

doi: 10.5862/MCE.49.9

## Компьютерное моделирование задач динамики вязкоупругих тонкостенных элементов конструкций переменной толщины

*К.т.н., профессор Р.А. Абдикаримов,*

*Ташкентский финансовый институт;*

*к.ф.-м.н., доцент Д.А. Ходжаев,*

*Ташкентский институт ирригации и мелиорации*

**Аннотация.** В работе приводятся численный метод и алгоритм решения задач динамики вязкоупругих тонкостенных элементов конструкций переменной толщины.

Уравнения движения относительно прогибов описываются интегро-дифференциальными уравнениями (ИДУ) в частных производных. При помощи метода Бубнова – Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации прогибов, задача сводится к исследованию системы обыкновенных ИДУ, где независимой переменной является время. Система ИДУ решается предложенным численным методом, на основе которого описан алгоритм численного решения и создана программа на алгоритмическом языке Delphi. Исследование нелинейных колебаний тонкостенных элементов конструкции с учетом переменной толщины в геометрической нелинейной постановке позволило выявить ряд механических эффектов.

В зависимости от физико-механических и геометрических параметров рассмотренных вязкоупругих тонкостенных элементов конструкций даны рекомендации по использованию жесткости системы.

**Ключевые слова:** тонкостенные конструкции; переменная толщина; вязкоупругость, неоднородность; метод Бубнова – Галеркина; интегро-дифференциальные уравнения

### *Введение*

В прикладных задачах механики деформируемых систем приходится встречаться с процессами, при описании которых необходимо оперировать имеющими разрывы величинами, различными по своему физико-механическому содержанию. В последнее время стало появляться все больше работ, посвященных результатам исследований критического состояния, колебаний и напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций с физико-механическими особенностями разрывного типа, т.е. конструкций со ступенчато-переменной толщиной, с армированиями, неоднородностями структуры, местными включениями в виде сосредоточенных масс и отверстий, либо пониженной жесткости в виде ребра с учетом изотропных и анизотропных свойств материала [1–7].

Наряду с этим уделяется большое внимание исследованию динамического поведения и НДС различных двумерных и трехмерных кусочно-неоднородных систем с учетом геометрической нелинейности, линейных и нелинейных вязкоупругих свойств материалов [8–11]. При этом исследования НДС тонкостенных конструкций с учетом таких особенностей недостаточно освещены в литературе.

На сегодняшний день в известных публикациях рассматриваются следующие аспекты проблемы.

В работе [4] применяется вариационно-параметрический метод в нелинейной теории оболочек ступенчато-переменной толщины.

В [5] рассматриваются теоретические предпосылки, методы решения задач устойчивости и исследования свободных и вынужденных колебаний для пластин и оболочек. При этом выделяются ребристые оболочки и оболочки ступенчато-переменной толщины, для которых приведены результаты исследования устойчивости и свободных нелинейных колебаний.

В работах [12, 13] разработаны математические модели нелинейных динамических задач о колебаниях и устойчивости ортотропных вязкоупругих систем с переменной толщиной.

В статье [14] предлагается эффективная численная методика исследования собственных частот и форм колебаний пологих прямоугольных в плане оболочек переменной толщины.

В работе [15] произведен нелинейный расчет и оптимизация пологих оболочек переменной толщины. Сопоставляются результаты оптимального расчета с наибольшими значениями объема и критических нагрузок при заданном объеме оболочек и высоте подъема арки.

В [16] описывается асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойных анизотропных пластин переменной толщины.

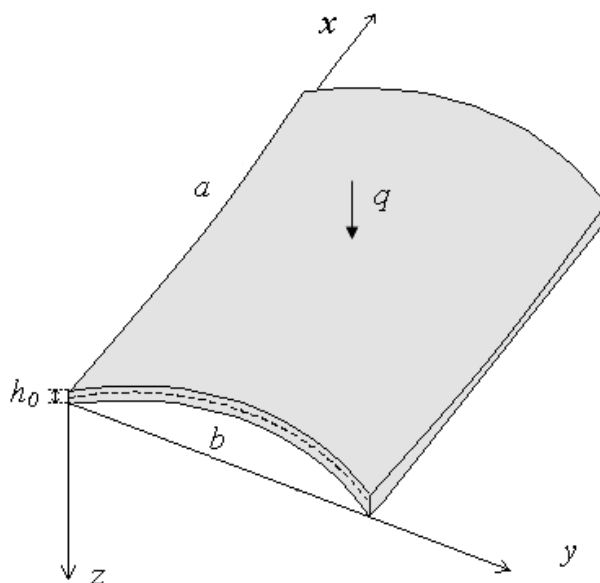
Из приведенного обзора видно, что вопросы учета неупругих и неоднородных свойств материала при динамическом расчете конструкций остаются недостаточно освещенными в научной литературе и требуют дальнейшего изучения.

Поэтому исследования динамического поведения и НДС элементов конструкций летательных аппаратов, судов, различных сооружений с учетом больших деформаций, нелинейных вязкоупругих свойств материала и реальных особенностей конструкций, т.е. переменности толщины, структурной неоднородности с включениями, ребрами жесткости и выемками являются актуальными задачами механики тонкостенных конструкций [12, 13, 17].

В отличие от ранее опубликованных работ [12, 18], в данной разработана единый вычислительный алгоритм, который позволяет исследовать нелинейные одномерные и двумерные задачи динамики вязкоупругих систем переменной толщины, приведены общие принципы реализации разработанного алгоритма численного решения задач на компьютере. Исследования нелинейных колебаний тонкостенных элементов конструкций переменной толщины в геометрической нелинейной постановке позволили выявить ряд механических эффектов.

### **Математическая модель, метод и алгоритм задачи**

Рассмотрим вязкоупругую ортотропную цилиндрическую панель со сторонами  $a$  и  $b$ , радиусом кривизны  $R$ , переменной толщины  $h = h(x)$  (рис. 1). Пусть панель нагружена поперечной нагрузкой  $q$ .



**Рисунок 1. Вязкоупругая цилиндрическая панель переменной толщины**

При принятых предположениях математическая модель задачи относительно перемещений  $u, v, w$  по направлениям  $x, y, z$  описывается системой интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [13].

После того, как составлена математическая модель изучаемого процесса, необходимо разработать алгоритм исследования этой модели, т.е. выбрать метод или последовательность методов для решения полученных уравнений, описывающих работу исследуемого процесса, и наметить действия для получения всех характеристик исследуемого процесса.

Решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных при различных граничных условиях и при наличии слабосингулярных ядер наследственности представляет собой значительные математические трудности. Здесь для построения дискретной модели рассматриваемой задачи используется метод Бубнова – Галеркина.

Представим функции  $u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t)$  в виде разложения по функциям  $\phi_{nm}(x, y), \varphi_{nm}(x, y), \psi_{nm}(x, y)$ , которые удовлетворяют соответствующим граничным условиям задачи

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \phi_{nm}(x, y), \quad v(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y),$$

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \psi_{nm}(x, y),$$
(1)

где  $u_{nm} = u_{nm}(t), v_{nm} = v_{nm}(t), w_{nm} = w_{nm}(t)$  – неизвестные функции времени;  $\phi_{nm}(x, y), \varphi_{nm}(x, y), \psi_{nm}(x, y), n = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, M$  – координатные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям задачи.

Подставляя (1) в уравнение движения и выполняя процедуру Бубнова – Галеркина для определения неизвестных  $u_{nm}(t), v_{nm}(t), w_{nm}(t)$ , получим систему нелинейных обыкновенных ИДУ.

Следующим этапом после определения оптимального типа математической модели и приведения ее к виду, удобному для моделирования на ЭВМ, является собственно ее компьютерная реализация. Этот этап является определяющим для всего процесса моделирования и для него характерны такие задачи, как выбор или создание эффективных численных методов и алгоритмов, обеспечение быстродействия и устойчивости вычислительных процедур, оптимальный выбор вычислительной среды моделирования, эффективная программная реализация используемых алгоритмов, контроль и оценка точности моделирования.

При компьютерном моделировании динамических систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра, могут быть использованы различные численные методы и методы непосредственного моделирования [16, 19–21].

В работе [20] предложен эффективный подход к численному решению систем линейных и нелинейных ИДУ со слабосингулярными ядрами наследственности, который основан на совместном рациональном использовании различных аналитических преобразований, позволяющих свести исходные системы к системе интегральных уравнений с регулярными ядрами и устойчивого численного интегрирования, обеспечивающего получение решения задач с высокой степенью точности. Этот метод был распространен на системы интегро-дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старших производных [12]. При этом в расчетах использовались слабосингулярные ядра Колтунова – Ржаницына [22]:

$$\Gamma(t) = Ae^{-\beta t} \cdot t^{\alpha-1}, \quad (A > 0, \beta > 0, 0 < \alpha < 1).$$
(2)

Известно, что многие динамические задачи для вязкоупругих систем типа стержней, пластин и оболочек после применения методов Бубнова – Галеркина (конечных элементов, конечных разностей и т. п.) сводятся к решению уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (a_{klnm} \ddot{u}_{nm} + \lambda_{nmkl}^2 u_{nm}) &= X_{nm}(t, u_{11}, \dots, u_{NM}, v_{11}, \dots, v_{NM}, w_{11}, \dots, w_{NM}, \\
&\int_0^t \phi_{1nm}(t, \tau, u_{11}, \dots, u_{NM}, v_{11}, \dots, v_{NM}, w_{11}, \dots, w_{NM}) d\tau, \\
\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (b_{klnm} \ddot{v}_{nm} + \chi_{nmkl}^2 v_{nm}) &= Y_{nm}(t, u_{11}, \dots, u_{NM}, v_{11}, \dots, v_{NM}, w_{11}, \dots, w_{NM}, \\
&\int_0^t \phi_{1nm}(t, \tau, u_{11}, \dots, u_{NM}, v_{11}, \dots, v_{NM}, w_{11}, \dots, w_{NM}) d\tau, \\
\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (c_{klnm} \ddot{w}_{nm} + \omega_{nmkl}^2 w_{nm}) &= Z_{nm}(t, u_{11}, \dots, u_{NM}, v_{11}, \dots, v_{NM}, w_{11}, \dots, w_{NM}, \\
&\int_0^t \psi_{1nm}(t, \tau, u_{11}, \dots, u_{NM}, v_{11}, \dots, v_{NM}, w_{11}, \dots, w_{NM}) d\tau) \\
u_{nm}(0) = u_{0nm}, \dot{u}_{nm}(0) = \dot{u}_{0nm}, v_{nm}(0) = v_{0nm}, \dot{v}_{nm}(0) = \dot{v}_{0nm}, w_{nm}(0) = w_{0nm}, \\
\dot{w}_{nm}(0) = \dot{w}_{0nm}, \quad n = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, M.
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $u_{nm} = u_{nm}(t)$ ,  $v_{nm} = v_{nm}(t)$ ,  $w_{nm} = w_{nm}(t)$  – неизвестные функции времени;  $X_{nm}, Y_{nm}, Z_{nm}, \phi_{1nm}, \psi_{1nm}$  – непрерывные функции в области изменения аргументов;  $a_{klnm}, b_{klnm}, c_{klnm}, \lambda_{nmkl}^2, \chi_{nmkl}^2, \omega_{nmkl}^2$  – заданные постоянные числа.

Матричный вид системы (3):

$$\begin{aligned}
A \ddot{\mathbf{u}} + \Lambda \mathbf{u} &= \mathbf{X} \left( t, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \int_0^t \phi_1(t, \tau, \mathbf{u}(\tau), \mathbf{v}(\tau), \mathbf{w}(\tau)) d\tau \right) \\
B \ddot{\mathbf{v}} + H \mathbf{v} &= \mathbf{Y} \left( t, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \int_0^t \psi_1(t, \tau, \mathbf{u}(\tau), \mathbf{v}(\tau), \mathbf{w}(\tau)) d\tau \right) \\
C \ddot{\mathbf{w}} + \Omega \mathbf{w} &= \mathbf{Z} \left( t, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \int_0^t \theta_1(t, \tau, \mathbf{u}(\tau), \mathbf{v}(\tau), \mathbf{w}(\tau)) d\tau \right). \\
\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \dot{\mathbf{v}}(0) = \dot{\mathbf{v}}_0, \\
\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \quad \dot{\mathbf{w}}(0) = \dot{\mathbf{w}}_0
\end{aligned} \tag{4}$$

