

УДК 621.791.722: 621.762.04

*А.И. Рудской, Ю.А. Соколов, В.Н. Копаев*

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЕМОГО НАГРЕВА  
ПОДЛОЖЕК ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ  
ПРИ ПОЛУЧЕНИИ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ**

*A.I. Rudskoi, Yu.A. Sokolov, V.N. Kopaev*

**MATHEMATICAL MODEL OF OPERATED HEATING  
OF SUBSTRATES RECTANGULAR SHAPE  
RECIPT POWDER MATERIALS**

Рассматривается методика управляемого нагрева поверхности подложки прямоугольной формы. Предлагаемая модель позволяет повысить уровень управляемости и повторяемости параметров технологического процесса, исключить влияние субъективных факторов.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ; НАГРЕВ ПОДЛОЖКИ; ТЕПЛОПЕРЕНОС; ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ.

The present article reveals the technique of operated heating of top surface of rectangular form's substrate. The offered model allows to raise level of controllability and repeatability of parametres of technological process' parameters and to exclude influence of subjective factors.

MATHEMATICAL MODELING, SUBSTRATE HEAT, CONDUCTION, TEMPERATURE FIELD.

Разработка новых и совершенствование известных технологий получения порошковых материалов — актуальная научная задача, имеющая важное промышленное значение [1–3]. В ряде технологических процессов как порошковой металлургии, так и лазерной обработки [4, 5] важно обеспечить равномерное температурное поле подложки и управляемое формирование структуры и свойств поверхностных слоев. Регулирование теплового режима подложки может быть реализовано на базе принципов адаптивного управления и математической модели (ММ), которая позволяет рассчитать плотность теплового потока по поверхности подложки, обеспечивающую требуемое температурное поле.

Адаптивное управление, основанное на обработке информации в реальном масштабе времени, использует в составе системы блок из-

мерения температурного поля в зоне нагрева (тепловизор) и устройство управления нагревом для получения заданного температурного поля. Оптическая камера, направленная на зону нагрева, обрабатывает сигналы, пропорциональные энергии излучения, и передает по цифровому протоколу информацию в компьютер.

Область подложки разбивается на малые прямоугольные элементы по горизонтали и вертикали, в каждом из которых сравнивается заданная и текущая температуры. Выполняется обработка полученных данных и выдача управляющих сигналов при рассогласовании температур.

Альтернатива адаптивному управлению — технология на базе ММ управления нагревом по поверхности подложки. При задании значений параметров (рабочая температура, время нагре-

ва или скорость нагрева, температурный градиент) необходимо подобрать функцию плотности теплового потока  $q$  от переменных  $x$  и  $y$  для обеспечения температурного поля близкого к равномерному.

Цель нашей работы — предложить математический аппарат управляемого нагрева подложек прямоугольной формы.

### Постановка задачи управляемого нагрева подложки

Алгоритм создания математического аппарата управляемого нагрева приведен на рис. 1. На первом этапе необходимо задать геометрию модели и материал подложки. Разработку модели целесообразно осуществлять в 3D-формате в современной CAD-системе, например SolidWorks. Следует отметить совместимость современных CAD и CAE систем, которые обеспечивают простую процедуру импортирования геометрической модели из SolidWorks в ANSYS. Далее необходимо выбрать конечные элементы, задать теплофизические свойства материалов и граничные условия.

Процесс происходит в вакуумной камере. Подложка представляет собой пластину из не-

ржавеющей стали, которая установлена на четыре опоры.

Процесс переноса тепла при нагреве подложки в рамках математической модели (ММ) включает в себя:

радиационное тепловое излучение между нагретой подложкой и внешней стенкой вакуумной камеры;

конвективный теплообмен через стенки рабочей камеры с окружающей средой;

теплопроводность подложки, опор; внешний источник тепла.

Нелинейное нестационарное уравнение теплопроводности имеет следующий вид [6]:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + q, \quad (1)$$

где  $c(T)$  — теплоемкость материала;  $\lambda(T)$  — коэффициент теплопроводности материала;  $\rho(T)$  — плотность материала;  $T$  — температура;  $t$  — время;  $q$  — плотность теплового источника.

Дополним уравнение (1) необходимыми граничными и начальными условиями.

