Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Институт прикладной математики и механики

Кафедра высшей математики

Ефремова С.С., Иванова Л.А.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2014

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Предисловие.

Комплексные числа возникают в связи с задачей решения квадратных уравнений. Известно, что не всякое квадратное уравнение можно решить, оставаясь в области R —действительных чисел. Простейшее неразрешимое в R квадратное уравнение имеет вид

$$x^2+1=0 \quad . \tag{1}$$

Возникает необходимость расширить систему действительных чисел до такой системы чисел, в которой уравнение (1) имело бы решение. Будем считать, что уравнение (1) на самом деле разрешимо, но его корень не является действительным числом, а представляет собой новое число. Обозначим его символом i, причем будем считать, что

$$i^2=-1.$$

Операция умножения, примененная к действительному числу b и числу i, приводит к числам вида bi ($b \in$ R), а операция сложения – к числам вида $a+ib$ ($a \in$ R, $b\in$ R). Таким образом, введение нового числа i влечет за собой необходимость рассматривать числа вида $a+ib$. Эти числа называются *кoмплéксными* (составными). Множество всех комплексных чисел обозначается через C.

Заметим, что основные арифметические операции – сложение и умножение – уже не выводят за пределы множества C, т.е. не требуют вводить каких-то новых чисел. Действительно, с учетом того, что $i^2=-1$, получим

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)\ .$$

Именно так и вводились первоначально комплексные числа.

Название комплексного числа предложил К. Гаусс (1777-1855).
Символ *i* ввел в рассмотрение Л. Эйлер (1707-1783).

Однако введение понятия комплексного числа, в свою очередь, порождает ряд вопросов: что же все-таки представляет собой число i? Можно ли распространять на него обычные законы арифметики? Законно ли рассматривать вместе выражения, содержащие действительные числа и число i? Иначе говоря, возникает задача строгого и полного построения теории комплексных чисел.

§ 2. Определения комплексного числа. Действия сложения и умножения комплексных чисел и их свойства.

Запись комплексного числа в виде $a+ib$ наводит на мысль о возможности задания комплексного числа упорядоченной парой (a,b) действительных чисел. В соответствии с этим введем такое определение:

- *Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел (a,b); при этом (a,b) и (b,a) — различные пары, если $a \neq b$.*

Множество комплексных чисел обозначается через C. Элементы множества C обозначаются строчными буквами латинского алфавита $x, y, z, \ldots$

На множестве C понятие равенства, операции сложения и умножения вводятся следующим образом:

Равенство комплексных чисел $z_1 = (a,b)$ *и* $z_2 = (c,d)$ имеет место в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a,b) = (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

- *Суммой и произведением комплексных чисел $z_1 = (a,b)$ и $z_2 = (c,d)$ называются пары $(a+c,\, b+d)$, $(ac-bd,\, ad+bc)$, т.е.*

$$z_1 + z_2 \Leftrightarrow (a,b) + (c,d) = (a+c,\, b+d) \tag{2}$$

$$z_1 \cdot z_2 \Leftrightarrow (a,b)(c,d) = (ac-bd,\, ad+bc) \tag{3}$$

Эти операции обладают такими же свойствами, что и обычные операции сложения и умножения на множестве действительных чисел.

1. коммутативность сложения: $(a,b)+(c,d) = (c,d)+(a,b)$;
2. ассоциативность сложения: $\big((a,b)+(c,d)\big)+(e,f) = (a,b)+\big((c,d)+(e,f)\big)$;
3. наличие нейтрального элемента $(0,0)$ относительно операции сложения: $(a,b)+(0,0) = (a+0,\, b+0) = (a,b)$
4. наличие противоположной пары $(-a,-b)$: $(a,b)+(-a,-b) = (0,0)$
5. коммутативность умножения: $(a,b)\cdot(c,d) = (c,d)\cdot(a,b)$;
6. ассоциативность умножения: $\big((a,b)(c,d)\big)\cdot(e,f) = (a,b)\cdot\big((c,d)(e,f)\big)$**;**
7. дистрибутивность умножения относительно сложения: $\big((a,b)+(c,d)\big)\cdot(e,f) = (a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)$
8. наличие нейтрального элемента $(1,0)$ относительно операции умножения: $(a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0,\, a\cdot 0 + b\cdot 1) = (a,b)$

(Рекомендуется свойства 5, 6, 7 вывести самостоятельно).

§ 3. Множество комплексных чисел.

Рассмотрим комплексное число вида $(a,0)$. Множество таких чисел обозначим C*. Очевидно, что C* ⊂ C. Если каждому действительному числу a сопоставить комплексное число $(a,0)$, т.е. $a \to (a,0)$, то получим взаимно-однозначное соответствие между множеством R и множеством C*. Действительно, для любых двух чисел a и b из R числу $(a+b)$ соответствует комплексное число $(a+b,\,0)$ или $(a+b) \to (a+b,\,0)$ Но, согласно формуле (2), $(a+b,\,0) = (a,0)+(b,0)$, следовательно, сумме действительных чисел a и b отвечает сумма соответствующих им комплексных чисел, т.е. $a+b \to (a,0)+(b,0)$.

Аналогично, для произведения: действительному числу (ab) соответствует комплексное число $(ab,0)$ или. $(ab) \to (ab,0)$. Но, с учетом формулы (3), $(ab,0) = (a,0)\cdot(b,0)$, следовательно, произведению действительных чисел a и b отвечает произведение соответствующих им комплексных чисел, т.е. $ab \to (a,0)\cdot(b,0)$

Из сказанного следует то, что, если отождествлять каждое действительное число a с комплексным числом $(a,0)$, то тем самым множество действительных чисел R с его обычной арифметикой окажется как бы вложенным в множество комплексных чисел C. То есть, множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел. Это позволяет нам всегда полагать $(a,0) = a$, а пары (0,0) и (1,0) считать обычными действительными числами 0 и 1.

