

doi: 10.5862/MCE.51.1

Влияние граничных условий на берегах трещины на процесс разрушения поликристаллической пьезокерамики

*Аспирант И.В. Ивашов;**к. ф.-м. н., доцент А.С. Семенов,**Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*

Аннотация. В настоящее время стремительно развивается мониторинг целостности конструкций и сооружений (structural health monitoring), средства и методы которого позволяют оценивать состояние элементов конструкции в реальном времени. Мониторинг проводится на основании данных, полученных от различных датчиков, большинство из которых сконструированы с использованием пьезоэлектрических материалов. Оценка ресурса и трещиностойкости поликристаллической пьезокерамики в настоящее время является не до конца решенной задачей.

В статье рассмотрены основные положения линейной электромеханики разрушения, параметры и критерии трещиностойкости. Основным отличием от линейной механики разрушения является необходимость учета диэлектрической проницаемости среды внутри трещины, а также сил кулоновского взаимодействия берегов трещины. Рассмотрены различные виды граничных условий на берегах трещины и предложены эффективные алгоритмы их численной реализации.

В статье представлены результаты конечноэлементного моделирования эксперимента, проведенного на компактных пьезоэлектрических образцах. Выполнен анализ влияния граничных условий на берегах трещины на параметры трещиностойкости. Произведено сравнение различных критериев трещиностойкости с экспериментальными данными.

Ключевые слова: пьезоэлектричество; трещина; разрушение

Введение

В XIX веке для оценки степени поврежденности колес железнодорожного состава использовался звук, возникающий при ударе молотка о колесо. В XX веке для оценки работоспособности генераторов использовался метод вибродиагностики [1], на основе которого разработаны некоторые современные методы диагностики состояния объекта [2]. Однако современные методы проектирования и оценки ресурса [3, 4], несмотря на свой высокий уровень развития, не всегда обладают способностью учесть все потенциальные механизмы разрушения. В настоящее время в связи с повышением сложности инженерных конструкций, стремлением к уменьшению уязвимости ответственных объектов крупных мегаполисов в условиях техногенных и природных катаклизмов наблюдается повышенный интерес к разработке различных методов оценки работоспособности конструкций, которые сформировали отдельную отрасль – мониторинг целостности конструкций (structural health monitoring) [5, 6].

Мониторингом целостности конструкций принято называть процесс выявления повреждений в конструкции. Повреждением в данном контексте является необратимое изменение свойств материала и/или геометрии системы, которое негативно влияет на ее работоспособность. Процесс мониторинга включает в себя наблюдение за системой с помощью данных, полученных с набора датчиков, выделение нужных характеристик и статистическую оценку полученных данных. Таким образом, мониторинг дает информацию о работоспособности конструкции в процессе ее строительства и эксплуатации. Также имеется возможность быстро оценить степень поврежденности конструкции в случае землетрясений, тайфунов, взрывов и других экстремальных ситуаций.

В качестве характерных примеров реализации мониторинга целостности уникальных конструкций могут быть упомянуты следующие.

- Система мониторинга мостов Цинма (рис. 1), Тинг Кау и Кап Шуй Мун в Гонконге [6] (Wind and Structural Health Monitoring System, WASHMS) стоимостью 1,3 млн. долларов. Система состоит из более 1500 датчиков, включающих в себя акселерометры, тензодатчики, датчики перемещений, датчики угла наклона, ветромеры, температурные датчики, а также датчики динамической оценки нагрузки.
- Система мониторинга моста Рион-Андирион в Греции, состоящая из более чем 100 датчиков.

Ивашов И.В., Семенов А.С. Влияние граничных условий на берегах трещины на процесс разрушения поликристаллической пьезокерамики

- Система мониторинга телебашни Гуанчжоу – второй по высоте телебашни в мире (610 м), построенной в 2009 году – включает в себя более 600 датчиков на несущей конструкции и около 100 сенсоров на антенной части [6].
- Мечеть аль-Харам в Саудовской Аравии оснащена более чем 600 датчиками, установленными в основании и колоннах сооружения.



