УДК 512.81

М.Р. Петриченко

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрены рациональные приемы и свойства решений предельных задач для уравнений и предельных задач с частными производными параболического типа. Доказано, что такие предельные задачи для параболических уравнений, допускающие группу автомодельных преобразований, представляют собой необходимые условия минимума для положительных функционалов. Кроме того, доказывается, что уравнение Крокко равносильно канонической системе и для него соответствующий положительный функционал выписывается непосредственно. Показано, что в исходной записи уравнение параболического типа приводится к каноническому виду аддитивным удвоением переменных.

ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СЛОЙ, ЭКСТРЕМАЛЬ, ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, УРАВНЕНИЕ КРОККО, АДДИТИВНОЕ УДВОЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ.

Введение

Типичной особенностью решений предельных задач для параболических уравнений является наличие пограничных слоев, т. е. областей с большими градиентами на расслоениях. Для построения решения, обладающего всюду равномерной аппроксимацией, обычно используют специальные приемы. К ним следует отнести следующие:

масштабирование шкал переменных при разложении решений в ряды (метод Каплуна [1]);

«экспоненциальная подгонка» (метод Ильина [2]);

измельчение сетки в области пограничного слоя, пригодного для уравнений параболического и эллиптического типа с конвекцией, доминирующей над диффузией [3];

применение расщепляющих рядов, «разваливающих» исходную предельную задачу в счетную систему расщепленных линейных предельных задач с быстро (экспоненциально) убывающими решениями (континуальный вариант метода Ильина).

В основе метода Каплуна лежит следующая теорема.

Теорема Каплуна. *Пусть $z \in \Delta$ – интервалу изменения z, на котором асимптотическое разложение решения равномерно сходится. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, где ε – параметр сингулярного возмущения, существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$ и такой интервал $\Delta_\varepsilon \supset \Delta$, $mes(\Delta_\varepsilon - \Delta) < \delta$, на котором асимптотическое разложение равномерно пригодно.*

Если Δ и Δ_ε – компакты, то теорема Каплуна может быть ослаблена до квазиравномерной (δ-точной) сходимости.

В связи с методом Ильина доказывается другая теорема, согласно которой для сингулярно возмущенного уравнения второго порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной погрешность равномерной разностной аппроксимации исходной предельной задачи составляет величину порядка $O(\varepsilon^2 \ln^2(1/\varepsilon))$, причем количество узлов сетки в пограничном слое $N = O(\varepsilon^{-1})$ [4 – 6].

Непосредственное решение предельных задач для параболических уравнений в сильной топологии и с сингулярным возмущением требует аккуратного структурирования множества значений независимых переменных (t, x) и точных оценок размеров пограничных слоев решений. Вероятно, некоторой альтернативой принятым схемам может служить ослабление топологии решения на множествах допустимых функций. Дело в том, что предельная задача для параболического уравнения, как правило, не рассматривается в связи с реализацией экстремальных задач. Известные экстремальные «принципы» (введены М. Био и Л.Я. Айнолой [11, 12]) формулируются по принятой схеме как эвристические достаточные условия для отделения действительных решений от решений допустимых (виртуальных). Предельные же задачи возникают из эвристических принципов как необходимые условия экстремума.

Цель настоящей работы – показать, что имеет право на существование и альтернативная постановка проблемы.

Пусть дана предельная задача. Требуется построить функционал, для которого эта предельная задача служила бы необходимым условием экстремума.

В качестве первого шага решения доказывается, что предельная параболическая задача необходима для существования минимума положительного функционала. Затем для построения искомого функционала исходная предельная задача приводится к каноническому виду. Для этого полагают, что $M(z)$ – многообразие, заданное на D_z потоком из D_z в D_t; $F(M)$ – множество гладких функций $C^{(1)}$ на многообразии M. Если векторы f, g, $D(f, g) = D_z$ являются элементами алгебры Ли над множеством F, то f и g образуют канонический поток:

$$\exists E(g,f) \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = J \cdot \mathrm{grad}E,\ J := \begin{pmatrix} 0, & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

где I – матричная единица [7].