§ 4. Алгебраическая форма записи комплексного числа.

Особую роль среди комплексных чисел играет пара (0,1), обозначаемая символом i и согласно сложившимся традициям называемая *мнимой единицей*. По закону умножения

$$(0,1)\cdot(0,1) = (0-1,\,0+0) = (-1,0) = -1$$

таким образом $i^2 = -1$. Следовательно, среди комплексных чисел содержится корень уравнения (1), т.е. такое число, квадрат которого равен числу –1.

Покажем, что для построенных комплексных чисел $z = (a,b)$ может быть получена их обычная форма $z = a+bi$. Рассмотрим сначала произведение действительного числа b на i. Согласно (3),

$$bi = (b,0)\cdot(0,1) = (b\cdot 0 - 0\cdot 1,\, b\cdot 1 + 0\cdot 0) = (0,b), \text{ тогда}$$

$$(a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(b,0)\cdot(0,1) = a+bi$$

Теперь можно забыть о первоначальном способе задания комплексных чисел как пары (a,b) и записывать комплексное число в виде $a+bi$. Такая форма записи комплексного числа называется *алгебраической формой*.

Первая компонента комплексного числа $z = a + bi$ называется *действительной частью* (от франц. réel – действительный) и обозначается $\operatorname{Re} z = a$; вторая компонента называется его *мнимой частью* (от франц. imaginaire – мнимый) и обозначается $\operatorname{Im} z = b$.

Подчеркнем, что мнимая часть, так же, как и действительная часть комплексного числа, есть число действительное. Например, $\operatorname{Re}(3-2i) = 3$, $\operatorname{Im}(3-2i) = -2$.

Если $\operatorname{Im} z = 0$, то z – действительное число, если $\operatorname{Re} z = 0$, то z имеет вид bi и называется чисто мнимым числом.

При умножении комплексного числа z на действительное число λ, оба числа $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ умножаются на λ. Например, $-3(2-5i) = -6+15i$.

§ 5. Вычитание и деление комплексных чисел в алгебраической форме.

Пусть u и v два комплексных числа.

- *Разностью $v - u$ называется комплексное число z, удовлетворяющее условию*

$$u + z = v \tag{4}$$

Полагая $u = a + bi,\ v = c + di,\ z = x + yi$, вместо равенства (4) можно записать

$$(a+x)+(b+y)i = c+di \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + x = c \\ b + y = d \end{cases},$$

откуда получаем $x = c - a,\ y = d - b$. Таким образом, разность комплексных чисел задается равенством $(c+di)-(a+bi) = (c-a)+(d-b)i$.

Пусть u и v два комплексных числа, причем $u \neq 0$

- *Частным $\dfrac{v}{u}$ называется комплексное число z, удовлетворяющее уравнению*

$$u\,z = v \tag{5}$$

Полагая $u = a + bi,\ v = c + di,\ z = x + yi$ вместо равенства (5) можно записать

$$(ax-by)+(ay+bx)i = c+di \quad \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = c \\ bx + ay = d, \end{cases}$$

определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$, следовательно, по теореме Крамера, система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c & -b \\ d & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2},$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

Таким образом

$$\frac{v}{u} = \mathrm{z} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2} i \qquad (6)$$

Более простой способ нахождения частного указан в следующем параграфе.

§ 6. Сопряженные комплексные числа.

Пусть $z = a + bi$. Число $\bar{z} = a - bi$ называется сопряженным числу *z*. Например, $\overline{2-3i} = 2+3i$; $\bar{i} = -i$.

Любое действительное число a равно своему сопряженному $\bar{a}$, т.к. $a = a + 0i = a - 0i = \bar{a}$.

Для комплексного числа $z = a + bi$ имеем

1) $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$

2) $z \cdot \bar{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 + b^2$

т.е. сумма и произведение сопряженных комплексных чисел являются действительными числами.

Важное свойство операции сопряжения выражаются следующей леммой.

Лемма. Пусть p и q два комплексных числа. Тогда $\overline{p*q} = \bar{p}*\bar{q}$, где знак $*$ означает любую из операций: сложение, вычитание, умножение и деление.

Разберем случай, когда $*$ есть сложение; остальные операции рассматриваются аналогично.

Необходимо доказать справедливость равенства $\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}$.

Пусть $p = a + bi$, $q = c + di$, тогда $p + q = (a + c) + (b + d)i$ и, следовательно, $\overline{p + q} = (a + c) - (b + d)i$. С другой стороны, $\overline{p} + \overline{q} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$; видим, что $\overline{p + q} = \overline{p} + \overline{q}$.

Операция сопряжения очень удобна при делении комплексных чисел. Для нахождения частного $\frac{v}{u}$, где $u \neq 0$, следует умножить числитель и знаменатель на комплексное число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{v}{u} = \frac{v\overline{u}}{u\overline{u}} = \frac{(c + di)(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i$$

Сравните с формулой (6).

Пример 1. Вычислить :

а) $z_1 = \frac{1 - i}{1 + i}$;

б) $z_2 = \frac{1}{i}$;

в) $z_3 = \frac{1 - i}{3 + 4i}$.

<u>Решение:</u>

а) $z_1 = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{0 - 2i}{2} = -i$ •

б) $z_2 = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$ •

в) $z_3 = \frac{1 - i}{3 + 4i} = \frac{(1 - i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{3 - 4 - i(3 + 4)}{25} = -\frac{1}{25} - \frac{7}{25}i$ •

Пример 2. Записать в алгебраической форме :

а) $z_1 = \dfrac{1+i}{(2-i)(1-i)}$,

б) $z_2 = \sqrt{4+3i}$

Р е ш е н и е :

а) $z_1 = \dfrac{1+i}{(2-i)(1-i)} = \dfrac{1+i}{2-i-2i-1} = \dfrac{(1+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \dfrac{-2+4i}{10} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$ •

б) *Замечание*. Смысл радикала здесь— найти все значения квадратного корня. (обычно радикалом обозначается арифметическое значение корня из неотрицательного числа).

