

doi: 10.5862/MCE.49.3

Четырехузловой конечный элемент для моделирования поведения тонкостенных железобетонных конструкций

*Д.т.н., профессор С. Ю. Фиалко,**Краковский технологический университет им. Тадеуша Костюшко*

Аннотация. Предлагается 4-узловой конечный элемент для расчета железобетонных тонкостенных оболочечных конструкций. Поведение бетона и арматуры описывается соотношениями деформационной теории пластичности, сформулированными в терминах остаточных деформаций, что позволяет рассматривать циклическое и динамическое нагружение.

Для бетона сжатой зоны используется диаграмма $\sigma - \varepsilon$, предложенная Европейской комиссией по бетону, а деградация бетона растянутой зоны при образовании трещин описывается ниспадающей ветвью диаграммы. Для стали используется симметричная билинейная диаграмма $\sigma - \varepsilon$ либо ее экспоненциальная аппроксимация. Принимается совместность деформаций бетона и арматуры. Арматурные стержни данного направления представляются в виде слоя, работающего только на растяжение-сжатие в направлении осей стержней. Арматура каждого направления представляется в виде отдельного слоя. Учитывается дискретность размещения арматуры по высоте сечения. При сведении исходной трехмерной задачи к двумерной используется модель оболочек Р. Миндлина и Э. Рейсснера, а для преодоления сдвигового заклинивания – смешанная интерполяция компонент деформаций сдвига.

Ключевые слова: метод конечных элементов; деформационная теория пластичности; железобетон; принцип возможных перемещений; циклическое нагружение; остаточные деформации

Введение

Вопросам прочности железобетонных конструкций посвящено большое количество работ. В одних работах используются различные модификации теории пластичности [1–6], в которых граничная поверхность заменяется поверхностью текучести. В других работах, например в [7, 8, 9], моделируются процессы трещинообразования в бетоне. В работе [10] поведение бетона описывается двухуровневой моделью, в которой на макроуровне реализуются соотношения механики сплошной среды, а на микроуровне – механики частиц. С одной стороны, такой подход обещает детально описать процессы образования и распространения трещин в бетоне, однако с другой стороны, модель является весьма громоздкой. Кроме того, результат зависит от микроструктуры материала, которая, как правило, заранее не известна.

В работах [4, 11] бетон и арматура моделируются отдельными элементами, причем расчетная сетка привязана к шагу арматуры, что чаще всего приводит к большой размерности задачи. В работе [2] разработан объемный конечный элемент для тонких железобетонных пластин и оболочек, в которых арматура представлена в виде ортотропного слоя конечной толщины. В [2, 9] предложены подходы, когда арматурные стержни не привязываются к конечноэлементной сетке.

В данной работе предлагается подход, позволяющий в рамках одного и того же конечного элемента моделировать поведение как бетона, так и арматуры. Подход является простым в реализации и не требует привязки сетки конечных элементов к шагу арматуры, что позволяет применять его к широкому классу реальных задач.

Постановка задачи

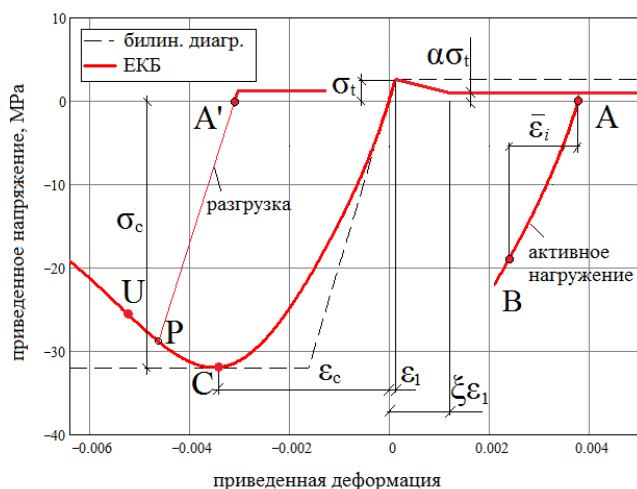
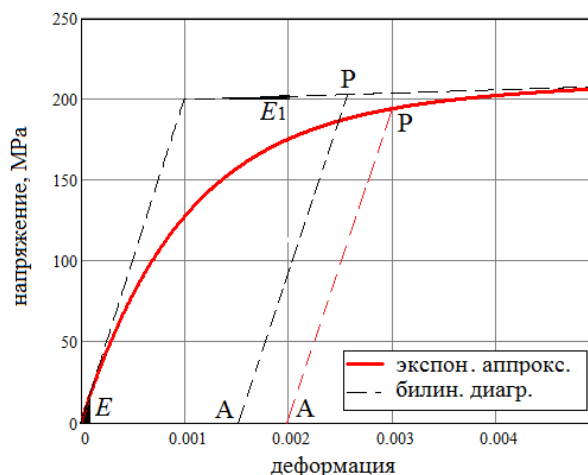
Поведение бетона описывается соотношениями деформационной теории пластичности [12, 13] с элементами деградации [3, 14], моделирующими снижение прочности растянутой зоны бетона при раскрытии трещин. Используется несимметричная диаграмма $\sigma_i - \varepsilon_i$, где приведенные напряжения и приведенные деформации представлены выражениями:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-\nu+\nu^2}{3(1-\nu)^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) - \frac{1-4\nu+\nu^2}{3(1-\nu)^2} \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)}. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненты тензора напряжений; $\sigma_z = 0$ в соответствии со статической гипотезой теории тонких оболочек; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – компоненты тензора деформаций, причем $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$; ν – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона). Последнее соотношение следует из статической гипотезы с учетом гипотезы линейного изменения объема [13].

Общий вид диаграммы $\sigma_i - \varepsilon_i$ для бетона приведен на рисунке 1. Штриховой линией обозначена билинейная диаграмма, которая непосредственно в исследованиях не используется, однако служит для лучшего восприятия расчетной диаграммы (сплошная линия). Зона сжатия представлена кривой ЕКБ (Европейская комиссия по бетону) с поправками, предложенными в [2, 15]. Зона растяжения моделируется так же, как в работе [3], причем параметр ζ выбирается как можно ближе к 1, однако так, чтобы численное решение было устойчивым. Параметр α определяет снижение прочности бетона на растяжение при образовании трещин. Здесь σ_c, σ_t – пределы прочности бетона на сжатие и растяжение; $\varepsilon_c, \varepsilon_t$ – соответствующие им деформации. Точка С является предельной регулярной точкой диаграммы при сжатии, а точка U соответствует предельным деформациям бетона на сжатие, причем $\varepsilon_u = 1.41\varepsilon_c, \sigma_u = 0.85\sigma_c, \varepsilon_c = 0.0035$. Разгрузка представлена участком PA'. В точках A, A' определяются остаточные деформации. При продолжении движения вправо от точки A' и влево от точки A реализуется активное нагружение, причем $\bar{\varepsilon}_i$ – приведенные деформации, исчисляемые от точек A, A'. При этом полагается, что покрытый трещинами бетон растянутой зоны способен воспринимать сжатие.