Типичная предельная задача для уравнения Крокко и условие минимума

Рассмотрим предельную задачу для уравнения параболического типа с частными производными в первом квадранте Ω плоскости

$$x,t\Omega := (x,t : t > 0, x > 0),\ y \in C^{(2)}(\Omega):$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(y)\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial y}{\partial t},\ Dy = \Omega, \qquad (1)$$
$$y(0,t) = y(\infty,t) - 1 = y(x,0) - 1 = 0,$$

где $f(y)$ – неотрицательная и дифференцируемая на промежутке (0, 1) функция, т. е. $f \in C^{(1)}(0, 1)$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Предельная задача (1) равносильна предельной задаче на полубесконечном промежутке

$$0 < \zeta < \infty,\ \zeta := x/(2t^{1/2}),\ Y(\zeta) = y(x, t),$$
$$DY = (0, \infty):$$

$$f(Y)Y'' + f'(Y)Y'^2 + 2\zeta Y' = 0, \qquad (2)$$
$$Y(0) = Y(\infty) - 1 = 0.$$

2. Предельная задача (2) приводится к предельной задаче Крокко на компактном промежутке $0 < Y < 1$.

Действительно, пусть $j := \dfrac{dY}{d\zeta} = j(Y)$.

Тогда порядок уравнения предельной задачи (2) понижается на единицу:

$$f(Y)\frac{dj}{dY} + f'(Y)j + 2\zeta = 0. \qquad (3)$$

Очевидно, начальное (предельное) условие для (3) имеет вид $j(1) = 0$. Тогда в силу уравнения (3) справедливо равенство

$$f(Y)j(Y) = 2\int_Y^1 \zeta(t)dt. \qquad (4)$$

Далее, пусть

$$\varphi(Y) := \int_Y^1 \zeta(t)dt,\ \varphi(1) = 0,$$
$$\varphi'(Y) = -\zeta,\ \varphi'(0) = 0.$$

Тогда равенство (4) принимает вид

$$2\varphi\varphi'' + f(Y) = 0,\ \varphi'(0) = \varphi(1) = 0, \qquad (5)$$

что и требовалось доказать.

Есть и более простое доказательство. Пусть

$$f(Y)j(Y) := w,\ d\varphi = -\varsigma dy,$$

и тогда

$$\frac{dw}{d\varphi} = 2,\ w(0) = 0, \qquad (5a)$$

откуда сразу же получается, что $w = 2\varphi$ – общее решение задачи (5) при любой функции $f(Y)$.

3. С предельной задачей (5) связано следующее тождество:

$$\int_0^1 \left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2 dY = \frac{1}{2}\int_0^1 f(Y)dY, \qquad (6)$$

или

$$\int_0^1 \zeta^2 dY = \frac{1}{2}\int_0^1 f(Y)dY. \qquad (6a)$$

В задачах с конкретным физико-механическим содержанием, тождества (6) и (6а) выражают некоторые законы сохранения. Например, если $y = u$ – скорость; $f(y) = u$; $t = \xi$, $x = \eta$ (ξ, η – продольная и поперечная координаты); $\zeta := \eta/(2\xi^{1/2})$ и если справедливо уравнение пограничного слоя Мизеса (1), то тогда в силу тождества (6) момент инерции эпюры скорости любого сечения относительно нулевой изотахи равен 1/4.

Еще один пример. Пусть $f(y) = 1$; y – температура; t, x – время и координата. Тогда момент инерции температуры относительно нулевой изотермы равен 1/2.

4. Уравнение Крокко в предельной задаче (5) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dY} = \psi; \\ \dfrac{d\psi}{dY} = -\dfrac{f(Y)}{2\varphi}, \end{cases}$$

с гамильтонианом

$$E(Y,\varphi,\psi) = \frac{\psi^2}{2} - \frac{1}{2} f(Y)\ln\frac{1}{\varphi} = \\ = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2 - f(Y)\ln\frac{1}{\varphi}\right).$$

Тогда вдоль действительного решения предельной задачи (5) выполняется условие:

$$s(\varphi) = \int_0^1 \left(\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2 + f(Y)\ln\frac{1}{\varphi}\right) dY \to \inf \geq 0.$$

Таким образом, уравнение параболического типа связано с минимумом некоторого неотрицательного функционала (распределения), являясь для этого функционала необходимым условием минимума. Пусть интеграл энергии для (5) взят в виде:

$$E(Y,\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2 - f(Y)\ln\frac{\varphi_0}{\varphi}\right) = 0, \\ 0 < Y < 1, \quad (6б)$$

если $f(0) = 0$.

