УДК 519.21

Г.И. Белявский, И.В. Мисюра
Южный федеральный университет

ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ СО СКАЧКАМИ, ВОЗНИКАЮЩИМИ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ И С КОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

Рассматривается задача фильтрации сигналов со скачками, происходящими в случайные моменты времени на фоне белого шума, в дискретном времени и с конечным горизонтом. Использованы две модели сигнала – дискретные аналоги процесса диффузии со скачками.

ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛА, ДИФФУЗИЯ СО СКАЧКАМИ, МАРКОВСКАЯ ЦЕПЬ, УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА. ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ, КОНЕЧНЫЙ ГОРИЗОНТ.

Введение

Фильтрации сигналов посвящено множество публикаций, поскольку она имеет широкие технические приложения. Под сигналом обычно подразумевается случайный процесс X_t. При этом в большинстве работ указанный процесс задается уравнением диффузии:

$$dX_t = \alpha_t dt + \beta_t dW_t, \;\; t \in [0, T], \;\; X_0 = 0,$$

где W_t – стандартное броуновское движение; α_t, β_t – случайные коэффициенты (предсказуемые либо детерминированные), которые удовлетворяют условию Липшица по временн*о*й переменной t почти всюду.

Траектории данного процесса при этом будут непрерывными. Классические фильтры Винера и Калмана также описываются этим уравнением, если предположить, что его коэффициенты в первом случае – константы, а во втором – что они детерминированы [1]. В связи с диффузионными процессами фильтр Калмана распространен на самый общий случай [2].

В современных исследованиях значительное внимание уделяется процессам со скачками (процессы Леви, аддитивные и другие), и для ознакомления с состоянием вопроса следует обратить внимание на монографии [3, 4].

Для описания процесса со скачками целесообразно рассмотреть уравнение вида

$$dX_t = \alpha_t dt + \beta_t dW_t + \gamma_t dCP_t,$$

в котором CP_t – составной процесс Пуассона, не зависящий от W_t (т. е. от стандартного броуновского движения). При этом на любом конечном интервале [0, T] число скачков данного процесса конечно. Скачки происходят в случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k$; приращения $\Delta\tau_i$ – это независимые и одинаково распределенные показательные случайные величины с интенсивностью λ, поэтому дифференциал составного процесса Пуассона выражается как

$$dCP_t = \begin{cases} 0, t \neq \tau_i; \\ \xi_i, t = \tau_i, \end{cases}$$

где ξ_i – независимые, одинаково распределенные случайные величины.

Фильтрация процессов со скачками упоминается также в монографии [5]. По аналогии с этим упоминанием рассмотрим дискретный аналог диффузии со скачками для равномерного разбиения интервала с шагом h:

$$\Delta X_j = \alpha_{j-1} h + \beta_{j-1} \Delta W_j + \gamma_{j-1} \sum_{l=1}^{P_{\lambda,h}^{(j)}} \xi_l^{(j)}, \qquad (1)$$

где $P_{\lambda h}^{(j)}$ – последовательность независимых пуассоновских случайных величин с общей интенсивностью λh; $\xi_l^{(j)}$ – последовательность всех прочих независимых случайных величин с общим законом распределения; приращение ΔW_j распределено по нормальному закону $N(0,h)$.

Для $\xi_l^{(j)} \in N(0,1)$ уравнение (1) приобретает более простой вид:

$$\Delta X_j = \alpha_{j-1}h + (\beta_{j-1}\sqrt{h} + \gamma_{j-1}\sqrt{P_{\lambda h}^{(j)}})M_j, \quad (2)$$

где M_j – независимые стандартные нормальные случайные величины.

Уравнение (2) является базовым для описания процессов, рассмотренных далее.

Под сигналом мы будем далее понимать случайный вектор $X = (X_i)_1^n$, и модели поведения сигнала будем описывать в конечномерном линейном пространстве R^n. С сигналом будем связывать естественный стохастический базис

$$(\Omega, (F_t)_0^T, F_n),$$

где $F_0 = \sigma\{\varnothing, \Omega\}$, $F_j = B\{R^j\}$.

