УДК 519.854

В.И. Хохлюк

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

АЛГОРИТМ ЗАПОЛНЕНИЯ СТАНДАРТНОЙ ТАБЛИЦЫ

В статье описана вычислительная схема для численного решения практических и теоретических задач. Такая схема реализует алгоритм заполнения стандартной таблицы (сверху вниз и слева направо). К вычислительным особенностям этой схемы относятся экономная память, возможность оценить число выполняемых операций, распараллеливание вычислений. Приведены расчетные формулы, используемые в схеме, а работа алгоритма заполнения стандартной таблицы иллюстрируется тремя числовыми примерами.

АЛГОРИТМ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА, ПАМЯТЬ КОМПЬЮТЕРА, ЧИСЛО ВЫПОЛНЯЕМЫХ ОПЕРАЦИЙ, РАСЧЕТНАЯ ФОРМУЛА, АЛГОРИТМ ЗАПОЛНЕНИЯ СТАНДАРТНОЙ ТАБЛИЦЫ, ВЕРШИНА МНОГОВЕРШИННИКА, ГРАНЬ МНОГОВЕРШИННИКА.

Введение

В работе [4] нами были представлены рекуррентные соотношения и теорема об оценке числа шагов алгоритма. Они служат теоретической основой для создания алгоритма заполнения стандартной таблицы. Указанный алгоритм предназначен для решения на компьютере практических и теоретических задач с помощью реализующей его программы.

Данная статья ставит своей целью предложить удобную вычислительную схему для реализации алгоритма; схема обладает несомненными преимуществами перед традиционно используемыми аналогами.

Сначала будет указан общий вид стандартной таблицы, а затем на трех конкретных числовых примерах иллюстрируется алгоритм ее заполнения. Все величины, входящие в стандартную таблицу, были уже вычислены в работе [4]. Однако для удобства мы снова приведем расчетные формулы. В позиции стандартной таблицы, где стоят вопросительные знаки, следует включать значения вычисленных величин.

В дальнейшем мы придерживаемся уже использованных прежде обозначений: n соответствует числу слагаемых в левой части группового уравнения; g_{i_j} и g_{i_s} отражают представление элемента конечной группы его номером, то есть неотрицательным целым числом [3].

Расчетные формулы, используемые в схеме вычислений

Согласно предлагаемой схеме вычислений, сначала находим порядок d_s элемента g_{i_s}, рассматривая при этом кратные kg_{i_s} вплоть до получения нуля g_0 группы G_d, где d – порядок группы G_d ($k = 1, 2, ..., d_s$; $d_s \le d$; $s = 1, 2, ..., n$).

Коэффициенты π_s нормированного линейного неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j t_j \ge 1,$$

задающего $(n - 1)$-мерную грань n-мерного многовершинника группового уравнения вида

$$\sum_{j=1}^{n} g_{i_j} t_j = h,$$

вычисляются как

$$\pi_s = \begin{cases} \max_{r=1}^{d_s}(1 - \psi_{s-1}(h - rg_{i_s})) / r, \\ \text{если } \psi_{s-1}(h - rg_{i_s}) < 1; \\ 0, \text{ если не существует} \\ \ \text{значения } r_s, \text{ на котором} \\ \text{достигается максимум,} \end{cases} \qquad (1)$$

где d_s – порядок элемента g_{i_s} ($d_s \le d;\ s = 1, 2, ..., n$).

Значения функций $\psi_s(g)$ и $i_s(g)$ вычисляются по формулам

$$\psi_s(g) = \min\{\psi_{s-1}(g), \psi_s(g - g_{i_s}) + \pi_s\} \quad (2)$$

и

$$i_s(g) = \begin{cases} i_{s-1}(g), \text{ если } \psi_{s-1}(g) < \\ < \psi_s(g - g_{i_s}) + \pi_s, \\ s, \quad \text{ если иначе} \end{cases} \tag{3}$$

($g = 1g_{i_s}, 2g_{i_s}, ..., d_s g_{i_s}$; $d_s \le d$; $s = 1, 2, ..., n$).

Значения функций $\psi'_s(g), i'_s(g)$ и $\psi''_s(g), i''_s(g)$ вычисляются следующим образом.