Пусть $z = x + yi$ искомое число, тогда $4 + 3i = z^2$ или

$$4 + 3i = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2,$$

что равносильно системе $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 3 \end{cases}$.

Подставляя $y = \dfrac{3}{2x}$ в первое уравнение, получаем биквадратное уравнение $4x^4 - 16x^2 - 9 = 0$. Сделав подстановку $x^2 = u > 0$, перейдем к квадратному уравнению

$$4u^2 - 16u - 9 = 0,$$

откуда $u = \dfrac{9}{2}$.

Окончательно получаем

$x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, т.е.

$$(z_2)_{1,2} = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \bullet$$

Пример 3. **Разложить действительные числа на комплексные множители:**

а) $z_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$;

б) $z_2 = 20$.

Р е ш е н и е :

а) $z_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2} = \frac{1}{2} - i^2\sqrt{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\sqrt[4]{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\sqrt[4]{2}i\right)$ •

б) $z_2 = 20 = 19 - i^2 = \left(\sqrt{19} - i\right)\cdot\left(\sqrt{19} + i\right)$

или

$z_2 = 20 = 16 - i^2 4 = (4 - 2i)\cdot(4 + 2i)$ •

Пример 4. Найти все решения уравнения (т.е. найти алгебраическую форму корней уравнения):

а) $z^2 = i$;

б) $z^2 - (2+i)z + (-1+7i) = 0$.

Р е ш е н и е:

а) Пусть $z = x + yi$ из равенства $z^2 = i$ имеем $x^2 + 2xyi - y^2 = 0 + 1i$, что равносильно системе $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases}$.

Подставляя $y = \dfrac{1}{2x}$ в первое уравнение, получим

$$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \quad \text{или} \quad x^2 = \frac{1}{2}.$$

Откуда $\begin{cases} x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$; следовательно,

$$z_{1,2} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \bullet$$

б) $z^2 - (2+i)z + (-1+7i) = 0$

$$z_{1,2} = \frac{2+i \pm \sqrt{4+4i-1-4(-1+7i)}}{2} = \frac{2+i\pm\sqrt{7-24i}}{2} = \frac{2+i\pm\sqrt{16-9-24i}}{2} =$$

$$= \frac{2+i\pm\sqrt{(4-3i)^2}}{2} = \frac{2+i\pm(4-3i)}{2}$$

$$z_1 = \frac{2+i+4-3i}{2} = \frac{6-2i}{2} = 3 - i$$

$$z_2 = \frac{2+i-4+3i}{2} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i \bullet$$

Замечание: $\sqrt{(4-3i)^2}$ имеет тот же смысл, что и в примере 2 ***б***).

Пример 5. Вычислить:

$$z = (1+i)^{2005}.$$

<u>Решение:</u>

Заметим, что $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$, тогда

$$z = (1+i)^{2005} = (1+i)^{2\cdot 1002}(1+i) = (2i)^{1002}(1+i) = 2^{1002} i^{1002}(1+i) =$$

$$= 2^{1002} i^{(4k+2)}(1+i) = 2^{1002}(-1)(1+i) = -2^{1002}(1+i) \quad \text{Т. о. } z = -2^{1002}(1+i) \bullet$$

Здесь использовался тот факт, что $1002 = 4\cdot 500 + 2 = 4k+2$, где $k = 500$, и для всех целых значений k справедливо соотношение:

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = 4k \\ i & \text{при} \quad n = 4k+1 \\ -1 & \text{при} \quad n = 4k+2 \\ -i & \text{при} \quad n = 4k+3 \end{cases}.$$

§ 7. Геометрическое изображение комплексных чисел на плоскости.

Действительные числа изображаются точками на числовой прямой. Комплексное число z, определяемое парой действительных чисел (a,b), можно изобразить точкой плоскости Z, имеющей координаты (a,b) в декартовой системе координат XOY.

Таким образом, комплексное число $z = a + bi$ можно рассматривать как точку плоскости, абсцисса которой равна действительной части a, а ордината — мнимой части b.

Если $b = 0$, то число z совпадает с действительным числом a и изображается точкой оси OX, поэтому ось OX называется *действительной осью*.

Если $a = 0$, то число z является чисто мнимым числом bi и изображается точкой на оси OY, называемой поэтому *мнимой осью*.

Плоскость с введенными на ней декартовыми действительной и мнимой осями называется *комплексной плоскостью*.

Каждая точка комплексной плоскости Z изображает одно комплексное число, и каждое комплексное число z изображается единственной точкой плоскости. То есть, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости.

Наряду с представлением комплексных чисел точками можно изображать их векторами: число $z=(a,b)=a+bi$ изображается вектором $\overline{OZ}$, имеющим начало в точке O и конец в точке $Z(a,b)$ (рис.1).

