

Санкт-Петербургский государственный политехнический
университет

КУДРИЦКИЙ Г. А., КАДЗОВ Г. Д.

Статическое дифференцирование и интегрирование

Монография

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как известно операция вычисления производной носит название дифференцирование. Производная это предел отношения разности приращения функции к соответствующему приращению аргумента, вызвавшему это приращение функции. При этом приращение аргумента устремляют к нулю, то есть ищут значение функции в точке. (Находят предел). Здесь налицо то, что такая математика вышла из геометрических представлений, если все это изобразить в прямоугольных декартовых координатах. Все это хорошо описано во всех соответствующих учебниках по математическому анализу и нет необходимости подробно описывать это еще раз.

Нахождение функции, которая была продифференцирована, носит название интегрирования. Это действие более сложно, чем дифференцирование, так как нет единого правила осуществления этой математической операции. Этот вывод так же следует из многочисленных учебников по математическому анализу.

Функция, которая после нескольких дифференцирований, принимает значение какого-то постоянного числа - называется конечно дифференцируемой. Функция, которая после множества дифференцирований, не принимает значения постоянного числа - называется бесконечно дифференцируемой. Примером бесконечно дифференцируемой функции может служить показательная функция.

В данной работе не будет геометрических представлений производных, то есть, нет отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента при стремлении последнего к нулю. Работа ведется в области целых чисел, поэтому приращения могут быть 1, 2, 3. и т. д. и то после того как будут произведены расчеты в более доступной для этого форме.

Например: дан ряд квадратов натуральных чисел:

1, 4, 9, 16, .. найдем разности между рядом стоящими числами

3, 5, 7, 9, далее найдем разности между результатами.

2, 2, 2, . . . получили постоянную дифференцирования совпадающую с результатом, если бы производилось дифференцирование с геометрическим подходом. Нет так же и бесконечно малых величин, которые нужно отбрасывать в процессе статического дифференцирования. Все эти подходы подробно будут рассмотрены в данной работе. Этот пример не исключение. Каждая разность будет описываться соответствующими формулами и будет произведено статическое интегрирование квадратов натуральных чисел. Для нахождения суммы квадратов натуральных чисел (проинтегрируем сумму квадратов натуральных чисел) достаточно будет воспользоваться заранее выведенными формулами и принять постоянную интегрирования равную нулю (см. 3.9) и подставить ее в эту формулу.

Эти формулы будут являться сочетаниями. Например, рассмотрим сумму арифметической прогрессии.

$$1+2+3+4+ \dots +(m-4)+(m-3)+(m-2)$$

Вычислим сумму этой арифметической прогрессии (по известной формуле) получим результат.

$$S = \frac{(m-1)(m-2)}{2} \quad \text{Это не что иное, как сочетание} \quad C_{(m-1)}^2 = \frac{(m-1)(m-2)}{2!}$$

где: S – сумма арифметической прогрессии

$C_{(m-1)}^2$ - сочетания из (m-1) элементов по 2.

И далее будет показано (в рекуррентной форме), что сочетания $C_{(m-1)}^3, C_{(m-1)}^4, C_{(m-1)}^5, \dots$ и т.д. будут представлять собой суммы арифметических прогрессий.

1. Уравнения первой степени

В работе [1] разработаны основные положения, служащие руководством для всех других работ. А именно введение отрицательного остатка позволило изучать делимость целых чисел в алгебраической форме. При делении целых чисел, как положительных, так и отрицательных на положительное целое число B ($1 \leq B < \infty$) получилось $B+1$ последовательность, каждая из которых описывается двумя уравнениями одно для положительных чисел с определенным остатком, а другое для отрицательных чисел (в общем случае) с остатком по абсолютной величине не равным остатку для положительных чисел.

$-Bm+B$	;	$\dots$	;	$-2B$	;	$-B$	;	0		B	;	$2B$	;	$3B$	;	$\dots$	;	Bm
$-Bm+(B-1)$	;	$\dots$	;	$-(2B+1)$	;	$-(B+1)$	;	-1		$B-1$	;	$2B-1$	;	$3B-1$	;	$\dots$	;	$Bm-1$
$-Bm+(B-2)$	;	$\dots$	;	$-(2B+2)$	;	$-(B+2)$	;	-2		$B-2$	;	$2B-2$	;	$3B-2$	;	$\dots$	;	$Bm-2$
$-Bm+(B-3)$	;	$\dots$	;	$-(2B+3)$	;	$-(B+3)$	;	-3		$B-3$	;	$2B-3$	;	$3B-3$	;	$\dots$	;	$Bm-3$
.....																		
$-B+3$	;	$\dots$	;	$-(3B-3)$	;	$-(2B-3)$	;	$-(B-3)$		3	;	$(B+3)$	;	$2B+3$	;	$\dots$	;	$Bm-(B-3)$
$-Bm+2$	;	$\dots$	;	$-(3B-2)$	;	$-(2B-2)$	;	$-(B-2)$		2	;	$(B+2)$	;	$2B+2$	;	$\dots$	;	$Bm-(B-2)$
$-Bm+1$	;	$\dots$	;	$-(3B-1)$	;	$-(2B-1)$	;	$-(B-1)$		1	;	$(B+1)$	;	$2B+1$	;	$\dots$	;	$Bm-(B-1)$
$-Bm$	;	$\dots$	;	$-3B$	;	$-2B$	;	$-B$		0	;	$(B+0)$	;	$2B$	;	$\dots$	;	$Bm-B$

Как известно любое арифметическое действие может быть произведено, когда в наличии имеются два числа. Слева от черты отрицательные числа, Справа от черты положительные числа. Каждое из уравнений, описывающих одну и ту же последовательность, начинается со своего остатка вычисляемого соответствующим уравнением при $m=1$. [1,2,3]

Введено понятие начального числа. Эти уравнения описывающие последовательности, каждая из которых имеет свои остатки для положительных и отрицательных чисел получены с помощью сложения и вычитания. Спра-

ва налево – вычитанием. Слева направо – сложением. Положительные остатки служат начальными числами для отрицательных чисел. Это первые уменьшаемые. Отрицательные остатки служат начальными для положительных чисел. Это первые слагаемые при первом сложении. Получаются в результате сложения положительные остатки. [1]. Уравнения, которые при значении целочисленного аргумента $m=1$ равны остатку, получили название исходных. [1]. Совокупность всех уравнений со всеми возможными остатками, получаемыми при делении целых чисел на положительное целочисленное B ($1 \leq B < \infty$) называются упорядками. [1]. Каждый упорядок содержит все целые числа при любом целочисленном B . Число B называется шагом упорядка.

Введено понятие взаимнообратимости, которое описывается формулами:

$$\left. \begin{aligned} \underline{s}_1(0) &= \underline{s}_1(1) = -r_{k1} \\ \underline{s}_1(0) &= \underline{s}_1(1) = +r_{k2} \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

где: $-r_{k1}$ и r_{k2} – остатки отрицательных и положительных чисел, соответственно, какой-либо из последовательностей упорядка.

$\underline{s}_1$ и $\underline{s}_2$ – уравнения первой степени. (индекс 1). Стрелка указывает слева направо – положительная числовая область. Стрелка справа налево – отрицательная числовая область. [1].

Проинтегрируем вторую строчку сверху упорядка. Последовательности которого получаются делением всех целых чисел на произвольное положительное число B .

$$\begin{aligned} \underline{s}_1(1) &= -1, \quad \underline{s}_1(2) = \underline{s}_1(1) - B, \\ \underline{s}_1(3) &= \underline{s}_1(2) - B = \underline{s}_1(1) - 2B, \dots \dots \underline{s}_1(m) = -1 - B(m-1) = -Bm + (B-1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Таким образом мы получили формулу нахождения разности из положительного остатка $B-1$ положительного числа B вычитенного m раз. Или другими словами мы получили последовательность отрицательных чисел имеющих остаток -1 при делении на положительное число B .

где: $1 \leq m < \infty$, $1 \leq B < \infty$.