Сначала полагаем

$$\psi'_s(g') = \psi_{s-1}(g'),\ i'_s(g') = i_{s-1}(g') \tag{4}$$

(g' не является кратным элементу g_{i_s}; $d_s < d$). Затем вычисляем

$$\psi'_s(g' + rg_{i_s}) = \min\{\psi_{s-1}(g' + rg_{i_s}),$$
$$\psi'_s(g' + rg_{i_s} - g_{i_s}) + \pi_s\},$$

а также

$$i'_s(g' + rg_{i_s}) =$$
$$= \begin{cases} i_{s-1}(g' + rg_{i_s}), \\ \text{если } \psi_{s-1}(g' + rg_{i_s}) < \\ < \psi'_s(g' + rg_{i_s} - g_{i_s}) + \pi_s; \\ s, \text{ если иначе} \end{cases} \tag{5}$$

($r = 1, 2, ..., d_s$; $d_s < d$; $s = 1, 2, ..., n$).

Если $\psi'_s(g' + d_s g_{i_s}) \ne \psi_{s-1}(g')$, то полагаем

$$\begin{aligned} \psi''_s(g') &= \psi'_s(g' + d_s g_{i_s}), \\ i''_s(g') &= i'_s(g' + d_s g_{i_s}) \end{aligned} \tag{6}$$

и вычисляем

$$\psi''_s(g' + rg_{i_s}) = \min\{\psi_{s-1}(g' + rg_{i_s}),$$
$$\psi''_s(g' + rg_{i_s} - g_{i_s}) + \pi_s\}$$

а также

$$i''_s(g' + rg_{i_s}) =$$
$$= \begin{cases} i_{s-1}(g' + rg_{i_s}), \\ \text{если } \psi_{s-1}(g' + rg_{i_s}) < \\ < \psi''_s(g' + rg_{i_s} - g_{i_s}) + \pi_s; \\ s, \text{ если иначе} \end{cases} \tag{7}$$

($r = 1, 2, ...$; $d_s < d$; $s = 1, 2, ..., n$).

Вычислительные особенности алгоритма заполнения стандартной таблицы

Память. Для вычисления пары столбцов $\psi_s(g)$ и $i_s(g)$, которые находятся между первой и второй горизонтальными линиями, рекомендуется хранить в памяти не всю таблицу, а только предыдущую пару столбцов. Это дает существенную экономию памяти.

Операции. Предлагаемый алгоритм позволяет легко подсчитать число операций, необходимых для его выполнения.

Параллельные вычисления. Для $d_s < d$ в алгоритме заполнения стандартной таблицы имеется возможность естественно распараллелить вычисления.

Стандартная таблица

Приводим вид стандартной таблицы (табл. 1), при заполнении которой вычисляются:

1) коэффициенты линейного нормированного неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j t_j \ge 1,$$

задающего ($n - 1$)-мерную грань n-мерного многовершинника группового уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} g_{i_j} t_j = h,\ t \in Z_+^n, g_{i_j} \in G_d, h \in G_d;$$

2) значения функций $\psi_s(g)$ и $i_s(g)$ ($s = 1, 2, ..., n$);

3) компоненты n целочисленных точек, задающих нормированную линейную гиперплоскость

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j t_j = 1;$$

4) вспомогательные величины.

Напомним, что обозначения g_{i_j} и g_{i_s} отражают представление элемента конечной группы его номером.

Алгоритм заполнения стандартной таблицы вписывает в нее полученные значения сверху вниз и слева направо.

Первый числовой пример

Вычислим коэффициенты неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения

$$g_1 t_1 + g_2 t_2 + g_3 t_3 + g_4 t_4 = g_4$$
$$t \in Z_+^4, g_{i_j} \in G_5, g_4 \in G_5.$$

Результаты вычислений представлены в табл. 2.

Таблица 1

Вид стандартной таблицы

g_{i_s}			g_{i_1}		g_{i_2}		...	g_{i_n}	
d_s			?		?		...	?	
r_s			?		?		...	?	
π_s			?		?		...	?	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	...	ψ_n	i_n
g_0	0		0		0		...	0	
g_1	$+\infty$	0	?	?	?	?	...	?	?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
g_{d-1}	$+\infty$	0	?	?	?	?	...	?	?
π_s			?		?		...	?	
v_1			?		0		...	0	
v_2			?		?		...	0	
$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
v_n			?		?		...	?	