Действительно, при $Y = 0$ это условие выполняется. При $Y = 1$

$$\frac{d\varphi}{dY} = -\zeta = -\infty,$$

и вполне естественно допустить, что неопределенность $\infty - \infty$ эквивалентна нулю. Тогда

$$\frac{d\varphi}{dY} = -\sqrt{f(Y)\ln\frac{\varphi_0}{\varphi}}, \varphi(1) = 0, \quad (7)$$

где $\varphi_0 := \varphi(0)$.

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\int_Y^1 \sqrt{f(z)}dz = \sqrt{\pi}\varphi_0 \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\ln\frac{\varphi_0}{\varphi}}\right). \quad (8)$$

Далее, пусть $Y = 0$. Тогда $\varphi = \varphi_0$. В силу решения (8) φ_0 определяется как

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \sqrt{f(z)}dz. \quad (8а)$$

Следовательно, задача Коши, представленная как

$$2\varphi\varphi'' + f(Y) = 0, \ \varphi'(0) = \varphi(0) - \varphi_0 = 0, \quad (5б)$$

имеет решение $\varphi(Y)$ такое, что $\varphi(1) = 0$.

Другими словами, на промежутке $0 < Y < 1$ существует только одна точка, сопряженная с $Y = 0$, а именно точка $Y = 1$.

Например, если $f(Y) = 1$ (теплопроводность твердого тела), то

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \ 1 - Y = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\ln\frac{\varphi_0}{\varphi}}\right).$$

Это решение совпадает с точным решением. Действительно, как известно, $Y = \operatorname{erf}(\zeta)$ – решение предельной задачи (2), $f(Y) - 1 = 0$. Но, в силу равенства (7),

$$\zeta = -\frac{d\varphi}{dY} = \sqrt{\ln\frac{\varphi_0}{\varphi}},$$

что и требовалось доказать.

Например, если $f(Y) = Y$, то в силу равенства (8),

$$\varphi_0 = \frac{2}{3\sqrt{\pi}};$$

и вообще, если $f(Y) = Y^m$, то

$$\varphi_0 = \frac{2}{2m+1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Далее, пусть вместо интеграла энергии (6б) первый интеграл уравнения Крокко имеет вид

$$\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2 - f(Y)\ln\frac{1}{\varphi} = 0, \ f(0) = 0, \quad (6в)$$

т. е.

$$\int_Y^1 \sqrt{f(z)}dz = \sqrt{\pi}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\ln\frac{1}{\varphi}}\right).$$

Тогда для определения φ_0 получается следующее условие:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \sqrt{f(Y)}dY = \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\ln\frac{1}{\varphi_0}}\right). \quad (8б)$$

Теперь пусть $f(Y) - Y = 0$. Тогда в силу условия (8б) получаем выражение

$$\frac{2}{3\sqrt{\pi}} = \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\ln\frac{1}{\varphi_0}}\right).$$

С помощью таблиц интеграла ошибок можно найти φ_0; $\varphi_0 = 0{,}335$, и этот результат практически совпадает с точным решением, равным 0,33206. Интересно отметить, что уравнение Блазиуса все-таки интегрируется, вопреки утверждениям, имеющимся в справочниках Э.Л. Айнса, В.Ф. Зайцева, Д. Форсайта и др.

В качестве еще одно примера, который показывает универсальность предельной задачи Крокко, целесообразно рассмотреть уравнение Стокса [1]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad D(u) = (x > 0, y > 0),$$

описывающее некоторое тривиальное расслоение $D(u)$. Сечение такого расслоения образует так называемое «скоростное поле».

Допускается группа автомодельных преобразований:

$$u = u\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}\right) := u(\zeta) \to \frac{d^2u}{d\zeta^2} + 2\zeta u\frac{du}{d\zeta} = 0,$$

$$\zeta := \frac{y}{2\sqrt{x}}.$$

Кроме того, пусть предельные условия имеют вид

$$u(0) = u(\infty) - 1 = 0.$$

Уравнение Крокко получается отображением $D(u)$ на компакт $0 < u < 1$:

$$\frac{du}{d\zeta} = \tau(u), \ \tau(1) = 0, \ \zeta = \int_0^u \frac{dz}{\tau(z)}.$$

Тогда либо $\tau = 0$, либо

$$\frac{d\tau}{du} + 2u\int_0^u \frac{dz}{\tau(z)} = 0, \ \tau(1) = 0. \quad (3а)$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\left(\frac{d\tau}{du}\right)_{u=0} = 0.$$

