a}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots$

5.1.6 Некоторые свойства собственных значений и собственных функций

1. Собственные значения вещественны

   Предположим обратное: $\lambda = \alpha + i\beta$, этому собственному значению соответствует собственная функция $y = A + iB$

   Тогда существует и является решением $\overline{\lambda}$ - комплексно сопряженное к λ; ему соответствует собственная функция $\overline{y} = A - iB$

   $$\left\{\begin{array}{ll} (xy')' + \lambda xy = 0 & | \quad \cdot \overline{y} \\ (x\overline{y}')' + \lambda x\overline{y} = 0 & | \quad \cdot y \end{array}\right. \Bigg| \quad -$$

   $$\overline{y}(xy')' - y(x\overline{y}')' + (\lambda - \overline{\lambda})xy\overline{y} = 0$$

   $$\frac{d}{dx}\left(x(\overline{y}y' - y\overline{y}')\right) + (\lambda - \overline{\lambda})xy\overline{y} = 0$$

   Проинтегрируем по x от 0 до a:

   $$\underbrace{x(\overline{y}y' - y\overline{y}')\Big|_0^a}_{=0} + \underbrace{(\lambda - \overline{\lambda})}_{=2i\beta} \int\limits_0^a x \underbrace{y\overline{y}}_{A^2+B^2} \, dx = 0$$

   $$2i\beta \int\limits_0^a x(A^2 + B^2)\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \notin \mathbb{C}$$

2. Собственные значения неотрицательны

   Пусть $\lambda = \delta < 0$, тогда для условия I рода: $J_0(\sqrt{\lambda}a) = J_0(i\sqrt{|\delta|}a) = I_\nu(\sqrt{|\delta|}a) \geqslant 0$

   Аналогично для других видов условий

3. Собственные значения дискретны

   Следует из того, что $J_0(\sqrt{\lambda}a)$ - целая по λ функция и отлична от нуля, а значит нули есть изолированные точки. Тогда спектр дискретен

4. Собственные функции ортогональны

   Пусть $(xy')' + \lambda xy = 0$ - исходное уравнение, его решением будет функция:

   $$y_n = J_0\left(\frac{\gamma_n}{a}x\right) \quad n = 1, 2, \ldots$$

   Подставим функции с двумя разными индексами в исходное уравнение:

   $$\begin{array}{ll} (xy_n')' + \lambda_n xy_n = 0 & | \quad \cdot y_m \\ (xy_m')' + \lambda_m xy_m = 0 & | \quad \cdot y_n \end{array} \Bigg| \quad -$$

   $$y_m(xy_n')' - y_n(xy_m')' + (\lambda_n - \lambda_m)xy_ny_m = 0 \quad | \quad \int\limits_0^a dx$$

   $$\underbrace{\int\limits_0^a \frac{d}{dx}\left(x(y_my_n' - y_ny_m')\right) dx}_{=0} + (\lambda_n - \lambda_m)\int\limits_0^a xy_ny_m dx = 0$$

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int\limits_0^a x y_n y_m dx = 0$$

$$\lambda_n \neq \lambda_m \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^a x y_n y_m dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{функции ортогональны}$$

Если $n = m$, то получим квадрат нормы собственной функции:

$$\int\limits_0^a x y_n^2 dx = \int\limits_0^a x J_0^2 \left(\frac{\gamma_n x}{a} \right) dx = N_n^2$$

Если задана $f(x)$ на $[0; a]$, то $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n J_0 \left(\frac{\gamma_n x}{a} \right)$ - *ряд Фурье-Бесселя*

Если граничные условия III рода, то это *ряд Дини*

5.1.7 Модифицированные функции Бесселя

Важным случаем уравнения с параметром является случай, когда $\lambda = -1$:

$$(xy')' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) xy = 0$$

$$y'' + \frac{y'}{x} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

Его решением будет:

$$y_1(x) = J_\nu(\sqrt{\lambda} x) = J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(i\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} = i^\nu\, I_\nu(x)$$

