

Министерство образования и науки Российской Федерации

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

---

М. А. Соколов

**ФИЗИКА**

Статистические распределения в молекулярно-кинетической теории

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2014

## Аннотация

Настоящее учебное пособие включает материал лекции по статистическим распределениям в классической молекулярно-кинетической теории, несколько расширенный за счет математических подробностей, и примеры решения типичных задач, от самых простых до требующих некоторых вычислений. В приложении помещены краткие сведения об идеальных газах и часто встречающиеся интегралы. Пособие предназначено в первую очередь для студентов машиностроительных специальностей (141100, 150700, 151900, 220700), дневной, вечерней и заочной форм обучения, лекционный курс физики которых включает не более 72 академических часов.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Статистические распределения</b>	<b>2</b>
1.1	Вероятность . . . . .	2
1.2	Распределения . . . . .	4
1.2.1	Распределение Гаусса . . . . .	6
1.2.2	Распределение Больцмана . . . . .	8
1.2.3	Распределение Максвелла . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Задачи</b>	<b>16</b>
2.1	Задача о распределении $f(x) = ax^3 e^{-\lambda x}$ . . . . .	16
2.2	Задача о барометрической формуле для смеси газов . . . . .	18
2.3	Задача о распределении давления воздуха в ускоренной капсуле . . . . .	19
2.4	Задача о характерных скоростях молекул газа . . . . .	20
2.5	Задача о зависимости средней скорости молекул от давления в адиабатическом процессе . . . . .	20
2.6	Задача об относительных количествах молекул с разными скоростями	21
2.7	Задача об определении $\langle v_x^2 \rangle$ молекул газа . . . . .	22
2.8	Задача о количестве столкновений молекул с поверхностью . . . . .	22
2.9	Задача о распределении Максвелла в цилиндрической системе координат	24
2.10	Задача о распределении молекул по энергиям . . . . .	25
<b>A</b>	<b>Приложение</b>	<b>27</b>
A.1	Элементарные сведения об идеальных газах . . . . .	27
A.2	Цилиндрические и сферические координаты . . . . .	29
A.3	Некоторые интегралы . . . . .	30

## 1 Статистические распределения

Статистические распределения возникают при обработке большого количества экспериментальных данных. Строгое обоснование таких распределений и доказательство их свойств находится в компетенции теории вероятностей. Для целей настоящего пособия достаточно дать несколько определений и мотивировок, опираясь скорее на интуицию, чем на математически строгие рассуждения.

### 1.1 Вероятность

При подбрасывании монеты возможны два **элементарных события**: появление "орла" (O) или "решки" (P). Перед каждым броском можно попытаться угадать его исход и преуспеть или не преуспеть в таком угадывании. Однако замечено, что при большом числе бросков - **испытаний** ( $n$ ) относительное количество появлений "орла"  $n_o/n$  и "решки"  $n_p/n$  становятся примерно одинаковыми. Более того, чем больше испытаний проводится, тем ближе отношения  $n_o/n$  и  $n_p/n$  к  $1/2$ . Эту закономерность можно выразить либо математической формулой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_o}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_p}{n} = \frac{1}{2},$$

либо словами, что **вероятность** появления "орла", как и появления "решки", равна  $1/2$ . Если вероятности этих двух событий обозначить  $\mathbf{P}(O)$  и  $\mathbf{P}(P)$  соответственно, то можно написать

$$\mathbf{P}(O) = \mathbf{P}(P) = \frac{1}{2}.$$

Усложняя задачу, рассмотрим в качестве элементарных событий появление в двух последовательных подбрасываниях монеты двух "орлов", двух "решек" или, в любом порядке, одного "орла" и одной "решки". В символической форме эти элементарные события можно изобразить так

$$OO, OP, PO, PP.$$

Многочисленные повторные испытания приводят к следующим вероятностям

$$\mathbf{P}(OO) = \mathbf{P}(OP) = \mathbf{P}(PO) = \mathbf{P}(PP) = \frac{1}{4}.$$

Второй пример несколько содержательнее первого, поскольку позволяет говорить о событиях не являющихся элементарными и их вероятностях. Например, такое событие состоит в появлении в любом порядке одного "орла" и одной "решки". Легко заметить, что это событие объединяет второе и третье элементарные события из перечисленных выше, а его вероятность вычисляется как сумма вероятностей элементарных событий

$$\mathbf{P}(OP + PO) = \mathbf{P}(OP) + \mathbf{P}(PO) = \frac{1}{2}.$$

Простота приведенной формулы есть следствие **статистической независимости** элементарных событий. Статистическая же независимость связывает вероятности элементарных событий первого и второго примеров. Поскольку результаты последовательных испытаний подбрасывания монеты независимы, их вероятности перемножаются

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(OO) &= \mathbf{P}(O)\mathbf{P}(O), & \mathbf{P}(OP) &= \mathbf{P}(O)\mathbf{P}(P), \\ \mathbf{P}(PO) &= \mathbf{P}(P)\mathbf{P}(O), & \mathbf{P}(PP) &= \mathbf{P}(P)\mathbf{P}(P). \end{aligned}$$

Из приведенных выше примеров видно, что вероятность любого события неотрицательна (в некоторых курсах теории вероятностей из рассмотрения исключается нулевая вероятность), а сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1. Эти ограничения естественны, поскольку число испытаний может быть только целым положительным, а любое испытание (в рамках данной серии) должно приводить только к заранее оговоренным исходам.

Нетрудно обобщить обсуждавшиеся выше примеры. Пусть  $A_1, \dots, A_n$  - **пространство** или совокупность элементарных событий. Тогда

1. вероятность элементарного события (и вообще любого события) может быть только неотрицательным числом

$$\mathbf{P}(A_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad (1.1)$$

2. сумма вероятностей всех элементарных событий равна единице

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) = 1; \quad (1.2)$$

3. вероятность некоторого события  $A$  есть сумма вероятностей элементарных событий  $A_{i_a}$ , которые его составляют

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i_a} \mathbf{P}(A_{i_a}); \quad (1.3)$$

4. вероятность одновременного осуществления двух независимых событий есть произведение вероятностей этих событий

$$\mathbf{P}(A_i A_j) = \mathbf{P}(A_i) \mathbf{P}(A_j). \quad (1.4)$$

В рассмотренных выше примерах, связанных с бросанием монеты, пространство событий было конечным в том смысле, что конечным было число элементарных событий. В принципе, данные выше определения можно применять и к бесконечному, но счетному числу элементарных событий, однако в этом случае суммирование в (1.2), (1.3) распространяется на бесконечное число слагаемых.<sup>1</sup> Последнее требует чуть более аккуратного обращения с суммированием.