Систему (4) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{P} \mathbf{x} &= \mathbf{\Pi} \left( t, \mathbf{x}, \int_0^t \Psi(\tau, \mathbf{x}) d\tau \right) \\
\mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0,
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & \Omega \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \Pi = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \\
 A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \dots & \Lambda_{1N} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \dots & \Lambda_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{N1} & \Lambda_{N2} & \dots & \Lambda_{NN} \end{pmatrix}, \\
 X &= \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}, \varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \vdots \\ \varphi_{1N} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Матрицы и векторы, присутствующие как элементы матриц и векторов, здесь имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 A_{kn} &= \begin{pmatrix} a_{k1n1} & a_{k1n2} & \dots & a_{k1nM} \\ a_{k2n1} & a_{k2n2} & \dots & a_{k2nM} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{kMn1} & a_{kMn2} & \dots & a_{kMnM} \end{pmatrix}, \Lambda_{kn} = \begin{pmatrix} \lambda^2_{k1n1} & \lambda^2_{k1n2} & \dots & \lambda^2_{k1nM} \\ \lambda^2_{k2n1} & \lambda^2_{k2n2} & \dots & \lambda^2_{k2nM} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^2_{kMn1} & \lambda^2_{kMn2} & \dots & \lambda^2_{kMnM} \end{pmatrix}, \\
 u_n &= \begin{pmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ \vdots \\ u_{nM} \end{pmatrix}, X_n = \begin{pmatrix} X_{n1} \\ X_{n2} \\ \vdots \\ X_{nM} \end{pmatrix}, \varphi_{1n} = \begin{pmatrix} \phi_{1n1} \\ \phi_{1n2} \\ \vdots \\ \phi_{1nM} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом записываются выражения для матриц и векторов 2 и 3-го уравнения системы (4).

Далее к системе (3), описывающей нелинейные задачи динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью, применен численный метод, изложенный выше. Следующим этапом численного метода является регуляризация системы нелинейных ИДУ (5) с сингулярными ядрами. С помощью замены переменных

$$t - \tau = z^{\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 \leq z \leq t^{\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

интеграл при ядре Колтунова – Ржаницына с особенностью следующего вида

$$A \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \exp(-\beta(t - \tau)) w(\tau) d\tau$$

принимает вид

$$\frac{A}{\alpha} \int_0^{t^{\alpha}} \exp(-\beta z^{\frac{1}{\alpha}}) w(t - z^{\frac{1}{\alpha}}) dz.$$

Заметим, что после замены переменных подынтегральная функция относительно  $z$  становится регулярной. Полагая затем  $t = t_i$ ,  $t_i = i\Delta t$ ,  $i=1,2,\dots$  ( $\Delta t = const$  – шаг интерполяции) и заменяя интегралы некоторыми квадратурными формулами (в частности по формуле трапеции), имеем

$$\frac{A}{\alpha} \sum_{k=0}^i B_k \exp(-\beta t_k) w_{i-k},$$

где коэффициенты  $B_0 = \frac{\Delta t^\alpha}{2}$ ;  $B_i = \frac{\Delta t^\alpha (i^\alpha - (i-1)^\alpha)}{2}$ ;  $B_k = \frac{\Delta t^\alpha ((k+1)^\alpha - (k-1)^\alpha)}{2}$ ,  
 $k = \overline{1, i-1}$ .

На основе этого метода описан алгоритм численного решения системы (4). Числовые значения искомой функции  $u_{nm} = u_{nm}(t)$ ,  $v_{nm} = v_{nm}(t)$ ,  $w_{nm} = w_{nm}(t)$  при  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 1, 2, \dots$  ( $\Delta t = \text{const}$ ) находятся из рекуррентных формул:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_0 t_{i+1} + \mathbf{x}_0 + \mathbf{T}^{-1} \sum_{j=0}^i A_j (t_{i+1} - t_j) \left[ -P \mathbf{x}_j + \Pi(t_j, \mathbf{x}_j, \sum_{k=0}^j B_k \Psi(t_j, t_k, \mathbf{x}_k) \right], \quad (7)$$

где  $\mathbf{T}^{-1}$  – матрица, обратная к клеточной матрице  $\mathbf{T}$ ;  $A_j, B_k$  ( $j = 0, 1, \dots, i; k = 0, 1, \dots, j$ ) – узлы интерполяционной формулы:

$$A_0 = \frac{\Delta t}{2}; \quad A_j = \Delta t, \quad j = \overline{1, i-1}; \quad A_i = \frac{\Delta t}{2};$$

$$B_0 = \frac{\Delta t^\alpha}{2}; \quad B_j = \frac{\Delta t^\alpha (j^\alpha - (j-1)^\alpha)}{2}; \quad B_s = \frac{\Delta t^\alpha ((s+1)^\alpha - (s-1)^\alpha)}{2}. \quad (8)$$

Благодаря предложенному подходу в алгоритме для численного решения задачи в формуле (7) множитель  $t_{i+1} - t_j$  при  $j = i + 1$  принимает нулевое значение, т. е. последнее слагаемое суммы равно нулю. Поэтому суммирование осуществляется от нуля до  $i$  ( $j = \overline{0, i}$ ).

Таким образом, согласно численному методу, относительно неизвестных получим систему линейных алгебраических уравнений. Для решения системы используется модифицированный метод Жордана. Погрешность численного метода совпадает с погрешностью использованных квадратурных формул и имеет тот же порядок малости относительно шага интерполяции.

### Расчет нелинейных колебаний вязкоупругих цилиндрических панелей переменной толщины

Пусть панель шарнирно оперта по контуру. Граничные условия будут иметь вид:  $w|_{x=0} = 0$ ,  $w|_{x=1} = 0$ ,

$$v|_{x=0} = 0, \quad N_x|_{x=0} = 0, \quad M_x|_{x=0} = 0, \quad w|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad N_y|_{y=0} = 0, \quad M_y|_{y=0} = 0. \quad \text{Здесь}$$

$N_x, N_y$  и  $N_{xy}$  – усилия, отнесенные к единице длины сечения панели;  $M_x, M_y$  и  $M_{xy}$  – изгибающие и крутящий моменты.