Далее найдем сумму числа Bm с отрицательным остатком -1 .

$$\begin{aligned} \underline{s}_1(1) &= (B-1), \quad \underline{s}_1(2) = \underline{s}_1(1) + B, \\ \underline{s}_1(3) &= \underline{s}_1(2) + B = \underline{s}_1(1) + 2B, \dots \dots \underline{s}_1(m) = \underline{s}_1(1) + B(m-1) = Bm - 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где: $1 \leq m < \infty$, $1 \leq B < \infty$.

Итак, мы получили формулу последовательности положительных чисел имеющих остаток $B-1 > 0$ при делении целых положительных чисел на положительное число B .

При $B=1$ получаем ряд целых чисел.

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & -6, & -5, & -4, & -3, & -2, & -1, & \diagdown & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots \\ & .. & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \diagdown & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \dots \end{array}$$

$$\underline{s}_1(1) = 0, \quad \underline{s}_1(2) = \underline{s}_1(1) + 1,$$

$$\underline{s}_1(3) = \underline{s}_1(2) + 1 = \underline{s}_1(1) + 2 \cdot B, \dots, \underline{s}_1(m) = \underline{s}_1(1) + B(m-1)$$

А так как $B=1$ а $\underline{s}_1(1) = 0$, то имеем: $\underline{s}_1(m) = m - 1$

Для отрицательной ветви целых чисел:

$$\underline{S}_1(1) = -1, \quad \underline{S}_1(2) = \underline{S}_1(1) - 1,$$

$$\underline{S}_1(3) = \underline{S}_1(2) - 1 = \underline{S}_1(1) - 2, \quad \dots \quad \underline{S}_1(m) = \underline{S}_1(1) - (m-1) = -m$$

где: $\underline{S}_1(m)$ и $\underline{S}_2(m)$ ветви неотрицательных и отрицательных чисел соответственно. m - целочисленный аргумент. $1 \leq m < \infty$.

2. Уравнения второй степени

Рассмотрим квадратное уравнение $m^2 - m = m(m-1)$. Это уравнение заведомо имеет корни 0 и 1 и по принятому ранее m принимает значения от единицы до бесконечности (всегда положительно). Отрицательные значения и нуль m принимает в специально оговоренных исследовательских моментах. [1]. Например, при введении понятия взаимнообратимости.

($1 \leq m < \infty$).Вычислим значения при движении в сторону сложения и вычитания. [1].

$$\underline{S}_2(m) \dots, 12, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 12, 20, \dots, \underline{S}_2(m)$$

$$\underline{S}_2^I(m) \dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots, \underline{S}_2^I(m)$$

$$\underline{S}_2^{II}(m) = d, \dots, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots, d = \underline{S}_2^{II}(m)$$

где: $\underline{S}_2(m)$ и $\underline{S}_2(m)$ - функции, которые надо продифференцировать.

$\underline{S}_2^I(m)$ и $\underline{S}_2^I(m)$ - первые статические производные.

$\underline{S}_2^{II}(m) = d$ вторая статическая производная равна постоянному

числу d .

Найдем первую статическую производную.

$$\underline{S}_2^I(1) = 2, \quad \underline{S}_2^I(2) = \underline{S}_2^I(1) + d$$

$$\underline{S}_2^I(3) = \underline{S}_2^I(2) + d = \underline{S}_2^I(1) + d \cdot 2, \quad \dots, \quad \underline{S}_2^I(m) = \underline{S}_2^I(1) + d(m-1) \quad (2.1)$$

Как видим получили последовательность упоряда с шагом $B=d$. (см. 1.2).

Определим уравнение для $\underline{S}_2(m)$.

$$\underline{S}_2(1) = 0, \quad \underline{S}_2(2) = \underline{S}_2(1) + \underline{S}_2^I(1),$$

$$\underline{S}_2(3) = \underline{S}_2(2) + \underline{S}_2^I(2) = \underline{S}_2(1) + 2 \cdot \underline{S}_2^I(1) + d$$

$$\underline{S}_2(4) = \underline{S}_2(3) + \underline{S}_2^I(3) = \underline{S}_2(1) + 3 \cdot \underline{S}_2^I(1) + (1+2)d$$

$$\underline{S}_2(5) = \underline{S}_2(4) + \underline{S}_2^I(4) = \underline{S}_2(1) + \underline{S}_2^I(1) \cdot 4 + (1+2+3)d$$

.....

$$\underline{S}_2(m) = \underline{S}_2(1) + \underline{S}_2^I(1)(m-1) + d \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{2} \quad (2.2)$$

$$\text{Выведем } A_{(m-1)}^2 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

Приравняем $m^2 - m = \underline{S}_2(1) + \underline{S}_2^1(1)(m-1) + d \cdot (1+2+3+\dots+(m-2))$

Подставив значения $\underline{S}_2(1) = 0$, $\underline{S}_2^1(1) = 2$, $d = 2$ - получим:

$$1+2+3+4+\dots+(m-2) = \frac{m^2 - 3m + 2}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2} \quad \text{поскольку числа 1 и 2}$$

являются корнями уравнения $\frac{m^2 - 3m + 2}{2}$

Определим уравнение при движении в сторону вычитания.

$\underline{S}_2(1) = 0$, $\underline{S}_2^1(1) = -2$, $d = 2$ - находятся слева от черты.

Найдем уравнение для $\underline{S}_2^1(m)$.

$$\begin{aligned} \underline{S}_2^1(1) &= -2, & \underline{S}_2^1(2) &= \underline{S}_2^1(1) - d, \\ \underline{S}_2^1(3) &= \underline{S}_2^1(2) - d = \underline{S}_2^1(1) - 2d, \dots, & \underline{S}_2^1(m) &= \underline{S}_2^1(1) - d \cdot (m-1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Это уравнение не является взаимнообратимым с уравнением (2.1), а так же пропускается число нуль. Чтобы найти взаимнообратимое уравнение достаточно дать приращение m равное -1 - получим уравнение:

$$\underline{S}_2^1(m) = \underline{S}_2^1(1) - d(m-2) \quad (2.3-1)$$

Определив $\underline{S}_2^1(m)$ - уравнение (2.3) найдем уравнение для $\underline{S}_2(m)$.

$$\begin{aligned} \underline{S}_2(1) &= 0, & \underline{S}_2(2) &= \underline{S}_2(1) - \underline{S}_2^1(1), \\ \underline{S}_2(3) &= \underline{S}_2(2) - \underline{S}_2^1(2) = \underline{S}_2(1) - 2 \cdot \underline{S}_2^1(1) + d \\ \underline{S}_2(4) &= \underline{S}_2(3) - \underline{S}_2^1(3) = \underline{S}_2(1) - 3 \cdot \underline{S}_2^1(1) + (1+2)d \\ \underline{S}_2(5) &= \underline{S}_2(4) - \underline{S}_2^1(4) = \underline{S}_2(1) - 4 \cdot \underline{S}_2^1(1) + (1+2+3)d. \end{aligned}$$

.....
.....
.....

$$\underline{S}_2(m) = \underline{S}_2(1) - \underline{S}_2^1(1)(m-1) + d \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{2} \quad \text{так как } \underline{S}_2^1(1) = -2 \text{ то получен-}$$

ное уравнение будет численно равно уравнению (2.2), так как $-\underline{S}_2^1(1)(m-1)$ будет всегда положительным при $1 \leq m < \infty$. (Рассматриваются исходные уравнения [1].)

- $(-\underline{S}_2^1)(m-1) = \underline{S}_2^1(1)(m-1)$ и уравнение примет вид:

$$\underline{S}_2(m) = \underline{S}_2(1) + \underline{S}_2^1(1)(m-1) + d \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{2} \quad (2.4)$$

Уравнение (2.2) равно уравнению (2.4)

В [1] введено понятие выборки (уравнения выборки)

Уравнения выборки описывают номера, под которыми находятся числа в последовательностях, обладающие одинаковыми свойствами по делимости. Все числа находящиеся на этих номерах имеют общие делители. [1,2,3,4,5].