При рассмотрении задачи фильтрации предполагается существование пары случайных векторов (Y, X), стохастически связанных между собой; при этом Y – наблюдаемый вектор, а X – вектор, подлежащий вычислению.

Возможны две постановки задачи: априорная и апостериорная. В первом случае рассматривается семейство конечномерных условных законов распределения Law (X^j / Y^j) и последовательность оценок $\hat{X}^j$ вектора X^j по наблюдаемым векторам Y^j (верхний индекс обозначает проекцию соответствующего вектора на подпространство R^j). В качестве наилучшей считается, как правило, оценка, доставляющая минимум среднеквадратического отклонения $E(X^j - \hat{X}^j)^2$, при условии, что оценка $\hat{X}^j \in \sigma(Y^j)$. Известно, что наилучшая в среднеквадратическом смысле оценка – это условное математическое ожидание:

$$\hat{X}^j = E(X^j / Y^j). \quad (3)$$

При существовании условной плотности $f(x / Y^j)$, кроме условного математического ожидания, используется также оценка максимального правдоподобия.

Далее под фильтрацией сигнала будем иметь в виду вычисление условного математического ожидания (3) либо максимально правдоподобной оценки.

При апостериорной постановке задачи вектор Y доступен полностью и вычисляется одна апостериорная оценка сигнала, например

$$\hat{X} = E(X / Y).$$

Общая модель описания зашумленных процессов

Предположим, что в уравнении (2) коэффициенты являются константами и, не нарушая общности, будем считать, что $\alpha_j = 0$. Кроме того, будем считать, что интенсивность скачков или шаг разбиения настолько малы, что вероятностью $P(P_{\lambda h}^{(j)} \geq 2)$ можно пренебречь. Благодаря этим предположениям, уравнение (2) приобретает более компактный вид:

$$\Delta X_j = (\beta\sqrt{h} + \gamma\delta_j)M_j,$$

где $\delta_j \in \{0,\ 1\}$.

Со стороны вычислительной практики существенно различаются модели, где число скачков на интервале ограничено небольшим значением K и где число скачков произвольно. В связи с этим рассматриваются две модификации общей модели с локальными параметрами (σ_1, σ_2, D), где σ_i – положительные константы, D – случайная диагональная матрица с положительными элементами, причем

$$d_i \in \{\sigma_2, \sigma_2 + d\} \ (d > 0).$$

Если $d_i = \sigma_2$, то в i-й момент времени скачка нет; если же $d_i = \sigma_2 + d$, то в i-й момент времени скачок есть. В результате модель задается системой стохастических разностных уравнений:

$$Y = X + \sigma_1 N,\ AX = DM; \quad (4)$$

при этом векторы N, M независимы и распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей; A – матрица дискретного оператора дифференцирования.