Тогда в разложении метода Бубнова – Галеркина (1) аппроксимирующие функции перемещений, удовлетворяющие заданным граничным условиям, соответственно принимаются в виде:

$$\phi_{nm}(x, y) = \cos n\pi x \sin m\pi y, \quad \varphi_{nm}(x, y) = \sin n\pi x \cos m\pi y;$$

$$\psi_{nm}(x, y) = \sin n\pi x \sin m\pi y.$$

При расчетах выбираются следующие параметры:

- механические:

$$E_1 = 36.8 \text{ ГПа}, \quad E_2 = 26.8 \text{ ГПа}, \quad G_{12} = 5.0 \text{ ГПа}, \quad \mu_1 = 0.077, \quad \mu_2 = 0.105;$$

- геометрические:

$$a = b = 0.5 \text{ м}, \quad h_0/a = 0.008, \quad \text{безразмерные величины кривизны} \quad k_x = \frac{a^2}{h_0 R_1} = 0,$$

$$k_y = \frac{b^2}{h_0 R_2} = 20;$$

- реологические:

$A, \beta, \alpha$  для стеклопластиков КАСТ-В  $0^\circ$  ( $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = 0.001$ ;  $A = 0.0099$ ), КАСТ-В  $90^\circ$  ( $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = 0.00166$ ;  $A = 0.0104$ ) и КАСТ-В  $45^\circ$  ( $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = 0.00166$ ;  $A = 0.0208$ );

- закон изменения толщины:

$h(x) = h_0(1 - \alpha^* x)$ , где  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\alpha^*$  – параметр, характеризующий интенсивность изменения толщины,  $h_0 = h(0) = const$  – толщина панели, соответствующая  $\alpha^* = 0$ .

Отметим, что начальным моментом колебательного процесса является статическое равновесное состояние панели под нагрузкой  $q$ . В этом состоянии панель представляет собой изогнутую поверхность  $w(0, x, y)$ , поэтому для нахождения  $w_{0nm}$  решается соответствующая упругая нелинейная статическая задача. Найденные прогибы панели будут служить начальным приближением для решения соответствующей вязкоупругой нелинейной динамической задачи.

На рисунке 2 приведены результаты линейной (кривая 1) и нелинейной (кривая 2) задач о колебаниях вязкоупругой цилиндрической панели с учетом неоднородных и вязкоупругих свойств материала. Здесь для наглядности полученных результатов временной интервал разбит на три части.

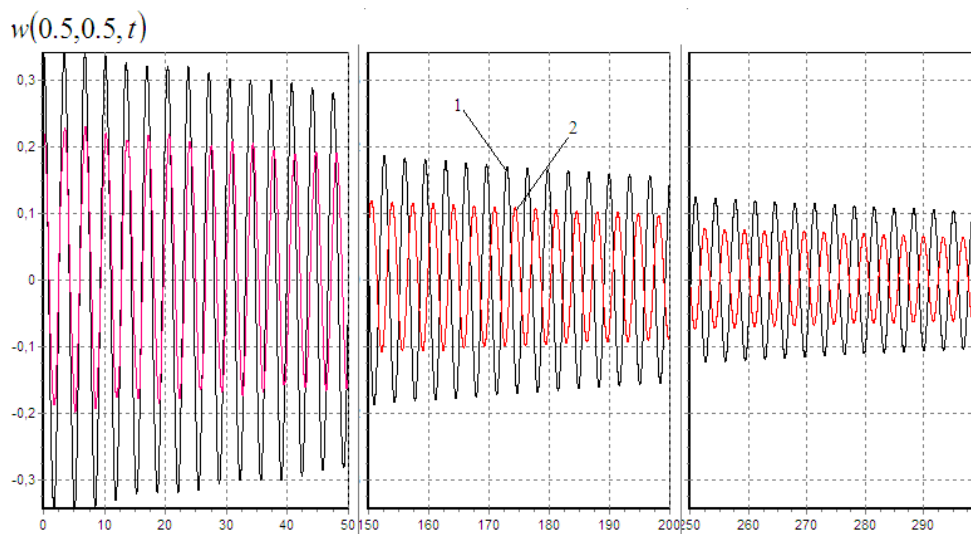


Рисунок 2. Зависимость прогиба от времени

Согласно графику область устойчивого решения нелинейных задач полностью включается в область устойчивого решения линейных задач.

Аналогичные результаты наблюдаются и при исследовании влияния геометрической нелинейности на изменение момента  $M_x$  (рис. 3).

Исследовано влияние неоднородности материала на процесс колебания панели. В качестве одного из параметров, определяющих степень неоднородности (анизотропности) материала, был выбран параметр  $\Delta = \sqrt{E_1/E_2}$  (кривая 1 соответствует случаю когда  $\Delta = 1$ ; кривая 2 –  $\Delta = 1.5$  и кривая 3 –  $\Delta = 2$ ). Результаты вычислений приведены на рисунке 4.