В работе [1] в таблицах 2.2.3 и 2.2.4 полужирным шрифтом обозначены номера чисел, под которыми находятся квадраты чисел последовательности $6m-5$ и $6m-1$ соответственно. Выпишем эти номера, расположенные

справа от черты, номера под которыми находятся квадраты чисел последовательности $6m-5$. (Правая черта) И найдем последовательные разности до получения постоянного числа $d=12$. Далее справа от черты с учетом взаимнообратимости из первой статической производной в положительной области будем последовательно вычитать из получающихся результатов число d . (Первое вычитание из числа 8) Таким образом, мы получим уравнение для $\underline{S}_2^1(m)$. Потом будем последовательно вычитать полученные результаты $\underline{S}_2^1(m)$. Первое вычитание будет из единицы числа -4 не вошедшего в уравнение для $\underline{S}_2^1(m)$.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \underline{S}_2(m), \dots, 89, & 49, & 21, & 5, & \nearrow 1, & 9, & 29, & 61, \dots, & \underline{S}_2(m) \\ \underline{S}_2^1(m), \dots, -40, & -28, & -16, & -4, & \nearrow 8, & 20, & 32, \dots, & \underline{S}_2^1(m) \\ d, \dots, 12, & 12, & 12, & 12, & \nearrow 12, & 12, & 12, \dots, & d \end{array}$$

где: $m^{\setminus} = \{1, 9, 29, \dots\}$; $m^{\setminus} = \{5, 21, 49, 89, \dots\}$ - номера выборок квадратов чисел последовательностей $6m-5$ и $6m-1$ находящихся в последовательности $6m-5$. $m^{\setminus}$ -обозначение выборок и уравнений выборок.

Определим уравнение для первой производной $\underline{S}_2(m)$ или будем находить суммы числа 12 с первым слагаемым числом 8.

$$\begin{aligned} \underline{S}_2^1(1) &= 8, & \underline{S}_2^1(2) &= \underline{S}_2^1(1) + d, & \underline{S}_2^1(3) &= \underline{S}_2^1(2) + d = \underline{S}_2^1(1) + 2d, & \underline{S}_2^1(4) &= \underline{S}_2^1(1) + 3d, \\ \dots\dots\dots \underline{S}_2^1(m) &= \underline{S}_2^1(1) + d(m-1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Определим уравнение для $\underline{S}_2^1(m)$:

$$\begin{aligned} \underline{S}_2^1(1) &= -16, & \underline{S}_2^1(2) &= \underline{S}_2^1(1) - d, & \underline{S}_2^1(3) &= \underline{S}_2^1(2) - d = \underline{S}_2^1(1) - 2 \cdot d, \dots\dots\dots \\ \underline{S}_2^1(m) &= \underline{S}_2^1(1) - d(m-1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

где: $1 \leq m < \infty$.

Полученное уравнение (2.6) не является взаимнообратимым с уравнением (2.5) Для получения взаимнообратимого уравнения дадим в уравнении (2.6) отрицательное приращение целочисленному аргументу m единицу получим:

$$\underline{S}_2^1(m) = \underline{S}_2^1(1) - d(m-2) \quad (2.6-1)$$

где: $1 \leq m < \infty$.

Можно получить взаимнообратимое с уравнением (2.5) уравнение заменой в уравнении (2.6) первого уменьшаемого с -16 на -4 получим:

$$-16-12(m-2) = -4-12(m-1) = -12m+8 \quad (2.6-2)$$

где: $1 \leq m < \infty$

Найдем уравнение выборки для квадратов чисел последовательности $6m-5$.

$$\begin{aligned} \underline{S}_2(1) &= 1, & \underline{S}_2(2) &= \underline{S}_2(1) + \underline{S}_2^1(1), & \underline{S}_2(3) &= \underline{S}_2(2) + \underline{S}_2^1(2) = \underline{S}_2(1) + 2\underline{S}_2^1(1) + d, \\ \underline{S}_2(4) &= \underline{S}_2(3) + \underline{S}_2^1(3) = \underline{S}_2(1) + \underline{S}_2(1) \cdot 3 + (1+2)d \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\underline{S}_2(m) = \underline{S}_2(1) + \underline{S}_2^1(1)(m-1) + d \frac{(m-1)(m-2)}{2} \quad (2.5-1)$$

Подставив в полученное уравнение: $\underline{S}_2(1)=1$, $\underline{S}_2^1(1)=8$, и $d=12$ получим:

$$\underline{S}_2(m) = 6m^2 - 10m + 5 = \{1, 9, 29, \dots\} \quad (2.5-2)$$

Подставим найденное уравнение выборки в последовательность $6m-5$ получим:

$$6(6m^2 - 10m + 5) - 5 = 36m^2 - 60m + 25 = \{1, 49, 169, 361, \dots\} \quad (2.5-3)$$

Получили тождественные уравнения:

$$(6m-5)^2 = 6(6m^2 - 10m + 5) - 5$$

где: $1 \leq m < \infty$.

Найдём уравнение выборки квадратов чисел последовательности $6m-1$, которые так же находятся в последовательности $6m-5$. [1]. Уравнение (2.6) есть статическая производная искомого уравнения выборки.

Учитывая взаимообратимость числовых последовательностей, так как $6m-5$ и $-6m+1$ взаимообратимы, а квадраты отрицательных чисел положительны, то они находятся в положительной части последовательности.

$$\underline{S}_2(1) = 5, \quad \underline{S}_2(2) = \underline{S}_2(1) - \underline{S}_2^1(1) \quad \underline{S}_2^1(1) = -16. \quad (\text{см. 2.6})$$

$$\underline{S}_2(3) = \underline{S}_2(2) - \underline{S}_2^1(2) = \underline{S}_2(1) - 2 \underline{S}_2^1(1) + d$$

$$\underline{S}_2(4) = \underline{S}_2(3) - \underline{S}_2^1(3) = \underline{S}_2(1) - 3 \underline{S}_2^1(1) + (1+2)d$$

.....

$$\underline{S}_2(m) = \underline{S}_2(1) - \underline{S}_2^1(m-1) + d \frac{(m-1)(m-2)}{2!} \quad (2.6-3)$$

Подставим в полученное уравнение значения $\underline{S}_2(1) = 5$ и $\underline{S}_2^1(1) = -16$ $d=12$ получим:

$$\underline{S}_2(m) = 5 + 16(m-1) + 6(m-1)(m-2) = 6m^2 - 2m + 1$$

Полученное уравнение выборки, подставим в последовательность $6m-5$, получим:

$$6(6m^2 - 2m + 1) - 5 = 36m^2 - 12m + 1 = \{25, 121, 289, 529, \dots\}$$

Итак, имеем:

$$(6m-1)^2 = 6(6m^2 - 2m + 1) - 5 \quad (2.6-4)$$

где: $1 \leq m < \infty$.

При разработке возвышения в степень надо всегда учитывать, что каждая из последовательностей любого упорядка описывается двумя уравнениями. [1].