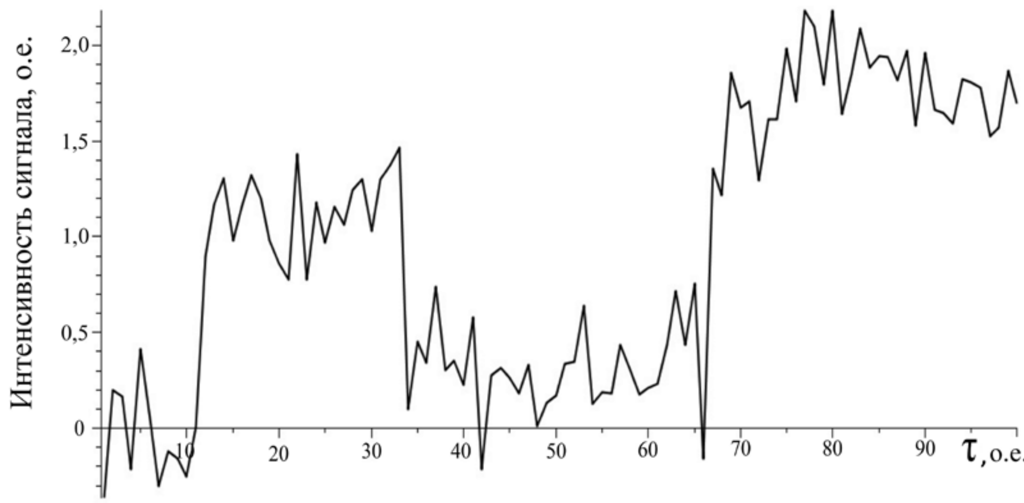

Рис. 1. Траектория сигнала со скачками в моменты времени $\tau_1 = 12$ о.е., $\tau_2 = 34$ о.е., $\tau_3 = 67$ о.е.; значения параметров: $\sigma_1 = 0{,}2$, $\sigma_2 = 0{,}1$, $d = 1{,}0$

На рис. 1 представлена траектория сигнала с тремя скачками в определенные моменты времени и соответствующие значения параметров σ и d.

Модель 1

В данной модели предполагается, что число скачков ограничено небольшим значением K. Вид случайной матрицы D полностью определяется поведением K-мерной случайной величины $l = (l_1, l_2, ..., l_K)$, для которой $l_i \in \{0, 1, ..., n\}$. Если $l_i = 0,$, то $l_{i+1} = l_{i+2} = ... = 0$; если $l_i \neq 0$, то $l_{i+1} = 0$ или $l_i < l_{i+1}$. Вычисление оценки связано с решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), имеющей матрицу, которая отличается от матрицы с известным сингулярным разложением на матрицу ранга K. Поскольку значение K не оказывает существенного влияния на приведенные далее вычислительные процедуры, мы остановимся на случае $K = 1$ (чтобы не загромождать статью выкладками).

Рассмотрим случайную величину $l \in \{0, 1, ..., n\}$ с законом распределения $P(l = i) = p_i$. Равенство $l = 0$ означает, что все $d_i = \sigma_2$; $l = j \neq 0$ означает, что

$$d_i = \begin{cases} \sigma_2, i \neq j; \\ \sigma_2 + d, i = j. \end{cases}$$

Для модели 1 фильтрация рассматривается при двух априорных предположениях.

Предположение первое. Закон распределения случайной величины l известен. В этом случае формула (3) приобретает вид

$$\hat{X} = \sum_{l=0}^{n} E(X / Y, l) p_l. \qquad (5)$$

Условный закон распределения Law $(X/Y, l)$ является нормальным, с математическим ожиданием

$$\hat{X}^l = \frac{1}{\sigma_1^2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} I + A^T D_l^{-2} A\right)^{-1} Y. \qquad (6)$$

В результате оценка вектора X имеет вид

$$\hat{X} = \sum_{l=1}^{n} \hat{X}^l p_l. \qquad (7)$$

Оценка (7) является линейной оценкой и вместе с удалением шума из сигнала сглаживает его резкие изменения, что не всегда оправдано, например, при выделении границ (edge detection). В отличие от (7), оценка

$$\hat{X} = \hat{X}^j, \qquad (8)$$

где

$$j = \arg\min_l \left[\frac{(Y - \hat{X}^l)^2}{2\sigma_1^2} - \ln p_l\right]$$

относится к нелинейным оценкам.

Кроме того, оценка (8) позволяет получить ориентировочное значение момента разладки случайного процесса, если под разладкой понимать разрыв траектории.

Введем обозначения

$$H_l = \frac{1}{\sigma_1^2} I + A^T D_l^{-2} A.$$

Нетрудно установить связь между матрицами $H_l\,(l \neq 0)$ и матрицей H_0; эта связь выражается следующим образом:

$$H_l = H_0 + a_l a_l^T, \tag{9}$$

где a_l – вектор,

$$a_l = \frac{\sqrt{\sigma_2^2 + (\sigma_2 + d)^2}}{\sigma_2 d} A e_l$$

(e_l – l-й орт);