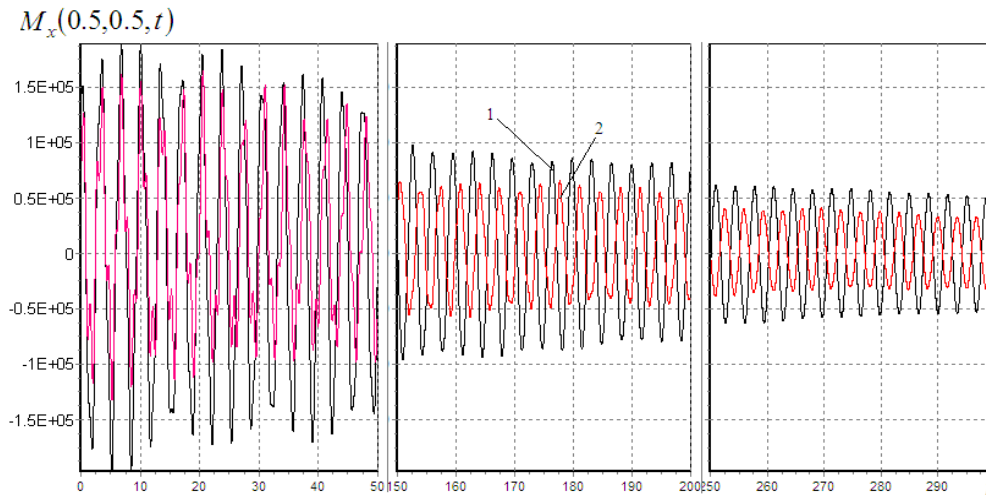


Рисунок 3. Зависимость момента  $M_x$  от времени

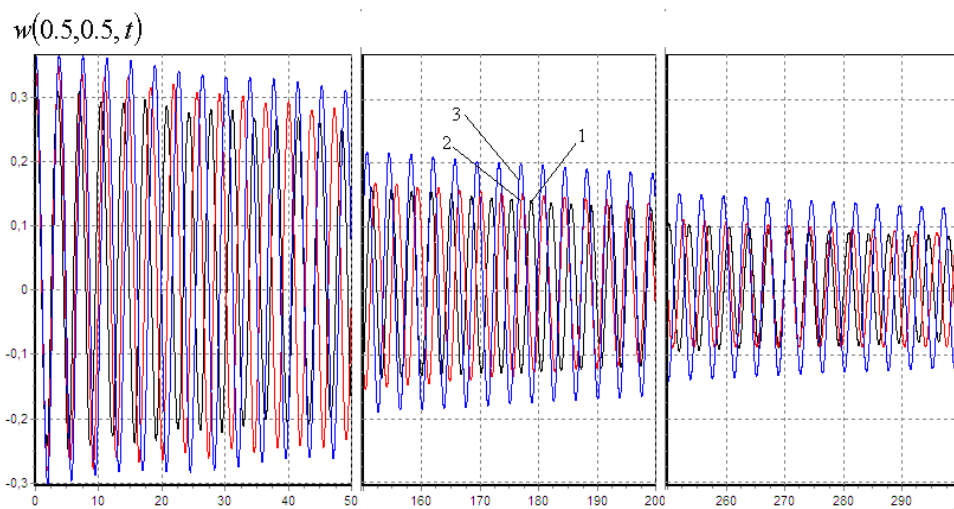


Рисунок 4. Зависимость прогиба от времени при  $\Delta = 1$  (1); 1.5(2); 2(3)

Этот же результат приводится и в виде рисунка 5 при непрерывном изменении временного интервала. Как показывают исследования, увеличение параметра  $\Delta$  приводит к увеличению амплитуды колебаний.

Помимо прогибов и перемещений представляет интерес исследование моментов, напряжений и перерезывающих сил. Анализ полученных результатов показывает, что изменение толщины вдоль одной из сторон приводит к несимметричному изменению во времени перемещения  $w$ , момента  $M_x$ , напряжения  $\sigma_x$ .



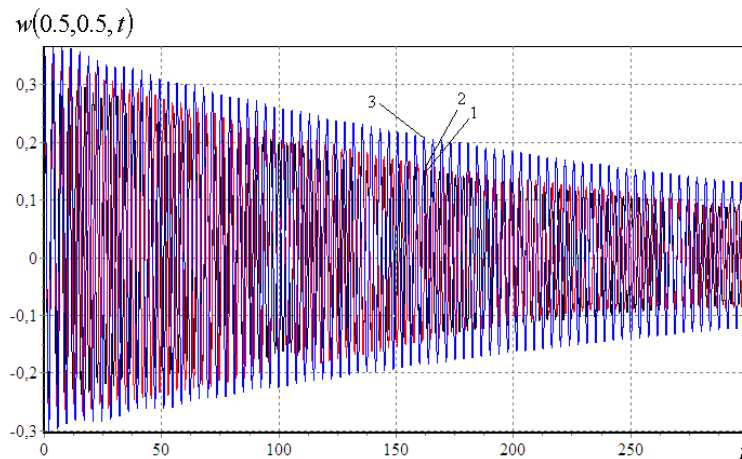


Рисунок 5. Зависимость прогиба от времени при  $\Delta = 1$  (1); 1.5(2); 2(3)

Далее проведено сравнение форм изменений прогиба  $w$ , перемещения  $u$ , момента  $M_x$ , напряжения  $\sigma_x$  и перерезывающей силы  $Q_x$  вдоль стороны  $a$  при различных значениях параметра  $\Delta$ .

Анализ полученных результатов показывает, что с уменьшением жесткости панели вдоль стороны  $a$  увеличивается напряжение, а момент (рис. 6) и перерезывающая сила уменьшаются.

Аналогичные эффекты получены и при исследовании перемещения  $v$ , моментов  $M_y$ ,  $M_{xy}$ , напряжений  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{изг,x}$ ,  $\sigma_{изг,y}$ ,  $\sigma_{изг,xy}$ , перерезывающих сил  $Q_y$ .

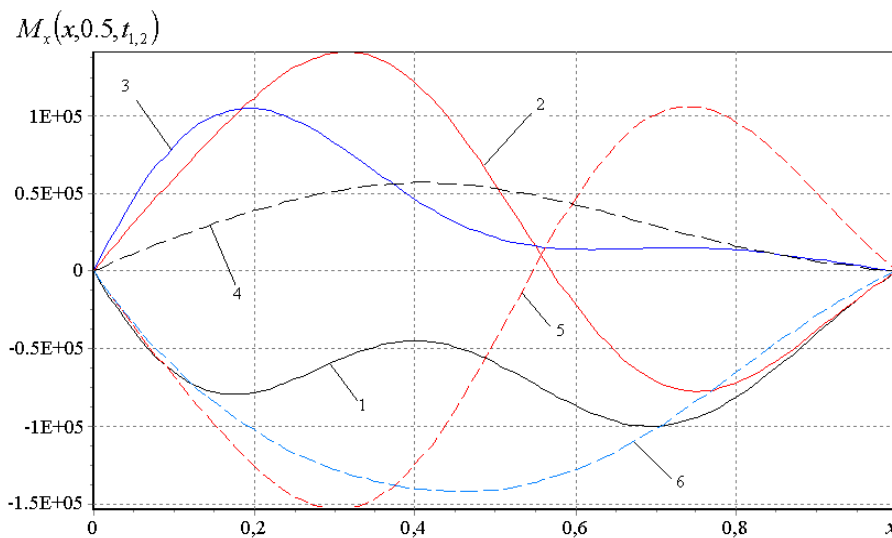
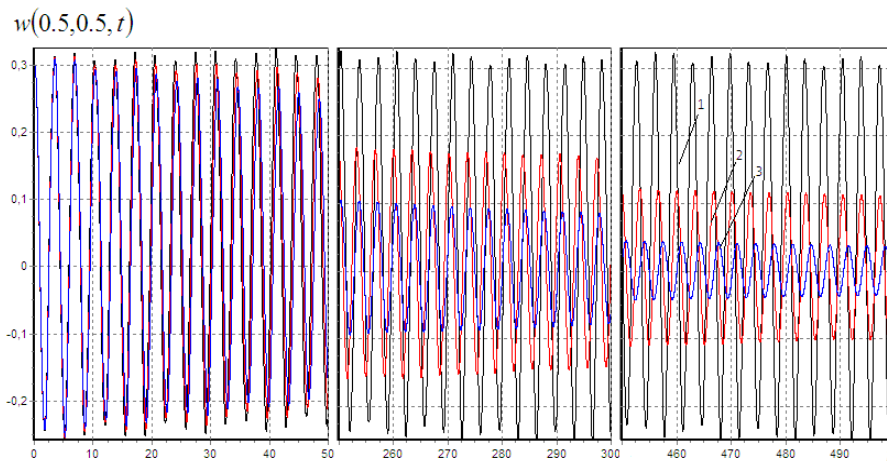