Рисунок 1. Диаграмма $\sigma_i - \varepsilon_i$ для бетонаРисунок 2. Диаграмма $\sigma_s - \varepsilon_s$ для стали

На рисунке 2 представлена диаграмма $\sigma_s - \varepsilon_s$ для стали. Принимается, что работа стали на растяжение и на сжатие описывается одной и той же диаграммой. Прерывистой линией показана билинейная диаграмма, а сплошной – экспоненциальная аппроксимация билинейной диаграммы

$$\sigma_s = (E\lambda^{-1} + E_1\varepsilon_s) \left(1 - e^{-\lambda\varepsilon_s}\right), \quad \lambda = E^2 / [\sigma_y (E - E_1)], \quad (3)$$

где E_1 – модуль упрочнения, σ_y – предел текучести стали.

Для моделирования циклического и динамического нагружения соотношения теории пластичности сформулированы в терминах остаточных деформаций, значения которых определяются в точках окончания разгрузки. При переходе от разгрузки к активному нагружению используется диаграмма $\sigma_i - \varepsilon_i$ другого знака (назовем ее вторичной – например, участок АВ на рисунке 1). Такой подход позволяет формально оперировать вторичной диаграммой $\sigma_i - \varepsilon_i$ точно так же, как и первоначальной и при этом избежать особенности в физических соотношениях при $\varepsilon_i \rightarrow 0$ (например, в точке пересечения кривой АВ при ее продолжении с вертикальной осью, рис. 1).

Фиалко С.Ю. Четырехузловой конечный элемент для моделирования поведения тонкостенных железобетонных конструкций

Физические соотношения для бетона при активном нагружении представим в виде:

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = D(\varepsilon_i)(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_A) \\ \bar{\tau} = D_{sh}(\varepsilon_i)(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_A) \end{cases}, \quad (4)$$

где

$$\bar{\sigma}^T = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}), \quad \bar{\tau}^T = (\tau_{xz} \quad \tau_{yz}), \quad \sigma_z = 0, \quad \bar{\varepsilon}^T = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}), \quad \bar{\gamma}^T = (\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}),$$

$$\bar{\varepsilon}_A^T = (\varepsilon_x^A \quad \varepsilon_y^A \quad \gamma_{xy}^A), \quad \bar{\gamma}_A^T = (\gamma_{xz}^A \quad \gamma_{yz}^A), \quad D(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_i}{3\bar{\varepsilon}_i} \begin{pmatrix} 2 & 2\nu & 0 \\ 1-\nu & 1-\nu & 0 \\ 1-\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{sh}(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_i}{3\bar{\varepsilon}_i} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

$$k = 5/6, \quad \bar{\varepsilon}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-\nu+\nu^2}{3(1-\nu)^2} (\bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{\varepsilon}_y^2) - \frac{1-4\nu+\nu^2}{3(1-\nu)^2} \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y + \frac{1}{4} (\bar{\gamma}_{xy}^2 + \bar{\gamma}_{xz}^2 + \bar{\gamma}_{yz}^2)}, \quad \bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x - \varepsilon_x^A,$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_y - \varepsilon_y^A, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \gamma_{xy} - \gamma_{xy}^A, \quad \bar{\gamma}_{xz} = \gamma_{xz} - \gamma_{xz}^A, \quad \bar{\gamma}_{yz} = \gamma_{yz} - \gamma_{yz}^A.$$

Остаточные деформации $\bar{\varepsilon}_A, \bar{\gamma}_A$ определяются в самом конце разгрузки, подставляя в (5) нулевые значения компонент тензора напряжений (точки А, А' на рисунке 1). В начале нагружения $\bar{\varepsilon}_A = \bar{\gamma}_A = 0$.

Поведение бетона при разгрузке (участок РА') описывается соотношениями:

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{un} + D_{el} \bar{\varepsilon} \\ \bar{\tau} = \bar{\tau}_{un} + D_{el}^{sh} \bar{\gamma} \end{cases}, \quad (5)$$

где

$$\bar{\sigma}_{un} = \begin{pmatrix} \sigma_x^P - \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^P + \nu \varepsilon_y^P) \\ \sigma_y^P - \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y^P + \nu \varepsilon_x^P) \\ \tau_{xy}^P - G \gamma_{xy}^P \end{pmatrix}, \quad \bar{\tau}_{un} = \begin{pmatrix} \tau_{xz}^P - G \gamma_{xz}^P \\ \tau_{yz}^P - G \gamma_{yz}^P \end{pmatrix},$$

$$D_{el} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}, \quad D_{el}^{sh} = \begin{pmatrix} kG & 0 \\ 0 & kG \end{pmatrix}.$$

Здесь индекс P означает, что соответствующие компоненты тензоров напряжений и деформаций вычислены в точке начала разгрузки P (рис. 1), $G = E / [2(1 + \nu)]$.

Физические соотношения для стали при активном нагружении:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_s}{\left| \varepsilon_s - \varepsilon_A^s \right|} (\varepsilon_s - \varepsilon_A^s) = E_s (\varepsilon_s) \cdot (\varepsilon_s - \varepsilon_A^s) , \tag{6}$$

где $\varepsilon_s, \varepsilon_A^s$ – продольная деформация и остаточная деформация арматурного стержня, определяемая в конце разгрузки; σ_s – нормальное напряжение. При разгрузке

$$\sigma_s = \sigma_{un}^s + E_s \varepsilon_s , \quad \sigma_{un}^s = \sigma_s^P - E_s \varepsilon_s^P , \tag{7}$$

где индекс P означает, что соответствующие напряжения и деформации вычислены в точке начала разгрузки P .

На рисунке 3 представлен косоугольный конечный элемент в локальной системе координат $Oxyz$.