3. Уравнения третьей степени

Зададимся уравнением третьей степени с заранее известными корнями 0, 1 и 2. $m(m-1)(m-2) = m^3 - 3m^2 + 2m$. Выпишем значения этого уравнения, задаваясь

как отрицательными, так и положительными значениями целочисленного аргумента m .

$$\begin{array}{cccccccccccc} \underline{S}_3(m) \dots, -60, & -24, & -6, & 0, & 0, & 0, & 6, & 24, & 60, \dots, & \underline{S}_3(m) \\ \underline{S}_3^1(m) \dots, & 36, & 18, & 6, & 0, & 0, & 6, & 18, & 36, \dots, & \underline{S}_3^1(m) \\ \underline{S}_3^{11}(m) \dots, & -18, & -12, & -6, & 0, & 6, & 12, & 18, \dots, & \underline{S}_3^{11}(m) \\ \underline{S}_3^{111}(m) = d \dots, & 6, & 6, & 6, & 6, & 6, & 6, & \dots, & d = \underline{S}_3^{111}(m) \end{array}$$

где: $1 \leq m < \infty$. По принятому определению ранее, будем рассматривать уравнения для отрицательной и положительной областей отдельно. [1, 2, 3]. То есть каждая последовательность статических производных и сама функция будут определяться парой уравнений,

Определим формулу для $\underline{S}_3^{11}(m)$:

$$\begin{aligned} \underline{S}_3^{11}(1) &= 6, \quad \underline{S}_3^{11}(2) = \underline{S}_3^{11}(1) + d, \quad \underline{S}_3^{11}(3) = \underline{S}_3^{11}(2) + d = \underline{S}_3^{11}(1) + 2d, \\ \underline{S}_3^{11}(4) &= \underline{S}_3^{11}(3) + d = \underline{S}_3^{11}(1) + 3d, \dots, \underline{S}_3^{11}(m) = \underline{S}_3^{11}(1) + d(m-1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставив значения: $\underline{S}_3^{11}(1) = 6$, и $d = 6$ получим уравнение в традиционной форме. Уравнение первой степени.

$$\underline{S}_3^{11}(m) = 6m \quad (3.1-1)$$

Для определения уравнения $\underline{S}_3^{11}(m)$ будем брать значение $\underline{S}_3^{11}(1) = -12$.

$$\begin{aligned} \underline{S}_3^{11}(2) &= \underline{S}_3^{11}(1) - d, \quad \underline{S}_3^{11}(3) = \underline{S}_3^{11}(2) - d = \underline{S}_3^{11}(1) - 2d, \quad \underline{S}_3^{11}(4) = \underline{S}_3^{11}(1) - 3d, \dots \\ \underline{S}_3^{11}(m) &= \underline{S}_3^{11}(1) - d(m-1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Но уравнение (3.2) не является взаимнообратимым с уравнением (3.1) для получения взаимнообратимого уравнения достаточно в (3.2) взять вторую статическую производную при $m=1$ не -12 , а равную нулю. Или дать приращение m равное -2 , что мы и сделаем, получим:

$$\underline{S}_3^{11}(m) = \underline{S}_3^{11}(1) - d(m-3) \quad (3.2-1)$$

где: $1 \leq m < \infty$.

Подставим значения $\underline{S}_3^{11}(1) = -12$ и $d = 6$ получим:

$$\underline{S}_3^{11}(m) = -6m + 6 \quad (3.2-2)$$

где: $\underline{S}_3^{11}(m)$ - вторая статическая производная уравнения третьей степени.

$1 \leq m < \infty$.

Определим уравнение первой статической производной для положительной числовой области.

$$\begin{aligned} \underline{S}_3^1(1) &= 0, \quad \underline{S}_3^1(2) = \underline{S}_3^1(1) + \underline{S}_3^{11}(1), \\ \underline{S}_3^1(3) &= \underline{S}_3^1(2) + \underline{S}_3^{11}(2) = \underline{S}_3^1(1) + 2\underline{S}_3^{11}(1) + d, \\ \underline{S}_3^1(4) &= \underline{S}_3^1(3) + \underline{S}_3^{11}(3) = \underline{S}_3^1(1) + 3\underline{S}_3^{11}(1) + (1+2)d, \\ \underline{S}_3^1(5) &= \underline{S}_3^1(4) + \underline{S}_3^{11}(4) = \underline{S}_3^1(1) + 4\underline{S}_3^{11}(1) + (1+2+3)d \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\underline{S}_3^1(m) = \underline{S}_3^1(1) + \underline{S}_3^{11}(1)(m-1) + d \frac{(m-1)(m-2)}{2}. \quad (3.3)$$

Подставив в уравнение (3.3) значения $\underline{S}_3^1(1)$, $\underline{S}_3^{11}(1)$ и d получим уравнение в привычной форме (После необходимых преобразований).

$$\underline{S}_3^1(m) = 3m^2 - 3m = 3m(m-1) \quad (3.3-1)$$

Определим уравнение первой статической производной для отрицательной числовой области.

$$\underline{S}_3^1(1) = 6, \quad \underline{S}_3^1(2) = \underline{S}_3^1(1) - \underline{S}_3^{11}(1), \quad \underline{S}_3^1(3) = \underline{S}_3^1(2) - \underline{S}_3^{11}(2) = \underline{S}_3^1(1) - 2\underline{S}_3^{11}(1) + d,$$

$$\underline{S}_3^1(4) = \underline{S}_3^1(3) - \underline{S}_3^{11}(3) = \underline{S}_3^1(1) - 3\underline{S}_3^{11}(1) + (1+2)d,$$

$$\underline{S}_3^1(5) = \underline{S}_3^1(4) - \underline{S}_3^{11}(4) = \underline{S}_3^1(1) - 4\underline{S}_3^{11}(1) + (1+2+3)d,$$

.....

$$\underline{S}_3^1(m) = \underline{S}_3^1(1) - \underline{S}_3^{11}(1)(m-1) + d \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{2} \quad (3.4)$$

С учетом того, что $\underline{S}_3^{11}(1) = -12$ подставив которое в (3.4) получим положительное значение.

Следует учитывать, что уравнение (3.4) не является взаимнообратимым с уравнением (3.3). Для того чтобы уравнение (3.4) было взаимнообратимо уравнению (3.3) надо в (3.4) дать приращение аргументу m отрицательное значение равное -1. Имеем:

$$\underline{S}_3^1(m) = \underline{S}_3^1(1) - \underline{S}_3^{11}(1)(m-2) + d \cdot \frac{(m-2)(m-3)}{2} \quad (3.4-1)$$

Подставив в уравнение (3.4-1) значений первой, второй статических производных и значения постоянного d . Получим уравнение взаимнообратимое уравнению (3.3-1).

$$\underline{S}_3^1(m) = 6 + 12(m-2) + 3(m-2)(m-3) = 3m^2 - 3m = 3m(m-1) \quad (3.4-2)$$

где: $1 \leq m < \infty$. При придании m значений $m = \{ 0, -1, -2, -3, \dots \}$ $\underline{S}_3^1(m)$ будет принимать значения $\underline{S}_3^1(m)$. и наоборот.

Определим уравнения функции, если известны ее производные.

Для положительной числовой области:

$$\underline{S}_3(1) = 0, \quad \underline{S}_3(2) = \underline{S}_3(1) + \underline{S}_3^1(1), \quad \underline{S}_3(3) = \underline{S}_3(2) + \underline{S}_3^1(2) = \underline{S}_3(1) + 2\underline{S}_3^1(1) + \underline{S}_3^{11}(1),$$

$$\underline{S}_3(4) = \underline{S}_3(3) + \underline{S}_3^1(3) = \underline{S}_3(1) + 3\underline{S}_3^1(1) + (1+2)\underline{S}_3^{11}(1) + d$$

$$\underline{S}_3(5) = \underline{S}_3(4) + \underline{S}_3^1(4) = \underline{S}_3(1) + 4\underline{S}_3^1(1) + (1+2+3)\underline{S}_3^{11}(1) + d \cdot \left| \begin{array}{c} +1 \\ 1+2 \end{array} \right|$$

$$\underline{S}_3(6) = \underline{S}_3(5) + \underline{S}_3^1(5) = \underline{S}_3(1) + 5\underline{S}_3^1(1) + (1+2+3+4)\underline{S}_3^{11}(1) + d \left| \begin{array}{c} +1 \\ 1+2 \\ 1+2+3 \end{array} \right|$$

.....

$$\underline{S}_3(m) = \underline{S}_3(1) + \underline{S}_3^1(1)(m-1) + \underline{S}_3^{11}(1) \frac{(m-1)(m-2)}{2} + d \cdot \left| \begin{array}{c} +1 \\ 1+2 \\ 1+2+3 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ 1+2+3+\dots+(m-3) \end{array} \right| \quad (3.5)$$

где: $\left| \begin{array}{c} + \\ \dots \end{array} \right|$ знак построчного суммирования арифметических прогрессий.

Количество строк зависит от m при $m=6$ три строки. При $m=10$ семь строк и т. д..

