Санкт-Петербургский государственный политехнический
университет

КУДРИЦКИЙ Г. А, КАДЗОВ Г. Д.

Комбинаторика и возвышение в степень

монография

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данной работе поставлена задача, методами элементарной комбинаторики осуществлять возвышение в степень, как одночленов, так и двучленов и представить факториал в виде многочлена.

Элементарная комбинаторика это часть комбинаторного анализа[1-5]. Комбинаторный анализ – часть математики, объектом исследований в которой являются множества, состоящие из дискретных элементов. Множества могут быть как конечными, так и бесконечными.

Из этих множеств элементов в элементарной комбинаторике различают три вида выборок: размещения, перестановки и сочетания.

Размещениями из m элементов по n элементов называются такие выборки, где каждая содержит n элементов взятых из множества m элементов. Отличаются друг от друга или самими элементами или порядком их расположения. Вычисляются по известной формуле:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)(m-3)...[m-(n-1)]$$

где: A_m^n - число размещений.

Перестановки это размещения из m элементов по m элементов. Откуда следует, что отличаются друг от друга только порядком расположения элементов, а не самими элементами. Вычисляются по известной формуле:

$$\left.\begin{array}{l} P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)(m-3)....[m-(m-1)] \\ \text{или} \\ P_m = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (m-1)\cdot m = m\,! \end{array}\right\}$$

где: P_m – число перестановок.

m!- факториал Произведение чисел от 1 до m.

Сочетаниями из m элементов по n называются такие выборки, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Причем каждая из них содержит n элементов взятых из данных m элементов. Вычисляются по известной формуле:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)....[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}$$

где: C_m^n - число сочетаний из m элементов по n элементов.

В данной работе показатели степеней натуральные числа.

1. Возвышение в степень с помощью рекуррентных соотношений (формул)

Возвышение в степень с помощью рекуррентных соотношений (формул) означает, что каждое последующее значение мы можем определить, если нам известны предыдущие значения.

Обозначим буквой m натуральный ряд чисел. $1 \le m < \infty$.

Последовательно будем производить возвышение в степень произвольное число m.

$m^1 = m$

$m^2 = (m-1)m+m$

$m^3 = (m-1)m^2 + m^2$ подставим в это выражение вместо m^2 тождественное выражение $(m-1)m + m$ получим:

$m^3 = (m-1)[(m-1)m + m] + (m-1)m + m = (m-1)^2m + 2(m-1)m + m$

подставив в полученное выражение тождественное значение:

$(m-1)^2 = (m-2)(m-1) + (m-1)$ получим:

$m^3 = (m-2)(m-1)m + 3(m-1)m + m$

Возведём число m в четвертую степень:

$m^4 = (m-1)m^3 + m^3$ подставим вместо m^3 тождественное выражение: $(m-2)(m-1)m + 3(m-1)m + m$ получим:

$$m^4 = (m-1)[(m-2)(m-1)m + 3(m-1)m + m] + (m-2)(m-1)m + 3(m-1)m + m = (m-2)(m-1)^2m + 3(m-1)^2m + 4(m-1)m + (m-2)(m-1)m + m$$

подставим вместо $(m-1)^2$ тождественное выражение $(m-2)(m-1)+(m-1)$ получим:

$$m^4 = (m-2)m[(m-2)(m-1)+(m-1)]+3m[(m-2)(m-1)+(m-1)]+(m-2)(m-1)m + +4(m-1)m+m =(m-2)^2(m-1)m+5(m-2)(m-1)m+7(m-1)m+m$$

Заменим $(m-2)^2$ на тождественное выражение $(m-3)(m-2) + (m-2)$ и после преобразований и приведения подобных членов окончательно получим:

$m^4 = (m-3)(m-2)(m-1)m + 6(m-2)(m-1)m + 7(m-1)m + m$

Замечаем, что произведения вида:

m^1, $(m-1)m$, $(m-2)(m-1)m$, $(m-3)(m-2)(m-1)m$, ... численно равны размещениям A_m^1, A_m^2, A_m^3, A_m^4, . . . соответственно. Умножение двучлена (m-1) на размещения, происходит по формулам:

$(m-1)A_m^1 = A_m^2$

$(m-1)A_m^2 = A_m^3 + A_m^2$

$(m-1)A_m^3 = A_m^4 + 2A_m^3$

$(m-1)A_m^4 = A_m^5 + 3A_m^4$

$(m-1)A_m^5 = A_m^6 + 4A_m^5$

……………………

……………………

……………………

$$(m-1)A_m^n = A_m^{n+1} + (n-1)A_m^n \qquad (1.1)$$

Значит можно, используя формулы размещений, записать ранее полученные результаты следующим образом:

$m^1 = A_m^1$

$m^2 = A_m^2 + A_m^1$

$m^3 = A_m^3 + 3A_m^2 + A_m^1$

$m^4 = A_m^4 + 6A_m^3 + 7A_m^2 + A_m^1$

Определив четвертую степень числа m, можно возвести число m в пятую степень с помощью формулы (1.1).

$m^5 = (m\text{-}1)m^4 + m^4 = (m\text{-}1)[A_m^4 + 6A_m^3 + 7A_m^2 + A_m^1] + A_m^4 + 6A_m^3 +$
$+7A_m^2 + A_m^1 = A_m^5 + 3A_m^4 + 6(A_m^4 + 2A_m^3) + 7(A_m^3 + A_m^2) + A_m^2 + A_m^4 + 6A_m^3 + 7A_m^2 + A_m^1 =$
$= A_m^5 + 10A_m^4 + 25A_m^3 + 15A_m^2 + A_m^1$

где: A_m^n - размещения из множества m по n. $1 \le m < \infty$. $n \le m$

$n=\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots . n\}$ – максимальное значение количества чисел (произведений чисел) в каждой из выборок в подобных уравнениях равно степени в которую возводится число m (m^n).

Вычислив пятую степень произвольного положительного целочисленного числа m можно по формулам (1.1) вычислить шестую степень и т. д.

Возвышение в степень в рекуррентной форме не даёт возможности сразу написать формулу для расчета любой степени числа m (m^n), так как неизвестны коэффициенты предыдущего значения степени (m^{n-1}) стоящие перед размещениями A_m^{n-1}, A_m^{n-2}, $A_m^{n-3}, \ldots, A_m^1$.

2. Расчет коэффициентов

Найдём закономерности, которые позволят рассчитывать числовые коэффициенты при размещениях A_m^1, A_m^2, $A_m^3, \ldots, A_m^{n-1}$, A_m^n не прибегая к рекуррентной форме их расчета. Для этого запишем число m в произвольной степени n в следующем виде:

$$m^n = k_{n,n}A_m^n + k_{n,(n-1)}A_m^{n-1} + k_{n,(n-2)}A_m^{n-2} + \ldots + k_{n,2}A_m^2 + k_{n.1}A_m^1 \qquad (2.1)$$

где: $k_{n,n}$, $k_{n,(n-1)}, \ldots, k_{n,k,} \ldots, k_{n,2}$, $k_{n,1}$ – двух индексные коэффициенты. Первый индекс указывает на степень, в которую возводится число m. Второй индекс указывает на количество элементов (количество перемножаемых чисел) в каждой из выборок соответствующего размещения, перед которым стоит коэффициент. ($n \le m$)

Коэффициенты в конкретных уравнениях равны постоянным числам и не зависят от значений аргумента m. В нашем случае, значения m будут принимать последовательно значения от 1 до ∞. $(1 \le m < \infty)$.

$K_{n,1} = 1$, так как $A_m^1 = m$ и $1^n=1$

Найдем значение коэффициента $k_{n,2}$

$2^n = k_{n,2} \cdot 2 \cdot\cdot 1 + 1 \cdot 2$ откуда:

$k_{n,2} = \frac{2^n-2}{2} = \frac{2^{n-1}-1}{1}$

Найдем численное значение коэффициента $k_{n,3}$

$3^n = k_{n,3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{2^n-2}{2} \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3$ откуда:

$k_{n,3} = \frac{3^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1} + 1}{2!}$

Найдём численное значение коэффициента $k_{n,4}$

$4^n = k_{n,4} \cdot 4! + \frac{3^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1} + 1}{2!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + \frac{2^{n-1}-1}{1!} \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4$ откуда:

$k_{n,4} = \frac{4^n - 4 \cdot 3 \cdot (3^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1} + 1) - 4 \cdot 3 \cdot (2^{n-1} - 1) - 4}{4!} =$

$= \frac{4^{n-1} - 3 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} - 1}{3!}$

Методика расчета коэффициентов и далее такая же. Поэтому, будем сразу писать их значения, опуская промежуточные расчеты.