Таблица 2

Коэффициенты неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения (пример первый)

g_{i_s}			g_1		g_2		g_3		g_4	
d_s			5		5		5		5	
r_s			4		1		1		1	
π_s			1/4		2/4		3/4		4/4	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	ψ_3	i_3	ψ_4	i_4
g_0	0		0		0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	1/4	1	1/4	1	1/4	1	1/4	1
g_2	$+\infty$	0	2/4	1	2/4	2	2/4	2	2/4	2
g_3	$+\infty$	0	3/4	1	3/4	2	3/4	3	3/4	3
g_4	$+\infty$	0	4/4	1	4/4	2	4/4	3	4/4	4
π_s			1/4		2/4		3/4		4/4	
v_1			4		0		0		0	
v_2			0		2		0		0	
v_3			1		0		1		0	
v_4			0		0		0		1	

Таблица 3

Кратные элементы коэффициентов группового уравнения (пример первый)

$1g_1 = g_1$	$1g_2 = g_2$	$1g_3 = g_3$	$5g_3 = g_0$	$1g_4 = g_4$
$2g_1 = g_2$	$2g_2 = g_4$	$2g_3 = g_1$	$4g_3 = g_2$	$2g_4 = g_3$
$3g_1 = g_3$	$3g_2 = g_1$	$3g_3 = g_4$	$3g_3 = g_4$	$3g_4 = g_2$
$4g_1 = g_4$	$4g_2 = g_3$	$4g_3 = g_2$	$2g_3 = g_1$	$4g_4 = g_1$
$5g_1 = g_0$	$5g_2 = g_0$	$5g_3 = g_0$	$1g_3 = g_3$	$5g_4 = g_0$

При заполнении стандартной таблицы (см. табл. 2) удобно воспользоваться табличкой кратных элементов g_1, g_2, g_3, g_4 (табл. 3).

Нетрудно убедиться в том, что значения величины r_2, равные 1 и 2, дают одну и ту же вершину v_2.

Второй числовой пример

Покажем, как найти неравенство, которое задает грань многовершинника $P(G_6, N, h)$, проходящую через его вершину (3, 0, 0, 0, 0), где G_6 – циклическая группа шестого порядка, $N = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ и $h = g_3$ [3, 5]. Групповое уравнение имеет вид

$$g_1t_1 + g_2t_2 + g_3t_3 + g_4t_4 + g_5t_5 = g_3$$

$$t \in Z_+^5, g_{i_j} \in G_6, g_3 \in G_6.$$

Результаты вычислений коэффициентов этого неравенства представлены в табл. 4, где результаты вычисления функций $\psi_s(g)$ и $i_s(g)$, $s = 2, 3, 4$, записаны в один столбец. Эти индексные функции дают возможность найти точки, лежащие

Таблица 4

Коэффициенты неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения (пример второй)

g_{i_s}			g_1		g_2		g_3		g_4		g_5	
d_s			6		3		2		3		6	
r_s			3		1		1		2		1	
π_s			1/3		2/3		3/3		1/3		2/3	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	ψ_3	i_3	ψ_4	i_4	ψ_5	i_5
g_0	0		0		0		0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	1/3	1	1/3	1	1/3	1	1/3	1	1/3	1
g_2	$+\infty$	0	2/3	1	2/3	2	2/3	2	2/3	4	2/3	4
g_3	$+\infty$	0	3/3	1	3/3	2	3/3	3	3/3	4	3/3	5
g_4	$+\infty$	0	4/3	1	4/3	2	4/3	3	1/3	4	1/3	4
g_5	$+\infty$	0	5/3	1	5/3	2	5/3	3	2/3	4	2/3	5
π_s			1/3		2/3		3/3		1/3		2/3	
v_1			3		0		0		0		0	
v_2			1		1		0		0		0	
v_3			0		0		1		0		0	
v_4			1		0		0		2		0	
v_5			0		0		0		1		1	

на гиперплоскости $\pi t = 1$.