Запишем граничные условия модели. При расчете теплообмена излучением необходимо учитывать потоки тепла в областях, попадающих на экраны в вакуумной камере установки.

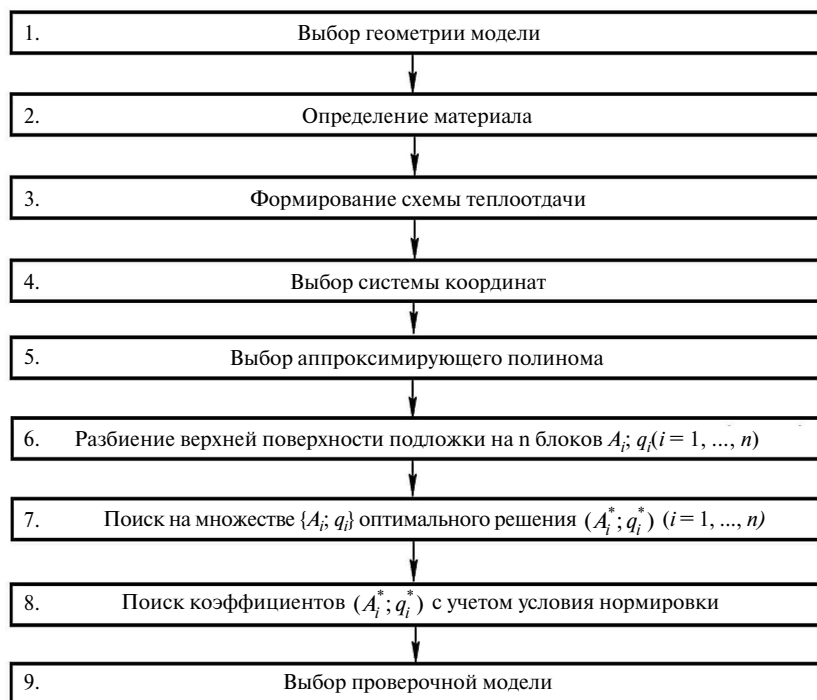


Рис. 1. Алгоритм разработки математического аппарата управляемого нагрева

С поверхности подложки тепло теряется излучением по закону Стефана—Больцмана, т. е. имеем краевую задачу с нелинейным граничным условием

$$q = \epsilon_s \sigma_s (T_1^4 - T_0^4), \quad (2),$$

где  $T_0$  — температура на экране;  $T_1$  — температура на поверхности подложки;  $\sigma_s$  — постоянная Стефана—Больцмана;  $\epsilon_s$  — приведенная степень черноты.

Приведенная степень черноты между двумя пластинами определяется следующим образом:

$$\epsilon_{\text{пр}} = 1 / (1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1), \quad (3)$$

где  $\epsilon_1, \epsilon_2$  — степень черноты соответственно первой и второй пластины.

Граничные условия математической модели показаны на рис. 2:

область  $E$  (верхняя, боковые и нижняя части подложки) — радиационное тепловое излучение на экран вакуумной камеры;

область  $G$  (нижняя часть опоры) — конвективный теплообмен через стенки рабочей камеры с окружающей средой;

область  $F$  — стенки рабочей камеры.

В верхней области подложки задаем граничные условия второго рода (условия Неймана), соответствующие заданию на границе распределенного теплового потока. Для уравнения теплопроводности в изотропной среде оно записывается в виде

$$\lambda \partial T / \partial n = q(x, y, t). \quad (4)$$

В начальный момент времени температура в точках модели равна 20 °С.

Для определения формулы расчета плотности теплового потока на поверхности подложки прямоугольной формы целесообразно использовать свойство симметрии и принять в качестве аппроксимирующей функции полиномы четных степеней от  $x$  и  $y$ :

$$q(x, y) = \sum_{i,j \in \{0,2,4\}} C_{ij} x^i y^j, \quad (5)$$

где  $q(x, y)$  — плотность теплового потока в декартовой системе координат;  $C_{ij}$  — коэффициенты полинома;  $x, y$  — координаты в декартовой системе рассматриваемой области подложки.