Предельную задачу (3а) можно привести к виду Крокко:

$$\tau\tau'' - \frac{\tau\tau'}{u} + 2u = 0, \ \tau'(0) = \tau(1) = 0 \quad (3б)$$

либо к интегральному уравнению

$$\tau(u) = 2\int_u^1 dv \cdot v\int_0^v \frac{dz}{\tau(z)} = \int_0^1 \frac{dz(1-z^2)}{\tau(z)} - \int_0^u \frac{dz(u^2-z^2)}{\tau(z)}. \quad (3в)$$

Это уравнение можно записать в другом виде: $\tau = U(\tau)$. Отображение (оператор) U, U: $W_2^{(1)} \to W_2^{(1)}$ – сжимающий эндоморфизм, а пространство $W_2^{(1)}(0, 1)$ – полное. При этом существует неподвижная точка отображения U.

Действительно, как известно, оператор U: $W_1^{(1)}(0, 1) \to W_1^{(1)}(0, 1)$ – сжимающий тогда и только тогда, если выполняется условие

$$\forall\tau \in \mathrm{B}_\varepsilon(\tau_0),$$
$$\exists q \le 1 \to \|U(\tau) - U(\tau_0)\| \le q\,\|\tau - \tau_0\|,$$

или (что то же) $U \in \mathrm{Lip}^{loc}(\tau_0)$, с константой Липшица, не превосходящей единицы. Через $B_\varepsilon(\tau_0)$ здесь обозначена окрестность точки $\tau_0 \in W_1^{(1)}(0, 1)$, а примером τ_0 может служить значение $du/d\zeta$ в точке $\zeta = 0$ ($u = 0$). Ввиду монотонности, $\tau_0 > \tau$. Но, в силу интегрального уравнения (3в),

$$\tau(u) \ge \frac{2}{3\tau_0(u)}, \ \forall\tau \in B_\varepsilon(\tau_0).$$

Далее, пусть $\tau = \tau_0 - \varepsilon$, причем $\varepsilon \to +0$. Тогда $\tau_0^2 \ge 2/3$. Так же просто можно получить неравенство

$$\|U(\tau_0) - U(\tau_0 - \varepsilon)\| \le \frac{2\varepsilon}{3\tau_0(\tau_0 - \varepsilon)} = \frac{2\varepsilon}{3\tau_0^2} + O(\varepsilon^2) = q\varepsilon,$$

где q – константа, причем $q = 2/(3\tau_0^2) \le 1$.

Итерационный процесс можно организовать следующим образом. В первом приближении $\tau = \tau_0 = \tau(0)$. Тогда решение (3в), в первом приближении, есть

$$\tau(u)\tau_0 = \frac{2}{3}(1-u^3),\ \tau_0 = \sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{\tau}{\tau_0} = 1-u^3.$$

Следующие итерации строятся по схеме $\tau_s = U(\tau_{s-1})$, где нижний индекс s означает номер итерации. Итерационный процесс сходится в силу теоремы о неподвижной точке.

Уравнение (3а) допускает каноническое преобразование

$$u^2 = w,\ \tau = \tau(w),$$

приводящее его к типичному виду Крокко и к канонической системе:

$$\frac{d\tau}{dw} + \int_0^{\sqrt{w}} \frac{dz}{\tau(z)} = 0,$$

откуда

$$\tau\frac{d^2\tau}{dw^2} + \frac{1}{2\sqrt{w}} = 0,\ \left(\frac{d\tau}{dw}\right)_{w=0} = \tau(1) = 0. \quad (3г)$$

Каноническая система записывается так:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dw} = \sigma; \\ \dfrac{d\sigma}{dw} = -\dfrac{1}{2\tau\sqrt{w}}, \end{cases}$$

и имеет гамильтониан

$$E(w,\tau,\sigma) = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{w}}\ln\frac{1}{\sqrt{\tau}} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\tau}{dw}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{w}}\ln\frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad (3д)$$

и двойственную функцию

$$\Lambda\left(w,\tau,\frac{d\tau}{dw}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\tau}{dw}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{w}}\ln\frac{1}{\sqrt{\tau}}.$$

В действительном движении справедливо выражение

$$s(\tau) = \int_0^1 dw\left(\left(\frac{d\tau}{dw}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{w}}\ln\frac{1}{\tau}\right) \to \inf \ge 0$$

на функциях $\tau(w)$, удовлетворяющих предельным условиям из системы (3г).