Рисунок 1. Мост Цинма в Гонконге: а – внешний вид; б – места расположения датчиков [6]

В настоящий момент для производства датчиков широко используются пьезоэлектрические материалы [7]. Основными отличительными особенностями пьезодатчиков (ПД), предопределившими их широкое применение на практике, являются [8]:

- высокая надежность;
- малые массогабаритные показатели;
- высокая радиационная стойкость;
- стойкость к действию различных агрессивных сред;
- высокая термостойкость: для марок пьезокерамики ЦТС, ПКР работоспособность сохраняется при температурах до 300–400 °С, марки на основе кобальта способны выдерживать температуру более 700 °С;
- возможность использования непосредственно без дополнительных кинематических связей с объектом измерения;
- отсутствие тока и связанных с этим тепловыделений в диапазоне инфранизких частот, что обеспечивает взрывобезопасность.

Поликристаллическая пьезокерамика, являющаяся наиболее характерным примером рассматриваемого класса материалов, находит все более широкое применение в современной технике, что в сочетании с ее повышенной хрупкостью приводит к необходимости проведения детального анализа прочности и трещиностойкости элементов подобных конструкций. Проблема формулировки критерия разрушения в условиях совместного действия механических нагрузок и электрического воздействия до сих пор не получила исчерпывающего решения. В данной работе на основе сопоставления результатов расчетов с экспериментами делается попытка учесть электропроницаемость пространства внутри трещин и оценить степень влияния максвелловских напряжений на берегах трещины на трещиностойкость пьезокерамических материалов.

1. Методы анализа трещиностойкости пьезокерамических материалов

В данной работе при анализе трещиностойкости пьезокерамических материалов рассматриваются энергетические критерии механики разрушения, учитывающие влияние электрического поля как на величину трещиноподвижной силы, так и на вид граничных условий на берегах трещины. При формулировке критерия разрушения пьезокерамических материалов возникают вопросы выбора критериальной характеристики напряженно-деформируемого и полевого состояний (скорость освобождения полной энергии и/или ее отдельных составляющих – механической, электрической, инвариантные контурные интегралы, комбинации коэффициентов интенсивности), определяющей условия реализации докритического и критического роста трещины.

Основой для формулировки критерия разрушения поликристаллической пьезокерамики являются известные из литературы результаты экспериментов [9–15] при комбинированном Ивашов И.В., Семенов А.С. Влияние граничных условий на берегах трещины на процесс разрушения поликристаллической пьезокерамики

электромеханическом воздействии, которые указали на трудности использования единого критерия во всех рассмотренных случаях. В данном исследовании делается попытка введения подобного единого универсального критерия путем учета электропроницаемости пространства между берегами трещины.

1.1. Коэффициенты интенсивности напряжений

Механические и электрические поля обладают одинаковой асимптотикой при приближении к вершине трещины (рис. 2) [16]. Математические выражения асимптотических разложений для тензора напряжений σ , вектора электрических смещений \mathbf{D} , вектора перемещений \mathbf{u} и электрического скалярного потенциала φ в окрестности вершины трещины определяются в полярных координатах (r, θ) уравнениями:

$$\sigma(r, \theta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I f^I(\theta) + K_{II} f^{II}(\theta) + K_{III} f^{III}(\theta) + K_{IV} f^{IV}(\theta)] \quad (1)$$

$$\mathbf{D}(r, \theta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I \mathbf{g}^I(\theta) + K_{II} \mathbf{g}^{II}(\theta) + K_{III} \mathbf{g}^{III}(\theta) + K_{IV} \mathbf{g}^{IV}(\theta)] \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(r, \theta) \approx \sqrt{\frac{2r}{\pi}} [K_I \mathbf{d}^I(\theta) + K_{II} \mathbf{d}^{II}(\theta) + K_{III} \mathbf{d}^{III}(\theta) + K_{IV} \mathbf{d}^{IV}(\theta)] \quad (3)$$

$$\varphi(r, \theta) \approx \sqrt{\frac{2r}{\pi}} [K_I v^I(\theta) + K_{II} v^{II}(\theta) + K_{III} v^{III}(\theta) + K_{IV} v^{IV}(\theta)] \quad (4)$$