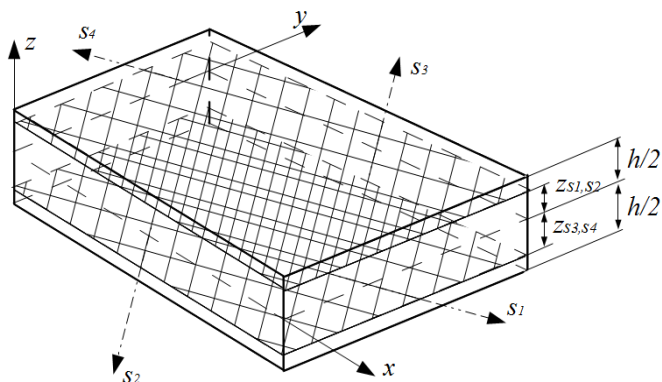


Рисунок 3. Косоугольный конечный элемент. Оси арматурных стержней могут не совпадать с локальными осями элемента

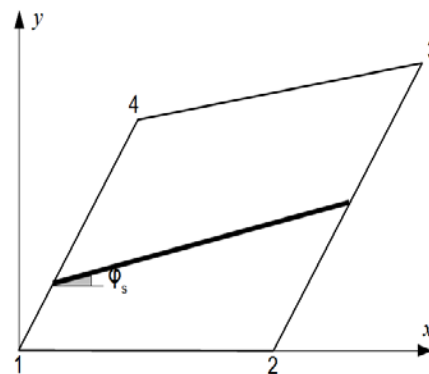


Рисунок 4. Арматурный стержень в теле конечного элемента

Оси s_1, s_2, s_3, s_4 задают направления арматурных стержней, размещенных в слоях $s_1 - s_4$, а $z_{s1}, z_{s2}, z_{s3}, z_{s4}$ – расстояние соответствующего арматурного слоя до срединной поверхности.

Из условий совместности деформаций арматуры и бетона (рис. 4) вытекает:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x \cos^2 \varphi_s + \varepsilon_y \sin^2 \varphi_s . \tag{8}$$

Для получения матрицы жесткости и вектора реакций конечного элемента воспользуемся принципом возможных перемещений:

$$\iint_{\Omega} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\delta \vec{\varepsilon}^T \cdot \vec{\sigma} + \delta \vec{\gamma}^T \cdot \vec{\tau}) dz d\Omega + \sum_s \iint_{\Omega} \frac{A_s}{h_s} \sigma_s \delta \varepsilon_s(z_s) d\Omega - \delta A_{ext} = 0 , \tag{9}$$

где первый интеграл представляет виртуальную работу внутренних сил в бетоне; второй – виртуальную работу внутренних сил в арматурном слое s , причем сумма охватывает все арматурные слои; δA_{ext} – виртуальная работа внешних сил; A_s, h_s – площадь арматурного стержня и шаг между стержнями в слое s . Поскольку для реальных расчетных моделей шаг между стержнями значительно меньше размеров конечного элемента, вследствие чего на одну «полуволну» функции формы приходится много стержней, то конечные суммы можно заменить интегралом в направлении, ортогональном осям стержней данного слоя s .

Таким образом, выполняется «размазывание» арматуры в пределах данного слоя, а математически это выражается тем, что в (9) под знаком суммы появляется интеграл по области конечного элемента. При таком подходе дискретность размещения арматуры по толщине сохраняется.

В данной работе используется подход, подобный тому, что автор применял ранее для решения задач механики подкрепленных пластин и оболочек [16, 17].

Фиалко С.Ю. Четырехузловой конечный элемент для моделирования поведения тонкостенных железобетонных конструкций

Для понижения размерности задачи используется сдвиговая модель теории тонких пластин и оболочек, основные положения которой для балок впервые были сформулированы в [18], а применены для изгиба пластин Р. Миндлином и Э. Рейсснером [19]. Компоненты тензора деформаций в слое бетона представляются как

$$\vec{\varepsilon}(z) = \vec{\varepsilon}_0 + z\vec{\kappa}, \quad (10)$$

где $\vec{\varepsilon}_0, \vec{\kappa}$ – компоненты тензора деформаций срединной поверхности и изменения параметров кривизны и кручения; z – удаление рассматриваемого волокна бетона от срединной поверхности;

$$\vec{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \beta_x = \Theta_y, \quad \beta_y = -\Theta_x, \quad (11)$$

где Θ_x, Θ_y – углы поворота относительно локальных осей Ox, Oy , обусловленные изгибными деформациями. Деформация вдоль оси стержней для арматурного слоя s с учетом (8):

$$\varepsilon_s(z_s) = \left(\varepsilon_x + z_s \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \cos^2 \varphi_s + \left(\varepsilon_y + z_s \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \sin^2 \varphi_s. \quad (12)$$

В качестве функций формы принимаются полиномы Лагранжа

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)}{4}, \quad i \in [1, 4], \quad (13)$$

где ξ, η – естественные координаты, изменяющиеся в пределах $[-1; 1]$ [20]. Применяется изопараметрическое отображение. Для аппроксимации деформаций сдвига γ_{xz}, γ_{yz} используется смешанная интерполяция (MITC – mixed interpolation of tensorial components) [19, 21, 22], позволяющая избежать сдвигового запираания.

Численное интегрирование по толщине выполняется на основе метода трапеций [23], а для вычисления интегралов по области конечного элемента используются квадратурные формулы Гаусса при схеме интегрирования 2×2 [20]. Текущие значения компонент тензора напряжений и деформаций вычисляются и запоминаются для каждой точки Гаусса в N точках, где N – количество точек интегрирования по толщине оболочки. После вычисления напряжений на основе численного интегрирования по толщине в точках Гаусса, отнесенных к срединной поверхности, определяются продольные, поперечные, сдвигающие усилия, а также изгибающие и крутящие моменты. Эти величины непосредственно при решении задачи не используются, носят вспомогательный характер и служат только для интерпретации результатов в терминах, понятных для инженера.

Вследствие того, что тангенциальная жесткость бетона по мере развития пластических деформаций по высоте сечения распределяется несимметрично и армирование по высоте сечения чаще всего также несимметрично, в матрице жесткости конечного элемента появляются ненулевые коэффициенты, которые «завязывают» напряженное состояние поперечного изгиба с плоским напряженным состоянием. Несмотря на то, что конечный элемент является плоским, при поперечном изгибе возникают деформации растяжения-сжатия и сдвиги в срединной поверхности, а в случае действия сил, лежащих в срединной поверхности, возникает поперечный изгиб. При решении классических линейных задач для однородного материала упомянутые выше коэффициенты матрицы жесткости конечного элемента строго равны нулю, и «завязки» изгибных и мембранных деформаций не происходит. Имеет место лишь суперпозиция поперечного изгиба и плоского напряженного состояния.