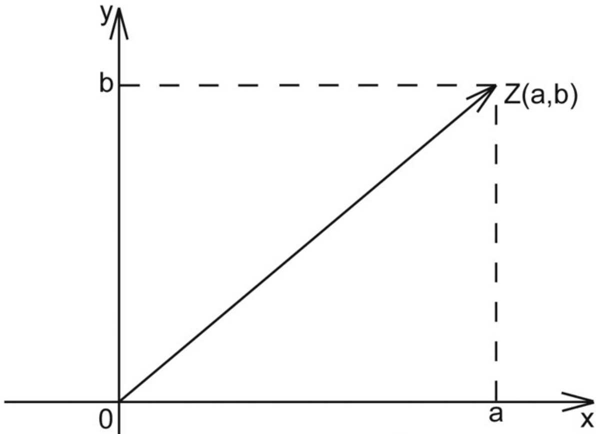

рис. 1

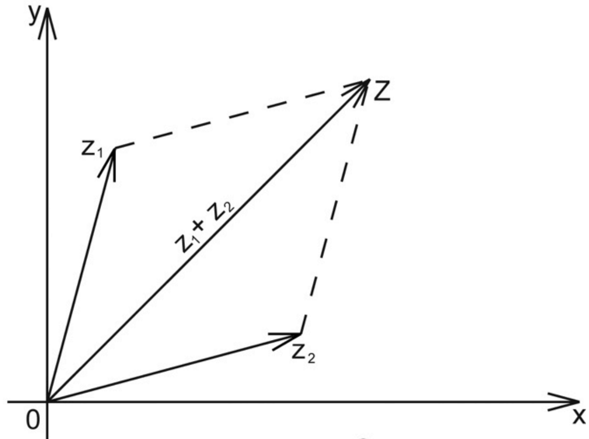

рис. 2

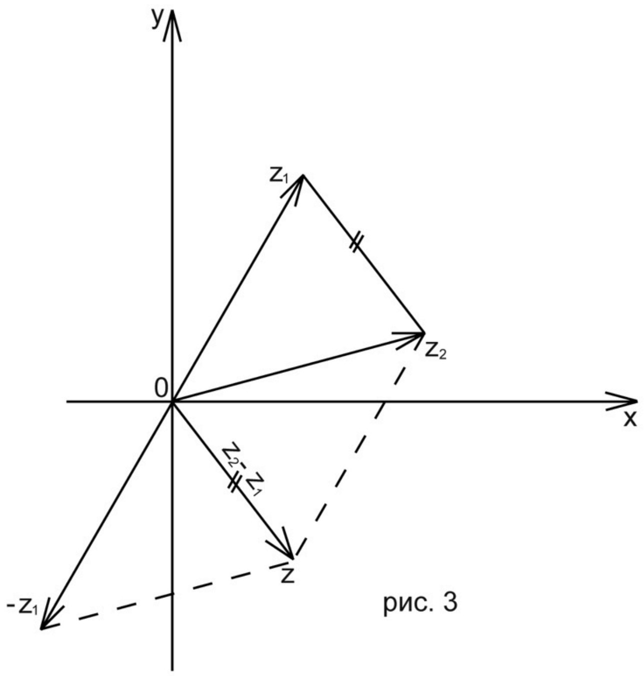

рис. 3

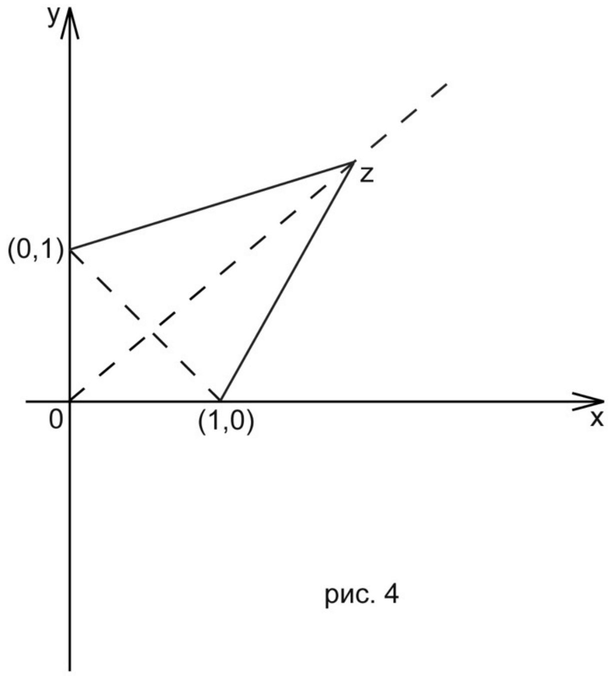

рис. 4

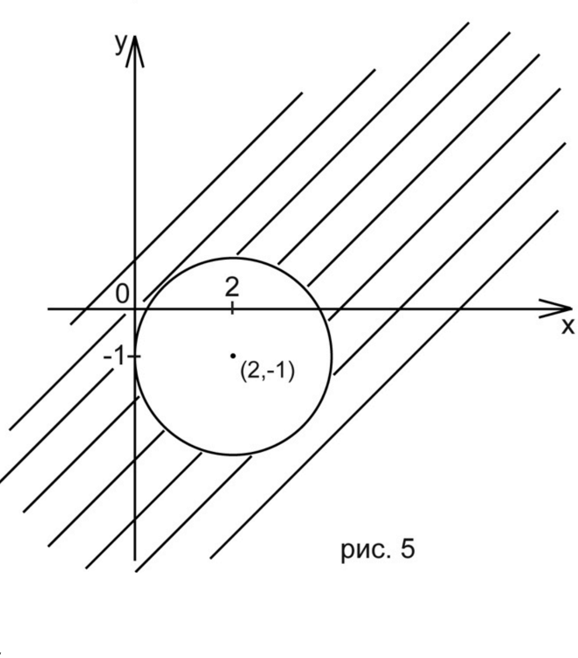

рис. 5

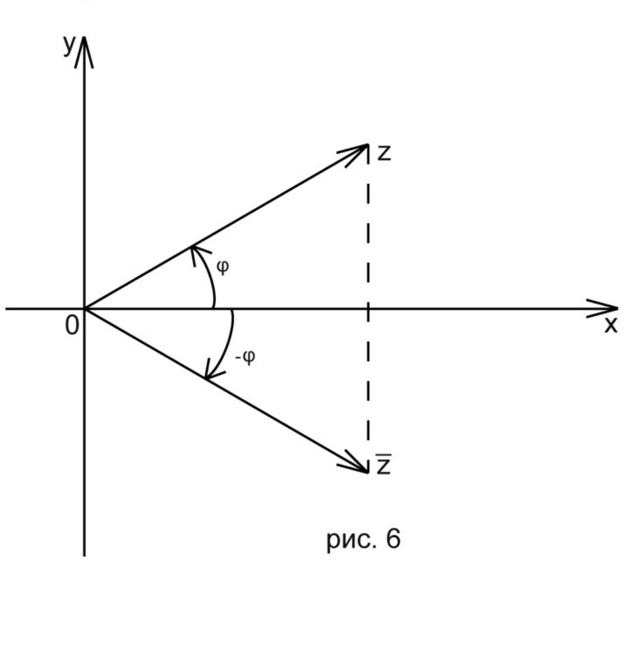

рис. 6

Изображение комплексных чисел векторами позволяет дать простое геометрическое истолкование сложения и вычитания комплексных чисел.