Для определения суммы арифметических прогрессий под знаком построчного суммирования необходимо в уравнение (3.5) подставить числовые значения $\underline{S}_3(1)$, $\underline{S}_3^1(1)$, $\underline{S}_3^{11}(1)$, и d и приравняв полученное выражение исходному уравнению $m(m-1)(m-2)$ вычислить сумму арифметических прогрессий.

$$m(m-1)(m-2) = 6 \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 6 \cdot \left| \begin{array}{c} + 1 \\ 1+2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ 1+2+\dots+(m-3) \end{array} \right|$$

Откуда:

$$\left| \begin{array}{c} + 1 \\ 1+2 \\ 1+2+3 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ 1+2+3+\dots+(m-3) \end{array} \right| = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} = C_{m-1}^3 \quad (3.5-1)$$

Запись суммы арифметических прогрессий под знаком построчного суммирования очень громоздка и занимает много места. На первой строчке всегда будет стоять единица. Каждая следующая строчка начинается с единицы, которая суммируется с положительными целыми числами ряда. Причем надо заметить, что последнее из суммируемых чисел указывает на строчку. Например: $1+2$ – вторая строчка, $1+2+3$ – третья строчка, $1+2+3+4+\dots\dots\dots+(m-3)$ – $(m-3)$ строчка, зависящая от целочисленного аргумента m . Поэтому уравнение (3.5-1) в сокращенном варианте будет записываться так:

$$\left| \begin{array}{c} +1 \\ (m-3) \end{array} \right| = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} = C_{m-1}^3 \quad (3.5-1)$$

Определим уравнение функции для отрицательной числовой области:

$$\underline{S}_3(1) = 0, \quad \underline{S}_3(2) = \underline{S}_3(1) - \underline{S}_3^1(1), \quad \underline{S}_3(3) = \underline{S}_3(2) - \underline{S}_3^1(2) = \underline{S}_3(1) - 2\underline{S}_3^1(1) + \underline{S}_3^{11}(1)$$

$$\underline{S}_3(4) = \underline{S}_3(3) - \underline{S}_3^1(3) = \underline{S}_3(1) - 3\underline{S}_3^1(1) + (1+2)\underline{S}_3^{11}(1) - d$$

$$\underline{S}_3(5) = \underline{S}_3(4) - \underline{S}_3^1(4) = \underline{S}_3(1) - 4\underline{S}_3^1(1) + (1+2+3)\underline{S}_3^{11}(1) - d \left| \begin{array}{c} +1 \\ 2 \end{array} \right|$$

.....

$$\underline{S}_3(m) = \underline{S}_3(1) - \underline{S}_3^1(1)(m-1) + \underline{S}_3^{11}(1) \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d \left| \begin{array}{c} +1 \\ (m-3) \end{array} \right| \quad (3.6)$$

$$\text{где: } 1 \leq m < \infty. \quad \left| \begin{array}{c} +1 \\ 1+2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} +1 \\ 2 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} +1 \\ 1+2 \\ 1+2+3 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ 1+2+3+\dots+(m-3) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} +1 \\ (m-3) \end{array} \right| \quad \text{По принятым сокращениям записей.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{S}_3(m) = m(m-1)(m-2) = A_m^3 \\ \underline{S}_3(m) = -m(m-1)(m+1) = -A_{m+1}^3 \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

где: $\underline{S}_3(m)$ и $\underline{S}_3(m)$ - уравнения третьей степени. (Пара взаимобратимых уравнений, которые описывают одну и ту же последовательность.) Одно уравнение описывает положительную числовую часть этой последовательности, а другое уравнение описывает отрицательную числовую часть этой последовательности. $1 \leq m < \infty$.

При возведении чисел какой-либо последовательности любого упорядка с целочисленным положительным шагом B в степень все числа этой последовательности будут находиться в последовательности, определяемой степенью остатка. [1,2] Из сказанного следует, что все числа последовательности $6m-1$ возведенные в нечётную степень будут находиться в последовательности $6m-1$. Возведем последовательность $6m-1$ в третью степень. Построим числа выборок, как в сторону сложения, так и в сторону вычитания.

$$(6m-1)^3 = 216m^3 - 108m^2 + 18m - 1 = 6(36m^3 - 18m^2 + 3m) - 1$$

где: $m^3 = 36m^3 - 18m^2 + 3m$ - уравнение выборки. [1,2,3].

$$\begin{array}{cccccccc}
\underline{S}_3(m) \dots, & -1143, & -366, & -57, & 0, & 21, & 222, & 819, \dots, \underline{S}_3(m) \\
\underline{S}_3^1(m) \dots, & 777, & 309, & 57, & 21, & 201, & 597, & \dots \underline{S}_3^1(m) \\
\underline{S}_3^{11}(m) \dots & -468, & -252, & -36, & 180, & 396, & 612, & \dots \underline{S}_3^{11}(m) \\
d \dots & 216, & 216, & 216, & 216, & 216, & \dots d
\end{array}$$

Используя результаты вывода формул (3.5) и (3.6) можно сразу написать уравнения для $\underline{S}_3(m^{\setminus})$ и $\underline{S}_3^1(m^{\setminus})$. (Если нам не важны промежуточные результаты).

$$\left. \begin{aligned}
\underline{S}_3(m^{\setminus}) &= \underline{S}_3(1) + \underline{S}_3^1(1)(m-1) + \underline{S}_3^{11}(1) \frac{(m-1)(m-2)}{2!} + d \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3!} \\
\underline{S}_3(m^{\setminus}) &= \underline{S}_3(1) - \underline{S}_3^1(1)(m-1) + \underline{S}_3^{11}(1) \frac{(m-1)(m-2)}{2!} - d \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}
\end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Учитывая уравнения (2.2), (3.5.-1) полученные уравнения выборок можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned}
\underline{S}_3(m^{\setminus}) &= \underline{S}_3(1) + \underline{S}_3^1(1)C_{(m-1)}^1 + \underline{S}_3^{11}(1)C_{(m-1)}^2 + dC_{(m-1)}^3 \\
\underline{S}_3(m^{\setminus}) &= \underline{S}_3(1) - \underline{S}_3^1(1)C_{(m-1)}^1 + \underline{S}_3^{11}(1)C_{(m-1)}^2 - dC_{(m-1)}^3
\end{aligned} \right\} \quad (3.8-1)$$

где: $C_{(m-1)}^1$, $C_{(m-1)}^2$, $C_{(m-1)}^3$, - сочетания из $(m-1)$ элементов по 1, по 2 и 3 соответственно. $d = S_3^{111}(m)$.

$$C_{(m-1)}^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (m-2)$$

$$C_{(m-1)}^3 = \left| \begin{array}{c} + \quad 1 \\ 1+2 \\ 1+2+3 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ 1+2+3+\dots+(m-3) \end{array} \right|$$

Далее будет применяться только сокращенная запись сумм арифметических прогрессий. (см. 3.5-1)

Для перехода к обычной и привычной записи уравнений необходимо подставить в $\underline{S}_3(m)$ и $\underline{S}_3^1(m)$ значения.