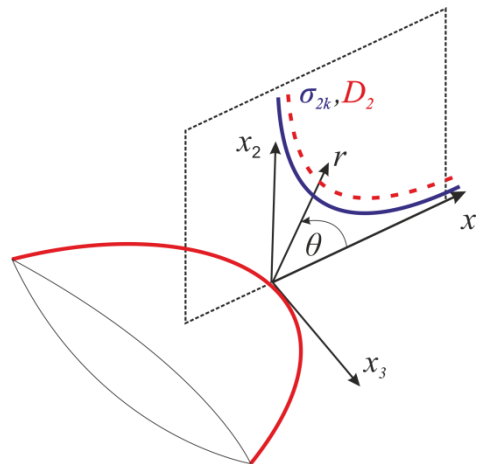


Рисунок 2. Сингулярные поля в окрестности фронта трещины

Механические напряжения (1) и компоненты вектора диэлектрических смещений (2) имеют сингулярность вида $1/\sqrt{r}$. Компоненты вектора перемещений (3) и электрический потенциал (4) характеризуются зависимостью вида \sqrt{r} . Угловые функции f^N, g^N, d^N, v^N зависят только от параметров материала. К механическим коэффициентам интенсивности напряжений K_I, K_{II}, K_{III} добавляется коэффициент интенсивности диэлектрических смещений K_{IV} , который характеризует сингулярность компонент вектора диэлектрических смещений в вершине трещины. Формулы (1)–(4) показывают, что существует взаимное влияние механических и электрических величин в вершине трещины.

1.2. Трещиноподвижная сила

Изменение полной (электрической и механической) потенциальной энергии $\Delta\Pi$ в теле при подрастании трещины, приводящем к возникновению новой поверхности разрушения Δa , представляет собой трещиноподвижную силу G (скорость освобождения энергии) и определяется равенством

$$G = - \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \Pi}{\Delta a} = - \frac{d\Pi}{da} = G_m^I + G_m^{II} + G_m^{III} + G_e. \quad (5)$$

При использовании линейных моделей материала зависимость между трещинодвижущей силой и коэффициентами интенсивности $\mathbf{K} = \{K_{II}, K_I, K_{III}, K_{IV}\}^T$ выглядит следующим образом [17]:

$$G = \frac{1}{2} \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{Y}(C, e, \kappa) \mathbf{K}, \quad (6)$$

где матрица \mathbf{Y} зависит от упругих C , электрических κ и пьезоэлектрических e модулей и направления поляризации.

1.3. Критерии трещиностойкости для пьезоматериалов

Традиционно используемый в механике энергетический критерий начала роста трещины

$$G = G_c, \quad (7)$$

в котором

$$G = \frac{1}{2} (Y_{22} K_I^2 + 2Y_{24} K_I K_{IV} + Y_{44} K_{IV}^2), \quad (8)$$

приводит к значительному расхождению прогнозов и результатов экспериментов [9–15].

Предложенный в работе [9] критерий

$$G_m = G_c, \quad (9)$$

основанный только на рассмотрении механической составляющей G_m : $G = G_m + G_e$, позволяет получить хорошее совпадение с рядом экспериментов [9, 15]. G_m вычисляется на основе выражения:

$$G_m = \frac{1}{2} (Y_{22} K_I^2 + Y_{24} K_I K_{IV}). \quad (10)$$

Нелинейные критерии механики разрушения при комбинированном электромеханическом воздействии, а также определяющие уравнения нелинейного поведения пьезоэлектрических материалов и методы их интегрирования представлены в работах [18–22].