К искомым параметрам относятся геометрические, которые задают размеры блоков, и технологические, определяющие плотность

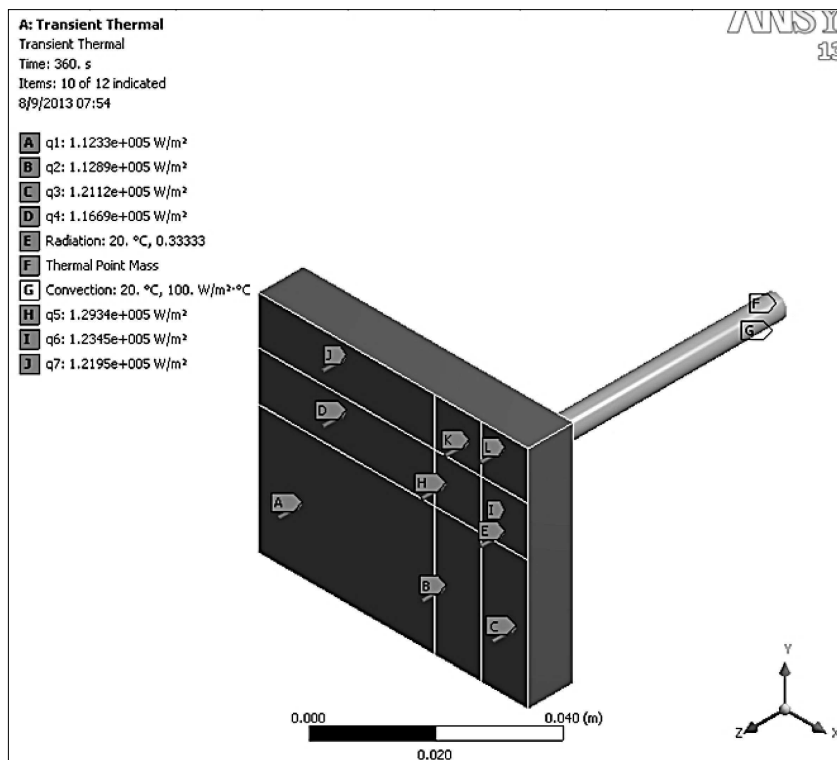


Рис. 2. Граничные условия модели

теплового потока в каждом блоке. Таким образом, необходимо решить многопараметрическую задачу оптимизации.

В основу функционирования алгоритма положен аппарат ЛП-поиска (модификация метода случайного поиска), пригодный для решения задач нелинейного программирования [7]. В  $m$ -мерном пространстве параметров получаем множество точек  $P_1, P_2, \dots, P_k$  (или множество формул расчета теплового потока с различными значениями коэффициентов  $C_{ij}$ ). В каждой точке пространства модель рассчитывает критерий  $DT = T_{\max} - T_{\min}$ .

Построение аппроксимирующего многочлена выполняется с учетом условия нормировки

$$Q = \int_0^{Y_{\max}} \int_0^{X_{\max}} q(x, y) dx dy, \quad (6)$$

где  $Q$  — мощность;  $X_{\max}, Y_{\max}$  — верхние пределы интегрирования по осям  $X$  и  $Y$ .

Расчет значений коэффициентов полинома осуществляется по формуле

$$C = A^{-1} B, \quad (7)$$

где  $C$  — вектор коэффициентов  $C_{ij}$ ;  $B$  — вектор найденных тепловых плотностей блоков  $q_i$ ;  $A$  — матрица степеней координат блоков и нормирующих коэффициентов.

После решения системы уравнений (7) получаем значения искомых коэффициентов  $C_{ij}$  и переходим к проверке полученного полинома: разбиваем исследуемую область подложки на произвольное количество блоков, в каждом из которых рассчитываем координаты его центра тяжести, и по известным значениям коэффициентов  $C_{ij}$  находим плотности теплового потока. Прикладываем получившуюся тепловую нагрузку к поверхности подложки и рассчитываем температурное поле.

В качестве модели материала как для подложки, так и для опор была принята сталь Х18Н9Т. Все задачи, решенные в данной работе, рассматривали нестационарный режим. Предполагалось, что за 5 минут поверхность подложки должна прогреться до температуры 800 °С.

Основным программным инструментом при исследовании и построении моделей был Ansys Workbench — мощный программный комплекс на основе использования метода конечных элементов. При решении системы уравнений использовался Microsoft Office Excel 2003.