## 1.2 Распределения

**Функцией распределения** называется правило, по которому каждому событию сопоставляется его вероятность  $A \rightarrow \mathbf{P}(A)$ . В качестве примера рассмотрим функцию распределения критической нагрузки, при которой происходит разрыв нитей, изготавливаемых на некоторой фабрике (будем считать, что запас тестируемых образцов неограничен). Элементарным событием  $A_i$  является результат измерения, который приводит к разрыву нити при нагрузке в интервале от  $i$  г до  $i + 1$  г. В этом случае функцией распределения будет  $p_i = \mathbf{P}(A_i)$ , где  $p_i$  - вероятность того, что нить разорвется при нагрузке от  $i$  г до  $i + 1$  г. Такая функция распределения называется дискретной, поскольку пространство элементарных событий счетно (на практике - конечно). Графически рассматриваемую функцию распределения можно изобразить как набор вертикальных отрезков длиной  $p_i$ , восстановленных из точек оси с координатами  $i$ . На Рис. 1 представлен возможный вид функции распределения, дополненный огибающей линией, позволяющей нагляднее продемонстрировать характер изменения вероятностей разрыва в зависимости от нагрузки.

Описанный выше пример с нитями относится к контролю качества продукции. Что интересует контролеров в первую очередь? Во-первых, **средняя нагрузка**, при которой разрывается нить, во-вторых, **интервал нагрузок**, при которых происходит основная масса разрывов (в физике случайные отклонения от среднего называются **флуктуациями**). Как рассчитать среднее значение критической нагрузки? Пусть  $n$  - полное (очень

---

<sup>1</sup>Напомним, что счетность означает возможность сопоставить каждому элементарному событию натуральное число.

большое) число испытаний,  $n_i$  - количество испытаний, при которых нить оборвалась при нагрузке от  $i$  г до  $i + 1$  г. Тогда среднюю критическую нагрузку можно рассчитать по формуле

$$\langle i \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n i n_i}{n} = \sum_{i=1}^n i \frac{n_i}{n} \approx \sum_{i=1}^n i p_i. \quad (1.5)$$

При переходе к последней сумме в формуле (1.5) мы заменили отношение  $n_i/n$  вероятностью  $p_i$ , что, строго говоря, делать было нельзя до предельного перехода  $n \rightarrow \infty$ . Однако при большом количестве испытаний такая

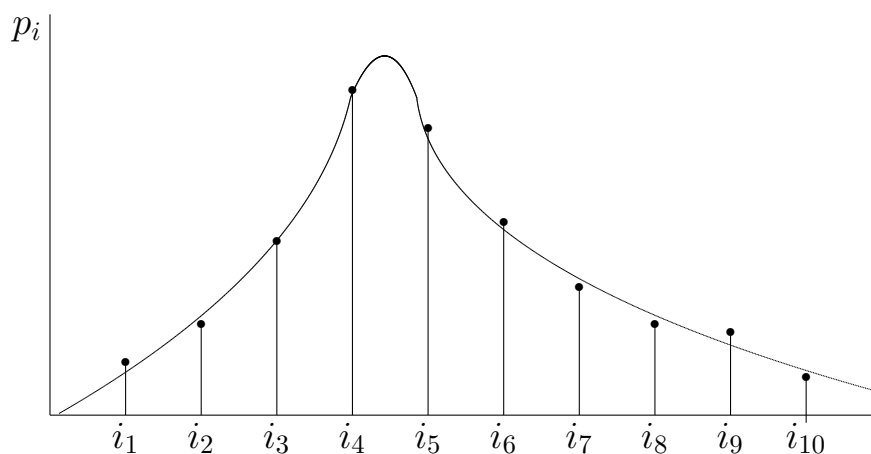


Рис. 1

замена оправдана. В теории вероятностей среднее, вычисленное по формуле (1.5), называется **математическим ожиданием**.

Разброс результатов испытаний прочности нити характеризуется **дисперсией**, которая определяется формулой

$$\sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n (i - \langle i \rangle)^2 p_i = \langle i^2 \rangle - \langle i \rangle^2, \quad (1.6)$$

где

$$\langle i^2 \rangle = \sum_{i=1}^n i^2 p_i. \quad (1.7)$$

Величина  $\sigma_i$  называется **средним квадратичным отклонением** (от среднего значения).

В молекулярно - кинетической теории газов приходится иметь дело с системами, включающими огромное количество молекул и с (потенциаль-

но) неограниченным количеством испытаний. В этом случае вместо дискретных распределений значительно удобнее иметь дело с **непрерывными распределениями вероятности**.

Вернемся к нашему примеру с нитями. Вместо вероятности критической нагрузки оказаться в конечном интервале  $[i, i+1)$ , будем говорить о вероятности обрыва нити при нагрузке из бесконечно малого интервала  $[x, x+dx)$  (говорить в таком опыте о вероятности оборваться нити точно при нагрузке  $x$  бессмысленно, поскольку "запас" точек на оси слишком велик)

$$\mathbf{P}(dx) = p(x)dx. \quad (1.8)$$

Функция  $p(x)$ , которая называется **плотностью вероятности** или **плотностью распределения**, должна быть неотрицательна  $p(x) \geq 0$  (аналог свойства (1.1)) и удовлетворять условию нормировки (аналог (1.2))

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1. \quad (1.9)$$

Как и в дискретном случае, можно найти средние значения не только степеней  $x$  (в теории вероятностей они называются **моментами**)

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)dx, \quad (1.10)$$

но и вообще любой функции  $f(x)$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx. \quad (1.11)$$

Оценка степени разброса критической нагрузки дается дисперсией

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (1.12)$$

или средним квадратичным отклонением  $\sigma_x$ .

### 1.2.1 Распределение Гаусса

Одним из самых известных примеров непрерывного распределения является **распределение Гаусса**

$$p_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}. \quad (1.13)$$

Оно возникает, например, при обработке случайных ошибок измерений. Вид этого распределения (при  $a = 1$ ,  $\sigma = 1$ ) приведен на Рис. 2.

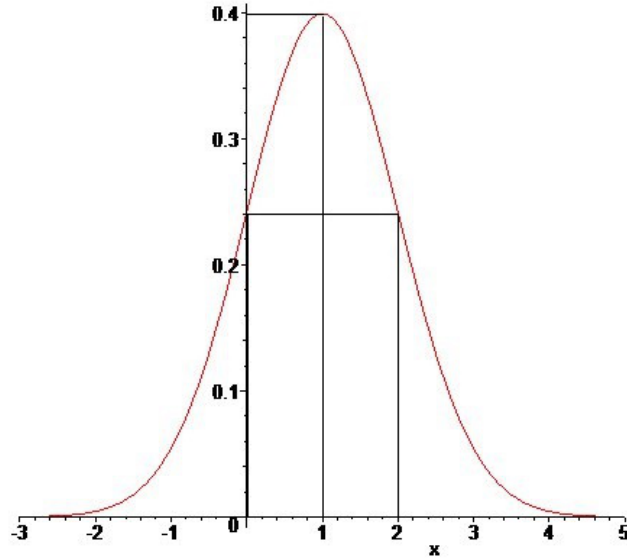


Рис. 2

Положительность распределения Гаусса очевидна, нормировка проверяется без каких-либо трудностей с помощью интеграла (А.12).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma^2}} dy = 1.$$

Из аналитического вида  $p_G(x)$  и его графика следует, что распределение имеет максимум  $1/(\sqrt{2\pi}\sigma)$  при  $x_m = a$ . Два первых момента легко вычисляются с помощью интегралов (А.13), (А.14)

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p_G(x) dx = a, \quad \langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_G(x) dx = a^2 + \sigma^2.$$

Используя эти результаты с помощью (1.12) находим дисперсию

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma^2$$

и среднее квадратичное отклонение  $\sigma_x = \sigma$ .