В гамильтониане (3д) целесообразно вернуться к старой переменной u:

$$\frac{1}{8u^2}\left(\frac{d\tau}{du}\right)^2 - \frac{1}{2u}\ln\frac{1}{\tau} = E\left(u,\tau,\sigma = \frac{d\tau}{du}\right).$$

Пусть (так же, как и раньше)

$$\left(\frac{d\tau}{du}\right)^2 - 4u\ln\frac{1}{\tau} = 0,\ \frac{d\tau}{du} = -2\sqrt{u\ln\frac{1}{\tau}}.$$

Тогда решение уравнения Стокса имеет вид

$$\int_0^\tau \frac{dz}{\sqrt{\ln\frac{1}{z}}} = \frac{4}{3}(1-\sqrt{u^3}),$$

$$\operatorname{erfc}\sqrt{\ln\frac{1}{\tau}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}(1-\sqrt{u^3}).$$

Пусть $u = 0$, тогда $\tau = \tau_0$, $\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\ln\frac{1}{\tau_0}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} = 0,7522$, $\tau_0 = 0,89$.

Примечание. Пусть дана неоднородная квазилинейная система с дивергентным членом q:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(z)\frac{\partial y}{\partial x}\right) + q = \frac{\partial y}{\partial t},\ D(y) = (0 < x, t < \infty),$$

$$y:(0,\infty) \to C^{(2)}(D(y)) \in R^1,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(g(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial z}{\partial t},\ D(z) = D(y),$$

$$y:(0,\infty) \to C^{(2)}(D) \in R^1.$$

Обычно в задачах с физическим содержанием переменные y, z — концентрации примеси (либо температура, влажность, парциальные давления и пр.); q — плотность распределения источников; f, g — коэффициенты переноса, зависящие от концентрации z-примеси. Если $4tq$ = const, то эти уравнения допускают автомодельное преобразование переменных:

$$\zeta = \frac{x}{2\sqrt{t}},\ y = y(\zeta),\ z = z(\zeta).$$

Решить первое (линейное) уравнения не представляет труда, второе же можно свести к уравнению Крокко. Роль «потенциала» z играет функция Крокко $\varphi(z)$. В физических задачах она играет роль «потенциала влагопереноса» [8].

Аддитивное удвоение переменных и прямое построение функционала

Приведение уравнения (2) к канонической системе можно упростить с помощью аддитивного удвоения переменных.

Пусть $Y := Y_1, \dfrac{dY_1}{d\zeta} = Y_2.$ Тогда дифференциальное уравнение из предельной задачи (2) можно записать в виде

$$f(Y)Y'' + f'(Y)Y'^2 + 2\zeta Y' = 0,$$

$$\frac{dY_1}{d\zeta} = Y_2, \qquad\qquad (9)$$

$$\frac{dY_2}{d\zeta} = -\frac{f'(Y_1)Y_2^2 + 2\zeta Y_2}{f(Y_1)}.$$

Система (9) – не каноническая.

Пусть $f(Y) - 1 = 0$. Тогда система (9) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dY_1}{d\zeta} = Y_2; \\ \dfrac{dY_2}{d\zeta} = -2\zeta Y_2, \end{cases} \qquad (9a)$$

или

$$\frac{d}{d\zeta}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2\zeta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Наряду с системой (9а) будет рассматриваться система с импульсом $Z = (0, Z_2)^T$, имеющая вид

$$\begin{cases} \dfrac{dY_1}{d\zeta} = Y_2 = \dfrac{\partial E}{\partial Z_1}; \\ \dfrac{dY_2}{d\zeta} = -2\zeta(Y_2 + Z_2) = \dfrac{\partial E}{\partial Z_2}, \end{cases}$$

и с гамильтонианом

$$E(\zeta, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2) = Y_2 Z_1 - 2\zeta\left(Y_2 Z_2 + \frac{Z_2^2}{2}\right).$$

Частично аддитивно удвоенная система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dY_1}{d\zeta} = Y_2, \\ \dfrac{dY_2}{d\zeta} = -2\zeta(Y_2 + Z_2), \\ \dfrac{dZ_1}{d\zeta} = 0, \\ \dfrac{dZ_2}{d\zeta} = 2\zeta Z_2, \end{cases} \qquad (10a)$$

или

$$\frac{d}{d\zeta}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\zeta & 0 & -2\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\zeta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

а эта система уже каноническая.

