УДК 517.2

М.Р. Петриченко, Д.В. Серов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

ПОЛНОЕ И НЕПОЛНОЕ АДДИТИВНЫЕ УДВОЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Дифференциальные уравнения и их системы, не связанные ни с какой вариационной задачей, предлагается привести к гамильтоновскому виду и погрузить их решения в пучок экстремалей. Для малых импульсов удвоенная система уравнений совпадает с исходной плюс уравнения в вариациях.

Полностью или частично аддитивно удвоенная система линейных уравнений с постоянными коэффициентами имеет гамильтоновскую структуру. Для жордановых клеток матрицы коэффициентов системы полное и частичное удвоения совпадают с точностью до оператора сдвига, представимого в базисе собственных и присоединенных векторов нильпотентной матрицей.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ; СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ; МАТРИЦА ЖОРДАНА; ПОЛНАЯ, АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ КРАТНОСТИ.

Введение

В 1987 году Ю.Г. Павленко и С.И. Зеленский предложили метод удвоения переменных [1]. Суть метода состоит в следующем. Для системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, \mathbf{x}), \ t \in T, \ \mathbf{x} \in X \subset R^m,$$

$$f : (T \times X) \to R^m, f \in \mathrm{Lip}^{loc}(X), \ i = 1(1)m$$

вводится гамильтониан $E(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathbf{y}, \mathbf{f})$, порождающий ассоциированную систему на импульс

$$\frac{dy_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{m} y_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \ i = 1(1)m.$$

Очевидно, что ассоциированная система совпадает с уравнениями в вариациях для исходной системы [2]. При этом вводится вектор

$$\mathbf{z}:=(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) \in R^{2m},$$

и если $F(t,\mathbf{z})$ – функция класса $C^1(T \times X \times Y)$, [A,B] – скобки Пуассона, то тогда можно ввести дифференциальный оператор

$$L_v := \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

(производную F вдоль поля $\mathbf{v} = d\mathbf{z} / dt$):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + L_v(F) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial F}{\partial z_i} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, E].$$

Тем самым вводится алгебра Ли, порожденная линейным дифференциальным оператором L_v.

Авторы статьи [1] указывают, что удвоение переменных «позволяет привести к гамильтоновой форме уравнения и системы уравнений, полученные феноменологически и не являющиеся экстремалями какой-либо вариационной задачи».

Недавно нами была опубликована работа [2], где идея аддитивного удвоения получила некоторое развитие, а именно: вместо исходной системы уравнений была рассмотрена возмущенная система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x} + \mathbf{y}),$$

имеющая гамильтониан

$$E(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^{y_i} f_i(t, \mathbf{x} + \mathbf{z}) dz_i$$

такой, что $E(t, \mathbf{x}, 0) = 0$.

Ассоциированная система есть

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

Тогда очевидно, что если $\|\mathbf{y}\| << \|\mathbf{x}\|$, $\|\bullet\|$ – какая-либо норма, то получается вариант исходного удвоения переменных. По описанной схеме, в частности, были рассмотрены наиболее изученные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Использование этой схемы удвоения позволило получить следующие результаты:

а) существует пучок экстремалей $(x_y(t))$, локально близкий к траектории исходного уравнения (системы уравнений) $(x(t))$. Иначе,

$$\forall \mathrm{U}(x_y) \subset \mathrm{X}, \exists \mathrm{U}(0) \subset \mathrm{Y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y \in \mathrm{U}(0) \to x \in \mathrm{U}(x_y),$$

где $\mathrm{U}(0)$ – окрестность нуля, $\mathrm{U}(x_y)$ – окрестность экстремалей пучка в $W_2^{(1)}(\mathrm{T})$ (Т – промежуток или сегмент вещественной оси), X – множество векторов (x), Y – множество векторов импульсов (y).