### 1.2.2 Распределение Больцмана

В этом разделе мы перейдем к физическим приложениям функций распределения. Начнем с вывода барометрической формулы, естественное обобщение которой приведет нас к статистическому **распределению Больцмана**.

Рассмотрим вертикальный воздушный столб с сечением  $S$ , и выделим на высоте  $x$  горизонтальный слой толщины  $dx$ . Давление воздуха непосред-

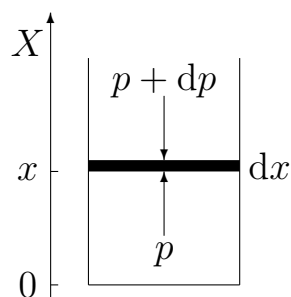


Рис. 3

ственно под слоем равно  $p$ , над слоем -  $(p + dp)$ . Условие равновесия для слоя записывается в виде

$$pS = (p + dp) S + dm g,$$

где  $dm$  - масса слоя. Массу слоя с помощью уравнения состояния идеального (А.1) газа можно представить в виде

$$dm = \rho dV = \frac{p\mu}{RT} S dx,$$

где  $\rho$  - плотность воздуха на высоте  $x$ ,  $\mu$  - молярная масса воздуха,  $R$  - универсальная газовая постоянная. Из условия равновесия получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dp}{p} = - \frac{\mu g}{RT} dx.$$

Его интеграл

$$\ln p = - \frac{\mu g}{RT} x + const.$$

Постоянную находим из условия, что на высоте  $x = 0$  давление равняется  $p_0$ :  $const = \ln p_0$ . Учет значения постоянной приводит нас к формуле

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g x}{RT}}, \quad (1.14)$$

называемой **барометрической**. Формула (1.14) определяет давление воздуха в зависимости от высоты. Отметим, что эта формула является приближенной, поскольку не учитывает ни изменения температуры воздуха с высотой, ни уменьшения с высотой ускорения свободного падения, ни того факта, что воздух является смесью газов. Впрочем, последнее обстоятельство можно исключить, так как для газов близких к идеальным выполняется закон парциальных давлений (см. задачу 2.2). На Рис. 4 показана зависимость относительного давления ( $p/p_0$ ) от высоты ( $h$ ) в пределах от нулевого уровня до высоты  $10^4$  м. Кривая (1) соответствует кислороду, кривая (2) - азоту.

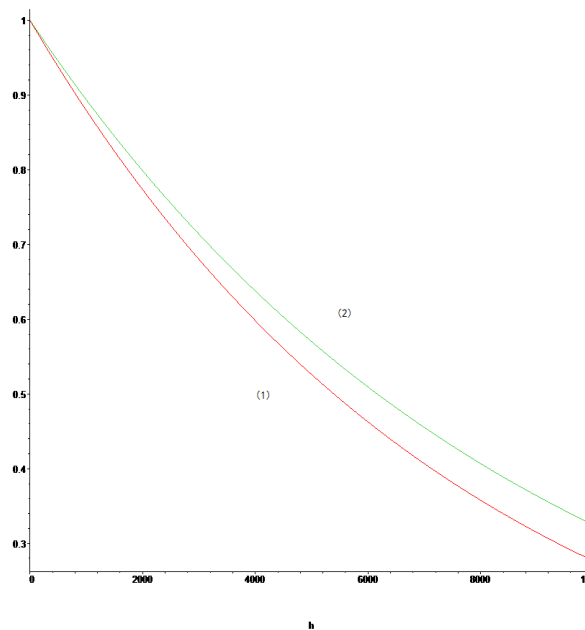


Рис. 4

Поскольку давление в газе пропорционально концентрации молекул воздуха  $n$  (А.2)

$$p = nkT,$$

то барометрическую формулу можно переписать в виде

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g x}{kT}}. \quad (1.15)$$

Здесь  $m_0$  - масса "молекул" воздуха,  $k$  - постоянная Больцмана. Для преобразования показателя экспоненты мы воспользовались соотношениями  $\mu = N_A m_0$ ,  $R = k N_A$ , где  $N_A$  - постоянная Авогадро, и считали воздух мономолекулярным газом.

Барометрическую формулу (1.15) можно трактовать как зависимость концентрации молекул  $n$  от их потенциальной энергии  $E = m_0 g x$ . По сути, мы получили одномерное статистическое распределение молекул воздуха по их энергиям в поле тяготения Земли. Людвиг Больцман предположил, что эта формула справедлива не только для потенциальной энергии гравитационного притяжения, но и вообще для любой потенциальной энергии молекул

$$n = n_0 e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}}. \quad (1.16)$$

Обратим внимание на то, что **распределение Больцмана** (1.16) не нормировано на единицу.

### 1.2.3 Распределение Максвелла

**Распределение Максвелла** или **распределение молекул газа по скоростям**, к обсуждению которого мы переходим в этом разделе, хорошо подтверждено экспериментально (см. об опыте Штерна в учебнике [4]). Поэтому мы сократим работу по его выводу, приняв избыточное количество естественных предположений. Желая ознакомиться с более общим выводом распределения Максвелла, могут обратиться к книгам по статистической физике, например, к учебнику Исихары [5]. Итак, вот наши предположения.

- Рассматривается мономолекулярный газ, находящийся в термодинамическом равновесии с окружающим его термостатом. Размеры термостата достаточно велики, что дает основания пренебречь влиянием его стенок.
- Предполагается достаточная разреженность газа, поэтому можно принимать в расчет только парные столкновения молекул.
- Предполагается, что столкновения молекул упруги. Это позволяет использовать не только закон сохранения импульса, но и закон сохранения энергии.
- Предполагается обратимость процессов столкновения молекул. Это означает, что для любого столкновения молекул, приводящего к изменению их импульсов с  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  на  $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$ , существует столкновение с изменением импульсов с  $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$  на  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ .
- Предполагается, что статистическое распределение молекул по скоростям **изотропно**. Математически это означает, что распределение за-

висит только от модуля скорости молекул  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ , но не от их отдельных компонент  $v = (v_x, v_y, v_z)$ , т.е. это распределение сферически симметрично.

- Предполагается, что распределения молекул по проекциям скоростей на разные направления статистически независимы.

Рассмотрим столкновение двух молекул, имеющих скорости  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ . Пусть после соударения их скорости становятся равными  $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ , соответственно. Вследствие упругости столкновения, выполняется не только закон сохранения импульса

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2,$$

но и закон сохранения энергии

$$v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

В приведенных уравнениях было учтено равенство масс молекул.