При сложении комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ складываются их действительные и мнимые части. При сложении соответствующих им векторов $\overline{OZ_1}$ и $\overline{OZ_2}$ складываются их координаты. Поэтому сумме $z = z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 будет соответствовать вектор $\overline{OZ}$, равный сумме векторов $\overline{OZ_1}$ + $\overline{OZ_2}$, соответствующих слагаемым комплексным числам (рис.2).

Относительно геометрического истолкования вычитания комплексных чисел, заметим, что вычитание векторов сводится к сложению: $\overline{OZ_2} - \overline{OZ_1} = \overline{OZ_2} + (-\overline{OZ_1})$ т.е. при сложении векторов $\overline{OZ_2}$ и $-\overline{OZ_1}$ получаем вектор $\overline{OZ}$, соответствующий разности комплексных чисел $z = z_2 - z_1$ (рис.3).

Для решения задач существенным является тот геометрический факт, что расстояние между точками *O* и *Z*, т.е. длина вектора $\overline{OZ}$, равно расстоянию между точками Z_2 и Z_1 (рис.3).

Итак, геометрический смысл модуля разности комплексных чисел $|z_2 - z_1|$состоит в том, что он равен расстоянию между точками Z_2 и Z_1.

§ 8. Модуль и аргумент комплексного числа.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат *XOY*. В этой системе произвольное комплексное число $z = a + bi$ изображается точкой *Z*, имеющей координаты (*a, b*). Положим $z \neq 0$, тогда для этой точки определены полярные координаты *r* и *φ*, где *r* — длина радиус-вектора $\overline{OZ}$, а *φ* — угол между положительным направлением оси *OX* и направлением вектора $\overline{OZ}$ (положительное направление ведется против часовой стрелки).

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad r > 0 \tag{7}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} \tag{8}$$

угол *φ* определяется с точностью до слагаемого кратного $2\pi к$, где $k \in \mathrm{N}$.

- *Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется неотрицательное действительное число r , определяемое равенством* (7), *а величина полярного угла φ, определяемая равенством* (8), *называется аргументом комплексного числа.*

Модуль комплексного числа z обозначается символом $|z|$, а аргумент комплексного числа — символом $\operatorname{Arg} z$. Если $z = 0$, то $|z| = r = 0$, а $\operatorname{Arg} z$ не определен, то есть в этом случае комплексное число задается только своим модулем.

Значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi, \pi]$, обозначается $\arg z$ и обычно называется *главным значением аргумента*.

Таким образом, $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k,\ k \in \mathrm{N}\}$. Для определения главного значения аргумента удобно использовать формулу:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{b}{a} & a > 0, b > 0 \text{ или } b < 0 \\ \pi + arctg\,\dfrac{b}{a} & a < 0, b > 0 \\ -\pi + arctg\,\dfrac{b}{a} & a < 0, b < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & a = 0, b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & a = 0, b < 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Если $z = a + 0i$, то есть является действительным числом, то $|z| = \sqrt{a^2 + 0} = |a|$.

Таким образом, понятие модуля комплексного числа является обобщением понятия модуля действительного числа.

Число $\arg z$ так же можно считать обобщением понятия знака действительного числа. На действительной оси из начала координат O выходят два луча, которые мы отмечает знаками + и –. На комплексной плоскости из начала координат можно провести множество лучей; чтобы их различать, мы приписываем каждому из них определенное значение полярного угла φ, то есть $\arg z$ — это величина ориентированного угла.

Заметим, что геометрически сопряженные числа являются точками, симметричными относительно действительной оси (рис. 4). Отсюда следуют равенства

$$|\overline{z}| = |z|,$$

$$\arg \overline{z} = -\arg z.$$

Пример 6. Найти модуль и аргумент комплексного числа :

а) $z = -2i$,

б) $z = -1 - i$,

в) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

г) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

Решение :

а) $|z| = |0 - 2i| = \sqrt{0 + 2^2} = 2, \qquad \arg z = -\frac{\pi}{2}$ (см. формулу (9))•

б) $|z| = |-1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z = -\pi + arctg1 = -\frac{3}{4}\pi$•

в) $|z| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \quad \arg z = arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$•

г) $|z| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1, \quad \arg z = \pi + arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{5}{6}\pi$•

Заметим, что комплексные числа z, имеющие один и тот же модуль r, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным на окружности радиуса r с центром в точке O.

Пример 7. Определить геометрическое множество М точек на комплексной плоскости, состоящее из всех точек z, удовлетворяющих условию:

а) $|z| = 2$, ***б)*** $1 \le |z| \le 3$, ***в)*** $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$

г) $|z - 2 + i| \ge 2$, ***д)*** $|z - 1| = |z - i|$, ***ж)*** $|z - 2| - |z + 2| = 5$.