Можно показать, что $\mathrm{Y} = \mathrm{X}_\tau$ (X_τ – пространство векторов, касательное к X);

б) плотность распределения лагранжиана $\Lambda(t, \mathbf{x}, d\mathbf{x}/dt)$, порожденного исходной и ассоциированной системами, определяется применением стандартного преобразования Юнга – Лежандра [3]. Например, в скалярном случае плотность лагранжиана имеет вид

$$\Lambda\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}\left(\varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) - x\right) - \int_x^{\varphi\left(\frac{dx}{dt}\right)} f(z)\,dz,$$

где φ – распределение, обратное f ($\varphi = f^{-1}$).

Очевидно, что если $y = 0$, то $\varphi(dx/dt) = x$, а $\Lambda = 0$. Итак, с исходным дифференциальным уравнением связано условие экстремума:

$$\delta S_\mathrm{T}(x) := \int_\mathrm{T} \delta\Lambda\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)dt.$$

Экстремали $S_\mathrm{T}(x)$ совпадают с графиком $(\mathrm{T}, x(t))$ исходного уравнения при $y(0) = 0$, $y(t) = 0$, $t \in \mathrm{T}$. В первоначальном варианте теории, представленной в работе [1], гамильтониан вырожден, $\Lambda = 0$ (тождественно) и никакого условия экстремума не существует. Видим, что аддитивное удвоение переменных не только дополняет исходную систему до гамильтоновой, но и позволяет явно сформулировать условие экстремума;

в) пусть f – аналитическое распределение в окрестности

$x + y \in \mathrm{U}(x_0) \subset \mathrm{X}$:

$$f(x + y) = \exp\left(y\frac{d}{dx}\right)f(x) = f(x) + yf(x) + \ldots .$$

Тогда, пренебрегая членами $O(y)$, получаем удвоение, описанное в работе [1], с вырожденным гамильтонианом. Если же сохранить линейное по y слагаемое в степенном ряду и пренебречь слагаемыми $O(y^2)$, то

$$S_\mathrm{T}(x) := \int_\mathrm{T} \frac{\left(\dot{x} - f(t, x)\right)^2}{f'(x)}dt$$

и решение задачи на экстремум $S_\mathrm{T}(x)$ равносильно решению исходной системы по методу наименьших квадратов с весовым множителем $1/f'(x)$.

Некоторые замечания по терминологии

Согласно результатам работы [2], в исходной системе координата складывается с импульсом, что позволяет естественно использовать каноническое преобразование от координат к импульсам [3].

Рассмотрим любую линейную комбинацию координат и импульсов, например $x + \lambda y$ с параметром λ. Такая постановка интересна в задачах несингулярного возмущения. Влияние указанного параметра регламентировано известными теоремами о зависимости решения от параметра. Очевидно, что на гамильтонову структуру удвоенной системы параметр λ совершенно не влияет.

Далее, в аддитивном удвоении различается полное и частичное удвоение переменных. Например, в линейной системе

$$\dot{x} = ax + b$$

с матрицами a и b удвоение можно вести по всем компонентам вектора x (полное удвоение) либо только по компоненте строки (частичное удвоение).

Вышеизложенное относится и к системам с параметром. В обоих случаях аддитивно удвоенная система остается гамильтоновой. Очевидно, что для матриц скалярного типа полное и частичное удвоения совпадают.

Наряду с приведенным выше аддитивным удвоением переменных можно рассмотреть мультипликативное удвоение в различных вариантах, например в таких:

$$\dot{x} = yf(x),\ \dot{x} = f(yx).$$

Пусть f – линейный оператор, представимый матрицей a и вектором сдвига b. Тогда в исходной системе уравнений $\dot{x} = ax + b$ мультипликативное удвоение переменных принимает следующий вид:

$$\dot{x}_i = y_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + b_i,\ i = 1(1)m,\ m = \dim(x).$$

В тензорной нотации:

пусть $y = \operatorname{diag}(y_i)_{i=1}^{m}$, тогда мультипликативное удвоение при левой мультипликации приводит к такой системе для координат вектора x:

$$\dot{x} = yax + b,$$

где $(ax)_i = a_{ij} x_j$ – вектор-столбец; $(yax)_i = y_i \delta_{ik} a_{kj} x_j$, причем суммирование ведется по значкам k и j, $i = 1(1)m$.