Число таких столкновений, очевидно, пропорционально количеству молекул, скорости которых близки к  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ . Точнее, пусть  $N(\mathbf{v})$  - плотность числа частиц, скорости которых лежат в интервале  $[\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$ . Тогда число столкновений, с изменением скоростей молекул от  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  до  $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ , пропорционально произведению  $N(\mathbf{v}_1)N(\mathbf{v}_2)$ . С другой стороны, число обратных процессов пропорционально  $N(\mathbf{v}'_1)N(\mathbf{v}'_2)$ . Наше предположение обратимости процессов столкновений предполагает равенство

$$N(\mathbf{v}_1)N(\mathbf{v}_2) = N(\mathbf{v}'_1)N(\mathbf{v}'_2),$$

которое называется **условием детального баланса**.

Поскольку все направления скоростей молекул равноправны, функция  $N(\mathbf{v})$  может зависеть только от модуля скорости  $|\mathbf{v}|$  или, что удобнее - от квадрата скорости  $|\mathbf{v}|^2 = v^2$ . Приходим к следующему соотношению

$$N(v_1^2)N(v_2^2) = N(v_1'^2)N(v_2'^2).$$

Чтобы найти явный вид функции  $N(v_1^2)$ , положим в этом равенстве  $v_2' = 0$  и заменим  $v_1'^2 = v_1^2 + v_2^2$  из закона сохранения энергии

$$N(v_1^2)N(v_2^2) = N(v_1^2 + v_2^2)N(0).$$

Продифференцируем полученное равенство по  $v_2^2$ , затем положим  $v_2^2 = 0$  и  $v_1 = v$ . Приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dN(v^2)}{d(v^2)} = -aN(v^2), \quad (1.17)$$

где

$$a = -\frac{1}{N(0)} \frac{dN(v^2)}{d(v^2)}(0)$$

- неизвестная постоянная. Еще одна постоянная  $A$  появляется при интегрировании уравнения (1.17)

$$N(v) = Ae^{-av^2}.$$

Мы опустили квадрат у скорости в аргументе функции  $N$ , поскольку сама функция уже определена с точностью до постоянных.

Число частиц, проекции скоростей которых лежат в интервалах  $v_x + dv_x$ ,  $v_y + dv_y$ ,  $v_z + dv_z$ , вычисляется по формуле

$$dN(v_x, v_y, v_z) = N(v)dv_x dv_y dv_z = Ae^{-av^2} dv_x dv_y dv_z. \quad (1.18)$$

Отношение

$$f(v_x, v_y, v_z) = \frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{N} = \frac{A}{N} e^{-av^2} dv_x dv_y dv_z, \quad (1.19)$$

где  $N$  - количество молекул в термостате, интерпретируется как **вероятность** молекуле иметь скорость, компоненты которой лежат в интервалах  $v_x + dv_x$ ,  $v_y + dv_y$  и  $v_z + dv_z$ .

Поскольку справедливо разложение на множители

$$e^{-av^2} = e^{-av_x^2} e^{-av_y^2} e^{-av_z^2},$$

то формулу (1.18) можно представить в факторизованной форме

$$dN(v_x, v_y, v_z) = Ae^{-av_x^2} dv_x \cdot e^{-av_y^2} dv_y \cdot e^{-av_z^2} dv_z.$$

Наше предположение о статистической независимости распределения молекул по скоростям в разных направлениях позволяет считать, что множитель  $e^{-av_x^2} dv_x$  пропорционален числу молекул  $dN(v_x)$ , проекции скоростей которых на ось  $OX$  лежат в интервале  $v_x + dv_x$  (при этом проекции скорости на оси  $OY$  и  $OZ$  могут быть любыми). Аналогично интерпретируются и два других множителя.

Постоянную  $A$  можно определить из условия, что в термостате находится  $N$  молекул. Математически это означает выполнение равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dN_{v_x, v_y, v_z} = A \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-av_x^2} dv_x \right)^3 = N.$$

Взяв интеграл (см. Приложение В.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-av_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

получаем

$$A \left( \frac{\pi}{a} \right)^{3/2} = N,$$

откуда

$$A = N \left( \frac{\pi}{a} \right)^{-3/2}.$$

С учетом определения постоянной  $A$ , распределение молекул по компонентам скоростей дается формулой

$$dN(v_x, v_y, v_z) = N \left( \frac{a}{\pi} \right)^{3/2} e^{-av^2} dv_x dv_y dv_z. \quad (1.20)$$

В формуле (1.20) остается неизвестной постоянная  $a$ . Ее удобно определить чуть позже, закончив вывод распределения Максвелла.

Поскольку распределение молекул по компонентам скоростей (1.20) зависит только от квадрата скорости, удобно перейти к сферическим координатам  $(v_x, v_y, v_z) \rightarrow (v, \phi, \theta)$  (см. формулы (А.10), (А.11)). Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dN(v_x, v_y, v_z) &= \int_0^{\infty} N \left( \frac{a}{\pi} \right)^{3/2} v^2 e^{-av^2} dv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} = \\ &= \int_0^{\infty} N 4\pi \left( \frac{a}{\pi} \right)^{3/2} v^2 e^{-av^2} dv = N \end{aligned}$$

Из полученной формулы видно, что функция

$$N(v) = 4\pi N \left( \frac{a}{\pi} \right)^{3/2} v^2 e^{-av^2} \quad (1.21)$$

определяет плотность числа молекул, модуль скорости которых лежит в интервале  $[v, v + dV)$ , и

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{a}{\pi} \right)^{3/2} v^2 e^{-av^2} \quad (1.22)$$

определяет плотность вероятности для таких молекул.

Постоянную  $a$  мы сможем вычислить, используя известную из элементарной теории связь средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа с температурой (А.5)

$$\langle E_0 \rangle = \langle \frac{m_0 v^2}{2} \rangle = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

откуда

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m_0}, \quad (1.23)$$

где  $m_0$  - масса молекул газа,  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - абсолютная температура газа. Вычисляя средний квадрат скорости с помощью распределения вероятности (1.22)

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) = \frac{3}{2a},$$

и подставляя результат в формулу (1.23), получаем

$$a = \frac{m_0}{2kT}.$$

Теперь функции распределения вероятности и числа частиц  $f(v)$ ,  $N(v)$ ,  $f(v_x, v_y, v_z)$ ,  $N(v_x, v_y, v_z)$  принимают окончательный вид

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}, \quad N(v) = N 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}, \quad (1.24)$$

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}, \quad N(v_x, v_y, v_z) = N \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (1.25)$$

Качественный вид функции распределения  $f(v)$  (1.24) представлен на Рис. 5. Переменная  $x = v/\sqrt{2k/m_0}$ , Кривые (1), (2) и (3) соответствуют распределениям одного и того же газа с разными температурами