матрица $H_0 = \dfrac{1}{\sigma_1^2} I + \dfrac{1}{\sigma_2^2} A^T A.$

Равенство (8) позволяет выразить оценки $\hat{X}_l$ через оценку $\hat{X}_0$:

$$\hat{X}_l = \hat{X}_0 - \frac{(a_l, \hat{X}_0)}{1 + (H_0^{-1} a_l, a_l)} H_0^{-1} a_l. \tag{10}$$

Основная вычислительная трудность связана с обращением матрицы H_0. В работе [6] представлено спектральное разложение матрицы

$$H_0 = F \Lambda F^T,$$

где

$$f_{i,j} = \sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right) \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right)\right)^2},$$

$$\lambda_j = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{2}{\sigma_2^2}\left[1 - \cos\frac{j\pi}{n+1}\right].$$

Это разложение затем использовалось в работе [7]. Тогда обратная матрица имеет вид $H_0^{-1} = F \Lambda^{-1} F^T$.

Предположение второе. Данное априорное предположение заключается в том, что закон распределения случайной величины l неизвестен и подлежит оцениванию (так называемый эмпирический байесовский подход). Заметим, что указанный подход в связи с фильтрацией сигналов применялся также в работе [8]. Если для оценки использовать метод максимального правдоподобия, то она определяется в результате решения задачи минимизации:

$$\min_{Z \in L} \|Z\|, \tag{11}$$

где L – выпуклая оболочка, натянутая на векторы: $Y - \hat{X}_l$.

Оценка сигнала имеет вид

$$\hat{X} = Y - Z^*, \tag{12}$$

где Z^* – решение задачи (11).

Одновременно с этим находится априорное распределение случайной величины l,

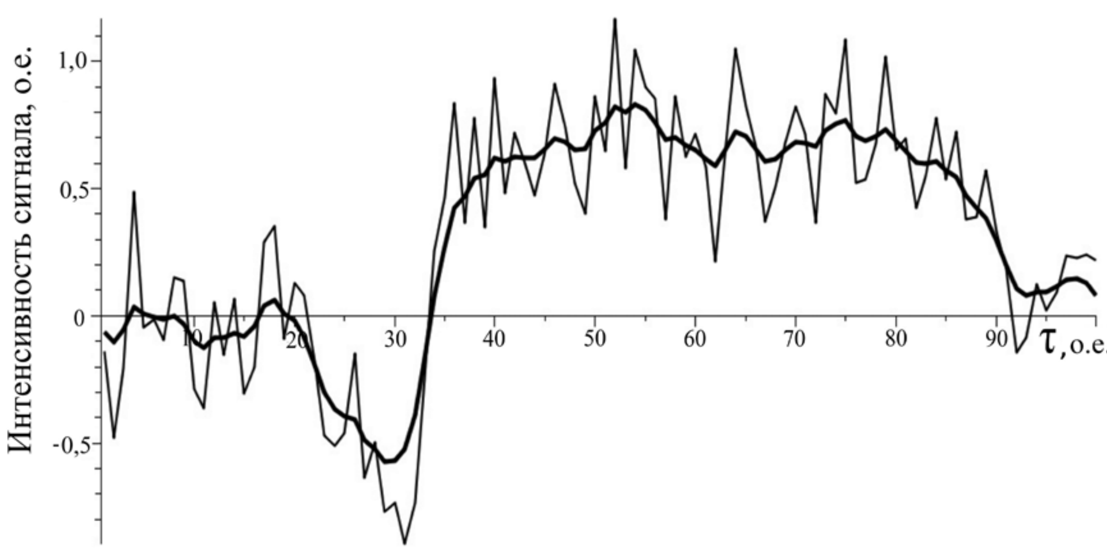

Рис. 2. Оценка сигнала, выраженного формулой (12); использован эмпирический байесовский подход

что позволяет решить задачу разладки случайного процесса. Задача (11) хорошо изучена [9], и для ее решения существуют эффективные алгоритмы.

На рис. 2 представлена оценка сигнала (12) по его зашумленной реализации.