$I_\nu(x)$ - *модифицированная функция Бесселя I рода (функция Инфельда)*

При вещественных ν и положительных x, I_ν - вещественна

$$I_{-n}(x) = I_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

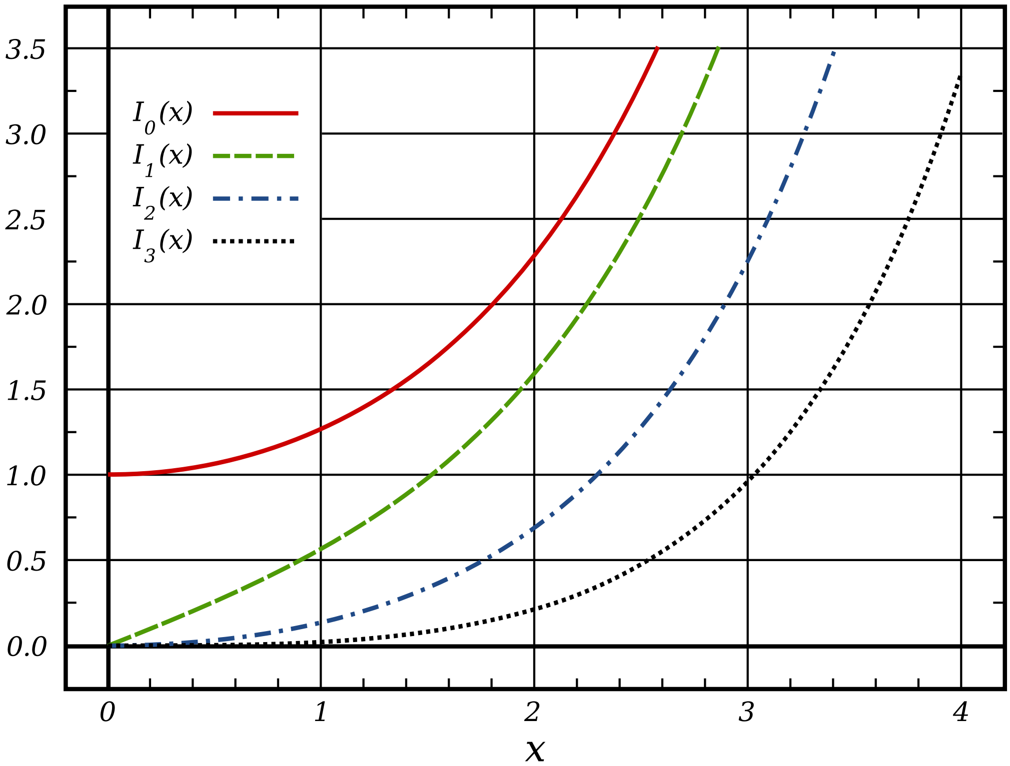
Аналогично вводится *модифицированная функция Бесселя II рода (функция Макдональда):*

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \pi n}(I_\nu(x) - I_{-\nu}(x))$$

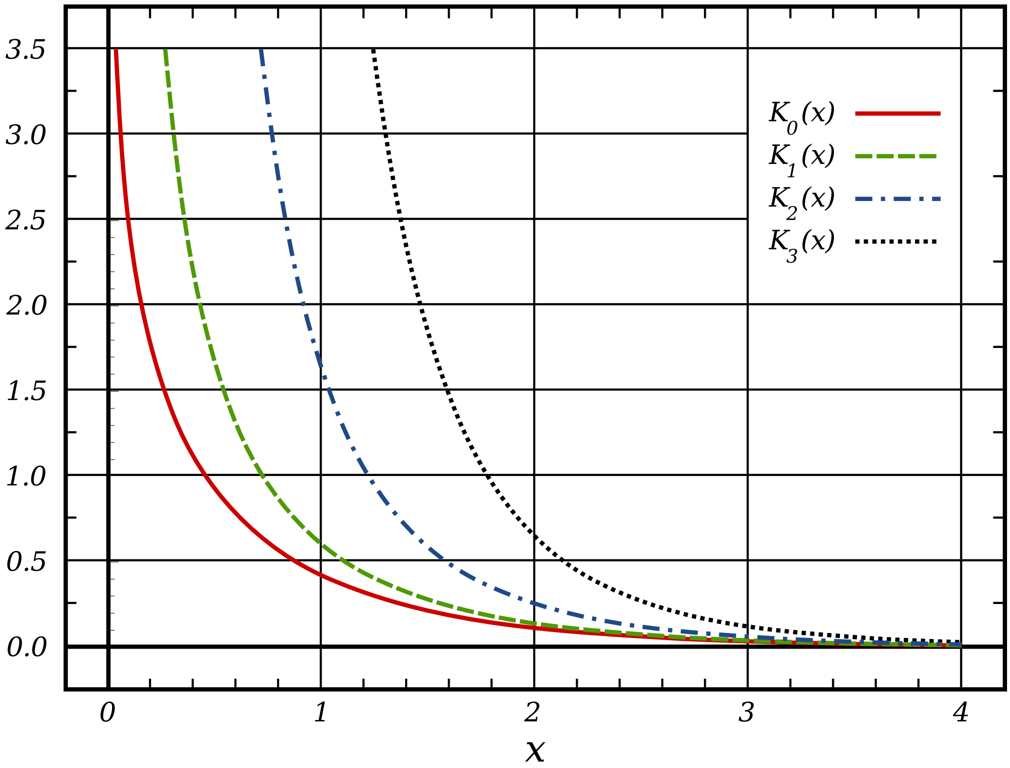
$$K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$$

$$K_n(x) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(x) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Также, при вещественных ν и положительных x, K_ν - вещественна



$I_0(x)$
$I_1(x)$
$I_2(x)$
$I_3(x)$
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
4
x



$K_0(x)$
$K_1(x)$
$K_2(x)$
$K_3(x)$
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
4
x