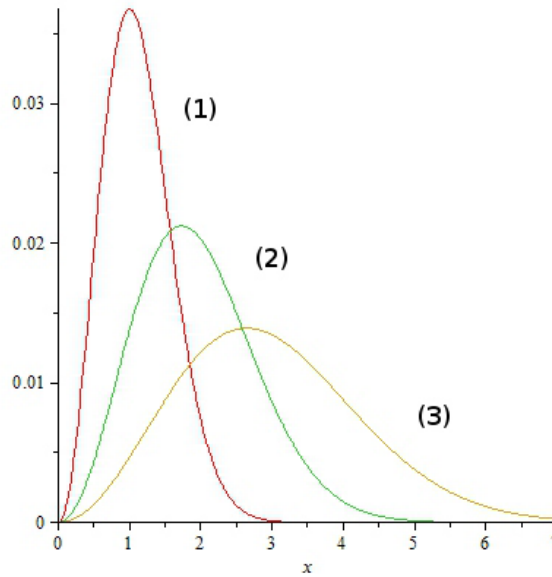


Рис. 5

$T_1 < T_2 < T_3$ . Распределение имеет максимум, который соответствует наиболее вероятной скорости молекул газа. Чтобы найти эту скорость, необходимо взять производную от функции распределения (1.24), приравнять ее к нулю и решить полученное уравнение относительно  $v$ . Поскольку положение максимума не зависит от постоянного множителя, найдем максимум функции  $f(x) = x^2 \exp(-\gamma x^2)$ , где  $\gamma = \frac{m_0}{2kT}$ . Получаем

$$f'(x) = 2x \exp(-\gamma x^2) - 2\gamma x^3 \exp(-\gamma x^2) = 2x(1 - \gamma x^2) \exp(-\gamma x^2) = 0.$$

Интересующий нас корень  $x = 1/\sqrt{\gamma}$ . Вспоминая значение  $\gamma$ , получаем наиболее вероятную скорость

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \quad (1.26)$$

Полученная формула подтверждает зависимость положения максимума распределения Максвелла от температуры.

Средняя скорость молекул газа находится интегрированием

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}, \quad (1.27)$$



а средняя квадратичная скорость немедленно следует из (1.23)

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (1.28)$$

которая получается элементарными методами. Дисперсия и среднее квадратичное отклонение имеют следующие значения

$$\sigma_v^2 = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 = \left(3 - \frac{8}{\pi}\right) \frac{kT}{m_0} \approx 0.45 \frac{kT}{m_0}, \quad \sigma_v \approx 0.67 \sqrt{\frac{kT}{m_0}}. \quad (1.29)$$

Завершая раздел, приведем без вывода (см. задачу 2.8) простую, но очень полезную формулу, дающую среднее количество молекул  $\langle z \rangle$ , сталкивающихся с единицей поверхности стенки за единицу времени

$$\langle z \rangle = \frac{n \langle v \rangle}{4}, \quad (1.30)$$

где  $n$  - плотность числа молекул,  $\langle v \rangle$  - средняя скорость молекул газа .

## 2 Задачи

Ниже приведено несколько типичных задач с решениями и задач иллюстрирующих теоретический материал.

### 2.1 Задача о распределении $f(x) = ax^3 e^{-\lambda x}$ .

- Плотность вероятности некоторой случайной величины равна

$$f(x) = ax^3 e^{-\lambda x}, \quad x \in [0, \infty), \quad \lambda > 0.$$

Найти нормировочный множитель  $a$ , вычислить наиболее вероятное значение этой величины, первый и второй моменты, дисперсию и среднее квадратичное отклонение. Вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал  $[0, 1/\lambda)$ .

При решении этой задачи нам придется иметь дело с интегралами вида

$$K_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x} dx.$$

Нетрудно заметить, что

$$K_n = (-1)^n \frac{d^n K_0}{d\lambda^n}, \quad K_0 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Взяв производную степени  $n$  по  $\lambda$  от функции  $K_0 = \lambda^{-1}$ , получаем

$$K_n = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}, \quad \text{где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \quad 0! = 1.$$

Теперь перейдем собственно к задаче. Условие нормировки (1.9) нашего распределения дает

$$1 = \int_0^{\infty} f(x) dx = a K_3 = a \frac{6}{\lambda^4},$$

откуда  $a = \lambda^4/6$  и распределение имеет вид

$$f(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 e^{-\lambda x}, \quad x \in [0, \infty). \quad (2.1)$$

Наиболее вероятное значение случайной величины находим из условия равенства нулю производной от плотности  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^2 e^{-\lambda x} (3 - \lambda x) = 0.$$

Единственный ненулевой корень этого уравнения дает нам искомое наиболее вероятное значение

$$x_{\text{вер}} = \frac{3}{\lambda}.$$

Среднее значение  $\langle x \rangle$  или  $M_1$  и  $M_2$  находим вычисляя интегралы

$$M_1 = \langle x \rangle = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{\lambda^4}{6} K_4 = \frac{4}{\lambda},$$

$$M_2 = \langle x^2 \rangle = \frac{\lambda^4}{6} K_5 = \frac{20}{\lambda^2}.$$

По формуле (1.12) находим дисперсию

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{20}{\lambda^2} - \left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 = \frac{4}{\lambda^2}$$

и среднее квадратичное отклонение

$$\sigma_x = \frac{2}{\lambda}.$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал  $[0, 1/\lambda)$  определяется интегралом от функции (2.1)

$$\int_0^{1/\lambda} f(x) dx = \frac{\lambda^4}{6} \int_0^{1/\lambda} x^3 e^{-\lambda x} dx = 1 - \frac{8}{3e} \approx 0.019.$$

## 2.2 Задача о барометрической формуле для смеси газов

- Атмосфера некоторой планеты состоит из двух газов с молярными массами  $\mu_1 > \mu_2$ . Парциальное давление газа (1) у поверхности планеты равно 75 % от полного давления. На какой высоте парциальное давление этого газа составит 74 % от полного. Считать, что температура атмосферы не зависит от высоты и равна  $T$ , ускорение свободного падения  $g$ . Эффектами перемешивания в атмосфере пренебречь.

В соответствии с законом парциальных давлений для идеальных газов (А.3), для смеси двух газов барометрическая формула (1.14) принимает вид

$$p(h) = p_1 e^{-\frac{\mu_1 gh}{RT}} + p_2 e^{-\frac{\mu_2 gh}{RT}},$$

где  $p_1 = 3p_0/4$  и  $p_2 = p_0/4$  - парциальные давления первого и второго газов вблизи поверхности планеты в долях от полного давления  $p_0$ . С подъемом на некоторую высоту парциальное давление газов уменьшается неодинаково. Поскольку по условию задачи  $\mu_1 > \mu_2$ , то коэффициент в показателе экспоненты первого газа будет больше, следовательно давление более тяжелого газа будет уменьшаться быстрее. Отношение парциальных давлений  $p'_1$  и  $p'_2$  на высоте  $h$  будет определяться формулой

$$\frac{p'_1}{p'_2} = \frac{p_1}{p_2} e^{-\frac{(\mu_1 - \mu_2)gh}{RT}}.$$

Выражая из этой формулы  $h$ , получаем

$$h = -\ln \left( \frac{p'_1 p_2}{p'_2 p_1} \right) \frac{RT}{(\mu_1 - \mu_2)g}.$$

Учитывая данные задачи

$$\ln \left( \frac{p'_1 p_2}{p'_2 p_1} \right) = \ln \left( \frac{74}{26 \cdot 3} \right) \approx -0.053,$$

приходим к окончательному выражению

$$h \approx 0.053 \frac{RT}{(\mu_1 - \mu_2)g}.$$

### 2.3 Задача о распределении давления воздуха в ускоренной капсуле

- Герметически запаянная цилиндрическая капсула, заполненная гелием, движется вертикально вверх с ускорением  $a = 7g$ . Какова относительная разность давлений гелия у пола и у потолка капсулы? Высота капсулы  $L = 5$  м, температура  $T = 300$  К.