Модель 2

Данная модель предполагает возможным произвольное число скачков. Рассмотрим последовательность бинарных случайных величин $L_1, ..., L_n$. Диагональная матрица следует выражению

$$D(L) = \mathrm{diag}(\sigma_2 + L_i d).$$

Условная оценка имеет вид

$$\hat{X}(L) = \frac{1}{\sigma_1^2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} I + A^T D(L)^{-2} A\right)^{-1} Y, \quad (13)$$

а оценка сигнала –

$$\hat{X} = E\hat{X}(L). \quad (14)$$

Далее будем считать, что L – однородная марковская последовательность с двумя состояниями и матрицей переходных вероятностей

$$Q = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Единица во второй строке означает, что скачки не следуют один за другим. Это ограничение несущественно для вычисления оценки. Для вычисления по формуле (14) используем метод Монте-Карло:

$$\hat{X} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \hat{X}(L^{(i)}), \quad (15)$$

где $L^{(i)}$ – сгенерированная марковская последовательность.

Этот метод фильтрации состоит из двух элементов: генерации бинарной однородной марковской последовательности и решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей. Каждый из элементов не требует больших вычислительных затрат.

Как и в модели 1, рассмотрим оценку, которая получается в результате решения задачи:

$$\min_{X,L}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(Y_i - X_i)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(X_i - X_{i-1})^2}{2(\sigma_2 + L_i d)^2} + \right.$$

$$+\ln(\sigma_2 + L_i d) + L_i \ln\frac{1-q}{q} + \quad (16)$$

$$\left. + L_i L_{i-1}\ln\frac{q}{1-q} + L_{i-1}\ln\frac{1}{q}\right],$$

причем $X_0 = L_0 = 0$. Решение задачи (16) может быть выполнено методом динамического программирования.

Уравнение Беллмана

Для вывода указанного уравнения, связанного с фильтрацией сигнала, рассмотрим последовательность функций:

$$\varphi_k(X_k, L_k) = \min_{X_{k+1},...,X_n;L_{k+1},...,L_n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(Y_i - X_i)^2}{2\sigma_1^2} + \right.$$

$$+\frac{(X_i - X_{i-1})^2}{2(\sigma_2 + L_i d)^2} + \ln(\sigma_2 + L_i d) + L_i \ln\frac{1-q}{q} +$$

$$\left. + L_i L_{i-1}\ln\frac{q}{1-q} + L_{i-1}\ln\frac{1}{q}\right].$$

Уравнение Беллмана имеет следующий вид:

$$\varphi_{k-1}(X_{k-1}, L_{k-1}) = \min_{X_k, L_k}\left[\frac{(Y_k - X_k)^2}{2\sigma_1^2} + \right.$$

$$+\frac{(X_k - X_{k-1})^2}{2(\sigma_2 + L_k d)^2} + \ln(\sigma_2 + L_k d) + L_k \ln\frac{1-q}{q} +$$

$$\left. + L_k L_{k-1}\ln\frac{q}{1-q} + L_{k-1}\ln\frac{1}{q} + \varphi_k(X_k, L_k)\right],$$

где $\hat{X}_k(X_{k-1}, L_{k-1}), \hat{L}_k(X_{k-1}, L_{k-1})$ – аргументы, на которых достигается минимум.

Краевое условие выражается как

$$\varphi_{n+1}(X_{n+1}, L_{n+1}) = 0.$$

Непосредственное решение уравнения Беллмана, связанное с вычислением последовательности функций, требует больших вычислительных затрат. Поэтому в качестве альтернативного метода рассмотрим спуск по обобщенным координатам (X, L). Метод спуска – итерационный, на каждой итерации которого решаются две вспомогательные задачи:

$$\min_X F(X, L^{(t)}); \quad (17)$$

$$\min_L F(X^{(t+1)}, L), \quad (18)$$

где F – целевая функция в задаче (16).

Вектор $X^{(t+1)}$ вычисляется по формуле (13) с использованием вектора $L^{(t)}$. Вектор $L^{(t+1)}$ – решение задачи (18), которое находится методом динамического программирования. Последний применяется для оценки (16) при условии, что вектор X фиксирован, т. е. $X = X^{(t+1)}$. Итерации продолжаются до тех пор, пока не выполнится равенство $L^{(t+1)} = L^{(t)}$.