1.4. Формулировка краевой задачи пьезоэлектричества

Для определения механических и электрических полей, а также соответствующих коэффициентов интенсивности $K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV}$ необходимо получить решение связанной краевой задачи пьезоэлектричества, формулировка которой в дифференциальной форме включает в себя:

- уравнения равновесия (статический случай):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_V = 0; \quad (11)$$

- уравнение Гаусса (одно из уравнений Максвелла в электростатическом случае)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_V; \quad (12)$$

- кинематические соотношения (случай малых деформаций)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}; \quad (13)$$

- определение скалярного потенциала (позволяет автоматически удовлетворить уравнению Фарадея)

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (14)$$

а также определяющие уравнения линейного пьезоэлектрического материала

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{c}^E \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - {}^3\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}, \tag{15}$$

$$\mathbf{D} = {}^3\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\kappa}^e \cdot \mathbf{E}. \tag{16}$$

Выше введены обозначения: \mathbf{f}_V – вектор объемных сил; q_V – объемная плотность электрических зарядов (которая в большинстве ситуаций для пьезоэлектрических тел равна нулю); ${}^4\mathbf{c}^E$ – тензор модулей упругости (4-го ранга); \mathbf{e} – тензор пьезоэлектрических модулей (3-го ранга); $\boldsymbol{\kappa}^e$ – тензор модулей диэлектрической проницаемости (2-го ранга). 22 скалярных линейных уравнения (11)–(16) содержат 22 неизвестные скалярные функции (компоненты тензоров и векторов $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$, а также скаляр φ).

При решении краевых задач для ограниченных областей в качестве граничных условий на внешней поверхности тела рассматриваются уравнения:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{S_\sigma} = \mathbf{f}_S, \tag{17}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}|_{S_D} = -q_S, \tag{18}$$

$$\mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{u}_S, \tag{19}$$

$$\varphi|_{S_\varphi} = \varphi_S, \tag{20}$$

где поверхность $S = \partial\Omega$, ограничивающая тело $\Omega \in \mathbf{R}^3$, может быть представлена в виде $S = S_\sigma \cup S_u$ ($S_\sigma \cap S_u = \emptyset$), для электрических граничных условий имеется другое независимое разбиение границы $S = S_D \cup S_\varphi$ ($S_D \cap S_\varphi = \emptyset$); \mathbf{n} – вектор внешней единичной нормали к S ; $\mathbf{f}_S, q_S, \mathbf{u}_S, \varphi_S$ – заданные функции координат. На электродах, запитываемых генераторами электрического напряжения, задаются постоянные (по пространству) потенциалы φ_S , которые допускают зависимость от времени. На электродах, запитываемых генераторами электрического тока, значения постоянных потенциалов φ_S неизвестны. Для их определения используется дополнительное равенство, выражающее условие заданного на электроде суммарного электрического заряда Q (или тока $I = \frac{dQ}{dt}$): $\int_{S_\varphi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} dS = Q$. Условия симметрии имеют вид

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}|_{S_{D_{SYM}}} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{S_{u_{SYM}}} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{n}|_{S_{\sigma_{SYM}}} = 0.$$

В двумерном случае для решения краевых задач пьезоэлектричества для тел с относительно простой геометрией, содержащих трещины, используются комплексные переменные [16–17]. В общем случае для тел с нетривиальной геометрией применяются численные методы.

На практике широкое распространение получили вариационные формулировки краевой задачи (11)–(20), используемые для получения решения на основе метода конечных элементов. При применении в качестве базовых независимых переменных вектора перемещений \mathbf{u} и скалярного электрического потенциала φ вводится следующая вариационная формулировка (слабая форма):

$$\int_V \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{E} \rangle dV = \int_V \langle \boldsymbol{\sigma}_V \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} - q_V \delta\varphi \rangle dV + \int_S \langle \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} - q_S \delta\varphi \rangle dS, \tag{21}$$

где предполагаются выполненными равенства $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\delta}\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} \delta\varphi$, а также определяющие уравнения (15)–(16). Естественные граничные условия (17)–(18) получаются следствием вариационного принципа (21), в то время как существенные граничные условия (19)–(20) должны выполняться независимо и задаваться дополнительно.