В неинерциальной системе отсчета, связанной с капсулой, весы будут показывать вес тела, равный  $P = m(g + a)$ , где  $m$  - масса тела,  $g$  - ускорение свободного падения,  $a$  - ускорение капсулы. Это означает, что ускорение свободного падения в капсуле будет равно (в условиях нашей задачи)  $G = 8g$ . Следовательно, барометрическая формула (1.14) для газа в капсуле должна быть записана в виде

$$p(x) = p_0 e^{-\frac{\mu G x}{RT}},$$

где  $p_0$  - давление гелия у пола капсулы,  $\mu$  - молярная масса гелия. Разность давлений у пола и у потолка капсулы вычисляется по формуле

$$\Delta p = p_0 - p(L) = p_0 (1 - e^{-\frac{\mu GL}{RT}}).$$

Поскольку дробь в показателе экспоненты при данных задачи много меньше единицы

$$\frac{\mu GL}{RT} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10 \cdot 5}{8.31 \cdot 300} \approx 6.4 \cdot 10^{-4} \ll 1,$$

разложим экспоненту с точностью до первого члена  $e^d \approx 1 - d$  и подставим результат разложения в формулу, выражающую  $\Delta p$

$$\Delta p \approx p_0 \frac{\mu GL}{RT}.$$

Относительная разность давлений

$$\frac{\Delta p}{p_0} \approx 6.4 \cdot 10^{-4}.$$

## 2.4 Задача о характерных скоростях молекул газа

- Какова средняя скорость молекул некоторого газа, если средняя квадратичная скорость его молекул превышает наиболее вероятную на 90 м/с?

По условию задачи средняя квадратичная скорость молекул газа (1.28) превышает наиболее вероятную скорость (1.26) на 20 м/с

$$\sqrt{\frac{3kT}{m_0}} - \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{\frac{kT}{m_0}} = 20,$$

откуда следует, что

$$\sqrt{\frac{kT}{m_0}} = \frac{20}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу средней скорости (1.27) и проводя вычисления, получаем ответ

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{20}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \approx 452 \text{ м/с}.$$

## 2.5 Задача о зависимости средней скорости молекул от давления в адиабатическом процессе

- Найти зависимость средней скорости молекул идеального одноатомного газа от давления в адиабатическом процессе.

Уравнение адиабатического процесса в  $p-T$  координатах дается формулой (A.8)

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const},$$

которую удобно переписать в форме, выражающую пропорциональность давления некоторой степени температуры.

$$p \sim T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Выражая температуру газа через среднюю скорость его молекул из формулы (1.27)

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}},$$

получаем

$$T \sim \langle v \rangle^2.$$

Подставляя полученную пропорциональность в формулу, связывающую давление и температуру, приходим к выражению

$$p \sim \langle v \rangle^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

Поскольку газ одноатомный, то число степеней свободы его атомов  $i = 3$  и  $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}$ . Выражая из предыдущей формулы среднюю скорость и подставляя значение  $\gamma$ , получаем окончательно

$$\langle v \rangle \sim p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = p^{\frac{1}{5}}.$$

## 2.6 Задача об относительных количествах молекул с разными скоростями

- Найти отношение доли атомов в парах ртути, скорости которых лежат в пределах от 1913 до 1914 м/с, к доли атомов, имеющих скорости в пределах от 2013 до 2014 м/с. Температура паров 1000 К.

Поскольку интервалы скоростей (1 м/с), фигурирующие в условии задачи, много меньше самих скоростей, можно воспользоваться непосредственно формулой (1.24), записанной в виде

$$\Delta N = N 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \Delta v.$$

Если обозначить  $\Delta N_1$  - количество молекул в интервале скоростей от 1913 до 1914 м/с,  $\Delta N_2$  - количество молекул в интервале скоростей от 2013 до 2014 м/с,  $v_1 = 1913$  м/с,  $v_2 = 2013$  м/с и  $\Delta v_1 = \Delta v_2 = 1$  м/с, то требуемое отношение будет иметь вид

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} e^{-\frac{m_0(v_1^2 - v_2^2)}{2kT}}.$$

Для упрощения вычислений умножим числитель и знаменатель в экспоненте на число Авогадро

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} e^{-\frac{\mu(v_1^2 - v_2^2)}{2RT}}.$$

Подстановка данных задачи, включая атомную массу ртути  $\mu = 0.2$  кг/моль, дает

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} \approx 102.$$

## 2.7 Задача об определении $\langle v_x^2 \rangle$ молекул газа

- Исходя из распределения Максвелла, вычислить средний квадрат  $x$ -компоненты скорости молекул газа. Найти отсюда среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну степень свободы поступательного движения молекулы газа.

Используя распределение Максвелла по компонентам скоростей (1.25), средний квадрат компоненты скорости  $v_x$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}\langle v_x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z = \\ &= \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m_0 v_y^2}{2kT}} dv_y \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} dv_x = \frac{kT}{m_0}.\end{aligned}$$

При переходе от тройного интеграла к повторному мы учли равенство подинтегральных выражений с  $v_y$  и  $v_z$ , и воспользовались известными формулами (A.12), (A.14).

Из полученного выше выражения для среднего квадрата  $x$ -компоненты скорости молекул газа  $\langle v_x^2 \rangle$ , немедленно вычисляется средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы поступательного движения молекулы газа

$$\langle E_0 \rangle = \frac{m_0}{2} \langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{2}.$$

Этот результат согласуется с теоремой о равнораспределении энергии молекулы по степеням свободы.

## 2.8 Задача о количестве столкновений молекул с поверхностью

- Исходя из распределения Максвелла, вычислить количество молекул, сталкивающихся с единицей поверхности в единицу времени.