При правой мультипликации получается такая система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = (ax)^t y + b,$$

где $(ax)^t$ – матрица-строка.

При y = I (I – матричная единица) мультиплицированное уравнение совпадает с исходным.

Аддитивное удвоение в линейных системах с постоянными коэффициентами

Общий случай. Дана задача Коши для системы с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = ax + b,\ x(0) - x_0 = 0. \qquad (1)$$

Для каноничности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы Sp(a) = 0. В общем случае это не так и след матрицы коэффициентов может быть отделен от нуля.

Пусть выполняется процедура полного аддитивного удвоения переменных. В этом случае y-градиент гамильтониана определяется как

$$\frac{\partial E}{\partial y_i} = a_{ij}(x_j + y_j) + b_i,\ i = 1(1)m,$$

где $m = \dim(x, b)$.

Тогда

$$E(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} a_{ii} y_i^2 + \sum_{i,j=1}^{m} y_i a_{ij} x_j + \sum_{i,j=1}^{m}{}' \, y_i a_{ij} y_j = $$
$$= \frac{1}{2}\|y\|_a^2 + \langle y, ax\rangle + \langle y, ay\rangle',$$

при этом штрих у суммы означает, что $i \neq j$.

Удвоенная система уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b,$$

где матрица α – блочная,

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & a + a^t - \operatorname{diag} a \\ 0 & -a^t \end{pmatrix}.$$

Ясно, что Sp(α) = 0 и удвоенная система – действительно, каноническая (гамильтова) в целом и по каждой паре компонент x_i, y_i. Роль энергии системы играет E(x, y).

Пусть $y(0) = y_0$. Если $y_0 \neq 0$, то очевидно, что $y(t) \neq 0$. Тогда решение удвоенной системы совпадает с экстремалью в окрестности U(y_0) вектора y_0. Траектория $x_y(t)$:= $x(t, y)$ удвоенной системы есть проекция экстремали пучка на множество ($x(t, y)$) траекторий исходной системы. При $y_0 \to 0$ экстремаль $x(t, y) \to x(t)$ равномерно по $y \in$ U(y_0). Здесь $x(t)$ – решение исходной системы.

Например, пусть y мало. Тогда удвоенная система в качестве ассоциированного уравнения на импульс ($y(t)$) имеет как уравнение в вариациях, так и (вырожденный) гамильтониан $E(x, y) = yf(x)$, не связанный ни с каким экстремальным условием [3 – 6]. Следовательно, аддитивное удвоение реализует сдвиг множества исходных траекторий ($x(t)$) на множество экстремалей ($x(t, y)$).

Процедура частичного аддитивного удвоения приводит к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_i = a_{ii}(x_i + y_i) + \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j + b_i; \\ \dot{y}_i = -a_{ii} y_i,\ i = 1(1)m, \end{cases}$$

имеющей гамильтониан

$$E(x, y) = \langle b, y \rangle + \langle y, ax \rangle + \frac{1}{2a} \|y\|_a^2 .$$

Тогда матрица коэффициентов удвоенной системы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}a & \mathrm{diag}a \\ 0 & -\mathrm{diag}a \end{pmatrix},$$

причем $\mathrm{Sp}(\alpha) = 0$.

Утверждение о погружении траекторий удвоенной системы в пучок экстремалей остается в силе [7, 8].

Жорданова клетка. Пусть p – неособая матрица $m \times m$ и $a = p^{-1} jp$, где j – матрица Жордана. Такое преобразование единственно с точностью до эквивалентности матриц. Исходная система принимает вид

$$\dot{x} = p^{-1} jpx + b.$$

Если обозначить $X := px,\ B := pb$, то исходное уравнение принимает вид

$$\dot{X} = jX + B.$$

Возможны два случая:

существует собственный базис в X, тогда $j = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{i=1(1)m}$, причем среди характеристических чисел могут быть и равные;

не существует собственного базиса.