На рис. 3 представлен результат фильтрации, выполненной с помощью итерационного алгоритма.

Некоторым обоснованием алгоритма является следующее утверждение.

Утверждение. *Итерационный алгоритм останавливается за конечное число шагов.*

Действительно, по переменной X целевая функция является квадратичной, с положительно определенной матрицей, диагональ которой зависит от L. Отсюда следует, что на каждой итерации происходит уменьшение целевой функции. Поскольку множество значений переменной L – конечно, то алгоритм останавливается за конечное число шагов.

Двухкритериальная оптимизационная задача фильтрации

В связи с описанием и использованием модели 2 рассмотрим еще один подход к фильтрации сигналов со скачками. Определим два критерия: критерий близости и критерий гладкости.

Критерий близости выразим в виде

$$F_1(X) = (Y - X)^2,$$

критерий гладкости –

$$F_2(X) = (A^T AX, X).$$

Таким образом, для получения оценки ненаблюдаемого вектора возникает двухкритериальная оптимизационная задача. Целесообразно применить метод обобщенных наименьших квадратов.

Математическое ожидание первого критерия

$$EF_1(X) = n\sigma_1^2,$$

а второго –

$$EF_2(X) = n\sigma_2^2 + (2\sigma_2 d + d^2) \times$$
$$\times\, (Q(I - Q^n)(I - Q)^{-1} e_1, e_2),$$

где $e_1 = (1,\ 0)$, $e_2 = (1,\ 0)$.

В результате для оценки необходимо найти

$$\min_X \left[\frac{(Y - X)^2}{n\sigma_1^2} + \frac{(A^T AX, X)}{\xi} \right],$$

$$\xi = n\sigma_2^2 + (2\sigma_2 d + d^2) \times$$
$$\times\, [Q(I - Q^n)(I - Q)^{-1} e_1, e_2],$$

что приводит к уравнению

$$(A^T A + \theta I)X = Y,$$

Рис. 3. Результат фильтрации сигнала.
Оценка выполнена с помощью спуска по обобщенным координатам

где

$$\theta = n^{-1}\sigma_1^{-2}[n\sigma_2^2 + (2\sigma_2 d + d^2) \times \times (Q(I-Q^n)(I-Q)^{-1}e_1, e_2)].$$

Оценка, которую можно при этом получить, является линейной. Нелинейная оценка получается, если использовать первый критерий в качестве ограничения и искать минимум по второму критерию:

$$\min(A^T AX, X), \tag{19}$$

при ограничении $(Y-X)^2 \le a$.

В отличие от предыдущего случая, решение задачи (19) сводится к решению двух уравнений:

$$(A^T A + \theta I)X = Y;\ (Y-X)^2 = a. \tag{20}$$

Используем спектральное представление матрицы

$$A^T A + \theta I = U^T \Lambda(\theta) U.$$

Ортогональная матрица U – та же, что и выше, а диагональные элементы матрицы $\Lambda(\theta)$ выражаются как

$$\lambda_j(\theta) = \theta + 2\left[1 - \cos\frac{j\pi}{n+1}\right].$$

В результате уравнения (20) преобразуются к следующему виду:

$$X = U^T \Lambda^{-1}(\theta)\bar{Y};\ \sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{\lambda_j(\theta)}\right)^2 \bar{Y}_j^2 = a, \tag{21}$$

где $\bar{Y} = UY$.

Данная оценка является нелинейной. При варьировании величины a получаются как различные оценки $\hat{X}(a)$, так и различные значения критерия $F_2(\hat{X}(a))$. Параметр a можно связать с математическим ожиданием $EF_1(X)$, например, с помощью равенства $a = kn\sigma_1^2$. Константу k можно выбрать из условия $P((Y-X)^2 \le a) \le \eta$.