Введем систему координат в которой плоская поверхность (или стенка - "W" на Рис. 6), совпадает с плоскостью  $Y0Z$ . Сначала рассмотрим газ, заполняющий галерею прямоугольного сечения, перпендикулярную стенке ("G" на Рис. 6). Положим, что столкновение молекул газа с боковыми

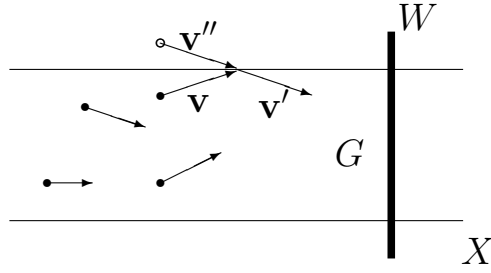


Рис. 6

стенками галереи происходят абсолютно упруго. Это означает, что молекула, обладавшая скоростью  $\mathbf{v}$ , после упругого отражения, будет иметь скорость  $\mathbf{v}'$ , у которой либо  $v'_y = -v_y$ , либо  $v'_z = -v_z$ , а  $x$ -компонента скорости останется неизменной. Таким образом, вычисляя количество ударов молекул о стенку  $W$ , можно игнорировать движение молекул в направлениях, параллельных ей самой.

Теперь предположим, что боковые стенки галереи абсолютно прозрачны. Это значит, что молекула со скоростью  $\mathbf{v}$ , рассмотренная выше, покинет галерею. Однако изотропность распределения Максвелла подсказывает, что на место этой молекулы, из соседней области, придет другая молекула со скоростью  $\mathbf{v}'' = \mathbf{v}'$ . Последнее утверждение можно сделать более точным, сформулировав его в виде условия детального баланса.

Итак, отвечая на вопрос задачи, будем учитывать только распределение молекул по скоростям вдоль оси  $OX$ . Такое распределение получается формальным интегрированием распределения молекул по компонентам скоростей (1.25) по  $v_y$  и  $v_z$

$$\begin{aligned}
 f(v_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_y dv_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv_y dv_z = \\
 &= \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m_0 v_y^2}{2kT}} dv_y \right)^2 = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}.
 \end{aligned}$$

Число молекул в единице объема,  $x$ -компоненты скоростей которых принадлежат интервалу  $[v_x, v_x + dv_x)$ , равно

$$dn(v_x) = n f(v_x) dv_x,$$

где  $n$  - плотность числа молекул.



Вернемся к рассмотренной выше галерее, считая площадь ее сечения равной  $S$ . За время  $t$  стенки достигнут все молекулы со скоростями из интервала  $[v_x, v_x + dv_x)$ , которые содержатся и параллелепипеде с площадью основания  $S$  и длиной боковой стороны  $v_x t$ . Их число

$$d \langle Z \rangle = n f(v_x) dv_x S, v_x t = n \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} v_x e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} St.$$

Полное число молекул из галереи, которые столкнутся со стенкой за время  $t$  дается интегралом

$$\langle Z \rangle = \int_0^{\infty} d \langle Z \rangle = n \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} St \int_0^{\infty} v_x e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} dv_x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2kT}{\pi m_0}} St.$$

Интеграл берется только по направленным к стенке скоростям.

Поделив полученное выражение на  $St$  и вспомнив величину средней скорости молекул в газе (1.27), получим число столкновений молекул со стенкой за 1 секунду, приходящихся на  $1 \text{ м}^2$  площади (формула (1.30))

$$\langle z \rangle = \frac{n \langle v \rangle}{4}.$$

Заметим, что полученная формула позволяет рассчитать количество молекул, проходящих сквозь небольшое отверстие в стене, при условии сохранения максвелловского распределения и термодинамических параметров, характеризующих газ.

## 2.9 Задача о распределении Максвелла в цилиндрической системе координат

- Найти среднее число молекул, компоненты скорости которых, параллельные оси  $OZ$ , лежат в интервале  $[v_z, v_z + dv_z)$ , а абсолютные значения перпендикулярной составляющей скорости, параллельные плоскости  $XOY$ , заключены в интервал  $[v_{xy}, v_{xy} + dv_{xy})$ .

По сути, в этой задаче предлагается найти распределение молекул по скоростям в цилиндрической системе координат  $(v_r, \phi, v_z)$ . Для удобства мы ввели обозначение обозначать  $v_{xy} = v_r$ . Будем следовать методу, использованному для вывода распределения Максвелла по скоростям (1.24). Запишем условие нормировки распределения Максвелла по компонентам скоростей (1.25) в цилиндрической системе координат (A.9)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \int_0^{\infty} v_r dv_r \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} f(v_r, \phi, v_z) dv_z,$$

где  $f(v_x, v_y, v_z)$  - функция распределения по компонентам скоростей (1.25). Преобразование этой функции к цилиндрическим координатам заключается в следующей замене в показателе экспоненты

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_r^2 + v_z^2.$$

Поскольку получающаяся при такой замене функция  $f(v_r, \phi, v_z) = f(v_r, v_z)$  не зависит от угла, интегрирование ее по  $\phi$  сводится к появлению множителя  $2\pi$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \int_0^{\infty} v_r dv_r \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi f(v_r, v_z) dv_z.$$

Последнее соотношение позволяет немедленно написать изотропную функцию распределение молекул по скоростям в цилиндрической системе

$$f(v_r, v_z) = 2\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v_r e^{-\frac{m_0(v_r^2 + v_z^2)}{2kT}}.$$

Если количество молекул в системе  $N$ , то среднее число молекул, компоненты скорости которых, параллельные оси  $OZ$ , лежат в интервале  $[v_z, v_z + dv_z)$ , а абсолютные значения перпендикулярной составляющей скорости, параллельные плоскости  $XOY$ , заключены в интервал  $[v_{xy}, v_{xy} + dv_{xy})$ , определяется формулой

$$dN(v_z, v_{xy}) = N 2\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v_r e^{-\frac{m_0(v_r^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_z dv_{xy}.$$

## 2.10 Задача о распределении молекул по энергиям

- Вывести формулу плотности распределения молекул газа по кинетическим энергиям. Используя полученное распределение, вычислить первые моменты, дисперсию, наиболее вероятную энергию.

Вероятность молекуле обладать скоростью, принадлежащей интервалу  $[v, v + dv]$ , определяется распределением Максвелла (1.24)

$$dP(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv.$$

Используя равенство

$$v dv = d \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{m_0} d \left( \frac{m_0 v^2}{2} \right) = \frac{dE}{m_0},$$

где  $E$  - кинетическая энергия молекулы, получаем

$$dP(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE = dP(E).$$

Следовательно, распределение молекул газа по кинетическим энергиям имеет вид

$$f(E) = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Чтобы вычислить моменты, воспользуемся формулой

$$\int_0^{\infty} E^{n+1/2} e^{-aE} dE = \frac{(2n+1)!! \sqrt{\pi}}{2^{n+1} a^{n+3/2}},$$

где  $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$ . Получаем

$$\int_0^{\infty} E^{3/2} e^{-aE} dE = \frac{3\sqrt{\pi}}{4a^{5/2}}, \quad \int_0^{\infty} E^{5/2} e^{-aE} dE = \frac{15\sqrt{\pi}}{8a^{7/2}}.$$

Учитывая значение  $a = (kT)^{-1}$ , получаем, как и ожидалось, для средней энергии (первого момента)

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

для второго момента, дисперсии и среднего квадратичного отклонения, соответственно,

$$\langle E^2 \rangle = \frac{15}{4} k^2 T^2, \quad \sigma_E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{3}{2} k^2 T^2, \quad \sigma_E = \sqrt{\frac{3}{2}} kT.$$

Наиболее вероятная энергия находится также, как в разделе 1.2.3 и задаче 2.1 и равна

$$E_{\text{вер}} = \frac{1}{2} kT.$$

## А Приложение

### А.1 Элементарные сведения об идеальных газах

Идеальный газ - это простейшая модель реального газа, в которой, в большинстве случаев, можно пренебречь взаимодействием между молекулами. Эта модель несовершенна хотя бы потому, что с ее помощью не объяснить существование устойчивого распределения молекул по скоростям в состоянии термодинамического равновесия, да и сам переход от неравновесного состояния к равновесному. Однако модель хороша тем, что термодинамически реальные газы при обычных условиях ведут себя как идеальные.