5.1.8 Рекуррентные формулы для функций Бесселя

Рассмотрим функцию Бесселя I рода:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \quad \Big| \quad \cdot x^\nu \quad \Big| \quad \frac{d}{dx}\,()$$

$$\frac{d}{dx}\left(J_\nu x^\nu\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}\,k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2\nu-1} 2(k+\nu)}{2^{2k+\nu}\,k!\,\Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$= x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu-1}(k+\nu)}{2^{2k+\nu-1}\,k!\,\Gamma(k+\nu+1)} = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu)} = x^\nu\, J_{\nu-1}(x)$$

Для случая комплексного аргумента: $\dfrac{d}{dz}\left(J_\nu z^\nu\right) = z^\nu\, J_{\nu-1}(z) \quad (1)$

Аналогично: $\dfrac{d}{dz}\left(J_\nu z^{-\nu}\right) = -z^{-\nu}\, J_{\nu+1}(z) \quad (2)$

Раскроем производные в левых частях уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} z^\nu \dfrac{dJ_\nu(z)}{d\,z} + \nu z^{\nu-1} J_\nu(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z) & \Big| \quad \cdot z^{-\nu} \\ z^{-\nu} \dfrac{dJ_\nu(z)}{d\,z} - \nu z^{-\nu-1} J_\nu(z) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z) & \Big| \quad \cdot z^{\nu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dJ_\nu(z)}{d\,z} + \dfrac{\nu}{z}\, J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) \\ \dfrac{dJ_\nu(z)}{d\,z} - \dfrac{\nu}{z}\, J_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z) \end{cases} \quad \Big| \quad - \quad \Big| \quad +$$

$$+ : 2\,\frac{dJ_\nu(z)}{d\,z} = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$$

$$- : 2\,\frac{\nu}{z}\, J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)$$

При $\nu = 0$: $\quad \dfrac{dJ_0(z)}{d\,z} = J_{-1}(z) - J_1(z) = -J_1(z) - J_1(z) = -2J_1(z) \quad \Rightarrow \quad J_0'(z) = -J_1(z)$

Для модифицированной функции Бесселя I рода:

$$(I_\nu z^\nu)' = z^\nu\, I_{\nu-1}(z) \qquad (I_\nu z^{-\nu})' = -z^{-\nu}\, I_{\nu+1}(z)$$

$$I_\nu'(z) = \frac{I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z)}{2} \qquad I_\nu(z) = \frac{z}{2\nu}(I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z))$$

Для модифицированной функции Бесселя II рода:

$$(K_\nu z^\nu)' = -z^\nu\, K_{\nu-1}(z) \qquad (K_\nu z^{-\nu})' = -z^{-\nu}\, K_{\nu+1}(z)$$

$$K_\nu'(z) = -\frac{K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z)}{2} \qquad K_\nu(z) = -\frac{z}{2\nu}(K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z))$$

5.1.9 Функции полуцелого порядка

Найдем выражение для $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}}{k!\,\Gamma(\frac{3}{2}+k)}\quad(1)$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}}{k!\,\Gamma(\frac{1}{2}+k)}\quad(2)$$

Рассмотрим выражение для эйлерова интеграла $\Gamma(x)$:

$$x\Gamma(x)=x\int\limits_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt=x\int\limits_0^{\infty}e^{-t}d\frac{t^x}{x}=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}dt^x=e^{-t}t^x\Big|_0^{\infty}+\int\limits_0^{\infty}e^{-t}t^xdt=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}t^xdt=\Gamma(x+1)$$

Тогда $\Gamma(x+n)=(x+n-1)\Gamma(x+n-1)=(x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)x\Gamma(x)$

В частности, $\Gamma(n+1)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\cdot\Gamma(1)=n!\int\limits_0^{\infty}e{-}tdt=n!$

Тогда для гамма-функций из (1) и (2):

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)=\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k+1)}{2^{k+1}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k+1)}{2^{k+1}}\,\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)=\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^{k}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^{k}}\,\sqrt{\pi}$$

Подставим их в (1) и (2):

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}\quad(3)\quad\text{и}\quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,x^{2k}\quad(4)$$

В формулах (3) и (4) видим разложение $\sin x$ и $\cos x$ по степеням x:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\qquad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

Рассмотрим функцию $J_{n+\frac{1}{2}}$, где $n\in\mathbb{Z}$ (через рекуррентное соотношение):

$$J_{\nu+1}(x)=-J_{\nu-1}+\frac{2\nu\,J_\nu(x)}{x}$$

$$J_{\frac{3}{2}}=\frac{1}{x}\,J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\,\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$J_{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\sin x+\frac{3}{x}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\,\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

Тогда общая формула будет выглядеть так:

$$J_{n+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin\left(x-\frac{\pi n}{2}\right)P_n\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

P_n- многочлен степени n относительно $\frac{1}{x}$, Q_n- многочлен $(n-1)$ степени

$P_n(0)=1\quad Q_n(0)=0$