Для определения формулы расчета плотности теплового потока на поверхности прямоугольного сечения использовали свойство симметрии и приняли в качестве аппроксимирующей функции полиномы четных степеней от  $x$  и  $y$ .

Для формализации плотности теплового потока выбрали функцию вида

$$q(x, y) = C_{44}x^4y^4 + C_{42}x^4y^2 + C_{24}x^2y^4 + C_{40}x^4 + C_{04}y^4 + C_{22}x^2y^2 + C_{20}x^2 + C_{02}y^2 + C_{00}. \quad (8)$$

Поскольку полином имеет 9 неизвестных коэффициентов  $C_{ij}$ , то первый квадрант необходимо разбить как минимум на девять непересекающихся областей, сумма площадей которых равна площади квадранта. Это можно сделать с помощью четырех безразмерных параметров —  $d1X, d2X, d1Y, d2Y$ , которые позволяют разделить исследуемую область на 9 прямоугольных блоков (с 1-го по 9-й). Параметры  $d1X, d2X, d1Y, d2Y$ , представленные на рис. 3, связаны с безразмерными следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} d1X &= d1X A/2, d2X = d2X A/2, d1Y = \\ &= d1Y B/2, d2Y = d2Y B/2. \end{aligned} \quad (9)$$

Принцип оптимальности при подготовке формулы можно сформулировать следующим образом: определить такие значения искомых параметров ( $d1X, d2X, d1Y, d2Y$  и  $q_1 - q_9$ ), которые обеспечили бы заданное распределение температуры по всей площади. В частном случае для получения равномерно распределенного температурного поля необходимо подобрать такие значения коэффициентов, которые обеспечили бы минимизацию критерия  $DT = T_{\max} - T_{\min}$  ( $T_{\min}$  и  $T_{\max}$  — соответственно минимальная и максимальная температура на прямоугольной поверхности подложки).

При поиске решения использовались оптимизаторы, встроенные в Ansys Workbench. Оптимизатор Ansys Workbench заполняет пространство возможных решений пробными точками, 13 координат которых изменяются в следующих диапазонах:

$$\begin{aligned} d1X_{\min} &< d1X < d1X_{\max}; d2X_{\min} < d2X < d2X_{\max}; \\ d1Y_{\min} &< d1Y < d1Y_{\max}; d2Y_{\min} < d2Y < d2Y_{\max}; \\ q_{1\min} &< q_1 < q_{1\max}; q_{2\min} < q_2 < q_{2\max}; \\ q_{3\min} &< q_3 < q_{3\max}; \\ q_{4\min} &< q_4 < q_{4\max}; q_{5\min} < q_5 < q_{5\max}; \\ q_{6\min} &< q_6 < q_{6\max}; \\ q_{7\min} &< q_7 < q_{7\max}; q_{8\min} < q_8 < q_{8\max}; \\ q_{9\min} &< q_9 < q_{9\max}. \end{aligned}$$