Полученная система нелинейных алгебраических уравнений решается инкрементальным методом Ньютона – Рафсона [19], причем в ряде случаев применяется ускорение сходимости процедурой линейного поиска [8, 24].

Фиалко С.Ю. Четырехузловой конечный элемент для моделирования поведения тонкостенных железобетонных конструкций

Численные результаты

Пример 1. Рассматривается железобетонная балка, нагруженная сосредоточенной силой посреди пролета (рис. 5). Используются следующие характеристики бетона и стали: $E = 28\ 000$ МПа, $\sigma_c = 32$ МПа, $\sigma_t = 2.5$ МПа, $\nu = 0.22$, $E_s = 200\ 000$ МПа, $\sigma_y = 587$ МПа. Параметры задачи взяты из работы [10].

Кривая 1 представляет результаты эксперимента [10]. Кривая 2 соответствует численному решению [10], полученному на основе двухуровневой модели. Микроуровень описывается множеством частиц, на основе которых моделируется раскрытие трещин. На макроуровне используются соотношения задачи плоского напряженного состояния механики деформируемого твердого тела. Используются лагранжевы билинейные функции формы и соотношения дискретного метода Галеркина (element free Galerkin formulation). Связывание частиц с континуумом производится с помощью метода множителей Лагранжа.

Решения, полученные по предлагаемому подходу, представлены кривыми 3 и 4. При этом принималось: $\xi = 10$, $\alpha = 0$. Используется балочный конечный элемент, полученный вследствие применения описанного здесь подхода к балкам прямоугольного сечения при использовании тех же гипотез и соотношений [24]. Конечноэлементная модель состоит из 16 балочных конечных элементов, моделирующих половину балки при учете симметрии относительно ее середины. Общий порядок системы нелинейных алгебраических уравнений равен 48. Кривая 3 соответствует билинейной диаграмме $\sigma_s - \varepsilon_s$ для стали (рис. 2), а кривая 4 – экспоненциальной аппроксимации билинейной диаграммы (3). Приведенные результаты показывают, что при использовании билинейной диаграммы для стали предложенная модель является более жесткой, а при использовании экспоненциальной аппроксимации (3) – более мягкой, чем численная модель [10] и модель физического эксперимента. Дело в том, что в предлагаемом подходе принято условие отсутствия проскальзывания арматуры в бетоне как в сжатой, так и в растянутой зонах бетона, что вряд ли выполняется для пронизанной трещинами растянутой зоны [25]. Используя два решения при жесткой и мягкой аппроксимации диаграммы $\sigma_s - \varepsilon_s$ для стали, мы получаем оценку верхней и нижней границ несущей способности.

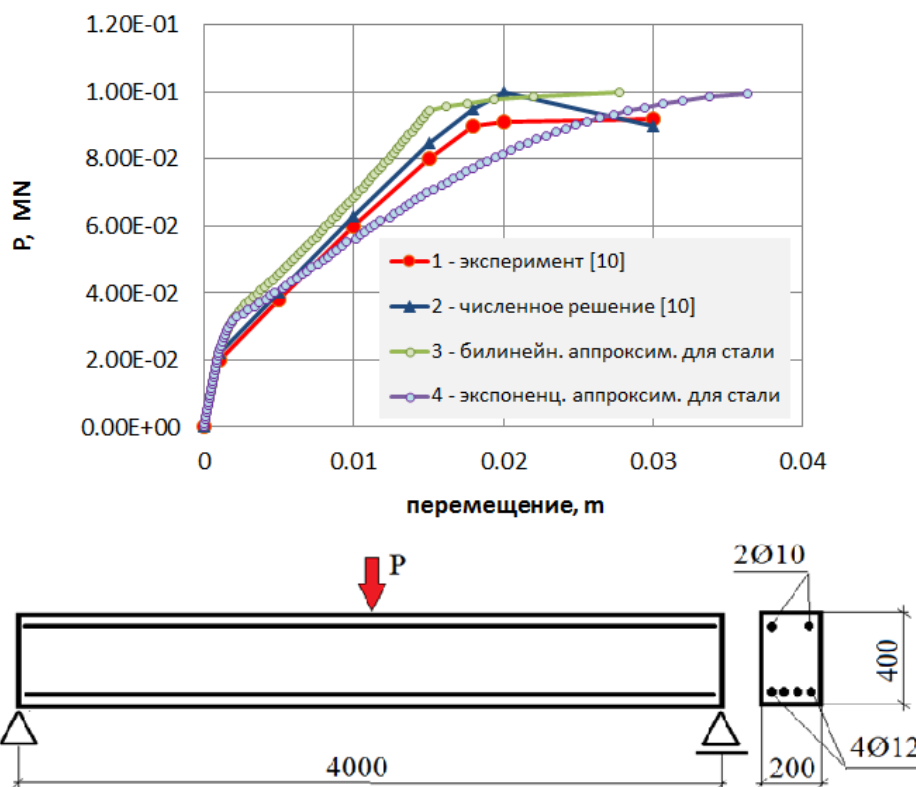


Рисунок 5. Диаграмма «нагрузка – прогиб» и схема балки, нагруженной посреди пролета

Несмотря на то, что используемая в данной работе модель является одноуровневой и более упрощенной по своей постановке, чем расчетная модель [10], полученные результаты хорошо согласуются как с численными, так и с экспериментальными данными [10]. В то же время вычислительная сложность предлагаемого подхода многократно меньше.

Пример 2. Рассматривается поперечный изгиб квадратной пластины, подверженной действию 16 сосредоточенных сил – образцы 825–827 из работы [7]. Принимаются следующие параметры пластины: размеры в плане – 2×2 м, $h = 12.2$ см, $z_{s,x} = \pm 5.4$ см, $z_{s,y} = \pm 5.05$ см, $A_{s,x} = A_{s,y} = 0.407$ см², $h_{s,x} = h_{s,y} = 10$ см, $\sigma_c = 26.5$ МПа, $\sigma_t = 1.3$ МПа, $\sigma_y = 408$ МПа, $E = 30\,000$ МПа, $E_s = 201\,000$ МПа. Здесь $z_{s,x}$, $z_{s,y}$ – расстояние от срединной поверхности верхнего (+) и нижнего (-) арматурных слоев в направлениях Ox , Oy ; $A_{s,x}$, $A_{s,y}$ – площади поперечных сечений стержней верхней и нижней арматуры в направлении Ox , Oy ; $h_{s,x}$, $h_{s,y}$ – шаг верхней и нижней арматуры в направлении Ox , Oy .