1.5. Граничные условия на берегах трещины в пьезоэлектриках

В данной работе рассматриваются различные способы учета электропроницаемости трещины и предлагаются различные подходы к их численной реализации для получения единого критерия трещиностойкости пьезокерамических материалов. Традиционно в качестве граничного условия на берегах трещины (Γ_1 и Γ_2) при расчете трещиностойкости пьезоэлектриков используется условие равенства нулю нормальной компоненты вектора диэлектрических смещений

$$D_n|_{\Gamma_{1,2}} = 0 \quad (22)$$

или условие равенства на противоположных берегах значений скалярных потенциалов

$$\varphi|_{\Gamma_1} = \varphi|_{\Gamma_2}. \quad (23)$$

Оба условия соответствуют моделям **непроницаемой** и **проницаемой** трещины. В реальности среда между берегами трещины обладает конечной диэлектрической проницаемостью, что может быть учтено на основе аналогии с моделью плоскопараллельного конденсатора и записано для моды раскрытия I в виде нелинейного граничного условия для **полупроницаемой** трещины:

$$D_n|_{\Gamma_{1,2}} = -\kappa_c \frac{\Delta\varphi}{\Delta u_n}, \quad (24)$$

где $\Delta\varphi = \varphi|_{\Gamma_2} - \varphi|_{\Gamma_1}$ – разность потенциалов между берегами трещины; $\Delta u_n = u_n|_{\Gamma_2} - u_n|_{\Gamma_1}$ – относительное смещение берегов трещины по нормали; κ_c – диэлектрическая проницаемость среды между берегами трещины. Впервые такое граничное условие было введено китайскими учеными Hao и Shen [23]. Затем в работе Landis [24] оно было дополнено учетом сил кулоновского взаимодействия берегов трещины, которое может быть введено в модель посредством задания нормальных компонент тензора напряжений на берегах трещины, свободных от внешних механических воздействий:

$$\sigma_{nn}|_{\Gamma_{1,2}} = \frac{1}{2} \kappa_c \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta u_n} \right)^2. \quad (25)$$

Касательные напряжения при этом предполагаются равными нулю.

Условия (22) и (23) могут быть получены частными случаями (24) при $\kappa_c = 0$ и $\kappa_c \rightarrow \infty$.

В работе [25] были получены коэффициенты интенсивности для трещины Гриффитса с использованием двух вариантов граничных условий:

- полупроницаемая трещина (24) с учетом кулоновского взаимодействия (25) и
- полупроницаемая трещина (24) со свободными берегами трещины (без учета от максвелловских напряжений):

$$\sigma_{nm}|_{\Gamma_{1,2}} = 0. \quad (26)$$

Различия в коэффициентах интенсивности получились порядка 10 %, что указывает на необходимость использования условия (25) при проведении расчетов в особо ответственных случаях.

Ниже рассматриваются два метода численной реализации нелинейного граничного условия (24), ориентированные на выполнение конечно-элементных расчетов пьезокерамических объектов с трещинами в конечноэлементном пакете ANSYS. Диэлектрическая проницаемость материала трещины κ_c считается достаточно малой в сравнении с диэлектрической проницаемостью пьезоэлектрика $\kappa = 10 \div 1000 \kappa_c$, деформации в расчетах предполагаются малыми. В идеализированном варианте в качестве κ_c может быть выбрана величина, соответствующая

воздуху, однако, как показано в работе [27], наличие шероховатости приводит к повышению указанного значения.

2. Численная реализация граничных условий

2.1. Метод простой итерации

На первом шаге решается краевая задача с граничным условием $D_n = 0$ (непроницаемая трещина $\kappa_c = 0$). На последующих шагах используется граничное условие:

$$D_n^{(i+1)} = -\kappa_c \frac{\Delta\varphi^{(i)}}{\Delta u_n^{(i)}}, \quad (27)$$

где i – номер итерации. Вычисления $D_n^{(i+1)}$ с использованием (27) проводятся для каждого узла конечно-элементной сетки на берегах трещины на основе значений $\varphi^{(i)}$ и $u_n^{(i)}$, полученных на предшествующей итерации. Метод достаточно хорошо сходится при малых значениях κ_c , но при значениях порядка $10^{-2}\kappa$ схема перестает работать.