Рисунок 6. Сравнение форм изменений момента  $M_x$  при

$$t_1 = 50: \Delta = 1 (1); 1.5(2); 2(3)$$

$$t_2 = 250: \Delta = 1 (4); 1.5(5); 2(6)$$

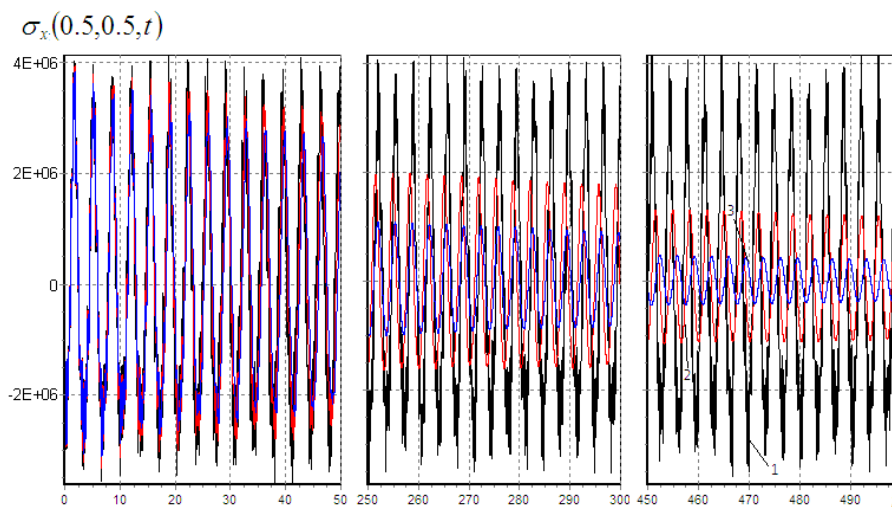
Исследовано НДС неоднородной вязкоупругой панели при различных материалах. Результаты вычислений приведены на рисунке 7. Здесь кривая 1 соответствует случаю, когда материал панели упругий, а кривые 2 и 3 – когда материал панели вязкоупругий, при этом в качестве вязкоупругого материала выбран стеклопластик КАСТ-В с направлением волокон соответственно  $0^\circ$  ( $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = 0.001$ ;  $A = 0.0099$ ) и  $45^\circ$  ( $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = 0.00166$ ;  $A = 0.0208$ ).



**Рисунок 7. Зависимость прогиба от времени при различных материалах: упругий (1); КАСТ-В 0° (2); КАСТ-В 45° (3)**

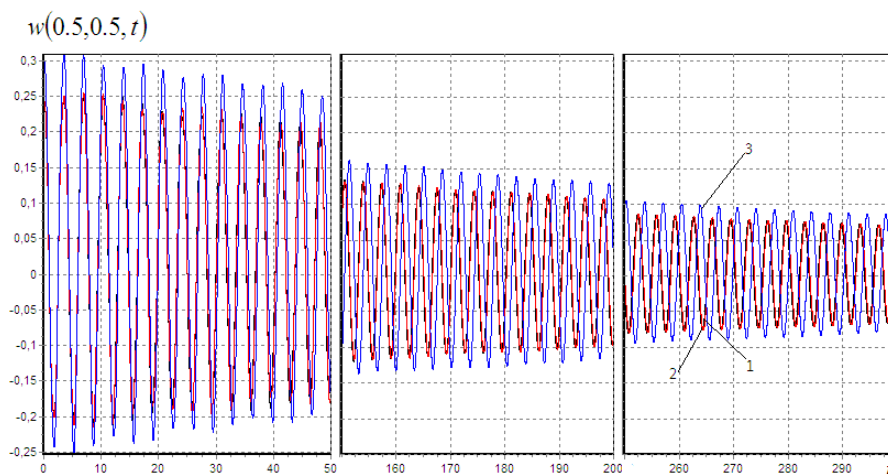
Как и ожидалось, учет вязкоупругих свойств материала панели приводит к затуханию колебательного процесса, при этом, хотя решения упругой и вязкоупругой задач в начальный период времени мало отличаются друг от друга, с течением времени вязкоупругие свойства оказывают существенное влияние.

Аналогичные результаты наблюдаются и при исследовании перемещения  $u$ , момента  $M_x$  и напряжения  $\sigma_x$  (рис. 8).



**Рисунок 8. Зависимость напряжения  $\sigma_x$  от времени при различных материалах: упругий (1); КАСТ-В 0° (2); КАСТ-В 45° (3)**

Исследовано влияние изменения толщины панели на ее НДС. На рисунке 9 приведена зависимость прогиба от времени при различных значениях параметра  $\alpha^*$ . Напомним, что  $\alpha^*$  – параметр, характеризующий интенсивность изменения толщины.



**Рисунок 9. Зависимость прогиба от времени при  $\alpha^* = 0$  (1); 0.3(2); 0.5 (3)**

Анализ полученных результатов показывает, что при этом законе изменения толщины увеличение параметра  $\alpha^*$  приводит к увеличению амплитуды колебаний и сдвигу фаз вправо.

Аналогичные результаты наблюдаются и при исследовании моментов, напряжений и перерезывающих сил.

### Выводы

На основе метода Бубнова – Галеркина в сочетании с численным методом, предложенным в работе, разработан единый вычислительный алгоритм, который позволяет исследовать нелинейные одномерные и двумерные задачи динамики вязкоупругих систем переменной толщины. Даны общие принципы реализации разработанного алгоритма численного решения задачи на компьютере. Исследование нелинейных колебаний тонкостенных элементов конструкции переменной толщины в геометрической нелинейной постановке позволило выявить ряд механических эффектов, в частности:

- изменение толщины, при одинаковом объеме элементов тонкостенных конструкций, приводит к уменьшению максимальных значений прогибов;
- изменение толщины рассматриваемого элемента приводит к перераспределению изгибных и цепных напряжений;
- учет вязких свойств материала приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний на 20–40 %.