$k_{n,5} = \frac{5^{n-1} - 4 \cdot 4^{n-1} + 6 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot 2^{n-1} + 1}{4!}$

$k_{n,6} = \frac{6^{n-1} - 5 \cdot 5^{n-1} + 10 \cdot 4^{n-1} - 10 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 2^{n-1} - 1}{5!}$

……………………………………………….

……………………………………………….

……………………………………………….

$$k_{n,k} = \frac{k^{n-1} - C_{k-1}^1 (k-1)^{n-1} + C_{k-1}^2 (k-2)^{n-1} - ... \pm C_{k-1}^{k-2} [k-(k-2)]^{n-1} \mp 1}{(k-1)!} \quad (2.2)$$

……………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………….

$$k_{n,n} = \frac{n^{n-1} - C_{n-1}^1 (n-1)^{n-1} + C_{n-1}^2 (n-2)^{n-1} - ... \pm C_{n-1}^{n-2} [n-(n-2)]^{n-1} \mp 1}{(n-1)!} = 1 \quad (2.3)$$

Откуда:

$$\left.\begin{array}{l} n^{n-1} - C_{n-1}^1 (n-1)^{n-1} + C_{n-1}^2 (n-2)^{n-1} - .... \pm C_{n-1}^{n-2} [n-(n-2)]^{n-1} \mp 1 = (n-1)! \\ \text{или:} \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-2)(n-1) = (n-1)! \end{array}\right\} \quad (2.4)$$

Напомним, что коэффициенты, рассчитываемые по выведенным формулам, стоят перед соответствующими размещениями (2.1) На эти размещения указывает второй индекс.

где: $C_{n-1}^1 = \frac{A_{n-1}^1}{1} = n-1$; $C_{n-1}^2 = \frac{A_{n-1}^2}{1 \cdot 2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2!}$; . . . ; сочетания из n-1 элементов по количеству элементов содержащихся в каждой из выборок от 1 до (n-1).

Из анализа формулы (2.3 и 2.4) можно сразу написать формулу для факториала n!

$$n! = (n+1)^n - C_n^1 \cdot n^n + C_n^2 \cdot (n-1)^n - C_n^3 \cdot (n-2)^n + ... \pm C_n^{n-1} \cdot [n-(n-2)]^n \mp 1 \qquad (2.5)$$

где: все числа от (n+1) до 1 в степени n.

C_n^1, C_n^2, . . . , C_n^{n-1} - сочетания

Примеры

Возвышение чисел в степени с использованием выведенных коэффициентов.

$2^n = \frac{2^{m-1}-1}{1} A_2^2 + 2 = \frac{2^{n-1}-1}{1} \cdot 2 \cdot 1 + 2$ Возведём 2 в седьмую степень

$2^7 = (2^6-1)2+2 = 2^7$

Возведем 3 в седьмую степень: $3^7 = 2187$

$$3^7 = \frac{3^6 - 2 \cdot 2^6 + 1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{2^6 - 1}{1} \cdot 3 \cdot 2 + 3 = 1806 + 378 + 3 = 2187$$

Возведем 3 во вторую степень: $3^2 = 9$:

$$3^2 = \frac{3 - 2 \cdot 2 + 1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{2-1}{1} \cdot 3 \cdot 2 + 3 = 0 + 6 + 3 = 9$$

3 в первой степени будет:

$$3^1 = \frac{3^0 - 2 \cdot 2^0 + 1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{2^0 - 1}{1} \cdot 3 \cdot 2 + 3 = 0 + 0 + 3 = 3$$

Число 3 в третьей степени при $A_3^3 = P_3$ будет иметь коэффициент 1 согласно формуле (2.3).

$$3^3 = A_3^3 + k_{3,2} \cdot A_3^2 + k_{3,1} \cdot A_3^1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{2^2 - 1}{1} \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 6 + 18 + 3 = 27$$

В общем виде число 3 в произвольной степени n будет выглядеть следующим образом:

$$3^n = \frac{3^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1} + 1}{2!} \cdot P_3 + \frac{2^{n-1} - 1}{1} A_3^2 + A_3^1$$

Зная порядок расчета коэффициентов можно таким способом возводить в степени любые положительные числа.