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона)

$$pV = \frac{m}{\mu}RT, \quad (\text{A.1})$$

хорошо подтверждается на опыте при не слишком высоких плотностях и не слишком низких температурах. В уравнении (A.1)  $p, V, T$  - давление газа, его объем и абсолютная температура,  $m$  - масса газа,  $\mu$  - его молярная масса,  $R = 8.31$  Дж/(моль · К) - универсальная газовая постоянная. Полагая, что в сосуде с газом находится  $N$  молекул, в одном моле, в соответствии с определением, число Авогадро молекул  $N_A$ , получаем

$$\frac{m}{\mu} = \frac{m_0 N}{m_0 N_A} = \frac{N}{N_A},$$

где  $m_0$  - масса молекулы. Вводя  $n = N/V$  - число частиц в единице объема (иначе, плотность частиц или их концентрация),  $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К - постоянную Больцмана, приходим к другой форме уравнения состояния идеального газа

$$p = nkT, \quad (\text{A.2})$$

Для смесей газов близких к идеальным выполняется закон парциальных давлений: полное давление  $P$  смеси газов в сосуде равно сумме их парциальных давлений  $P_i$ , т.е. давлений, которые оказывали бы эти газы на стенки сосуда каждый в отдельности

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n. \quad (\text{A.3})$$

Рассматривая газ в сосуде кубической формы и считая, что молекулы упруго взаимодействуют со стенками сосуда (но не друг с другом), можно вывести уравнение, иногда называемое основным уравнением молекулярно-кинетической теории

$$p = \frac{2}{3}n \langle E_0 \rangle, \quad E_0 = \frac{m_0 v^2}{2}, \quad (\text{A.4})$$

где угловые скобки означают среднее значение (в случае формулы (A.4) - кинетической энергии поступательного движения молекулы газа).

Сравнивая уравнения (A.2) и (A.4), приходим к соотношению

$$\langle E_0 \rangle = \frac{3}{2}kT, \quad (\text{A.5})$$

которое позволяет трактовать температуру как меру кинетической энергии поступательного движения молекул газа, находящегося в тепловом равновесии.

Если учесть вращательные и колебательные степени свободы молекул, то справедлива более общая формула

$$\langle E_0 \rangle = \frac{i}{2}kT, \quad (\text{A.6})$$

причем справедлива не только для газов. В (A.6)  $i$  - число степеней свободы молекул газа. Для атомарного газ  $i = 3$ , для двухатомного при не слишком высоких температурах  $i = 5$ .

Число степеней свободы молекул газа определяет коэффициент  $\gamma$  в формуле Пуассона для адиабатического процесса

$$pV^\gamma = const, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}, \quad (\text{A.7})$$

где  $C_p$  и  $C_V$  - теплоемкости газа при постоянном давлении и объеме, соответственно. Формулу Пуассона можно переписать в  $p, T$  - координатах с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона. Перепишем (A.1) в виде

$$V = const \frac{T}{p}$$

и исключим из (A.7) объем. После коротких преобразований, получим

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const. \quad (\text{A.8})$$

## А.2 Цилиндрические и сферические координаты

Цилиндрические координаты  $(r, \phi, z)$  вводятся формулами

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = z, \quad (\text{A.9})$$

при этом

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$

Якобиан перехода от прямоугольных декартовых координат к цилиндрическим дается формулой

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, z)} = r,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dz F(r, \phi, z).$$

Если подынтегральная функция не зависит от угла  $\phi$ , то интегрирование по углу дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z) dx dy dz = 2\pi \int_0^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} dz F(r, \phi, z) r.$$

Сферические координаты  $(r, \phi, \theta)$  определяются формулами

$$x = r \cos \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \phi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta, \quad (\text{A.10})$$

причем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0.$$

Якобиан перехода от прямоугольных декартовых координат к сферическим дается формулой

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} = r^2 \cos \theta,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} F(r, \phi, \theta) \cos \theta d\theta.$$

Если подынтегральная функция зависит только от  $r$ , то этот интеграл можно упростить

$$\int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} F(r) \cos \theta d\theta = 4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 F(r). \quad (\text{A.11})$$

### А.3 Некоторые интегралы

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{a} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.12})$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}, \quad (\text{A.13})$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{a^3} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.14})$$

$$I_{n+2} = - \frac{dI_n}{da}, \quad (\text{A.15})$$

В соответствии с формулой (A.15), можно вычислить любой интеграл вида

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx. \quad (\text{A.16})$$

Например,

$$I_3 = - \frac{dI_1}{da} = \frac{1}{2a^2}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sin \frac{(n+1)\pi}{4}}. \quad (\text{A.17})$$

### Список литературы

- [1] Пуанкаре А., Теория вероятностей, Ижевск, Ижевская республиканская типография, 1999.

- [2] Ван дер Варден Б.Л., Математическая статистика, М., ИЛ, 1960.
- [3] Сивухин Д.В., Общий курс физики в 5 тт., том 2, Термодинамика и молекулярная физика, М., ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [4] Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М., Основы физики, Курс общей физики: Учебн. В 2 тт., Т. 2. Квантовая и статистическая физика, Под ред. Ю.М. Ципенюка, М., ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [5] Исихара А., Статистическая физика, М., Мир, 1973.

### **Краткие пояснения к списку литературы**

Теория вероятностей важна для решения многих прикладных задач, поэтому студентам технических специальностей необходимо с ней ознакомиться по специализированным учебникам. Для первого чтения можно рекомендовать замечательную книгу Пуанкаре [1] (написанную более 100 лет назад), в которой очень подробно и прозрачно разбираются основания теории вероятностей. Прикладные аспекты этой теории можно найти в небольшом учебнике Ван дер Вардена [2].

Основы теории статистических распределений в молекулярно-кинетической теории газов излагаются в любом учебнике физики, включающим соответствующий раздел. В книге Сивухина [3] изложение подробно, со многими деталями. Более современный и более краткий подход к изложению статистических распределений можно найти в учебнике [4].

Учебник Исихары [5] является частью курса теоретической физики, поэтому достаточно сложен. В наш короткий список литературы он входит только из-за первой, вводной главы, которая включает уравнение Больцмана и вывод на его основе распределения Максвелла.