Используя равенства (1), вычисляем коэффициенты π_s и r_s:

$$\pi_1 = \max_{r=1}^{6}\{(1-\psi_0(g_3 - rg_1))/r \mid \psi_0(g_3 - rg_1) < 1\} = (1-\psi_0(g_3 - 3g_1))/3 = = 1/3,\ r_1 = 3;$$

$$\pi_2 = \max_{r=1}^{3}\{(1-\psi_1(g_3 - rg_2))/r \mid \psi_1(g_3 - rg_2) < 1\} = (1-\psi_1(g_3 - 1g_2))/1 = = 2/3,\ r_2 = 1;$$

$$\pi_3 = \max_{r=1}^{2}\{(1-\psi_2(g_3 - rg_3))/r \mid \psi_2(g_3 - rg_3) < 1\} = (1-\psi_2(g_3 - 1g_3))/1 = = 3/3,\ r_3 = 1;$$

$$\pi_4 = \max_{r=1}^{3}\{(1-\psi_3(g_3 - rg_4))/r \mid \psi_3(g_3 - rg_4) < 1\} = (1-\psi_3(g_3 - 2g_4))/2 = = 1/3,\ r_4 = 3;$$

$$\pi_5 = \max_{r=1}^{6}\{(1-\psi_4(g_3 - rg_5))/r \mid \psi_4(g_3 - rg_5) < 1\} = (1-\psi_4(g_3 - 1g_5))/1 = = 2/3,\ r_5 = 1.$$

Заметим, что коэффициент $\pi_1 = 1/3$ можно вычислить без использования табл. 4, то есть из условия $\pi_1 \cdot 3 = 1$. Именно такой случай имеет место в прямом методе.

Таким образом, неравенство

$$\frac{1}{3}t_1 + \frac{2}{3}t_2 + \frac{3}{3}t_3 + \frac{1}{3}t_4 + \frac{2}{3}t_5 \geq 1$$

задает грань многовершинника $P(G_6, N, h)$, проходящую через точку (3, 0, 0, 0, 0).

Функции ψ_1 и i_1, ψ_5 и i_5 вычисляются по формулам (2) и (3).

В табл. 5 показаны результаты вычисления коэффициентов функций ψ_2 и i_2, ψ_3 и i_3, ψ_4 и i_4.

Известно, что в качестве начального элемента может быть взят любой элемент смежного класса. Рассмотрим, например, смежный класс $\{g_1, g_3, g_5\}$. Из данных табл. 5 видно, что переход к другому начальному элементу не меняет значений функции для элементов этого класса, но меняет порядок вычисления значений.

Вычисление вершин. Такую процедуру называют также обратным ходом. Вершина есть по сути оптимальное решение групповой задачи минимизации со специально построенной линейной целевой функцией. Для получения нужного результата рассматриваем нулевой вектор (0, 0, 0, 0, 0), заменяем 0 в позиции 1 на $r_1 = 3$, и тогда получаем вершину $v_1 = (3, 0, 0, 0, 0)$ (заданную).

Далее, рассматриваем нулевой вектор (0, 0, 0, 0, 0), заменяем 0 в позиции 2 на $r_2 = 1$. Вычисляем $h_1 = h - g_2 1 = g_1$, в табл. 4 находим индекс $i_2(g_1) = 1$, увеличиваем 0 в позиции 1 в векторе (0, 1, 0, 0, 0) на единицу, получаем $h_2 = h - g_2 1 - g_1 1 = g_0$ и вершину $v_2 = (1, 1, 0, 0, 0)$; на этом заканчиваем вычисление вершины.

Снова рассматриваем нулевой вектор (0, 0, 0, 0, 0), заменяем 0 в позиции 3 на $r_3 = 1$. Вычисляем $h_1 = h - g_3 1 = g_0$, , получаем вершину $v_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$; на этом опять заканчиваем вычисление вершины.