Проверим правильность формулы (2.5) на некоторых значениях факториалов.

$$2! = (2+1)^2 - C_2^1 \cdot 2^2 + 1 = 9 - 8 + 1 = 2$$

$$3! = (3+1)^3 - C_3^1 \cdot 3^3 + C_3^2 \cdot 2^3 - 1 = 64 - 81 + 24 - 1 = 6$$

$$4! = (4+1)^4 - C_4^1 \cdot 4^4 + C_4^2 \cdot 3^4 - C_4^3 \cdot 2^4 + 1 = 625 - 1024 + 486 - 64 + 1 = 24$$

$$5! = (5+1)^5 - C_5^1 \cdot 5^5 + C_5^2 \cdot 4^5 - C_5^3 \cdot 3^5 + C_5^4 \cdot 2^5 - 1 = 7776 - 15625 + 10240 - 2430 + 160 - 1 = 120$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$n! = (n+1)^n - C_n^1 \cdot n^n + C_n^2 \cdot (n-1)^n - C_n^3 \cdot (n-2)^n + ... \pm C_n^{n-1} \cdot [n-(n-2)]^n \mp 1$$

где: 2!, 3!, . . . , n! – факториалы.

$C_n^1, C_n^2, C_n^3, ..., C_n^{n-1}$ - сочетания.

С учетом выведенных правил расчета коэффициентов применим их к расчету степени произвольного натурального числа m. Найдем m^5.

$$m^5 = k_{5,5}A_m^5 + k_{5,4}A_m^4 + k_{5,3}A_m^3 + k_{5,2}A_m^2 + k_{5,1}A_m^1$$

На основании формул (2.2) и (2.3) коэффициенты $k_{5,5}$ и $k_{5,1}$ равны единице. Следует заметить, что при подобных возвышениях в любую степень коэффициенты $k_{n,n}$ и $k_{n,1}$ будут равны единице.

Возвысим 8 в пятую степень.

$$8^5 = A_8^5 + \frac{4^4 - C_{4-1}^1(4-1)^4 + C_{4-1}^2(4-2)^4 - 1}{3!}\cdot A_8^4 + \frac{3^4 - C_{3-1}^1(3-1)^4 + 1}{2!}\cdot A_8^3 + \frac{2^4 - 1}{1!}\cdot A_8^2 + A_8^1 =$$

$$= 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 + \frac{256 - 3\cdot 81 + 3\cdot 16 - 1}{6}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 + \frac{81 - 2\cdot 16 + 1}{2}\cdot 8\cdot 7\cdot 6 + 15\cdot 8\cdot 7 + 8 = 32768$$

Результат верен, что можно проверить прямым возвышением.

Возвысим 5 в седьмую степень.

$$5^7 = \frac{5^6 - C_4^1 4^6 + C_4^2 3^6 - C_4^3 2^6 + 1}{4!}A_5^5 + \frac{4^6 - C_3^1 3^6 + C_3^2 2^6 - 1}{3!}A_5^4 + \frac{3^6 - C_2^1 2^6 + 1}{2!}A_5^3 +$$

$$+ \frac{2^6 - 1}{1}A_5^2 + A_5^1$$

После расчетов получаем:

16800 + 42000 + 18060 + 1260 + 5 = 78125. 5^7 = 78125.

3. Возвышение в степень двучленов.

В данной работе мы будем возводить в степень последовательности упорядов. Напомним определение упоряда. При делении целых чисел, как отрицательных, так и положительных на произвольное целое положительное число группируем числа в последовательности, все числа которых имеют один и тот же остаток [1].