На рисунке 6 представлена диаграмма «нагрузка – вертикальное перемещение точки А» и расчетная схема задачи. По оси «нагрузка» откладывается статически эквивалентное равномерно распределенное по поверхности пластины давление. В силу условий симметрии рассматривается $\frac{1}{4}$ часть пластины. Под свободным опиранием понимаются граничные условия $w = M_t = 0$; $N_n = S = 0$, где w – нормальный прогиб; M_t – изгибающий момент, вектор которого параллелен соответствующей кромке пластины; N_n , S – нормальное и сдвигающее усилия.

Экспериментальные данные взяты из работы [7]. Кривая 1 соответствует билинейной диаграмме для стали, а кривая 2 – экспоненциальной аппроксимации билинейной диаграммы (3). Для бетона принята диаграмма ЕКБ (рис. 1), причем $\xi = 40$, $\alpha = 0.5$. При использовании билинейной диаграммы для стали результаты численного решения хорошо согласуются с экспериментальной кривой. При использовании экспоненциальной аппроксимации численное решение является более «мягким».

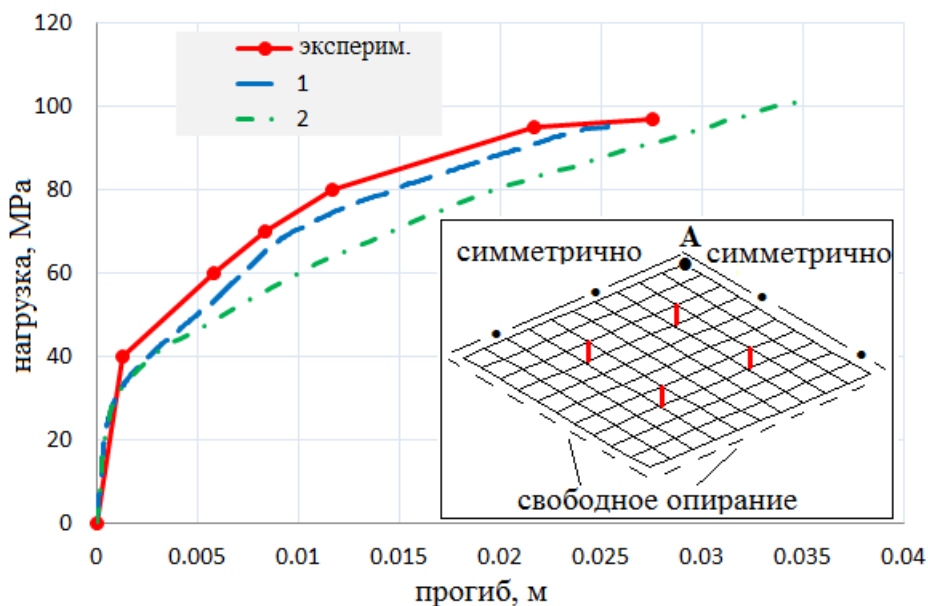


Рисунок 6. Диаграмма «нагрузка – прогиб» и расчетная схема плиты

На рисунке 7 приведено распределение напряжений σ_x в бетоне по высоте сечения в окрестности центра пластины для уровней нагружения 0.2, 0.5, 1.0 от предельного. Напряжения в арматуре условно обозначены полосками. Показать их в одном масштабе с напряжениями в бетоне не удастся, поскольку величины напряжений в стали на порядок больше, чем величины напряжений в бетоне.

Отчетливо видно, как высота растянутой зоны по мере роста нагрузки увеличивается, а значения напряжений в ней уменьшаются, что связано с деградацией бетона при растяжении. Эпюра напряжений в сжатой зоне является существенно нелинейной. В околопредельном состоянии эпюра сжатой зоны значительно отличается от прямоугольной.

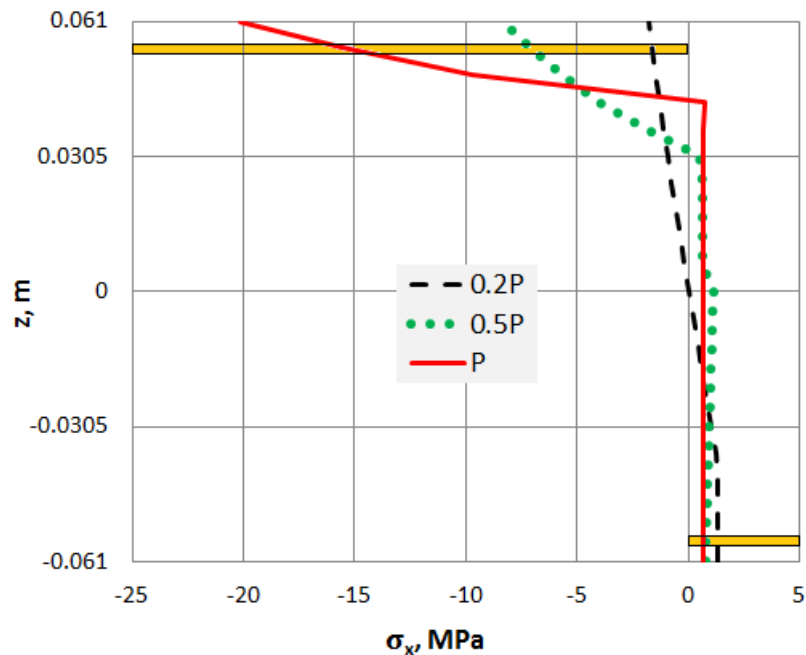


Рисунок 7. Распределение напряжений σ_x в бетоне по высоте сечения в окрестности центра пластины для разных уровней нагружения

Пример 3. Рассматривается пластина, подверженная действию циклического нагружения 16 сосредоточенными силами. Параметры задачи следующие: размеры в плане – 2×2 м, $h = 12.2$ см, $z_{s,x} = \pm 5.4$ см, $z_{s,y} = \pm 5.05$ см, $A_{s,x} = A_{s,y} = 1.77$ см², $h_{s,x} = h_{s,y} = 4.6$ см, $\sigma_c = 19.9$ МПа, $\sigma_t = 2.65$ МПа, $\sigma_y = 408$ МПа, $E = 30\,000$ МПа, $E_s = 201\,000$ МПа. Для сжатой зоны бетона принимается диаграмма ЕКБ, для растянутой учитывается деградация бетона (кривая ЕКБ на рисунке 2), причем $\zeta = 30$, $\alpha = 0$. Для стали принимается билинейная диаграмма, причем $E_I = 1\,000$ МПа.