Еще раз рассматриваем нулевой вектор (0, 0, 0, 0, 0), заменяем 0 в позиции 4 на

Таблица 5

Результаты вычисления значений функций $\psi_s(g)$ и $i_s(g)$, $s = 2, 3, 4$ (пример второй)

g	ψ'_2	i'_2	ψ'_2	i'_2	ψ'_3	i'_3	ψ'_3	i'_3	ψ'_3	i'_3	ψ'_4	i'_4	ψ'_4	i'_4
g_0	0				0						0			
g_1			1/3	1			1/3	1					1/3	1
g_2	2/3	2							2/3	2	2/3	4		
g_3			3/3	2	3/3	3							3/3	4
g_4	4/3	2					4/3	3			1/3	4		
g_5			5/3	2					5/3	3			2/3	4

$r_4 = 2$. Вычисляем $h_1 = h - g_4 2 = g_1$, в табл. 4 находим индекс $i_4(g_1) = 1$, увеличиваем 0 в позиции 1 в векторе (0, 0, 0, 2, 0) на единицу, получаем $h_2 = h - g_4 2 - g_1 1 = g_0$ и вершину $v_4 = (1, 0, 0, 2, 0)$; на этом заканчиваем вычисление вершины.

Опять рассматриваем нулевой вектор (0, 0, 0, 0, 0), заменяем 0 в позиции 5 на $r_5 = 1$. Вычисляем $h_1 = h - g_5 1 = g_4$, в табл. 4 находим индекс $i_5(g_4) = 4$, увеличиваем 0 в позиции 4 в векторе (0, 0, 0, 0, 1) на единицу, получаем $h_2 = h - g_5 1 - g_4 1 = g_0$ и вершину $v_5 = (0, 0, 0, 1, 1)$; на этом заканчиваем вычисление вершины.

Проверка правильности результата. Приводим соотношения для проверки.

$$g_1 3 = g_3,\; g_1 1 + g_2 1 = g_3,\; g_3 1 = g_3,$$
$$g_1 1 + g_4 2 = g_3,\; g_4 1 + g_5 1 = g_3;$$

$$\frac{1}{3}3 = 1,\; \frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}1 = 1,\; \frac{3}{3} = 1,$$
$$\frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}2 = 1,\; \frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}1 = 1.$$

Таким образом, мы показали, как с помощью табл. 4 получить пять точек, определяющих гиперплоскость $\pi t = 1$. Эти точки являются вершинами многовершинника $P(G_6, N, h)$. Они уже приведены в табл. 4 под второй горизонтальной чертой. При этом их координаты записаны в строку.

Третий числовой пример

Приведем пример вычисления коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения вида

$$\begin{gathered} g_1 t_1 + g_2 t_2 + g_3 t_3 = g_3 \\ t \in Z_+^3, g_{i_j} \in G_4, g_3 \in G_4. \end{gathered} \tag{8}$$

Результаты вычислений представлены в табл. 6.

Приведем пример вычисления коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения вида

$$\begin{gathered} g_3 t_3 + g_2 t_2 + g_1 t_1 = g_3 \\ t \in Z_+^3, g_{i_j} \in G_4, g_3 \in G_4. \end{gathered} \tag{9}$$

Результаты вычислений представлены в табл. 7.

Очевидно, что уравнения (8) и (9) эк-

Таблица 6

Коэффициенты неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения (8) (пример третий)

g_{i_s}			g_1		g_2		g_3	
d_s			4		2		4	
r_s			3		1		1	
π_s			1/3		2/3		1	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	ψ_3	i_3
g_0	0		0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	1/3	1	1/3	1	1/3	1
g_2	$+\infty$	0	2/3	1	2/3	2	2/3	2
g_3	$+\infty$	0	3/3	1	3/3	2	3/3	3
π_s			1/3		2/3		1	
v_1			3		0		0	
v_2			1		1		0	
v_3			0		0		1	

Таблица 7

Вычисленные коэффициенты неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения (9) (пример третий)

g_{i_s}			g_1		g_2		g_3	
d_s			4		2		4	
r_s			1				1	
π_s			1		0		1	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	ψ_3	i_3
g_0	0		0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	3	1	1	2	1	3
g_2	$+\infty$	0	2	1	0	2	0	2
g_3	$+\infty$	0	1	1	1	2	1	3
π_s			1		0		1	
v'_1			1		0		0	
v'_2			1		2		0	
v'_3			0		1		1	

вивалентны. Многовершинник P имеет три вершины и пять граней: две построенные и три координатные плоскости.