$\underline{S}_3(1), \dots, \underline{S}_3^1(1), \dots, \underline{S}_3^{11}(1), \dots, d, \dots, \underline{S}_3(1), \dots, \underline{S}_3^1(1), \dots, \underline{S}_3^{11}(1), \dots, d$. после подстановки получим пару уравнений выборок:

$$\left. \begin{aligned}
\underline{S}_3(m^{\setminus}) &= 36m^3 - 18m^2 + 3m \\
\underline{S}_3(m^{\setminus}) &= -36m^3 + 90m^2 - 75m + 21
\end{aligned} \right\} \quad (3.8-2)$$

После подстановки этих уравнений выборок в числовую последовательность $6m-1$ получим:

$$\left. \begin{aligned}
\underline{S}_3(m) &= 6(36m^3 - 18m^2 + 3m) - 1 = 216m^3 - 108m^2 + 18m - 1 \\
\underline{S}_3(m) &= 6(-36m^3 + 90m^2 - 75m + 21) - 1 = -216m^3 + 540m^2 - 450m + 125
\end{aligned} \right\} \quad (3.8-3)$$

Полученные уравнения можно проверить простым возвышением в степень.

$$\underline{S}_3(m) = (6m-1)^3 = 216m^3 - 108m^2 + 18m - 1.$$

$$\underline{S}_3(m) = (-6m+5)^3 = -216m^3 + 540m^2 - 450m + 125$$

Как видим, результаты совпадают. (См. 3.8-3)

Найдем сумму квадратов чисел натурального ряда (см. предисловие).

$$\underline{S}_3(m) \dots 0, \dots$$

$$\underline{S}_3^1(m) \dots, 1, 4, 9, \dots$$

$$\underline{S}_3^{11}(m) \dots, 3, 5, \dots$$

$$d \dots, 2, \dots$$

где: $\underline{S}_3(m)$ статический интеграл, который надо найти.

$$\underline{S}_3(m) = \underline{S}_3(1) + \underline{S}_3^1(1)(m-1) + \underline{S}_3^{11}(1) \frac{(m-1)(m-2)}{2} + d \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}$$

Подставив в полученное уравнение значения $\underline{S}_3(1) = 0$, $\underline{S}_3^1(1) = 1$,

$\underline{S}_3^{11}(1) = 3$ и $d = 2$ получим:

$$\begin{aligned} \underline{S}_3(m) &= 0 + 1(m-1) + \frac{3(m-1)(m-2)}{2} + \frac{2(m-1)(m-2)(m-3)}{6} = \\ &= \frac{2m^3 - 3m^2 + m}{6} = \frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m = \frac{(2m-1)m(m-1)}{6} \end{aligned} \quad (3.9)$$

где: $1 \leq m < \infty$

В заключении этого параграфа можно сказать, что метод статического дифференцирования и интегрирования позволил определить, что сумма арифметических прогрессий вида описанного уравнением (3.5-1) равна сочетаниям из $(m-1)$ элементов по 3. Рассматриваются уравнения третьей степени. Так же показано, что m можно придавать приращения, что приводит к изменению числа рассматриваемых элементов. (То есть изменяется число арифметических прогрессий)

4. Уравнения четвертой степени

Вводы уравнений четвертой степени отличаются от выводов уравнений третьей степени введением четвертого корня 3. То есть мы будем рассматривать уравнение с заранее известными корнями это 0, 1, 2 и 3.

$$m(m-1)(m-2)(m-3) = m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m \quad (4.1)$$

Выпишем значения этого уравнения при изменении целочисленного аргумента, как в отрицательную, так и в положительную сторону. Сначала выпишем значения в сторону вычитания.

$$\begin{array}{cccccccc}
\underline{S}_4(m) \dots 1680, & 840, & 360, & 120, & 24, & 0 & \diagdown & \\
\underline{S}_4^1(m) \dots, & -840, & -480, & -240, & -96, & -24, & 0 & \diagdown \\
\underline{S}_4^{11}(m) \dots & 360, & 240, & 144, & 72, & 24, & 0 & \diagdown \\
\underline{S}_4^{111}(m) \dots & -120, & -96, & -72, & -48, & -24, & 0 & \diagdown \\
d \dots & 24, & 24, & 24, & 24, & 24, & 24, & \diagdown
\end{array}$$

где: $\underline{S}_4(m)$ - функция. $\underline{S}_4^1(m)$, $\underline{S}_4^{11}(m)$, $\underline{S}_4^{111}(m)$ и d производные этой функции.

Значения в сторону сложения.

$$\begin{array}{cccccccc}
& & 0, & 0, & 0, & 24, & 120, & 360, & 840, \dots, & \underline{S}_4(m) \\
& & 0, & 0, & 0, & 24, & 96, & 240, & 480, \dots, & \underline{S}_4^1(m) \\
& 24, & 0, & 0, & 24, & 72, & 144, & 240, & \dots, & \underline{S}_4^{11}(m) \\
-48, & -24, & 0, & 24, & 48, & 72, & 96, & \dots, & \underline{S}_4^{111}(m) \\
24, & 24, & 24, & 24, & 24, & 24, & 24, & \dots, & d
\end{array}$$

где: $\underline{S}_4(m)$ - функция, уравнение которой надо определить.

$\underline{S}_4^1(m), \underline{S}_4^{11}(m), \underline{S}_4^{111}(m), d$ - ее производные.

Будем находить уравнение функции в сторону сложения.

Методика нахождения уравнений производных и самой функции такая же как и при определении уравнений низших степеней, поэтому промежуточные вычисления можно опускать.

$$\underline{S}_4^{111}(m) = \underline{S}_4^{111}(1) + d(m-1) \quad \underline{S}_4^{111}(1) = 24$$

$$\underline{S}_4^{11}(m) = \underline{S}_4^{11}(1) + \underline{S}_4^{111}(1)(m-1) + d[1+2+3+\dots+(m-2)] \quad \underline{S}_4^{11}(1) = 0$$

$$\underline{S}_4^1(m) = \underline{S}_4^1(1) + \underline{S}_4^{11}(1)(m-1) + \underline{S}_4^{111}(1)[1+2+\dots+(m-2)] + d \left[\begin{array}{c} 1 \\ (m-3) \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
\underline{S}_4(m) = & \underline{S}_4(1) + \underline{S}_4^1(1)(m-1) + \underline{S}_4^{11}(1)[1+2+\dots+(m-2)] + \underline{S}_4^{111}(1) \left[\begin{array}{c} 1 \\ (m-3) \end{array} \right] + \\
& + d \left[1 + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right] + \dots + \left[\begin{array}{c} 1 \\ (m-4) \end{array} \right] \right] \quad (4.1-1)
\end{aligned}$$

Приравняем уравнение (4.1) с полученным уравнением, предварительно вставив в него значения: $\underline{S}_4(1) = 0$, $\underline{S}_4^1(1) = 0$, $\underline{S}_4^{11}(1) = 0$, $\underline{S}_4^{111}(1) = 24$, $d = 24$.- получим:

$$\left[1 + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right] + \dots + \left[\begin{array}{c} 1 \\ (m-4) \end{array} \right] \right] = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{24} = C_{(m-1)}^4 \quad (4.2)$$

где: $C_{(m-1)}^4$ - сочетание из $(m-1)$ элементов по четыре. При $m=5$ выражение в квадратных скобках равно единице. При $m=6$ выражение в квадратных скобках равно 5. $\left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & 1+2 \end{array} \right] = 5$

То есть количество сумм арифметических прогрессий под знаком построчного суммирования зависит от m . И надо помнить о принятых сокращениях (см. 3.5-1).

Сразу напишем уравнение для $\underline{S}_4(m)$.

$$\underline{S}_4(m) = \underline{S}_4(1) - \underline{S}_4^1(1)(m-1) + \underline{S}_4^{11}(m) \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \underline{S}_4^{111}(m) \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} + d \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{24} \quad (4.3)$$

Подставим в полученное уравнение значения статических производных при $m=1$ и произведя необходимые действия и сокращения получим:

$$\underline{S}_4(m) = m^4 + 2m^3 - m^2 - 2m = (m+2)(m+1)m(m-1) = A_{(m+2)}^4 \quad (4.3-1)$$

Уравнения (4.1) и (4.3) составляют пару взаимнообратимых уравнений.

$$\left. \begin{aligned} \underline{S}_4(m) &= m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m = m(m-1)(m-2)(m-3) = A_m^4 \\ \underline{S}_4(m) &= m^4 + 2m^3 - m^2 - 2m = (m+2)(m+1)m(m-1) = A_{(m+2)}^4 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

где: A_m^4 , $A_{(m+2)}^4$, - размещения из m элементов по четыре и из $(m+2)$ элементов по четыре соответственно в сторону сложения и вычитания. [1].

$$1 \leq m < \infty.$$

В заключении этого параграфа можно сказать, что выводы уравнений ничем не отличаются от выводов подобных уравнений в предыдущем параграфе (3).

5. Уравнения пятой степени

Введем в рассмотрение двучлен, который имеет следующий по порядку корень, которого нет при выводе уравнений четвертой степени.

$$m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) = m^5 - 10m^4 + 35m^3 - 50m^2 + 24m \quad (5.1)$$

Таким образом, имеем уравнение с пятью корням 0, 1, 2, 3, 4 в положительной числовой области.