-Bm+B ;. . . ;-2B ; -B ; 0	B ; 2B ; 3B ;. . . ; Bm
-Bm+(B-1);. . .;-(2B+1); -(B+1); -1	B-1; 2B-1; 3B-1;. . . ; Bm-1
-Bm+(B-2);. . .;-(2B+2); -(B+2); -2	B-2; 2B-2; 3B-2;. . . ; Bm-2
-Bm+(B-3);. . .;-(2B+3); -(B+3); -3	B-3; 2B-3; 3B-3;. . . ; Bm-3
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
-B+3 ;. . .; -(3B-3); -(2B-3); -(B-3)	3 ; (B+3); 2B+3;. . . ;Bm-(B-3)
-Bm+2 ;. . .; -(3B-2); -(2B-2); -(B-2)	2 ; (B+2); 2B+2;. . . ;Bm-(B-2)
-Bm+1 ;. . .; -(3B-1); -(2B-1); -(B-1)	1 ; (B+1); 2B+1;. . . ;Bm-(B-1)
-Bm ;. . .; -3B ; -2B ; -B	0 ; (B+0); 2B ;. . . ;Bm-B

где: $1 \le m < \infty$; и $0 \le r \le B$ остатки для положительной числовой области.

$0 \geq -r \geq -B$ остатки для отрицательной числовой области.

Введем обозначения:

$r_B = B$; $r_{B-1} = B-1$; $r_{B-2} = B-2$; ... ; $r_3 = 3$; $r_2 = 2$; r, =1; $r_0 = 0$.

Остатки положительной числовой области.

$-r_0=0$; $r_{-1}= -1$; $r_{-2} = -2$; . . .; $r_{-(B-2)} = -(B-2)$; $r_{-(B-1)} = -(B-1)$; $r_{-(B-0)} = r_{-B} = -B$.

Остатки отрицательной числовой области.

Такие построения по принятому в [1] определению названы упорядами.

Правило составления упорядов применительно к десятичной позиционной системе счисления наиболее наглядно демонстрирует определение упоряда.

-10m+10 . . .; -20; -10; 0;	10; 20; 30; . . . 10m
-10m+9 . . . ; -21; -11; -1;	9; 19; 29; . . . 10m-1
-10m+8 . . . ; -22; -12; -2;	8; 18; 28; . . . 10m-2
-10m+7 . . . ; -23; -13; -3;	7; 17; 27; . . . 10m-3
-10m+6 . . . ; -24; -14; -4;	6; 16; 26; . . . 10m-4
-10m+5 . . . ; -25; -15; -5;	5; 15; 25; . . . 10m-5
-10m+4 . . . ; -26; -16; -6;	4; 14; 24; . . . 10m-6
-10m+3 . . . ; -27; -17; -7;	3; 13; 23; . . . 10m-7
-10m+2 . . . ; -28; -18; -8;	2; 12; 22; . . . 10m-8
-10m+1 . . . ; -29; -19; -9;	1; 11; 21; . . . 10m-9
-10m . . . ; -30; -20; -10;	0; 10; 20; . . . 10m-10

где: каждое из уравнений первой степени при значении m=1 равно остатку, которое имеют все числа описываемые этими уравнениями.

Каждое из уравнений описывает числа, имеющие один и тот же остаток, получаемый при делении на 10. ($1 \leq m < \infty$).

В этом параграфе мы будем рассматривать множества, меняющие свою дискретность по закону уравнений первой степени (последовательностей упорядов или последовательностей систем счисления).

Так например:

$A^3_{(6m-1)}$ при m=1 есть размещение A^3_5

при m=2 есть размещение A^3_{11} и так далее.

$P_{(6m-1)} = A^{(6m-1)}_{(6m-1)}$ при m=1 есть факториал 5! (перестановка)

при m=2 есть факториал 11! и так далее.

$C^3_{(6m-1)} = \dfrac{A^3_{(6m-1)}}{3!} = \dfrac{(6m-1)(6m-2)(6m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ расчет числа сочетаний с изменяющейся дискретностью можно проверить, придавая m последовательно значения от единицы и до бесконечности и убедиться в справедливости такого разложения.

В параграфе 2 было установлено, что коэффициенты не зависят от m , а зависят от степени в которую возводится m и от числа элементов в каждой из выборок в размещениях перед которыми эти коэффициенты стоят. (см. 2.1 и 2.2)

Из этого следует, что коэффициенты при возведении в степень последовательности любого упоряда будут рассчитываться, так же как и при возведении в степень числа m или одночлена.