Все целочисленные точки v_1, v_2, v_3 в табл. 6, определяющие соответствующую плоскость, являются вершинами многовершинника P, а точка v'_2 из табл. 7 вершиной не является.

Обозначим через v_1, v_2, v_3 вершины многовершинника P, а через f_1, f_2, f_3 $(t_1 = 0)$, f_4 $(t_2 = 0)$, f_5 $(t_3 = 0)$ – его грани. Тогда получим вершинно-граневую матрицу инциденции:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
v_1	1	0	0	1	1
v_2	1	1	0	0	1
v_3	1	1	1	1	0

Заключение

Итак, данная статья представляет удобную вычислительную схему для численного решения практических и теоретических задач, обладающую рядом несомненных преимуществ перед традиционно используемыми. К преимуществам этой схемы следует отнести экономную память, возможность оценить число выполняемых операций и распараллеливание вычислений. Работа алгоритма заполнения стандартной таблицы иллюстрируется тремя числовыми примерами, которые доводят решение поставленной задачи вплоть до стадии создания программы на компьютере. Заключительным шагом может быть написание конкретной программы и проведение соответствующего вычислительного эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Курош А.Г.** Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 432 с.

2. **Хохлюк В.И.** Параллельные алгоритмы целочисленной оптимизации: монография. М.: Радио и связь, 1987. 224 с.

3. **Хохлюк В.И.** Методы дискретной оптимизации: учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во Новосибирского государственного университета, 2013. Ч. 1. 154 с.

4. **Хохлюк В.И.** Групповая задача минимизации // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 3(201). С. 126–130.

5. **Ху Т.** Целочисленное программирование и

потоки в сетях. Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 519 с.

6. **Gomory R.E.** Some polyhedra related to combinatorial problems. *Journal of Linear Algebra and its Applications.* 1969. Vol. 2, pp. 451-558.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ХОХЛЮК Виталий Иванович – *доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.*

630090, Россия, г. Новосибирск, ул. Коптюга, 4

vit@academ.org

Khokhlyuk V.I. THE ALGORITHM FOR COMPLETING THE STANDARD TABLE.

The present article describes the computational scheme for numerical solving practical and theoretical problems. This scheme realizes the algorithm for completing the standard table (from top to bottom and from left to right).

Among the computation features of this scheme are computer memory saving, the possibility to estimate the number of executed operations, parallelization of computations. The calculating formulae used in the scheme are given and the work of the algorithm for completing the standard table is illustrated with three numerical examples.

The first example describes the simplest case when every coefficient of the group equation induces the whole finite group.

The second example describes the general case. There could be some group elements among the coefficients of the group equation, which order is smaller than the finite group one.

The third example shows that not all the points defining the hyperplane are the vertices of the polytope of the group equation. Note that in the applications the coefficients of the inequation, which defines the face of the polytope, are calculated with the filling of the standard table (this inequation is called the cut or the valid inequation in discrete optimization).

ALGORITHM, COMPUTATIONAL SCHEME, COMPUTER MEMORY, NUMBER OF EXECUTED OPERATIONS, CALCULATING FORMULA, ALGORITHM FOR COMPLETING STANDARD TABLE, VERTEX OF POLYTOPE, FACET OF POLYTOPE.

REFERENCES

1. **Kurosh A.G.** *The course of the higher algebra.* Moscow, Nauka, 1975. 432 p. (rus)

2. **Khokhlyuk V.I.** *Parallel algorithms of integer optimization.* Moscow, Radio i svyaz, 1987. 224 p. (rus)

3. **Khokhlyuk V.I.** *Discrete optimization methods.* Novosibirsk, Novosibirsk State University, 2013. 154 p. (rus)

4. **Khokhlyuk V.I.** The group minimization problem. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and mathematics*, 2014, No. 3(201), pp. 126-130. (rus)

5. **Hu T.** *Integer Programming and Network Flows.* Moscow, Mir, 1974. 519 p. (rus)

6. **Gomory R.E.** Some polyhedra related to combinatorial problems. *Journal of Linear Algebra and its Applications*, 1969, Vol. 2, pp. 451-558.

THE AUTHOR

KHOKHLYUK Vitaly I.

Sobolev Institute of Mathematics

4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russia

vit@academ.org