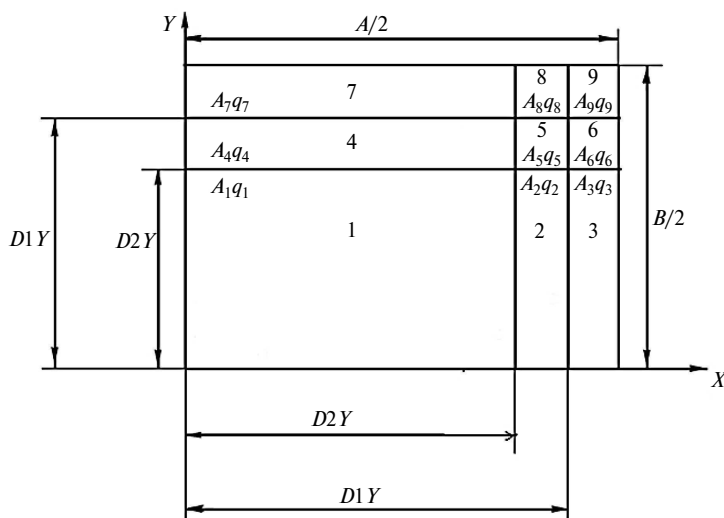


Рис. 3. Четырехпараметрическое разбиение поверхности подложки на девять частей

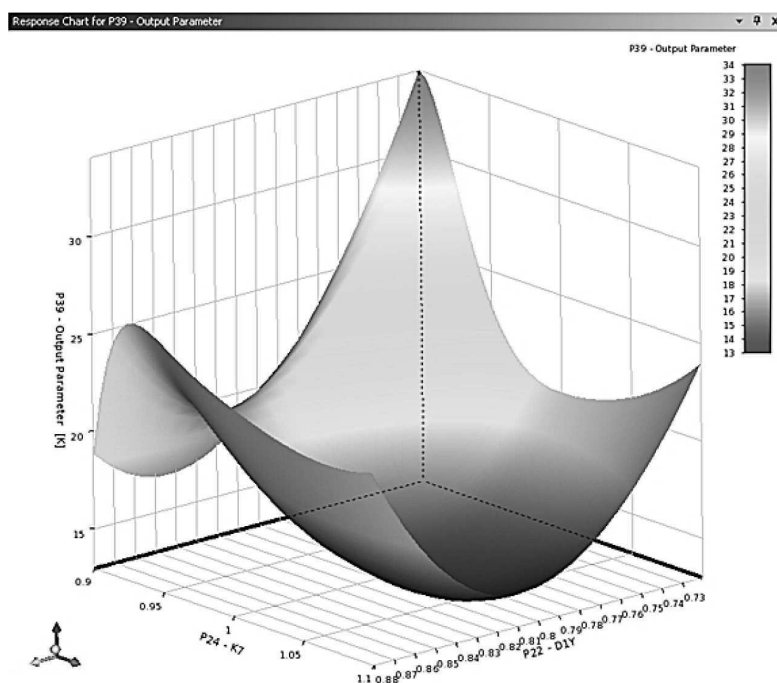


Рис. 4. Поверхности отклика параметра  $DT$  на изменение некоторых независимых параметров

Критерий  $DT$  сложным образом зависит от входных параметров, что нашло отражение на поверхностях отклика (рис. 4).

#### Анализ результатов

После того как оптимизатор Ansys Workbench завершит процедуру заполнения пробными точками всего исследуемого пространства возможных решений, переходим к процедуре оконча-

тельного выбора. Определена оптимальная точка, для которой рассогласование по температуре на всей прямоугольной поверхности составляет  $10,4^\circ\text{C}$ .

Распределение блоков, соответствующих им плотностей тепловых потоков, найденных оптимизаторами Ansys Workbench, и температурное поле площади прямоугольной формы при минимизации критерия  $DT$  приведены на рис. 5.

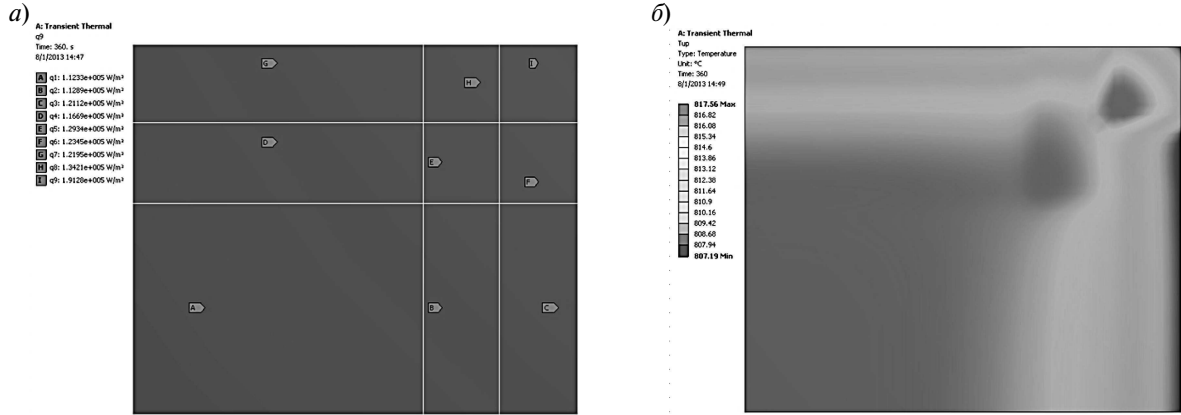


Рис. 5. Распределение плотностей тепловых потоков (а) и температурное поле (б), полученное при минимизации критерия DT