Не исключая общности, примем $Z_1 = 0$. Тогда функция $\Lambda(\zeta, Y_2, dY_2/d\zeta)$, двойственная по Юнгу – Лежандру $E(\zeta, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2)$, задает плотность распределения инъективного отображения $s : Y_2 \in W_2^{(1)}(0, \mathrm{Z}) \to E_1$:

$$s(Y_2) = \int_0^{\mathrm{Z}} \frac{1}{\zeta}\left(\frac{dY_2}{d\zeta} + 2\zeta Y_2\right)^2 d\zeta, \ \mathrm{Z} \le \infty, \qquad (10б)$$

причем вдоль экстремали $s \to \inf \ge 0$.

Необходимое условие минимума есть

$$\frac{d^2 Y_2}{d\zeta^2} - \frac{1}{\zeta}\frac{dY_2}{d\zeta} - 4\zeta^2 Y_2 = 0. \qquad (11)$$

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$Y_2(\zeta) = C_1 \exp(\zeta^2) + C_2 \exp(\zeta^2), \qquad (12)$$

где $C_{1,2}$ – постоянные интегрирования.

Из предельного условия следует, что $C_1 + C_2 = q$, $\zeta = 0$. В этом случае справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $C_1 = 0$. Тогда $\forall \mathrm{Z} > 0, s(Y_2) = 0$ (тривиально);

2. Пусть $Y_2 = 0$, $\zeta = Z$. В силу уравнения (12) можно записать:

$$Y_2 = q\frac{\mathrm{sh}(Z^2 - \zeta^2)}{\mathrm{sh}Z^2}, \qquad (12a)$$

и тогда, в силу справедливости уравнения (10), получим следующие выражения:

$$Y_1(\zeta) = \frac{q}{\mathrm{sh}Z^2}\int_0^{\zeta} \mathrm{sh}(Z^2 - t^2)dt, \ \zeta < Z,$$
$$Y_1(\zeta) = \frac{q}{\mathrm{sh}Z^2}\int_0^{Z} \mathrm{sh}(Z^2 - t^2)dt, \ \zeta \ge Z, \qquad (13)$$

и $Y_1(\zeta)$ достигает предельного значения при конечном значении Z.

Пусть теперь $Z \to \infty$. Тогда $Y_2 \to q\exp(-\zeta^2)$

(классическое решение). Следовательно, исходная траектория получается как предельная форма экстремали.

3. Пусть $C_2 = 0$. Тогда

$$s(Y_2) = 2(\exp(Z^2) - 1).$$

Удвоение переменных можно толковать в терминах оптимального управления, рассматривая z как вектор управления и интерпретируя гамильтониан E как псевдогамильтониан [9].

Периодические решения в методе аддитивного удвоения переменных

В случае так называемых периодических процессов теплопроводности используются, как правило, следующие уравнения [10]:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ D(y) = \Omega', \Omega' = (t > -\infty, x > 0), \quad (1а)$$

причем предельные условия имеют вид

$$y(x, -\infty) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} + B(y_{ex} - y(0,t)) = 0. \quad (14)$$

Функции $B(t)$ и $y_{ex}(t)$ – периодические, с примитивным периодом $t_0 = 1$. Далее считается, что $B = \text{const}$ (это условие не принципиальное, но упрощает выкладки) [8].

Теперь пусть

$$y(t, x) = Y(t)\exp(-\alpha x),\ Y(t) := y(0, t),$$

где $\alpha = \sqrt{\pi}(1 + i)$ – собственное число предельной задачи.

Уравнение и предельная задача (14) равносильны задаче Коши для $Y(t)$ следующего вида:

$$\frac{dY}{dt} = \alpha B(y_{ex} - Y), Y(-\infty) = 0. \quad (15)$$

Тогда решение задачи Коши (15) есть ($\gamma := \alpha B$):

$$Y(t) = \gamma \int_0^\infty y_{ex}(t-u)\exp(-\gamma u)du, \quad (16)$$

или

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \gamma^{-k} \left(\frac{d}{dt}\right)^k y_{ex}(t) = \left(I + \gamma^{-1}\frac{d}{dt}\right)^{-1} y_{ex}(t), \quad (16а)$$

где оператор $\left(I + \gamma^{-1}\frac{d}{dt}\right)^{-1}$ ограничен в круге радиуса $\left\|\frac{d}{dt}\right\| < |\gamma|$.