Р е ш е н и е :

а) $|z| = |x + yi| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, следовательно, множество М есть окружность радиуса 2, с центром в начале координат•

б) $1 \le |z| \le 3 \Rightarrow 1 \le x^2 + y^2 \le 9$, следовательно, множество М есть кольцо с центром в точке O, радиус колец $r = 1$, $r = 3$•

в) $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$, т.е., множество М есть луч, выходящий из точки O и образующий угол $\dfrac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси OX •

г) $|z - 2 + i| = |z - (2 - i)| = |x + yi - (2 - i)| = |(x - 2) + (y + 1)i| =$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \ge 2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 \ge 4$, следовательно, множество М – внешняя часть круга с центром в $(\cdot)$ (2,-1), радиуса 2 (рис. 5) •

д) Равенство $|z - 1| = |z - i|$ означает, что расстояние от любой точки z до точки (0,1) равно расстоянию от этой же точки до точки (0,1); т.е. точка z находится на серединном перпендикуляре, соединяющем точки (1,0) и (0,1) (рис. 6) •

ж) Равенство $|z + 2| + |z - 2| = 5$ определяет геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух точек F_1 = (–2,0) и F_2 (2, 0), называемых фокусами, есть величина постоянная; обозначим ее $2a$, отсюда $2a = 5$.

Из аналитической геометрии известно, что это по определению есть эллипс, где $c = 2$ – расстояние от фокусов до точки O, одна его полуось $a = \dfrac{5}{2}$, другая полуось b определяется из равенства $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow$

$b^2 = \dfrac{25}{4} - 4 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow b = \dfrac{3}{2}$ •

Для модулей суммы и разности комплексных чисел справедливы следующие два неравенства:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|.$$

Модуль суммы двух комплексных чисел не превосходит суммы их модулей. Модуль разности двух комплексных чисел не меньше разности модулей этих чисел.

Доказательство следует из свойств сторон треугольника.

§ 9.Тригонометрическая форма записи комплексного чисела.

С понятием модуля и аргумента связан еще один важный способ записи комплексных чисел — тригонометрическая форма. Пусть $z = a + bi$ имеет модуль $|z| = r$ и Arg z = φ (не обязательно главное значение). Тогда, используя формулы $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$, из пункта 8 получаем

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (10)$$

- *Представление комплексного числа z в виде* (10), *где r, φ – действительные числа, причем* $r \ge 0$*, называется тригонометрической формой комплексного числа.*

Если z – действительное, т.е. $z = a + 0i$, то

$$z = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $\varphi = 0$ при $a > 0$,

$\varphi = \pi$ при $a < 0$,

φ – не определен при $a = 0$.

Пример 8. Являются ли числа тригонометрической формой записи комплексного числа:

а) $z_1 = -5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ **;**

б) $z_2 = \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ **.**

Р е ш е н и е :

а) Число $z_1 = -5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ не являются тригонометрической формой комплексного числа, т.к. модуль комплексного числа должен быть положительным.

Тригонометрической формой для z_1 будет:

$$z_1 = 5\left[\cos(\pi + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{6})\right] = 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

или

$$z_1 = 5\left[\cos(-\frac{5}{6}\pi) + i\sin(-\frac{5}{6})\pi\right] \bullet$$

б) Число $z_2 = \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ не являются тригонометрической формой комплексного числа, т.к. в формуле (10) в скобках перед i должен стоять знак «+».

Тригонометрической формой для z_2 будет:

$$z_2 = \left[\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{3})\right] = \left[\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\sin(\frac{5}{3}\pi)\right]$$

или

$$z_2 = \left[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right] \bullet$$

Пример 9. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

а) $z_1 = -2,$

б) $z_2 = i,$

в) $z_3 = -3i,$

г) $z_4 = 1 + i.$

Р е ш е н и е :

а) $z_1 = -2 = |2|(\cos\pi + i\sin\pi)$ •

б) $z_2 = i = 0 + 1i = |1|\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ •

в) $z_3 = -3i = 0 - 3i = |3|\left[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right]$

или

$z_3 - -3i = |3|\left[\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi)\right]$ •

г) $z_4 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ •

§ 10 Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма комплексного числа очень удобна для умножения и деления комплексных чисел. Отметим, что если комплексные числа заданы в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то они равны тогда и только тогда, когда равны их модули $r_1 = r_2$, а аргументы отличаются на $2\pi k$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, где $k \in \mathrm{N}$.

Найдем произведение $z = z_1 z_2$:

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 \left[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) \right] =$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right].$$

Следовательно,

$$r = r_1 r_2,$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathrm{N}.$$

Таким образом, при умножении двух комплексных чисел:

1) модуль произведения равен произведению модулей;
2) аргумент произведения равен сумме аргументов

Найдем частное $z = \dfrac{z_1}{z_2}$:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1\left[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) \right]}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right].$$

Следовательно,

$$r = \frac{r_1}{r_2}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi k, \quad \text{где } k \in \mathrm{N}.$$

Таким образом, при делении двух комплексных чисел:

1) модуль частного равен частному модулей;

2) аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.

Пример 10. Найти произведение двух комплексных чисел

$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4})$ **и** $z_2 = \sqrt{8}(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi)$.

<u>Р е ш е н и е</u>:

Пусть $z = z_1 z_2$.

Тогда $r = r_1 r_2 = \sqrt{2}\sqrt{8} = 4$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{11\pi}{4} + \frac{3}{8}\pi = \frac{25\pi}{8}$,

Следовательно,

$$z = 4\left(\cos\frac{25}{8}\pi + \sin\frac{25}{8}\pi\right) = 4\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right) \bullet$$

Пример 11. Записать комплексное число

$$z = \frac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$$

в тригонометрической форме.

<u>Р е ш е н и е :</u>

$z_1 = i - 1 = -1 + i \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{2}, \quad \arg z_1 = arctg(-1) + \pi = \frac{3}{4}\pi$ (см. формулу (9))

$z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \quad r_2 = 1, \quad \arg z_2 = \frac{\pi}{3}$.

Таким образом:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left[\cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3})\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \bullet$$

Пример 12. Перейти от алгебраической формы записи комплексного числа

$$z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi)$$

к тригонометрической форме:

Решение:

$z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi) \Rightarrow a = 1 - \cos\alpha, \quad b = \sin\alpha,$

$r = |z| = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = +2\sin\frac{\alpha}{2} > 0,$ т.к. $0 < \alpha < 2\pi;$

и, замечая, что $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$, находим

$$\sin(\arg z) = \frac{b}{r} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) \Rightarrow$$

$$\arg z = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos(\frac{\pi-\alpha}{2}) + i\sin\frac{(\pi-\alpha)}{2}\right] \bullet$$

§ 11. Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.