В последнем случае базис дополняется до полного присоединенными векторами. Пусть, не нарушая общности, в этом случае матрица j сводится к одной клетке Жордана. Тогда справедливы утверждения:

1) Спектральная кратность характеристического числа λ, $\dim\mathrm{Ker}(a - \lambda \mathrm{I}) = 1$;

2) Полная кратность характеристического числа λ, $\dim\mathrm{Ker}(a - \lambda \mathrm{I})^{m(\lambda)} = m$ *и совпадает с алгебраической кратностью характеристического числа* λ. Другими словами, минимальный и аннулирующий полиномы матрицы a совпадают, и матрица j сводится к одной (максимальной) клетке Жордана: $m(\lambda) = m$ [9, 10].

Скалярный случай является тривиальным: полное и частичное аддитивные удвоения тождественны, а матрица удвоенной системы есть

$$\alpha = \begin{pmatrix} a, & 0 \\ 0, & -a \end{pmatrix}.$$

Если существуют присоединенные векторы, то исходная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \dot{X}_i = \lambda X_i + X_{i+1} + B_i\ i = 1(1)m - 1; \\ \dot{X}_m = \lambda X_m + B_m. \end{cases}$$

Полное аддитивное удвоение порождается гамильтонианом $\mathrm{E}(X, Y)$ таким, что

$$\begin{cases} \lambda(X_i + Y_i) + X_{i+1} + Y_{i+1} + B_i = \dfrac{\partial E}{\partial Y_i}, \\ i = 1(1)m - 1; \\ \lambda(X_m + Y_m) + B_m = \dfrac{\partial E}{\partial Y_m}, \end{cases}$$

откуда получается следующее выражение для гамильтониана:

$$E(X, Y) = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{m} Y_i^2 + \lambda \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i + \\ + \sum_{i=1}^{m-1} (X_{i+1} Y_i + Y_{i+1} Y_i) + \sum_{i=1}^{m} B_i Y_i,$$

или

$$E(X, Y) = \frac{\lambda}{2} \|Y\|^2 + \lambda \langle X, Y \rangle + \\ + \langle \tau(X + Y), Y \rangle + \langle B, Y \rangle,$$

где τ – нильпотентный (порядка m) оператор сдвига, такой, что $\tau^m = 0$, $\tau^{m-1} \neq 0$.

Следовательно, удвоенная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{X}_i = \lambda(X_i + Y_i) + X_{i+1} + Y_{i+1} + B_i, \\ i = 1(1)m - 1;\ \dot{X}_m = \lambda\left(X_m + Y_m\right) + B_m; \\ \dot{Y}_1 = -\lambda Y_{1i};\ \dot{Y}_i = -\lambda Y_i - Y_{i-1},\ i = 2(1)m. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов удвоенной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j, & j + j^t - \mathrm{diag}j \\ 0, & -j^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mathrm{colon} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При неполном аддитивном удвоении энергия системы определяется тождествами:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial Y_i} = \lambda(X_i + Y_i) + X_{i+1} + B_i, \quad i = 1(1)m - 1; \\ \dfrac{\partial E}{\partial Y_m} = \lambda(X_m + Y_m) + B_m. \end{cases}$$

Следовательно,

$$E(X,Y)=\frac{\lambda}{2}\|Y\|^2+\lambda\langle X,Y\rangle+\langle \tau X,Y\rangle+\langle B,Y\rangle$$

и удвоенная система остается по-прежнему блочной:

$$\begin{pmatrix}\dot X\\ \dot Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} j, \operatorname{diag} j\\ 0, -j^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+\operatorname{colon}\begin{pmatrix}B\\ 0\end{pmatrix}.$$

Итак, в результате проведенного анализа можно утверждать следующее:

1. Полностью или частично аддитивно удвоенная система линейных уравнений с постоянными коэффициентами имеет гамильтонову структуру. Это означает, что след матрицы Sp(α) коэффициентов α удвоенной системы всегда равен нулю.