Заключение

Предлагаемые в статье модели, связанные со случайными изменениями дисперсии, позволяют адекватно описывать зашумленные процессы со скачками, а также использовать эффективные вычислительные методы для фильтрации сигнала как с ограниченным, так и с произвольным числом скачков. Для решения задачи фильтрации представлены три типа алгоритмов, использующих различные подходы: спектральные разложения, метод Монте-Карло и динамическое программирование.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 140100579.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.

2. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов. Исследования по математической статистике // Труды МИАН СССР. 1968. Т. 104. С. 135–180.

3. **Applebaum D.** Levy processes and stochastic calculus. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 384 p.

4. **Bertoin J.** Levy processes. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. 266 p.

5. **Oksendal B., Sulem A.** Applied stochastic control of jump diffusion. New York: Springer Verlag, 2004. 208 p.

6. **Беллман Р., Энджел Э.** Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974. 204 с.

7. **Мисюра И.В.** Один метод фильтрации случайного сигнала // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. Т. 17. Вып. 6. С. 911–912.

8. **Белицер Э., Еникеева Ф.Н.** Адаптивная фильтрация случайного сигнала в гауссовском белом шуме // Проблемы передачи информации. 2008. Т. 44. Вып. 4. С. 39–51.

9. **Демьянов В.Ф., Малоземов В.Ф.** Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕЛЯВСКИЙ Григорий Исаакович – *кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и исследования операций Южного федерального университета.*

344090, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а.

beliavsky@hotmail.com

МИСЮРА Илья Владимирович – *аспирант кафедры высшей математики и исследования операций Южного федерального университета.*
344090, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а.
ilya.misyura@gmail.com

Beliavsky G.I., Misyura I.V. SIGNAL FILTERING WITH JUMPS DURING DISCRETE TIME AND UNDER FINITE HORIZON.

The problem of filtering signals with jumps occurring at random times on a background of white noise in discrete time and with finite horizon has been considered. Two signal models being discrete analogs of diffusion with jumps were developed.

SIGNAL FILTERING, JUMP DIFFUSION, MARKOV CHAIN, BELLMAN EQUATIONS, DISCRETE TIME, FINITE HORIZON.

REFERENCES

1. **Liptser R.Sh., Shiryaev A.N.** *Statistika sluchaynykh protsessov.* Moscow: Nauka, 1974, 696 p. (rus)

2. **Liptser R.Sh., Shiryaev A.N.** *Nelineynaya fil'tratsiya diffuzionnykh markovskikh protsessov. Issledovaniya po matematicheskoy statistike.* Trudy MIAN SSSR, 1968, Vol. 104, pp. 135-180. (rus)

3. **Applebaum D.** *Levy processes and stochastic calculus.* Cambridge: Cambridge University Press, 2004, 384 p.

4. **Bertoin J.** *Levy processes.* Cambridge: Cambridge University Press, 1996, 266 p.

5. **Oksendal B., Sulem A.** *Applied stochastic control of jump diffusion.* New York: Springer Verlag, 2004, 208 p.

6. **Bellman R., Endzhel E.** *Dinamicheskoe programmirovanie i uravneniya v chastnykh proizvodnykh.* Moscow: Mir, 1974, 204 p. (rus)

7. **Misyura I.V.** Odin metod fil'tratsii sluchaynogo signala. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*, 2010, Vol. 17, Iss. 6, pp. 911-912. (rus)

8. **Belitser E., Enikeeva F.N.** Adaptivnaya fil'tratsiya sluchaynogo signala v gaussovskom belom shume. *Problemy peredachi informatsii*, 2008, Vol. 44, Iss. 4, pp. 39-51. (rus)

9. **Dem'yanov V.F., Malozemov V.F.** *Vvedenie v minimaks.* Moscow: Nauka, 1972, 368 p. (rus)

THE AUTHORS

MISYURA Il'ya V.
Southern Federal University
8a Milchakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia
ilya.misyura@gmail.com

BELYAVSKIY Grigoriy I.
Southern Federal University
8a Milchakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia
beliavsky@hotmail.com