Формула для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай n сомножителей. Используя метод математической индукции, легко получить следующий результат: модуль произведения n комплексных чисел равен произведению модулей всех сомножителей, сумма аргументов всех сомножителей является аргументом произведения этих чисел. Таким образом, для любого комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ выполняется формула, которая называется *формулой Муавра*:

$$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Эта формула верна и для целых отрицательных чисел n. В частности, при $n = -1$ получим

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{r^0(\cos 0 + i\sin 0)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r^{-1}\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right].$$

Пример 13 .

Вычислить $z = \left(\dfrac{\cos 20^0 + i\sin 20^0}{\cos 20^0 - i\sin 20^0}\right)^{20}$.

<u>Р е ш е н и е :</u>

$$z = \left[\frac{\cos 20^0 + i\sin 20^0}{\cos 20^0 - i\sin 20^0}\right]^{20} = \left[\frac{\cos 20^0 + i\sin 20^0}{\cos(-20^0) + i\sin(-20^0)}\right]^{20} = \left[\frac{\cos 20^0 + i\sin 20^0}{\left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right)^{-1}}\right]^{20} =$$

$$= \left[\left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right)^2\right]^{20} = \left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right)^{40} = \cos 800^0 + i\sin 800^0 =$$

$$= \cos(80^0 + 720^0) + i\sin(80^0 + 720^0) = \cos 80^0 + i\sin 80^0 \bullet$$

Пример 14. Вычислить $z = \left(\dfrac{\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} \right)^{26}$.

Р е ш е н и е:

$$z = \left[\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}i)}{\sqrt{2}(1-i)} \right]^{26} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^{26} \left[\frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}{\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))} \right]^{26} =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^{26} \left[\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) \right]^{26} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \right)^{13} \left[\cos(\frac{7}{12}\pi \cdot 26) + i\sin(\frac{7}{12}\pi \cdot 26) \right] =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \right)^{13} \left[\cos(14\pi + \frac{7}{6}\pi) + i\sin(14\pi + \frac{7}{6}\pi) \right] =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \right)^{13} \left[\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi \right] \bullet$$

§ 12. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме.

- *Число z называется корнем степени n из w (обозначается $\sqrt[n]{w}$), если $z^n = w$.*

Из определения следует, что каждое решение уравнения $z^n = w$ является корнем степени n из числа w. Если $w = 0$, то при любом n уравнение $z^n = w$ имеет единственный корень $z = 0$. Если $w \neq 0$ то и $z \neq 0$, а, следовательно, z и w можно представить в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Тогда уравнение $z^n = w$ примет вид:

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Но два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$, где $k \in$ N, следовательно:

$$r^n = \rho \ , \qquad \varphi = \frac{\psi + 2\pi\kappa}{n} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Таким образом, если корень степени n из w существуют, то он может быть вычислен по формуле:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\psi + 2\pi\kappa}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,(n-1) \qquad (11)$$

Легко видеть, что все числа z_k, получаемые при $k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$, различны. Если брать значение $k \geq n$, то других комплексных чисел, отличных от $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, не получится. Из (11) следует, что все корни степени n из числа w имеют один и тот же модуль, но разные аргументы, отличающиеся друг от друга на $\frac{2\pi\kappa}{n}$, где k — некоторое число.

Отсюда следует, что комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа w, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке O.

Пример 15. Найти все значения комплексного числа $z = \sqrt[3]{-64}$

Решение:

Запишем число $z = -64$ в тригонометрической форме:

$$-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Применяя формулу (11), получим:

$$z_k = \sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\kappa}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\kappa}{3}\right), \ k = 0,\ 1,\ 2.$$

Следовательно:

$$k = 0: \quad z_0 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2(1 + \sqrt{3}i)$$

$$k = 1: \quad z_1 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$$

$$k = 2: \quad z_2 = 4\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) = 2(1 - \sqrt{3}i).$$

Точки, соответствующие числам z_k, расположены в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 4 с центром в точке O •

Пример 16. Найти все корни 5-й степени из $w = \dfrac{\sqrt{3} - i}{8 + 8i}$

<u>Р е ш е н и е :</u> Пусть $z = \sqrt[5]{w}$, тогда

$|w| = \dfrac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{64+64}} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, $\arg w = \psi = \psi_1 - \psi_2$, где $\psi_1 = -\dfrac{\pi}{6}$, $\psi_2 = \dfrac{\pi}{4}$

(см. формулу (9)) $\Rightarrow \psi = -\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{5\pi}{12}$,

$\sqrt[5]{w} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{(4\sqrt{2})}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \dfrac{-\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi\kappa}{5}$,

$$z_k = \sqrt[5]{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi\kappa}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi\kappa}{5}\right)\right], \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Точки, соответствующие числам z_k, расположены в вершинах правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ с центром в точке O •

§ 13. Показательная форма записи комплексного числа.

Рассмотрим функцию, введенную Эйлером

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \text{ где } \varphi \in R \qquad (12)$$

Умножая обе части равенства (12) на r, получим

$$re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ , где } \quad r = |z|, \quad \varphi = Arg\, z.$$

Запись комплексного числа в виде

$$z = re^{i\varphi}$$

называется *показательной формой* записи комплексного числа.