Принимается, что постоянная нагрузка составляет 1/10 от общей величины нагрузки, а временная – 9/10. Постоянная нагрузка действует всегда, а временная может прикладываться и сниматься. Зависимость нагрузки от временного параметра представлена на рисунке 8 справа. На рисунке 8 слева показана диаграмма прогиба центра пластины во времени. Характерные точки обозначены буквами А, В, С, D. Отметим, что при повторном приложении временной нагрузки (точка С) величина прогиба больше, чем при первичном приложении нагрузки (точка А).

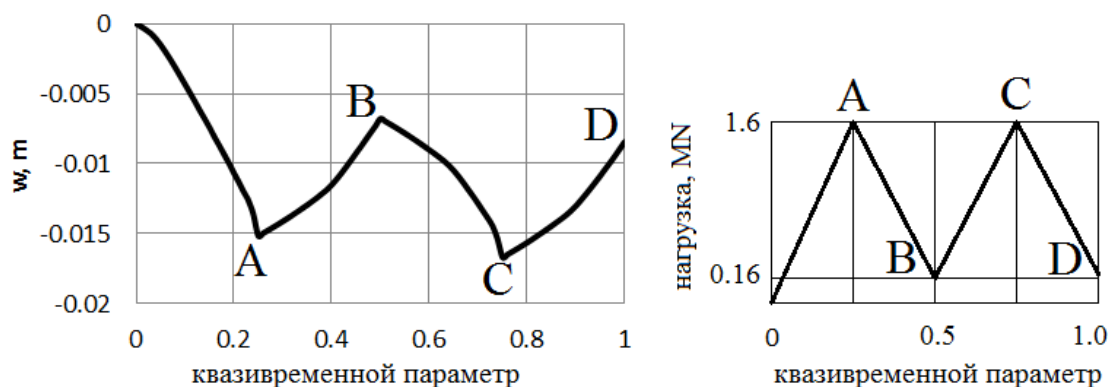


Рисунок 8. Вертикальные перемещения центра пластины при циклическом нагружении (слева) и зависимость величины нагрузки от квазивременного параметра (справа)

На рисунке 9 приведена диаграмма $\sigma_i - \varepsilon_i$ в центре пластины для верхнего (красный цвет) и нижнего (черный цвет) слоя бетона (слева), а также диаграмма $\sigma_s - \varepsilon_s$ для верхней (красный цвет) и нижней (черный цвет) арматуры. Буквы А, В, С, D и А', В', С', D' соответствуют аналогичным обозначениям на рисунке 8. Верхняя арматура все время сжата и работает в зоне упругости.

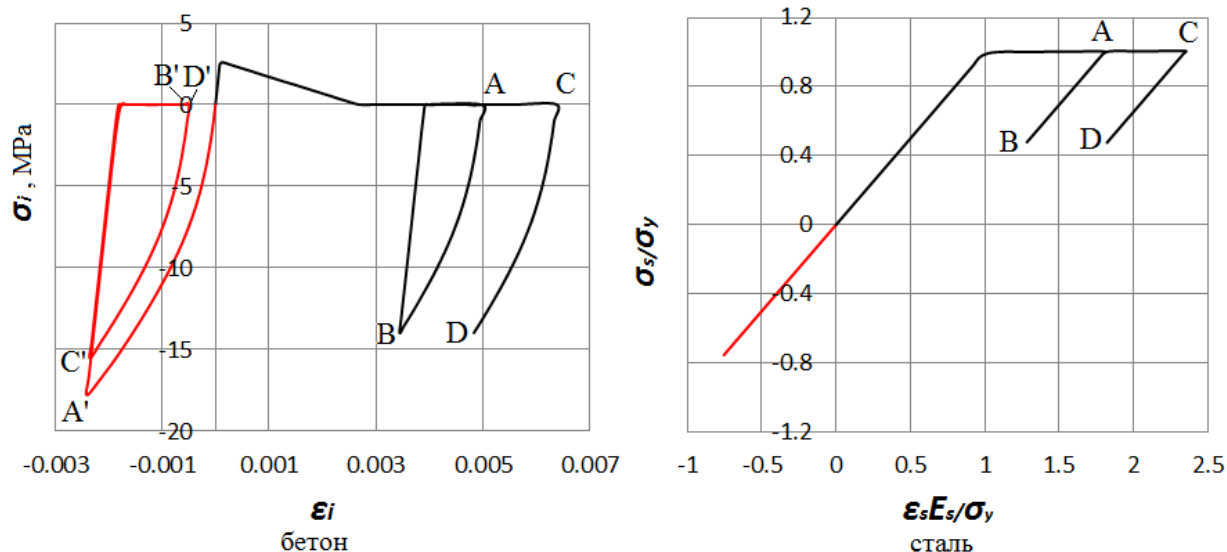


Рисунок 9. Диаграмма $\sigma_i - \epsilon_i$ для верхнего (красный цвет) и нижнего (черный цвет) слоя бетона в центре пластины (слева) и диаграмма $\sigma_s - \epsilon_s$ для верхней (красный цвет) и нижней (черный цвет) арматуры в центре пластины при циклическом нагружении

Участок первичного нагружения OA в растянутой зоне бетона описывает деградационный процесс, моделирующий образование трещин. В сжатой зоне бетона происходит активное нагружение вплоть до точки A'. Растянутая арматура при подходе к точке A течет. Участок AB, описывающий процесс снятия временной нагрузки, в нижнем волокне бетона представлен активным нагружением и обусловлен тем, что растянутая арматура при уменьшении нагрузки сжимает бетон, который на предыдущем этапе нагружения был растянут. В сжатой зоне бетона происходит разгрузка, а затем активное нагружение – скольжение вдоль оси ϵ_i до точки B'. Здесь мы пренебрегаем работой бетона, который был сжат, на растяжение. В арматуре растянутой зоны происходит разгрузка (участок AB). Участок BC (B'C') описывает повторное приложение временной нагрузки. В нижнем волокне бетона происходит разгрузка, а затем активное нагружение. Однако покрытый трещинами бетон не может воспринимать растягивающие напряжения, поэтому происходит скольжение вдоль оси ϵ_i до точки C. В верхнем волокне происходит активное нагружение (участок B'C'). В растянутой арматуре также происходит активное нагружение (участок BAC). Повторное снятие временной нагрузки приводит к тому, что в нижнем волокне бетона происходит активное нагружение (участок CD) вследствие того, что растянутая арматура сжимает бетон. В верхнем слое бетона происходит разгрузка, а затем скольжение вдоль оси ϵ_i до точки D'. В растянутой арматуре наблюдается разгрузка (участок CD).