2. Для жордановых клеток матрицы коэффициентов системы полное и частичное удвоения совпадают с точностью до оператора сдвига, представимого в базисе собственных и присоединенных векторов нильпотентной матрицей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Павленко Ю.Г., Зеленский С.И.** Интегрирование негамильтоновых систем методом удвоения переменных // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 1987. Т. 28. № 1. С. 8–12.
2. **Петриченко М.Р., Серов Д.В.** Удвоение переменных в уравнениях и системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2012. № 4 (158). С. 120–125.
3. **Тер Хаар Д.** Основы гамильтоновой механики. М.: Наука. 1974. 224 с.
4. **Переломов А.М.** Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука. 1990. 240 с.
5. **Козлов В.В.** Интентегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи математических наук. 1983. Т. 38. № 1. С. 1–27.
6. **Souriau J.-M.** Structure des systems dynamiques. Paris: Duno, 1980. 232 p.
7. **Weinstein A.** Geometrie simplectique at contact. Paris: Hermann, 1984, 140 p.
8. **Gromov M.** Travaux en cours 33. Paris: Hermann, 1988. P. 61–241.
9. **Lelong-Ferran J.** Notions matematiques de base. Paris: Armand Colin, 1989. 310 p.
10. **Глазман И.М., Любич Ю.И.** Конечномерный линейный анализ. М.: Наука. 1968. 476 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович – *доктор технических наук, профессор кафедры гидравлики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
fonpetrich@mail.ru

СЕРОВ Дмитрий Владимирович – *старший преподаватель кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
dimusum@yandex.ru

Petrichenko M.R., Serov D.V. COMPLETE AND INCOMPLETE ADDITIVE DOUBLING VARIABLES IN LINEAR SYSTEMS WITH CONSTANT COEFFICIENTS.

Differential equations and their systems, not associated with any of the variational problems have been put forward to transform up to Hamiltonian form and immerse their solutions into a bundle of extremities. For small momenta the doubled system of the equations corresponds closely with the original one but for the equations in variations.

Totally or partly additive doubled system of linear equations with constant coefficients has a Hamilton structure. For Jordan cells in the matrix of coefficients of the system complete and partial doubling correspond closely, with an accuracy up to a shift operator, which is representable in the basis of its own and associated vectors of a nilpotent matrix.

DIFFERENTIAL EQUATION, SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, JORDAN MATRIX, COMPLETE, ALGEBRAIC AND SPECTRAL MULTIPLICITY.

REFERENCES

1. **Pavlenko G.G., Zelensky S.I.** Integration of the non-Hamiltonian systems by the method of doubling of variables. *Announcer Moskow State Un., series of Physics, Astronomy*, 1987, Vol. 28, No. 1, pp. 1-25.

2. **Petrichenko M.R., Serov D.V.** Doubling the variables in equations and systems of ordinary differential equations. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal : Physics and mathematics*, 2012, No. 4(158), pp. 120-125. (rus).

3. **Ter Haar D.** Elements of Hamiltonian mechanics. London, Pergamon Press, 1971, 196 p.

4. **Perelomov A.M.** Integrable systems in classical mechanics and Lie's algebra. Moscow, Nauka, 1990, 240 p.

5. **Kozlov V.V.** Integrable and non-integrable in Hamiltonian mechanic. UMN, 1983, Vol. 38, No. 1, pp. 1-27.

6. **Souriau, J.-M.** Structure des systems dynamiques. Paris, Duno, 1980, 232 p.

7. **Weinstein, A.** Geometrie Simplectique at Contact. Paris, Hermann, 1984, 140 p.

8. **Gromov, M.** Travaux en cours 33. Paris, Hermann, 1988, pp. 61-241.

9. **Lelong-Ferran, J.** Notions matematiques de base, Paris, Armand Colin, 1989, 310 p.

10. **Glazman I.M., Luibich G.I.** Linear analysis in finite-dimensional spaces. Moscow, Nauka, 1968, 476 p.

THE AUTHORS

PETRITCHENKO Mikhail R.
St. Petersburg State Polytechnical University,
195251, Politechnicheskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia
fonpetrich@mail.ru

SEROV Dmitry V.
St. Petersburg State Polytechnical University,
195251, Politechnicheskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia.
dimusum@yandex.ru