2.2. Метод секущих

На первых двух шагах решаются задачи для проницаемой и непроницаемой трещин с граничными условиями: $D_n = 0$ ($\kappa_c = 0$) и $\Delta\varphi = 0$ ($\kappa_c \rightarrow \infty$). На последующих шагах используется рекуррентная формула, соответствующая методу секущих:

$$D_n^{(i+1)} = D_n^{(i)} - \left[1 + \kappa_c \frac{u_n^{(i-1)} \Delta\varphi^{(i)} - \Delta u_n^{(i)} \Delta\varphi^{(i-1)}}{u_n^{(i)} \Delta\varphi^{(i)} - \Delta u_n^{(i)} D_n^{(i-1)}} \right]^{-1} \left(D_n^{(i)} + \kappa_c \frac{\Delta\varphi^{(i)}}{\Delta u_n^{(i)}} \right). \quad (28)$$

Метод хорошо сходится при значениях $\kappa_c < 10^{-2}\kappa$, при более высоких значениях κ_c невязка метода существенно возрастает.

2.3. Моделирование среды внутри трещины дополнительным материалом

Наряду с использованием специальных граничных условий (24) и (25) на берегах трещины для полупроницаемой трещины рассматривался также альтернативный подход, связанный с отказом от рассмотрения берегов трещины в качестве внешних границ тела и введением нового материала для учета диэлектрических свойств пространства внутри трещины. Упругие модули данного материала выбирались весьма малыми ($E_c \sim 10^{-6}E$). Основным преимуществом метода является отсутствие необходимости решения нелинейной задачи, в отличие от случаев использования граничных условий (24) и (25), а также избежание усложненных процедур расчета при многоосном комбинированном нагружении.

3. Результаты конечно-элементных расчетов с использованием модели полупроницаемой трещины

Объектом исследования трещиностойкости являлся компактный образец, для которого выполнялось сравнение результатов конечно-элементных расчетов с данными эксперимента. В работе [9] представлены результаты экспериментов на разрушение компактных образцов, выполненных из поликристаллической пьезокерамики PZT-4. Образцы подвергались комбинированному непропорциональному электромеханическому нагружению (рис. 3), поляризация материала производилась перпендикулярно берегам начальной трещины. При разрушении образцов были получены данные, соответствующие критическим электрическим и механическим нагрузкам. Образец помещался в емкость с силиконовым маслом. На основании этих данных с помощью метода конечных элементов при использовании метода секущих для реализации граничного условия (24) были найдены коэффициенты интенсивности напряжений и электрического смещения. Также были подобраны значения нагрузки на берегах трещины, соответствующие условию (25).

Ивашов И.В., Семенов А.С. Влияние граничных условий на берегах трещины на процесс разрушения поликристаллической пьезокерамики

Конечно-элементная модель, представляющая собой верхнюю половину образца с граничными условиями симметрии, представлена на рисунке 4. В описании эксперимента [9] указано, что все образцы имели два пропила: один выполнен пилой толщиной 0.46 мм, второй выполнен алмазной пилой, толщина которой в описании экспериментов не указана. В соответствии с [14] толщина алмазной пилы берется 120 мкм. Пропилу в конечно-элементной модели соответствует материал с диэлектрической проницаемостью $2.5\kappa_0$ (на рисунке 4 обозначен красным цветом). Вблизи вершины трещины в модели введен дополнительно идеальный вырез длиной 10 мкм для строгого обеспечения характера сингулярности соответствующему теоретическому представлению (1)–(4). Используемые в расчетах константы материала PZT-4 даны в таблице 1.