В общем случае оператор d/dt не ограничен, и целесообразно рассматривать решение (16). Из решения первой предельной задачи (Дирихле) следует, что

$$\alpha = \sqrt{\pi}(1 + i).$$

Тогда вещественная и мнимая части (16) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} Y(t) &= B\sqrt{\pi}(1+i)\int_0^\infty y_{ex}(t-u)\exp(-B\sqrt{\pi}u) \times \\ &\times [\cos(B\sqrt{\pi}u) - i\sin(B\sqrt{\pi}u)]du = \\ &= B\sqrt{\pi}\int_0^\infty y_{ex}(t-u)\exp(-B\sqrt{\pi}u) \times \\ &\times [\cos(B\sqrt{\pi}u) + \sin(B\sqrt{\pi}u)]du + \\ &+ iB\sqrt{\pi}\int_0^\infty y_{ex}(t-u)\exp(-B\sqrt{\pi}u) \times \\ &\times [\cos(B\sqrt{\pi}u) - \sin(B\sqrt{\pi}u)]du, \end{aligned} \quad (16б)$$

т. е.

$$\begin{aligned} R(Y) &= B\sqrt{\pi}\int_0^\infty y_{ex}(t-u)\exp(-B\sqrt{\pi}u) \times \\ &\times [\cos(B\sqrt{\pi}u) + \sin(B\sqrt{\pi}u)]du; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(Y) &= B\sqrt{\pi}\int_0^\infty y_{ex}(t-u)\exp(-B\sqrt{\pi}u) \times \\ &\times [\cos(B\sqrt{\pi}u) - \sin(B\sqrt{\pi}u)]du. \end{aligned}$$

Из (16а) получается решение так называемой «обратной задачи»: требуется найти температуру среды $y_{ex}(t)$, если известна температура поверхности $Y(t)$. В силу полученного решения задачи (16а) можно записать, что

$$y_{ex}(t) = \left(1 + \gamma^{-1}\frac{d}{dt}\right)Y(t) = Y(t) + \gamma^{-1}\frac{dY}{dt}. \quad (17)$$

Можно рассматривать выражение (17) как решение интегрального уравнения (16) или просто исключить $y_{ex}(t)$ из задачи Коши (15).

Наряду с задачей (15) рассмотрим каноническую, аддитивно удвоенную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = \gamma(y_{ex} - Y - Z); \\ \dfrac{dZ}{dt} = \gamma Z, \end{cases} \qquad (18)$$

которая связана с гамильтонианом

$$E(Y,Z) = \gamma(y_{ex} - Y)Z - \frac{\gamma Z^2}{2}, \ E(Y,0) = 0.$$

Тогда в действительном процессе распространения тепла, согласно системе (18), следует записать:

$$s(Y) = \int_0^\infty \left(\frac{dY}{dt} - \gamma(y_{ex} - Y) \right)^2 dt \to \inf \geq 0. \quad (19)$$

Пусть $Y(t)$ удовлетворяет задаче Коши (15). Тогда $s(Y) = 0$. Существуют решения, отличные от (16). Условие (19) совпадает с так называемым «принципом наименьшего принуждения» Гаусса (метод наименьших квадратов).

Заключение

Итак, в данной статье получены обоснования для следующих утверждений:

уравнения параболического типа, допускающие группу автомодельных преобразований, представляют собой необходимое условие минимума для положительных функционалов;

уравнение Крокко равносильно канонической системе, и для него соответствующий минимизируемый функционал выводится непосредственно;

в исходной форме предельная задача для уравнения параболического типа приводится к каноническому виду аддитивным удвоением переменных. В результате плотность распределения получается как двойственная функция для гамильтониана канонической системы;

переход от сильных решений исходных предельных задач к вариационным задачам позволяет расширить топологию решения от $C^{(2)}(E)$ до $W_2^{(1)}(E)$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. С. 83—87.
2. **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Математические заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237—248.
3. **Natividad M.C., Stones M.** Richardson extrapolation for a diffusion-convection problem using a Shishkin mesh // Applied Numerical Mathematics. 2003. Vol. 45. No. 2, pp. 315-329.
4. **Han H., Kellog R.B.** Flow directed iterations for convection dominated flow // Proceeding of the 5 th Int. Conf. on Boundary and Interior layers. SF. 1988, pp. 5-17.
5. **Тиховская С.В.** Схема второго порядка точности для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка // Сборник статей секции «Физико-математические науки». Омск: Изд-во Омского гос. ун-та, 2012. С. 44—47.
6. **Задорин А.И., Тиховская С.В.** Решение нелинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 16. № 1. С. 11—25.
7. **Переломов А.М.** Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990. 240 с.
8. **Богословский В.Н.** Теоретические основы вентиляции и строительная теплофизика. М.: МГСУ, 2004. 376 с.
9. **Дикуссар В.В., Милютин А.А.** Качественные и численные методы в принципе максимума. М.: Наука, 1989. 144 с.
10. **Куколев М.И., Петриченко М.Р.** Определение температурного поля стенки при периодическом тепловом воздействии // «Двигатель-2007». Труды международной конференции. М.: МГТУ, 2007. С. 115—119.
11. **Айнола Л.Я.** Вариационные принципы для нестационарных задач теплопроводности // Инженерно-физический журнал. 1967. Т. 12. № 4. С. 465 — 468.
12. **Био М.** Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия, 1975. 209 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович — *доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой гидравлики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