Числовые значения для положительной числовой области будут:

$$\begin{array}{cccccccc} & 0, & 0, & 0, & 0, & 120, & 720, & 2520, \dots \dots \underline{S}_5(m) \\ & 0, & 0, & 0, & 0, & 120, & 600, & 1800, \dots \dots \underline{S}_5^1(m) \\ & -120, & 0, & 0, & 0, & 120, & 480, & 1200, \dots \dots \underline{S}_5^{11}(m) \\ & 360, & 120, & 0, & 0, & 120, & 360, & 720, \dots \dots \underline{S}_5^{111}(m) \\ & -360, & -240, & -120, & 0, & 120, & 240, & 360, \dots \dots \underline{S}_5^{IV}(m) \\ 120, & 120, & 129, & 120, & 120, & 120, & 120, & \dots \dots d \end{array}$$

Числовые значения для отрицательной числовой области будут:

$$\begin{array}{rcccccccc}
\underline{S}_5(m) & \dots & -15120, & -6720, & -2520, & -720, & -120, & 0 \\
\underline{S}_5^1(m) & \dots & 8400, & 4200, & 1800, & 600, & 120, & 0, \\
\underline{S}_5^{11}(m) & \dots & -4200, & -2400, & -1200, & -480, & -120, & 0, \\
\underline{S}_5^{111}(m) & \dots & 2520, & 1800, & 1200, & 720, & 360, & 120, & 0 \\
\underline{S}_5^{IV}(m) & \dots & -720, & -600, & -480, & -360, & -240, & -120, & 0 \\
d & \dots & 120, & 120, & 120, & 120, & 120, & 120, & 120
\end{array}$$

Рассчитаем положительную часть уравнения пятой степени.

$$\underline{S}_5^{IV}(m) = \underline{S}_5^{IV}(1) + d(m-1) \quad \underline{S}_5^{IV}(1) = 120$$

$$\underline{S}_5^{111}(m) = \underline{S}_5^{111}(1) + \underline{S}_5^{IV}(1)(m-1) + d \frac{(m-1)(m-2)}{2!} \quad \underline{S}_5^{111}(1) = 0$$

$$\underline{S}_5^{11}(m) = \underline{S}_5^{11}(1) + \underline{S}_5^{111}(1)(m-1) + \underline{S}_5^{IV}(1) \frac{(m-1)(m-2)}{2} + d \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ (m-3) \end{array} \right]$$

$\underline{S}_5^1(m)$ - вывод этого уравнения будет производиться подробно.

$$\underline{S}_5^1(1) = 0, \quad \underline{S}_5^1(2) = \underline{S}_5^1(1) + \underline{S}_5^{11}(1), \quad \underline{S}_5^1(3) = \underline{S}_5^1(1) + 2\underline{S}_5^{11}(1) + \underline{S}_5^{111}(1)$$

$$\underline{S}_5^1(4) = \underline{S}_5^1(3) + \underline{S}_5^{11}(3) = \underline{S}_5^1(1) + 3\underline{S}_5^{11}(1) + (1+2)\underline{S}_5^{111}(1) + \underline{S}_5^{IV}(1)$$

$$\underline{S}_5^1(5) = \underline{S}_5^1(4) + \underline{S}_5^{11}(4) = \underline{S}_5^1(1) + 4\underline{S}_5^{11}(1) + (1+2+3)\underline{S}_5^{111}(1) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] \underline{S}_5^{IV}(1) + d$$

$$\underline{S}_5^1(6) = \underline{S}_5^1(5) + \underline{S}_5^{11}(5) = \underline{S}_5^1(1) + 5\underline{S}_5^{11}(1) + (1+2+3+4)\underline{S}_5^{111}(1) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] \underline{S}_5^{IV}(1) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right] +$$

$$+ \left[\begin{array}{c} 1 + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] \end{array} \right] d$$

$$\underline{S}_5^1(7) = \underline{S}_5^1(6) + \underline{S}_5^{11}(6) = \underline{S}_5^1(1) + 6\underline{S}_5^{11}(1) + (1+2+3+4+5)\underline{S}_5^{111}(1) + \underline{S}_5^{IV}(1) \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array} \right] +$$

$$+ d \left[\begin{array}{c} 1 + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

.....

.....

.....

.

$$\underline{S}_5^1(m) = \underline{S}_5^1(m-1) + \underline{S}_5^{11}(m-1) = \underline{S}_5^1(1) + \underline{S}_5^{11}(m-1) + \underline{S}_5^{111}(1) \frac{(m-1)(m-2)}{2!} +$$

$$+ \underline{S}_5^{IV}(1) \left[\begin{array}{c} 1 \\ (m-3) \end{array} \right] + d \left[\begin{array}{c} 1 + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right] + \dots + \left[\begin{array}{c} 1 \\ (m-4) \end{array} \right] \end{array} \right]$$

$$\text{где: } \left| \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ (m-3) \end{array} \right| = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}$$

$$\left[\begin{array}{c} 1+ \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{c} 1 \\ (m-4) \end{array} \right| \end{array} \right] = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{24}$$

(см. 3.5-1 и 4.2)

Уравнение для $\underline{S}_5^1(m)$ на основании сказанного можно переписать в виде:

$$\underline{S}_5^1(m) = \underline{S}_5^1(1) + \underline{S}_5^{11}(1)(m-1) + \underline{S}_5^{111}(1) \frac{(m-1)(m-2)}{2} + \underline{S}_5^{1V}(1) \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} +$$

$$+ d \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{24}$$

$$\text{где: } \frac{(m-1)(m-2)}{2} = C_{(m-1)}^2, \quad \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} = C_{(m-1)}^3,$$

$$\frac{(m-1)(m-1)(m-3)(m-4)}{24} = C_{(m-1)}^4, \quad C_{(m-1)}^2, C_{(m-1)}^3, C_{(m-1)}^4 - \text{сочетания.}$$

Опуская промежуточные вычисления (алгоритм которых хорошо выявлен) сразу напишем уравнение для $\underline{S}_5(m)$.

$$\underline{S}_5(m) = \underline{S}_5(1) + \underline{S}_5^1(1)(m-1) + \underline{S}_5^{11}(1) \frac{(m-1)(m-2)}{2} + \underline{S}_5^{111}(1) \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} +$$

$$+ \underline{S}_5^{1V}(1) \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{24} + d \cdot \left| \begin{array}{c} 1+ \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right| \\ 1+ \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \\ \dots \\ \dots \\ 1+ \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{c} 1 \\ (m-5) \end{array} \right| \end{array} \right|$$

Подставляя в полученное уравнение значения: $\underline{S}_5(1) = 0$, $\underline{S}_5^1(1) = 0$, $\underline{S}_5^{11}(1) = 0$,

$\underline{S}_5^{111}(1) = 0$, $\underline{S}_5^{1V}(1) = 120$ и $d = 120$ и приравняв его с уравнением (5.1) получим:

$$\left| \begin{array}{c} 1+ \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right| \\ 1+ \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \\ \dots \\ 1+ \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{c} 1 \\ (m-5) \end{array} \right| \end{array} \right| = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{120} = C_{(m-1)}^5 \quad (5.2)$$

Таким образом, уравнение $\underline{S}_5(m)$ можно переписать в виде:

$$\underline{S}_5(m) = \underline{S}_5(1) + \underline{S}_5^1(1)C_{(m-1)}^1 + \underline{S}_5^{11}(1)C_{(m-1)}^2 + \underline{S}_5^{111}C_{(m-1)}^3 + \underline{S}_5^{1V}(1)C_{(m-1)}^4 + \underline{S}_5^V(1)C_{(m-1)}^5 \quad (5.3)$$

где: $\underline{S}_5(1)$ - коэффициент от значения величины которого зависят величины других коэффициентов.