Заклучение

Предлагаемый подход достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными, отражая главные особенности деформирования тонкостенных железобетонных плит. Он не требует привязки конечноэлементной сетки к шагу между арматурными стержнями и позволяет решать практические задачи на достаточно грубых сетках. В то же время кинематическая гипотеза о совместности перемещений бетона и арматуры в растянутой зоне бетона, покрытой трещинами, является слишком жесткой, поэтому при задании билинейной диаграммы для стали полученные значения несущей способности оказываются несколько завышенными. При использовании экспоненциальной аппроксимации билинейной диаграммы предлагаемый подход приводит к большим перемещениям при том же значении параметра нагружения, что и для билинейной диаграммы.

Формулирование основных соотношений деформационной теории пластичности в терминах остаточных деформаций позволило решить задачу о циклическом нагружении железобетонной плиты и выполнить моделирование сложных процессов взаимодействия бетона и арматуры.

Работа выполнена при поддержке Национального научного центра Польши (Narodowy Centrum Nauki, Polska) на основе решения DEC-2011/01/B/ST6/00674.

Фиалко С.Ю. Четырехузловой конечный элемент для моделирования поведения тонкостенных железобетонных конструкций

Литература

1. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1974. 306 с.
2. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. Запорожье: ООО «ИПО», 2009. 400 с.
3. Bathe K.J., Walczak J., Welch A., Mistry N. Nonlinear analysis of concrete structures // Computers & Structures. 1989. Vol. 32. Pp. 563–590.
4. Podleś K., Szarliński A., Truty A. Analiza konstrukcji 2D z betonu w stanach granicznych dla procesów doraźnych i długotrwałych // Metody numeryczne w projektowaniu i analizie konstrukcji hydrotechnicznych, XIII konferencja naukowa – Korbiewów. 2001. Pp. 1–10.
5. Lesmana C., Hu H.-T., Lin F.-M., Huang N.-M. Numerical analysis of square reinforced concrete plates strengthened by fiber-reinforced plastics with various patterns // Composites: Part B. 2013. Vol. 55. Pp. 247–262.
6. Kim K., Bolander J. E., Lim Y. M. Failure simulation of RC structures under highly dynamic conditions using random lattice models // Computers & Structures. 2013. Vol. 125. Pp. 127–136.
7. Карпенко Н. И. Теория железобетона с трещинами. М.: Стройиздат, 1976. 203 с.
8. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. Finite Elements for continua and structures. New York: John Wiley & Sons Ltd, 2013. 795 p.
9. Jendele L, Červenka J. On the solution of multi-point constraints – application to FE analysis of reinforced concrete structures // Computers & Structures. 2009. Vol. 87. Pp. 970–980.
10. Rabczuk T., Belytschko T. Application of particle methods to static fracture of reinforced concrete structures // International journal of fracture. 2006. Vol. 137. Pp. 19–49.
11. Yun Lee, Jin-Keun Kim. Numerical analysis of the early age behavior of concrete structures with a hydration based microplane model // Computers & Structures. 2009. Vol. 87. Pp. 1085–1101.
12. Ильюшин А.А. Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации. М.-Л. ОГИЗ, 1948. 376 с.
13. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
14. Sekulović M., Milašinović D., Kovačević D. Modeling of joints deterioration in dynamic analysis of reinforced concrete frames. In book: Computational modelling of concrete structures. Edited by de Borst R., Bicanic N., Mang H., Meschke G. A.A. Balkema, /Rotterdam/Brookfield, 1998. Pp. 757 – 766.
15. Клованич С.Ф. Модель прочности и деформаций бетона и грунта при сложном напряженном состоянии // Будівельні конструкції. 2003. 59. С. 163–170.
16. Фиалко С.Ю. О несущей способности несовершенных подкрепленных прямоугольных пластинок, подверженных действию сжимающих торцевых нагрузок // Прикл. механика. 1991. 27. №2. С. 73–80.
17. Фиалко С.Ю. Несущая способность гибких тонкостенных подкрепленных призматических складчатых систем // Прикл. механика. 1996. 32. №2. С. 33-40.
18. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 471 с.
19. Bathe K. J. Finite Element Procedures. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 1037 p.
20. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. Fifth edition. Volume 1: The basis. Jordan Hill: Oxford OX2 8DP Butterworth-HeinemannLinacre House, 2000. 689 p.
21. Sussman T., Bathe K. J. 3D-shell elements for structures in large strains // Computers & Structures. 2012. Vol. 122. Pp. 2–12.
22. Lee Y., Yoon K., Lee P.-S. Improving the MITC3 shell finite element by using the Hellinger–Reissner principle // Computers & Structures. 2012. Vol. 110–111. Pp. 93–106.
23. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 627 с.
24. Фиалко С.Ю. Конечный элемент для упруго-пластического расчета железобетонных плоских рам со стержнями прямоугольного сечения. В кн.: Строительная механика и строительные конструкции. М.: СКАД СОФТ, 2013. С. 416–438.
25. Бенин В.А., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть I. Модели с учетом несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5. С. 86–144.

*Сергей Юрьевич Фиалко, г. Краков, Польша
Тел. раб.: +4(851)069-31-87; эл. почта: sfialko@riad.pk.edu.pl*

© Фиалко С. Ю., 2014

doi: 10.5862/MCE.49.3

Quadrilateral shell finite element for analysis of thin-walled reinforced concrete structures

S.Yu. Fialko

Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Kraków, Poland
+380661045756; e-mail: sfialko@riad.pk.edu.pl

Key words

finite element method; deformation theory of plasticity; reinforced concrete; principle of virtual work; cyclic loading; residual strains

Abstract

The paper presents the quadrilateral finite element for analysis of thin-walled reinforced concrete structures. The deformation theory of plasticity, formulated in terms of residual strains, is applied for behavior simulation of the both: concrete and steel. Such an approach allows us to simulate a cyclic loading as well as a dynamic one.