Пример 17. Представить в показательной форме

а) $z_1 = i$,

б) $z_2 = -1$,

в) $z_3 = 1-\sqrt{3}i$

Р е ш е н и е :

а) $z_1 = i = 0+1\cdot i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}i}$. Т. о. $z_1 = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ •

б) $z_2 = -1 = -1 + 0\cdot i = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = e^{i\pi}$. Т. о. $z_2 = -1 = e^{i\pi}$ •

в) $z_3 = 1-\sqrt{3}i = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = e^{\frac{5\pi}{3}i}$ Т. о. $z_3 = 1-\sqrt{3}i = e^{\frac{5\pi}{3}i}$ •

Пример 18. Представить комплексное число $z = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$ **в алгебраической форме**

Р е ш е н и е :

$$z = re^{i\varphi} = r\left[\cos(arctg\frac{a}{b}) + i\sin(arctg\frac{b}{a})\right] = a + bi,$$

$r = 4$; $\varphi = arctg\frac{b}{a} = \frac{\pi}{6}$.

Тогда получим

$$z = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} + 2i \bullet$$

§ 14. Действия над комплексными числами в показательной форме. Формулы Эйлера.

Показательная форма записи комплексного числа удобна при выполнении действий умножения, деления и возведения в степень комплексного числа.

Используя (12) и свойства тригонометрических функций, можно показать, что

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{i\varphi n}.$$

Заменяя в (12) знак φ на минус:

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi),$$

а затем складывая и вычитая правые и левые части двух этих равенств, получим формулы

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos\varphi \;;$$

$$\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \sin\varphi,$$

называемые *формулами Эйлера*. Они выведены для действительного значения аргумента φ, но они справедливы и для комплексных значений данного аргумента.

§ 15. Упражнения.

Задание 1. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющее условию:

1.1. $|z+1-i| = |z-1+i|$; **1.2.** $|z+1-2i| \le 0$; **1.3.** $|z+2-i| = \sqrt{3}$

1.4. $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$; **1.5.** $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \le 1$; **1.6.** $\frac{1}{4} < \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + Im\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) < \frac{1}{2}$;

1.7. $|z-i| + |z+i| = 4$; **1.8.** $Im\left(\bar{z}\right)^2 < 1$; **1.9.** $|z| - \mathrm{Re}\, z \le 0$;

1.10. $|z| > 2 + Im(z)$.

Задание 2. Записать в тригонометрической форме:

2.1. z = – $\sqrt{3} + i$; **2.2.** z = – 4; **2.3.** z = 2+$\sqrt{3} + i$;

2.4. z = $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$; **2.5.** z = – 1–$i\sqrt{3}$; **2.6**. z = – $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

2.7. z = 1–$\sin\alpha + i\cos\alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$; **2.8**. z =1–$i$;

2.9. z = 1+$\cos\alpha + i\sin\alpha$ $(\pi < \alpha \le 2\pi)$; **2.10**. z = – $\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}$;

Задание 3. Записать в алгебраической форме:

3.1. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; **3.2**. $2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; **3.3**. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2i}\right)^2$;

3.4. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$; **3.5**. $e^{i\pi}$; **3.6.** $3e^{i2\pi k}$;

3.7. $4e^{i\frac{\pi}{4}}$; **3.8.** $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$; **3.9**. $\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta - i\sin\beta}$;

3.10. $\left(1 + \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^4$;

Задание 4. Вычислить:

4.1. $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3}$; **4.2.** $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}$; **4.3.** $\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{10}}$

4.4. $(1-i)^{8}\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6}$; **4.5.** $\left(\frac{i^{5}+2}{i^{19}+1}\right)^{2}$; **4.6.** $\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{5}}{(1+i)^{2}}$

4.7. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{13}$; **4.8.** $\left(\frac{1+\sqrt{2}+i}{2}\right)^{16}$; **4.9.** $\left(1+\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$;

4.10. $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

Задание 5. Найти все значения $\sqrt[n]{w}$, если :

5.1. w = – 8, n=3; **5.2.** w = – 1, n=4; **5.3.** w = – 4+i$\sqrt{48}$, n=3;

5.4. w = 1+i, n=8; **5.5.** w =2 –i2$\sqrt{3}$, n=4; **5.6.** w = 27i^{5}, n=3;

5.7. w = i^{4}, n=3; **5.8.** w=–1+i, n=3; **5.9.** w = 2+i2$\sqrt{3}$, n=2;

5.10. $w=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, n=5.

Задание 6. Вычислить и изобразить геометрически на комплексной плоскости:

6.1. $\sqrt[3]{1}$; **6.2.** $\sqrt[3]{-1}$; **6.3.** $\sqrt[3]{i}$;

6.4. $\sqrt[3]{-i}$; **6.5.** $\sqrt[4]{i^{3}}$; **6.6.** $\sqrt[5]{i^{6}}$;

6.7. $\sqrt{i}$; **6.8.** $\sqrt[4]{1}$; **6.9.** $\sqrt[6]{64}$;

6.10. $\sqrt[3]{i^{15}}$.

Задание 7. Пользуясь формулой Муавра, выразить через степени $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ следующие функции:

7.1. $\sin 4\alpha$; **7.2.** $\cos 4\alpha$; **7.3.** $\sin 5\alpha$;

7.4. $\cos 5\alpha$; **7.5.** $\cos 6\alpha$; **7.6.** $\sin 6\alpha$;

7.7. $\sin 7\alpha$; **7.8.** $\cos 7\alpha$; **7.9.** $\cos 8\alpha$;

7.10. $\sin 8\alpha$.

Задание 8. Решить уравнение:

8.1. $z^3+3z^2+3z+3=0$;

8.2. $z^4-4z^3+6z^2-4z-15=0$

8.3. $z^9+27=0$;

8.4. $z^6+27=0$;

8.5. $z^8+z^4+1=0$;

8.6. $z^3+9z-26=0$;

8.8. $z^3+3z^2-3z-1=0$;

8.7. $z^3-6z^2+57z-196=0$;

8.9. $z^3-6z+4=0$;

8.10. $z^3+45z-98=0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1965.
2. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984
3. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977.
4. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. / Краснов М.Л. и др. – М.: Наука, 1981.