Систему уравнений (7) решали с помощью программы Excel. В результате расчета получили следующие значения искомым коэффициентов:  $C_{00} = 1,17 \cdot 10^5$ ;  $C_{02} = -1,48 \cdot 10^7$ ;  $C_{20} = -1,66 \cdot 10^7$ ;  $C_{22} = 5,64 \cdot 10^{10}$ ;  $C_{04} = 1,14 \cdot 10^{10}$ ;  $C_{40} = 7,1 \cdot 10^9$ ;  $C_{24} = -3,28 \cdot 10^{13}$ ;  $C_{42} = -2,35 \cdot 10^{13}$ ;  $C_{44} = 1,45 \cdot 10^{16}$ .

Для проверки математической модели весь прямоугольник был разбит на квадраты со стороной 10 мм. В сумме получилось 30 областей, для каждой из которых на базе полинома (8) были вычислены значения  $q(x, y)$ .

Визуализация распределения плотности теплового потока для проверочной задачи приведена на рис. 6, а. В трехмерном пространстве показана графическая зависимость теплового потока от координат  $x$  и  $y$ . График построен на площади, составляющей четвертую часть от общей поверхности нагрева. В результате при воз-

действии найденной тепловой плотности  $q(x, y)$  было получено температурное поле (рис. 6, б).

Контроль нагрева верхнего слоя подложки в реальном масштабе времени можно вести по нескольким схемам адаптивного управления с использованием в качестве датчиков обратной связи тепловизора (для измерения температурного поля поверхности подложки) и термопары (для измерения температуры нижней части подложки) или защитного экрана (предварительно определяется функциональная зависимость между температурой подложки и измеряемой точки).

Регулирование температурного поля подложки можно реализовать на базе математической модели, которая подбирает функцию плотности теплового потока от переменных  $x$  и  $y$ .

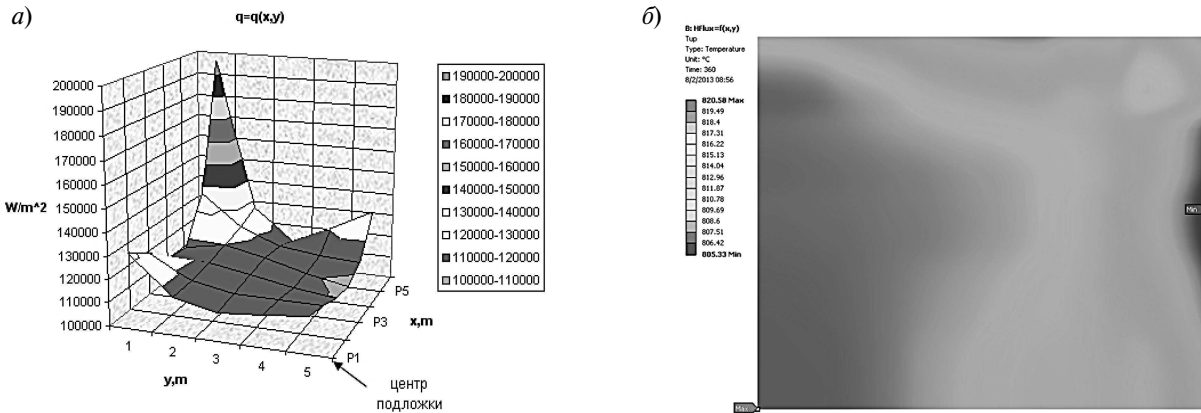


Рис. 6. Проверочная задача: график  $q(x, y)$  (а) и температурное поле (б) при приложении найденной функции  $q(x, y)$



Найденный полином для подложек прямоугольной геометрической формы с достаточно высокой точностью позволяет рассчитать необходимую тепловую плотность  $q(x, y)$  для формирования равномерного температурного поля.

Расчет плотности теплового потока на поверхности подложки прямоугольной формы по-

зволяет существенно упростить и удешевить аппаратную и программную часть системы управления, а также повысить надежность системы управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рудской А.И., Кондратьев С.Ю., Кокорин В.Н., Сизов Н.А. Исследование процесса уплотнения при ультразвуковом воздействии на увлажненную порошковую среду // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2013. № 3 (178). С. 148–155.