Во всех рассмотренных задачах численно исследована сходимость метода Бубнова – Галеркина. Для каждого случая найдено число полувольт, необходимое для получения решения достаточной точности. В зависимости от физико-механических и геометрических параметров, а также начальных и граничных условий рассмотренных вязкоупругих тонкостенных элементов конструкций даны рекомендации по использованию жесткости системы.

### Литература

1. Мирсаидов М.М., Трояновский Е.И. Динамика неоднородных систем с учетом внутренней диссипации и волнового уноса энергии. Ташкент: Фан, 1990. 108 с.
2. Мирсаидов М.М., Султанов Т.З. Удар по поверхности осесимметричной конструкции из вязкоупругого материала твердым телом // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2012. Vol.8. No.3. Pp. 107–115.
3. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. М.: Машиностроение, 1981. 191 с.
4. Игнатъев О.В., Карпов В.В., Филатов В.Н. Вариационно-параметрический метод в нелинейной теории оболочек ступенчато-переменной толщины. Волгоград: ВолГАСА, 2001. 210 с.

Абдикаримов Р.А., Ходжаев Д.А. Компьютерное моделирование задач динамики вязкоупругих тонкостенных элементов конструкций переменной толщины

5. Карпов В.В. Геометрически нелинейные задачи для пластин и оболочек и методы их решения. М.: Изд-во АСВ, 1999. 154 с.
6. Жгутов В.М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. Строительство, транспорт. 2007. №4. С. 20–23.
7. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2009. №7(9). С. 46–54.
8. Мирсаидов М.М. Теория и методы расчета грунтовых сооружений на прочность и сейсмостойкость. Ташкент: Фан, 2010. 312 с.
9. Мирсаидов М.М., Султанов Т.З., Ходжаев Д.А. Оценка устойчивости откосов грунтовых плотин с учетом реологических свойств грунта (англ.) // Инженерно-строительный журнал. 2012. №9(35). С. 49–58.
10. Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A. Oscillations of Earth Dams with Account of Geometric Nonlinearity // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2013. Vol. 9. No.3. Pp. 51–60.
11. Султанов Т.З., Ходжаев Д.А., Мирсаидов М.М. Оценка динамического поведения неоднородных систем с учетом нелинейно-вязкоупругих свойств грунта // Инженерно-строительный журнал. 2014. №1(45). С. 80–89.
12. Верлань А.Ф., Абдикаримов Р.А., Эшматов Х. Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Электронное моделирование. 2010. Т. 32. №2. С. 3–14.
13. Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. 2010. №6(16). С. 38–47.
14. Grigorenko A.Ya., Parkhomenko A.Yu. Free vibrations of shallow orthotropic shells with variable thickness and rectangular planform // International Applied Mechanics. 2011. Vol. 46. No.8. Pp. 877–889.
15. Ye Zhiming. Nonlinear analysis and optimization of shallow shells of variable thickness // Journal Shonghai University. 1997. Vol. 1. No.2. Pp. 105–111.
16. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г. Асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойных анизотропных пластин переменной толщины // Изв. нац. АН Армении. Сер. мех. 1998. Т. 51. №2. С. 27–36.
17. Абдикаримов Р.А. Математическая модель нелинейного колебания вязкоупругой пластины с переменной жесткостью при различных граничных условиях // Проблемы архитектуры и строительства. 2010. №1. С. 44–47.
18. Абдикаримов Р.А., Худаяров Б.А. Исследование вязкоупругих круговых цилиндрических панелей переменной толщины // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. №1. С. 11–18.
19. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегродифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 269 с.
20. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. №5. С. 867–871.
21. Эшматов Х., Абдикаримов Р.А., Бобоназаров Ш.П. Колебания и устойчивость вязкоупругой трубы с протекающей через нее жидкостью при различных граничных условиях // Проблемы механики. 1995. №1. С. 20–24.
22. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 276 с.

*Рустамхан Алимханович Абдикаримов, г. Ташкент, Узбекистан  
Тел. раб.: +7(99890)944-70-67; эл. почта: rabdikarimov@mail.ru*

*Дадахан Акмарханович Ходжаев, г. Ташкент, Узбекистан  
Тел. раб.: +7(99871)237-19-48; эл. почта: dhodjaev@mail.ru*

© Абдикаримов Р.А., Ходжаев Д.А., 2014

doi: 10.5862/MCE.49.9

## Computer modeling of tasks in dynamics of viscoelastic thin-walled elements in structures of variable thickness

**R.A. Abdikarimov***Tashkent Financial Institute, Tashkent, Uzbekistan  
+7(99890)9447067; e-mail: rabdikarimov@mail.ru***D.A. Khodzhaev***Tashkent Institute of Irrigation and Melioration, Tashkent, Uzbekistan  
+7(99871)2371948; e-mail: dhodjaev@mail.ru*

### Key words

thin-walled structures; variable thickness; viscoelasticity; heterogeneity; Bubnov-Galerkin's method; integro-differential equations

### Abstract

The paper presents a numerical method and algorithm for solving tasks in dynamics of viscoelastic thin-walled elements in structures of variable thickness.

The equations of motion concerning deflections are described by partial integro-differential equations (PIDE). Using Bubnov-Galerkin's method, based on the polynomial approximation of deflections, the task is limited to the study of the system of ordinary IDEs, where the independent variable is time. The solution to the system of IDEs is obtained by the offered numerical method, which results into the algorithm of the numerical solution and the program in the Delphi algorithmic language. The study of nonlinear vibrations of thin-walled elements in structures, allowing for variable thickness in the geometrical nonlinear statement, has enabled revealing a number of mechanical effects.

Depending on physico-mechanical and geometrical parameters of the considered viscoelastic thin-walled elements in structures, the authors recommend how to use the rigidity of the system.