fonpetrich@mail.ru

Petrichenko M.R. EXTREME PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A PARABOLIC EQUATION.

Rational procedures and properties of solutions of limiting problems have been considered for equations and limiting problems with partial derivatives of a parabolic type. It was proved that such limiting problems for parabolic equations admitting the group of self-transformations were necessary conditions for a minimum of positive functionals; furthermore, the Crocco equation was proved to be equivalent to a canonical system and its applicable functional was shown to be found at once. It was also demonstrated that someone was able to bring a parabolic equation in its original notation into a canonical form using additive doubling variables.

TRANSFORMATION GROUP, LAYER, EXTREME, PARABOLIC EQUATION, CROCCO EQUATION, ADDITIVE DOUBLING OF VARIABLES.

REFERENCES

1. **Cole J.D.** *Metody vozmushcheniy v prikladnoy matematike* [Perturbation methods in applied mathematics]. Moscow, Mir, 1972, pp. 83-87. (rus)

2. **Il'in A.M.** Raznostnaya skhema dlya differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom pri starshey proizvodnoy. *Matematicheskie zametki*, 1969, Vol. 6, No. 2, pp. 237-248. (rus)

3. **Natividad M.C., Stones M.** Richardson extrapolation for a diffusion-convection problem using a Shishkin mesh. *Applied Numerical Mathematics*, 2003, Vol. 45, No. 2, pp. 315-329.

4. **Han H., Kellog R.B.** Flow directed iterations for convection dominated flow. *Proceeding of the 5 th Int. Conf. on Boundary and Interior layers.* SF, 1988, pp. 5-17.

5. **Tikhovskaya S.V.** Skhema vtorogo poryadka tochnosti dlya nelineynogo singulyarno vozmushchennogo uravneniya vtorogo poryadka. *Sbornik statey sektsii «Fiziko-matematicheskie nauki»*, Omsk, Omskiy gos. Universitet, 2012, pp. 44-47. (rus)

6. **Zadorin A.I., Tikhovskaya S.V.** Reshenie nelineynogo singulyarno vozmushchennogo uravneniya vtorogo poryadka. *Sibirskiy zhurnal vych. matematiki*, 2013, Vol. 16, No. 1, pp. 11-25. (rus)

7. **Perelomov A.M.** *Integriruemye sistemy klassicheskoy mekhaniki i algebry Li.* Moscow, Nauka, 1990. 240 p. (rus)

8. **Bogoslovskiy V.N.** *Teoreticheskie osnovy ventilyatsii i stroitel'naya teplofizika.* Moscow, MGSU, 2004. 376 p. (rus)

9. **Dikussar V.V., Milyutin A.A.** *Kachestvennye i chislennye metody v printsipe maksimuma.* Moscow, Nauka, 1989. 144 p. (rus)

10. **Kukolev M. I., Petrichenko M. R.** *Opredelenie temperaturnogo polya stenki pri periodicheskom teplovom vozdeystvii.* Dvigatel'-2007, Trudy Mezhdunarodnoy konferentsii. Moscow, MGTU, 2007, pp. 115-119. (rus)

11. **Aynola L.Ya.** Variatsionnye printsipy dlya nestatsionarnykh zadach teploprovodnosti. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 1967, Vol. 12, No. 4, pp. 465-468. (rus)

12. **Bio M.** *Variatsionnye printsipy v teorii teploobmena.* Moscow, Energiya, 1975, 209 p. (rus)

THE AUTHOR

PETRITCHENKO Mikhail R.
St. Petersburg State Polytechnical University
29, Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia.
fonpetrich@mail.ru