$C_{(m-1)}^1, C_{(m-1)}^2, \dots, C_{(m-1)}^5$ - сочетания из $(m-1)$ элементов.

$$1 \leq m < \infty. \quad \underline{S}_5^V(1) = d$$

Уравнение для направления вычитания будет:

$$\begin{aligned} \underline{S}_5(m) = & \underline{S}_5(1) - \underline{S}_5^1(1)(m-1) + \underline{S}_5^{11}(1)\frac{(m-1)(m-2)}{2} - \underline{S}_5^{111}(1)\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} + \\ & + \underline{S}_5^{1V}(1)\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{24} - \underline{S}_5^V(1)\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{120} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Подставив в уравнение (5.4) значения коэффициентов с учетом их знаков получим:

$$\begin{aligned} \underline{S}_5(m) = & 0 - 120(m-1) - 480\frac{(m-1)(m-2)}{2} - 720\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} - \\ & - 480\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{24} - 120\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{120} \end{aligned}$$

После необходимых преобразований и сокращений получим:

$$\underline{S}_5(m) = -m^5 - 5m^4 - 5m^3 + 5m^2 + 6m \quad (5.4-1)$$

Таким образом, мы получили пару взаимнообратимых уравнений пятой степени.

$$\left. \begin{aligned} \underline{S}_5(m) &= m^5 - 10m^4 + 35m^3 - 50m^2 + 24m \\ \underline{S}_5(m) &= -m^5 - 5m^4 - 5m^3 + 5m^2 + 6m \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

где: $1 \leq m < \infty$.

Уравнение (5.4) в более компактной форме можно переписать в виде:

$$\underline{S}_5(m) = \underline{S}_5(1) - \underline{S}_5^1(1)C_{(m-1)}^1 + \underline{S}_5^{11}(1)C_{(m-1)}^2 - \underline{S}_5^{111}(1)C_{(m-1)}^3 + \underline{S}_5^{1V}(1)C_{(m-1)}^4 - \underline{S}_5^V(1)C_{(m-1)}^5 \quad (5.4-1)$$

где: $\underline{S}_5(1), \dots, \underline{S}_5^V$ - коэффициенты.

$C_{(m-1)}^1 - C_{(m-1)}^5$ сочетания.

Как видим при выводе уравнений пятой степени были использованы общие правила, которые были выведены при выводе уравнений меньших степеней. Специально это не оговаривается, потому что достаточно внимательно посмотреть на выводы этих уравнений.

6. Заключение

В настоящей работе показано, что сочетания равны суммам арифметических прогрессий, Причем суммы этих арифметических прогрессий изменяются по правилам, которые можно показать только в рекуррентной форме, то есть вычисления ведутся последовательно от степени первой к степени второй от второй степени к третьей от третьей степени к четвертой и так далее. В данной работе мы остановились на образовании с помощью статиче-

ского дифференцирования уравнения пятой степени, в котором показано образование суммы арифметических прогрессий равных сочетанию из $(m-1)$ элементов по 5. (см. уравнение 5.2). На основании этой суммы арифметических прогрессий равных сочетанию из $(m-1)$ элементов по пять построим сумму арифметических прогрессий равных сочетанию из $(m-1)$ элементов по шесть.

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c} 1+ \quad + \quad 1 \\ \left| \quad \quad \quad \right| \\ 1+ \quad + \quad 1 \\ \left| \quad \quad \quad \right| \\ 2 \end{array} \left| \begin{array}{c} + \quad + \quad 1 \\ \left| \quad \quad \quad \right| \\ 1+ \quad + \quad 1 \\ \left| \quad \quad \quad \right| \\ 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} + \quad \dots \quad + \quad + \quad 1 \\ \left| \quad \quad \quad \right| \\ 1+ \quad + \quad 1 \\ \left| \quad \quad \quad \right| \\ 2 \end{array} \left| \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ 1+ \quad + \quad 1 \\ \left| \quad \quad \quad \right| \\ 2 \end{array} \right| \dots \right) = \\
& = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{720} = C_{(m-1)}^6 \quad (6.1)
\end{aligned}$$

Это уравнение можно по желанию проверить, если по аналогии с ранее выведенными уравнениями повторить алгоритмы вывода для уравнений с первой по пятую степень.

Можно написать и сумму арифметических прогрессий равную числу сочетаний из $(m-1)$ элементов по семь и так далее.

Выпишем суммы арифметических прогрессий равных сочетаниям из $(m-1)$ элементов по числу, которое равно степени рассматриваемого уравнения. Сами арифметические прогрессии не показываем.

$$\begin{aligned}
C_{(m-1)}^1 &= (m-1) \\
C_{(m-1)}^2 &= \frac{(m-1)(m-2)}{2!} \\
C_{(m-1)}^3 &= \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3!} \\
C_{(m-1)}^4 &= \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{4!} \\
C_{(m-1)}^5 &= \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{5!} \\
C_{(m-1)}^6 &= \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{6!} \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots \\
C_{(m-1)}^n &= \frac{(m-1)(m-2)(m-3) \cdot \dots \cdot (m-n)}{n!}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

где: $C_{(m-1)}^1 \div C_{(m-1)}^n$ - сочетания из $(m-1)$ элементов.
 $2!, 3!, 4!, \dots, n!$ – факториалы.

Список используемой литературы

1. Кудрицкий, Геннадий Александрович. Нетрадиционная математика в целых числах. Нахождение делителей чисел и определение простых чисел [Электронный ресурс]: монография / Г. А. Кудрицкий. — Электрон. дан. (1 файл: 1,2 Мб). — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из сети Интернет (чтение, печать, копирование). — Текстовый файл. — <URL:<http://dl.unilib.neva.ru/dl/2092.pdf>>.
2. Кудрицкий, Геннадий Александрович. Нетрадиционная математика в целых числах. Нахождение делителей чисел и определение простых чисел. [Электронный ресурс]. Ч. 2 / Г. А. Кудрицкий. — Электрон. дан. (1 файл : 353 Кб). — СПб., 2012. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из сети Интернет (чтение, печать, копирование). — Adobe Acrobat Reader 6.0. — <URL:<http://dl.unilib.neva.ru/dl/2333.pdf>>.
3. Кудрицкий, Геннадий Александрович. Алгоритм разложения чисел на множители. Нахождение делителей чисел и определение простых чисел [Электронный ресурс]. Ч. 3: монография / Г.А. Кудрицкий; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. — Электрон. текстовые дан. (1 файл: 2,28 Мб). — Санкт-Петербург, 2013. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из сети Интернет (чтение, печать, копирование). — Текстовый документ. — Adobe Acrobat Reader 7.0. — <URL:<http://dl.unilib.neva.ru/dl/2/3523.pdf>>.
4. Кудрицкий, Геннадий Александрович. Вывод функции Эйлера для последовательностей упорядов и систем счисления [Электронный ресурс]. Ч. 4: учебное пособие / Г.А. Кудрицкий, Г.Д. Кадзов; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. — Электрон. текстовые дан. (1 файл: 228 Кб). — Санкт-Петербург, 2013. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из сети Интернет (чтение, печать, копирование). — Текстовый документ. — Adobe Acrobat Reader 7.0. — <URL:<http://dl.unilib.neva.ru/dl/2/3559.pdf>>.
5. Кудрицкий, Геннадий Александрович. Алгоритм разложения чисел на множители и определение простых чисел [Электронный ресурс]. Ч. 5: учебное пособие / Г.А. Кудрицкий, Г.Д. Кадзов; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. — Электрон. текстовые дан. (1 файл: 200 Кб). — Санкт-Петербург, 2013. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из сети Интернет (чтение, печать, копирование). — Тексто-

вый документ. — Adobe Acrobat Reader 7.0. —
<URL:<http://dl.unilib.neva.ru/dl/2/3558.pdf>>.

5. Энциклопедия кибернетики.: -Киев.: „Главная редакция украинской советской энциклопедии.,, 1975г.

Содержание.

Предисловие	2
1. Уравнения первой степени	3
2. Уравнения второй степени	5
3. Уравнения третьей степени	8
4. Уравнения четвертой степени	14
5. Уравнения пятой степени	16
6. Заключение	19
Список используемой литературы	21