Возведем в третью степень двучлен (6m-1).

$$(6m-1)^3 = k_{3,3}A^3_{(6m-1)} + k_{3,2}A^2_{(6m-1)} + k_{3,1}A^1_{(6m-1)} = \frac{3^2 - 2\cdot 2^2 + 1}{2!}A^3_{(6m-1)} + \frac{2^2-1}{1!}A^2_{(6m-1)} +$$

$$+ A^1_{(6m-1)} = (6m-1)(6m-2)(6m-3) + 3\cdot(6m-1)(6m-2) + (6m-1)$$

По полученной формуле возведем (6m-1) в третью степень при m=5.

29^3=24389

29·28·27 + 3·29·28 +29 = 21924 + 2436 + 29 = 24389.

Точно таким же образом, используя правило расчета коэффициентов, можно любое уравнение первой степени возвести указанным способом в любую степень.

Заключение

В заключении можно сказать, что задачи поставленные в этой работе выполнены.

1. Методами элементарной комбинаторики можно осуществлять возвышение в степень, как одночленов, так и двучленов.

2. Получено уравнение разложения факториала в полином. Следовательно, к известной ранее формуле расчета перестановок можно добавить еще одну.

$$P_m = A^m_m = m(m-1)(m-2)(m-3)....[m-(m-1)]$$

или

$$P_m = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(m-1)\cdot m = m\,!$$

$$m! = (m+1)^m - C^1_m\cdot m^m + C^2_m\cdot(m-1)^m - C^3_m\cdot(m-2)^m + ... \pm C^{m-1}_m\cdot[m-(m-2)]^m \mp 1$$

где: P_m – число перестановок.

m!- факториал Произведение чисел от 1 до m.

P_m=m!=1·2·3· . . . ·(m-1)·m

$C^1_m, C^2_m, ..., C^{m-1}_m$ - сочетания из m элементов.

Список литературы

1. Кудрицкий, Геннадий Александрович. Нетрадиционная математика в целых числах. Нахождение делителей чисел и определение простых чисел [Электронный ресурс]: монография / Г. А. Кудрицкий. — Электрон. дан. (1 файл: 1,2 Мб). — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из сети Интернет (чтение, печать, копирование). — Текстовый файл. — <URL:http://dl.unilib.neva.ru/dl/2092.pdf>.

2. Кудрицкий, Геннадий Александрович. Нетрадиционная математика в целых числах. Нахождение делителей чисел и определение простых чисел. [Электронный ресурс]. Ч. 2 / Г. А. Кудрицкий. — Электрон. дан. (1 файл : 353

Кб). — СПб., 2012. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из сети Интернет (чтение, печать, копирование). — Adobe Acrobat Reader 6.0. — <URL:http://dl.unilib.neva.ru/dl/2333.pdf>.

3. Кудрицкий, Геннадий Александрович. Алгоритм разложения чисел на множители. Нахождение делителей чисел и определение простых чисел [Электронный ресурс]. Ч. 3: монография / Г.А. Кудрицкий; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. — Электрон. текстовые дан. (1 файл: 2,28 Мб). — Санкт-Петербург, 2013. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из сети Интернет (чтение, печать, копирование). — Текстовый документ. — Adobe Acrobat Reader 7.0. — <URL:http://dl.unilib.neva.ru/dl/2/3523.pdf>.

4. Кудрицкий, Геннадий Александрович. Вывод функции Эйлера для последовательностей упорядов и систем счисления [Электронный ресурс]. Ч. 4: учебное пособие / Г.А. Кудрицкий, Г.Д. Кадзов; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. — Электрон. текстовые дан. (1 файл: 228 Кб). — Санкт-Петербург, 2013. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из сети Интернет (чтение, печать, копирование). — Текстовый документ. — Adobe Acrobat Reader 7.0. — <URL:http://dl.unilib.neva.ru/dl/2/3559.pdf>.

5. Кудрицкий, Геннадий Александрович. Алгоритм разложения чисел на множители и определение простых чисел [Электронный ресурс]. Ч. 5: учебное пособие / Г.А. Кудрицкий, Г.Д. Кадзов; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. — Электрон. текстовые дан. (1 файл: 200 Кб). — Санкт-Петербург, 2013. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из сети Интернет (чтение, печать, копирование). — Текстовый документ. — Adobe Acrobat Reader 7.0. — <URL:http://dl.unilib.neva.ru/dl/2/3558.pdf>.

5. Энциклопедия кибернетики.: -Киев.: „Главная редакция украинской советской энциклопедии.„ 1975г.

Содержание