2. Рудской А.И., Кокорин В.Н., Кондратьев С.Ю., Филимонов В.И., Кокорин А.В. Прессование гетерофазных увлажненных железных порошков при использовании метода интенсивного уплотнения // Научные технологии в машиностроении. 2013. № 5 (23). С. 13–20.

3. Рудской А.И., Кондратьев С.Ю., Кокорин В.Н. Прессование гетерофазных увлажненных порошковых металлических смесей для повышения качества высокоплотных заготовок с использованием

метода интенсивного уплотнения // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2011. № 6. С. 12–16.

4. Kondrat'ev S.Y., Gorynin V.I., Popov V.O. Optimization of the parameters of the surface-hardened layer in laser quenching of components // *Welding International*. August 2012. Vol. 26, № 8. P. 629–632.

5. Кондратьев С.Ю., Горынин В.И., Попов В.О. Оптимизация параметров поверхностно-упрочненного слоя при лазерной закалке деталей // Сварочное производство. 2011. № 3. С. 11–15.

6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

7. Соболев И.М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. М.: Знание, 1985. 32 с.

### REFERENCES

1. Rudskoy A.I., Kondratyev S.Yu., Kokorin V.N., Sizov N.A. Issledovaniye protsessa uplotneniya pri ultrazvukovom vozdeystvii na uvlazhnennuyu poroshkovuyu sredu. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbGPU*. 2013. № 3 (178). S. 148–155. (rus.)

2. Rudskoy A.I., Kokorin V.N., Kondratyev S.Yu., Filimonov V.I., Kokorin A.V. Pressovaniye heterofaznykh uvlazhnennykh zheleznykh poroshkov pri ispolzovanii metoda intensivnogo uplotneniya. *Naukoyemkiye tekhnologii v mashinostroyenii*. 2013. № 5 (23). S. 13–20. (rus.)

3. Rudskoy A.I., Kondratyev S.Yu., Kokorin V.N. Pressovaniye heterofaznykh uvlazhnennykh poroshkovykh metallicheskiykh smesey dlya povysheniya kachestva vysokoplotnykh zagotovok s ispolzovaniyem metoda inten-

sivnogo uplotneniya. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal s prilozheniyem*. 2011. № 6. S. 12–16. (rus.)

4. Kondrat'ev S.Y., Gorynin V.I., Popov V.O. Optimization of the parameters of the surface-hardened layer in laser quenching of components. *Welding International*. August 2012. Vol. 26. № 8. P. 629–632.

5. Kondratyev S.Yu., Gorynin V.I., Popov V.O. Optimizatsiya parametrov poverkhnostno-uprochnennogo sloya pri lazernoy zakalke detaley. *Svarochnoye proizvodstvo*. 2011. № 3. S. 11–15. (rus.)

6. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. Vychislitel'naya teploperedacha. M.: Yeditorial URSS, 2003. 784 s. (rus.)

7. Sobol I.M. Tochki, ravnomerno zapolnyayushchiye mnogomernyy kub. M.: Znaniye, 1985. 32 s. (rus.)

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**РУДСКОЙ Андрей Иванович** — доктор технических наук ректор Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, член-корреспондент РАН. 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29. E-mail: rector@spbstu.ru

**СОКОЛОВ Юрий Алексеевич** — кандидат технических наук главный конструктор ООО «НТК Электромеханика»; 172386, ул. Заводское шоссе, 2, г. Ржев, Россия. E-mail: s5577@inbox.ru

**КОПАЕВ Владимир Николаевич** — ведущий инженер ООО «НТК Электромеханика». 172386, ул. Заводское шоссе, 2, г. Ржев, Россия. E-mail: vkopaev\_ela@mail.ru

### **AUTHORS**

**RUDSKOI Andrey I.** — St. Petersburg State Polytechnical University. 29, Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia. E-mail: rector@spbstu.ru

**SOKOLOV Yuriy A.** — «Electromechanica». 2, Zavodskoe shosse, Rzhev city Tver region, Russia, 172386. E-mail: s5577@inbox.ru

**KOPAЕV Vladimir N.** — «Electromechanica». 2, Zavodskoe shosse, Rzhev city Tver region, Russia, 172386. E-mail: vkopaev\_ela@mail.ru