### References

1. Mirsaidov M.M., Troyanovskiy E.I. *Dinamika neodnorodnykh sistem s uchetom vnutrenney dissipatsii i volnovogo unosa energii* [Dynamics of inhomogeneous systems with account of internal dissipation and wave transfer of energy]. Tashkent: FAN, 1990. 108 p. (rus)
2. Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z. Udar po poverkhnosti osesimmetrichnoy konstruktsii iz vyazkouprugogo materiala tverdym telom [Hitting the surface of the axisymmetric structure viscoelastic solid]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2012. Vol.8. No.3. Pp.107–115. (rus)
3. Preobrazhenskiy I.N. *Ustoychivost i kolebaniya plastinok i obolochek s otverstiyami* [Stability and vibrations of plates and shells with cutouts]. Moscow: Mechanical engineering, 1981. 191 p. (rus)
4. Ignatyev O.V., Karpov V.V., Filatov V.N. *Variatsionno-parametricheskii metod v nelineynoy teorii obolochek stupenchato-peremennoy tolshchiny* [A variation-parametrical method in the nonlinear theory of shells of in steps-variable of a thickness]. Volgograd: VolGASA, 2001. 210 p. (rus)
5. Karpov V.V. *Geometricheski nelineynyye zadachi dlya plastin i obolochek i metody ikh resheniya* [Geometrical nonlinear problems for plates and shells and methods of their decision]. Moscow: 1999. 154 p. (rus)
6. Zhgutov V.M. Matematicheskiye modeli i algoritmy issledovaniya ustoychivosti pologikh rebristyykh obolochek pri uchete razlichnykh svoystv materiala [Mathematical models and algorithms for investigating the stability of shallow ribbed shells, taking into account the different characteristics of the material]. *Reports of State Technical University of Oryol. Building, transport*. 2007. No.4. Pp. 20–23. (rus)
7. Zhgutov V.M. Matematicheskaya model deformirovaniya ortotropnykh i izotropnykh rebristyykh obolochek pri uchete polzuchesti materiala [A mathematical model of the deformation of orthotropic and isotropic ribbed shells with allowance for creep]. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No.7(9). Pp. 46–54. (rus)
8. Mirsaidov M.M. Teoriya i metody rascheta gruntovykh sooruzheniy na prochnost i seysmostoykost [Theory and methods of design of earth structures on strength and seismic stability]. Tashkent: FAN, 2010. 312 p. (rus)
9. Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A. Stability evaluation of slopes of earth dams with account of soil rheological properties. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No.9(35). Pp. 49–58.

Abdikarimov R.A., Khodzhaev D.A. Computer modeling of tasks in dynamics of viscoelastic thin-walled elements in structures of variable thickness

10. Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A. Oscillations of earth dams with account of geometric nonlinearity. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013. Vol. 9. No.3. Pp. 51–60.
11. Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A., Mirsaidov M.M. Otsenka dinamicheskogo povedeniya neodnorodnykh sistem s uchetom nelineyno-vyazkoprugikh svoystv grunta [The assessment of dynamic behavior of heterogeneous systems taking into account non-linear viscoelastic properties of soil]. *Magazine of Civil Engineering*. 2014. No.1. Pp. 80–89. (rus)
12. Verlan A.F., Abdikarimov R.A., Eshmatov H. Chislennoye modelirovaniye nelineynykh zadach dinamiki vyazkoprugikh sistem s peremennoy zhestkostyu [Numerical simulation of nonlinear dynamics problems of viscoelastic systems with variable stiffness]. *Electronic modeling*. 2010. Vol. 32. No.2. Pp. 3–14. (rus)
13. Abdikarimov R.A., Zhgutov V.M. *Matematicheskiye modeli zadach nelineynoy dinamiki vyazkoprugikh ortotropnykh plastin i obolochek peremennoy tolshchiny* [Mathematic models of nonlinear dynamics problems of viscoelastic orthotropic plates and shells of variable thickness]. *Magazine of Civil Engineering*. 2010. No.6. Pp. 38–47. (rus)
14. Grigorenko A.Ya., Parkhomenko A.Yu. Free vibrations of shallow orthotropic shells with variable thickness and rectangular planform. *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 46. No.8. Pp. 877–889.
15. Ye Zhiming. Nonlinear analysis and optimization of shallow shells of variable thickness. *Journal Shanghai University*. 1997. Vol.1. No.2. Pp. 105–111.
16. Agalovjan L.A., Gevorkyan R. S., Khachatryan G.G. Asimptoticheskoye resheniye smeshannykh krayevykh zadach dvukhsloynykh anizotropnykh plastin peremennoy tolshchiny [Asymptotic solution of the mixed boundary value problems of two-layer anisotropic plates of variable thickness]. *Report of National Ac. of Sci. of Armenia*. 1998. Vol. 51. No.2. Pp. 27–36. (rus)
17. Abdikarimov R.A. Matematicheskaya model nelineynogo kolebaniya vyazkoprugoy plastiny s peremennoy zhestkostyu pri razlichnykh granichnykh usloviyakh [A mathematical model of the nonlinear vibrations of viscoelastic plates with variable stiffness under various boundary conditions]. *Problemy arkhitektury i stroitelstva*. 2010. No. 1. Pp. 44–47. (rus)
18. Abdikarimov R. A., Khudayarov B.A. Issledovaniye vyazkoprugikh krugovykh tsilindricheskikh paneley peremennoy tolshchiny [The study of viscoelastic circular cylindrical panels with variable thickness]. *Computational continuum mechanics*. 2012. Vol. 5. No.1. Pp. 11–18. (rus)
19. Badalov F.B. *Metody resheniya integralnykh i integrodifferentsialnykh uravneniy nasedstvennoy teorii vyazkoprugosti* [Methods of solution of integral and integral-differential equations of hereditary theory of viscous-elasticity]. Tashkent: Mekhnat, 1987. 269 p. (rus)
20. Badalov F.B., Eshmatov Kh., Yusupov M. O nekotorykh metodakh resheniya sistem integrodifferentsialnykh uravneniy, vstrechayushchikhsya v zadachakh vyazkoprugosti [Some methods for solving systems of integro-differential equations encountered in problems of viscoelasticity]. *Applied mathematics and mechanics*. 1987. Vol. 51. No.5. Pp. 867–871. (rus)
21. Eshmatov Kh., Abdikarimov R.A., Bobonazarov Sh.P. Kolebaniya i ustoychivost vyazkoprugoy truby s protekayushchey cherez neye zhidkostyu pri razlichnykh granichnykh usloviyakh [Oscillations and stability of viscoelastic pipe with liquid flowing through it under various boundary conditions]. *Problems of Mechanics*. 1995. No.1. Pp. 20–24. (rus)
22. Koltunov M. A. *Polzuchest i relaksatsiya* [Creeping and relaxation]. Moscow: Vysshaya shkola, 1976. 276 p. (rus)

**Full text of this article in Russian: pp. 83–94**