The stress – strain diagram, proposed by the European Committee on concrete, is used for the compressed zone of concrete. The degradation, caused by the formation of cracks in the tensile zone, is described by the descending branch of the diagram. The symmetric stress-strain diagram, or its exponential approximation, is applied for steel. The compatibility of strains for concrete and steel is adopted. Reinforcements of the given direction are considered as a layer, which works only for compression-tension in this direction. The reinforcements of each direction are presented as a separate layer. We allow for the discrete placement of rods over thickness of the cross section. The Mindlin - Reissner shell theory is used for the reduction of a 3D problem to a 2D one; and the mixed interpolation of shear tensorial components is applied to overcome a shear locking effect.

References

1. Geniyev G. A., Kissyuk V. N., Tyupin G. A. *Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona* [Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete]. Moscow: Stroyizdat, 1974. 306 p. (rus)
2. Klovanih S. F. *Metod konechnykh elementov v nelineynykh zadachakh inzhenernoy mekhaniki* [The finite element method in nonlinear problems of engineering mechanics]. Zaporozhye: OOO «IPO», 2009. 400 p. (rus)
3. Bathe K. J., Walczak J., Welch A., Mistry N. Nonlinear analysis of concrete structures. *Computers & Structures*. 1989. Vol. 32. Pp. 563–590.
4. Podleś K., Szarliński A., Truty A. Analiza konstrukcji 2D z betonu w stanach granicznych dla procesów doraźnych i długotrwałych. *Metody numeryczne w projektowaniu i analizie konstrukcji hydrotechnicznych, XIII konferencja naukowa – Korbiewów*. 2001. Pp. 1–10. (pol)
5. Lesmana C., Hu H.-T., Lin F.-M., Huang N.-M. Numerical analysis of square reinforced concrete plates strengthened by fiber-reinforced plastics with various patterns. *Composites: Part B*. 2013. Vol. 55. Pp. 247–262.
6. Kim K., Bolander J. E., Lim Y. M. Failure simulation of RC structures under highly dynamic conditions using random lattice models. *Computers & Structures*. 2013. Vol. 125. Pp. 127–136.
7. Karpenko N. I. *Teoriya zhelezobetona s treshchinami* [The theory of reinforced concrete with cracks]. Moscow: Stroyizdat, 1976. 203 p.
8. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. *Finite Elements for continua and structures*. New York: John Wiley & Sons Ltd, 2013. 795 p.
9. Jendele L, Červenka J. On the solution of multi-point constraints – application to FE analysis of reinforced concrete structures. *Computers & Structures*. 2009. Vol. 87. Pp. 970–980.
10. Rabczuk T., Belytschko T. Application of particle methods to static fracture of reinforced concrete structures. *International journal of fracture*. 2006. Vol. 137. Pp. 19–49.
11. Yun Lee, Jin-Keun Kim. Numerical analysis of the early age behavior of concrete structures with a hydration based microplane model. *Computers & Structures*. 2009. Vol. 87. Pp. 1085–1101.
12. Ilyushin A. A. *Plastichnost. Chast pervaya. Uprugo-plasticheskiye deformatsii* [Plasticity. Part One. Elastic-plastic deformation]. Moscow–Leningrad: OGIZ, 1948. 376 p.

13. Kachanov L. M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Fundamentals of the theory of plasticity]. Moscow: Nauka, 1969. 420 p.
14. Sekulović M., Milašinović D., Kovačević D. Modeling of joints deterioration in dynamic analysis of reinforced concrete frames. In book: *Computational modelling of concrete structures. Edited by de Borst R., Bicanic N., Mang H., Meschke G. A.A. Balkema, /Rotterdam/Brookfield, 1998. Pp. 757–766.*
15. Klovanih S. F. Model prochnosti i deformatsiy betona i grunta pri slozhnom napryazhennom sostoyanii. *Budivelnii konstruksii*. 2003. Vol. 59. Pp. 163–170.
16. Fialko S. Yu. O nesushchey sposobnosti nesovershennykh podkreplennykh pryamougolnykh plastinok, podverzhennykh deystviyu szhimayushchikh tortseyvykh nagruzok. *Prikl. Mekhanika*. 1991. Vol. 27. No. 2. Pp. 73–80. (rus)
17. Fialko S. Yu. Nesushchaya sposobnost gibkikh tonkostennykh podkreplennykh prizmaticheskikh skladchatykh sistem. *Prikl. Mekhanika*. 1996. Vol. 32. No.2. Pp. 33–40. (rus)
18. Timoshenko S. P., Yang D. Kh., Uiver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Fluctuations in engineering]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1985. 471 p.
19. Bathe K. J. *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 1037 p.
20. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method. Fifth edition. Vol. 1: The basis*. Jordan Hill: Oxford OX2 8DP Butterworth-HeinemannLinacre House, 2000. 689 p.
21. Sussman T., Bathe K. J. 3D-shell elements for structures in large strains. *Computers & Structures*. 2012. Vol. 122. Pp. 2–12.
22. Lee Y., Yoon K., Lee P.-S. Improving the MITC3 shell finite element by using the Hellinger–Reissner principle. *Computers & Structures*. 2012. Vol. 110–111. Pp. 93–106.
23. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1987. 627 p. (rus)
24. Fialko S. Yu. *Konechnyy element dlya uprugo-plasticheskogo rascheta zhelezobetonnykh ploskikh ram so sterzhnyami pryamougolnogo secheniya. V kn.: Stroitel'naya mekhanika i stroitelnyye konstruksii* [Finite element for elastic-plastic analysis of reinforced concrete plane frames with bars of rectangular cross section. In: Structural Mechanics and Structures]. Moscow: SKAD SOFT, 2013. Pp. 416–438. (rus)
25. Benin V.A., Semenov A.S., Semenov S.G., Melnikov B.Ye. Matematicheskoye modelirovaniye protsessa razrusheniya stsepleniya armatury s betonom. Chast I. Modeli s uchetom nesploshnosti soyedineniya [Simulation of degradation of bond between reinforcing bar and concrete. Part 1. Models with account of the discontinuity]. *Magazine of Civil Engineering*. 2013. No. 5. Pp. 86–99. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 27–36