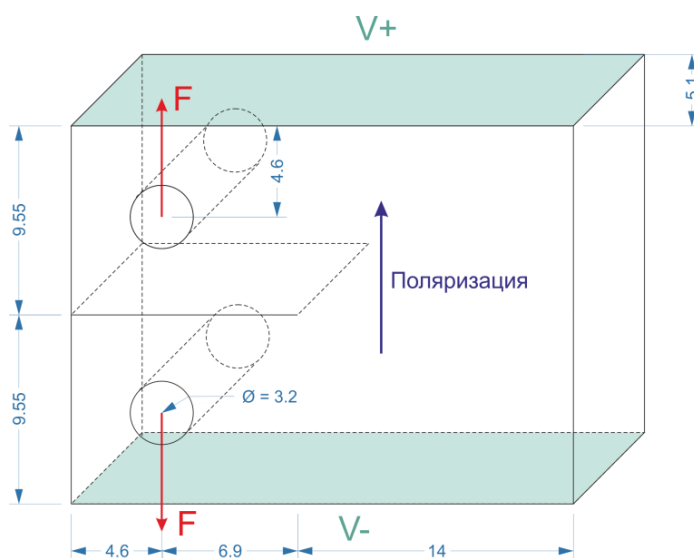


Рисунок 3. Схематическое представление экспериментов анализа трещиностойкости компактных образцов [9] при комбинированном электромеханическом нагружении. Все размеры указаны в мм. Рассматривались различные комбинации механического (F) и электрического (V) воздействий

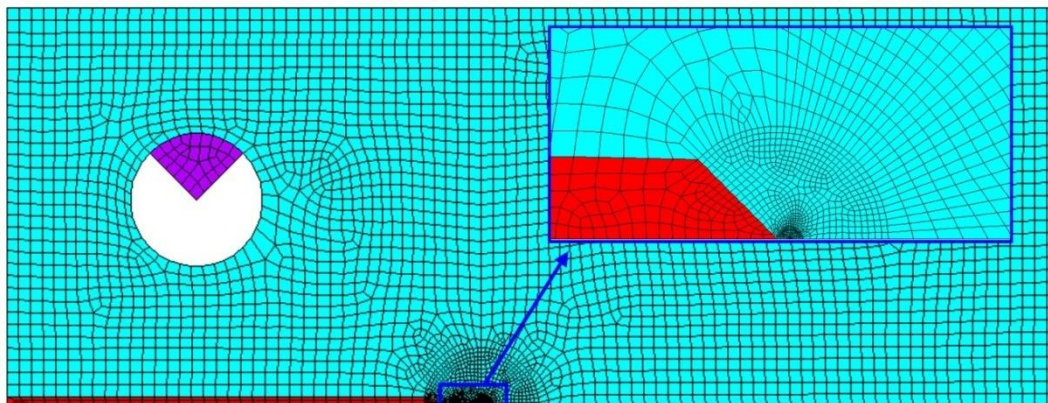


Рисунок 4. Конечно-элементная модель компактного образца

Таблица 1. Константы материала PZT-4 [9]

Упругие постоянные (Н/м ²)				
C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{44}
$13.9 \cdot 10^{10}$	$7.78 \cdot 10^{10}$	$7.43 \cdot 10^{10}$	$11.3 \cdot 10^{10}$	$2.56 \cdot 10^{10}$
Пьезоэлектрические константы (Кл/м ²)			Диэлектрическая проницаемость (Кл/Вм)	
e_{31}	e_{33}	e_{15}	ϵ_{11}	ϵ_{33}
-6.98	13.84	13.44	$6.00 \cdot 10^{-9}$	$5.47 \cdot 10^{-9}$

На рисунке 5 показаны результаты конечно-элементного моделирования разрушения компактных образцов при различных заданных уровнях электрического воздействия и соответствующие им уровни критических (разрушающих) значений механической нагрузки. Точки соответствуют расчетным значениям K_I и K_{IV} , полученным на основе конечно-элементных решений краевых задач с заданными уровнями электрических и механических воздействий, при которых в эксперименте наблюдалось разрушение образцов. Расчеты выполнялись для модели полупроницаемой трещины для различных значений проницаемости трещины и различных вариантов граничных условий. Варианты непроницаемой и проницаемой трещины рассматривались частными случаями полупроницаемой трещины при $\kappa_c = 0$ и $\kappa_c \rightarrow \infty$. На рисунке 5 также показаны немаркированными сплошными линиями прогнозы критериев $G_m = G_c$ (9) и $G = G_c$ (7).

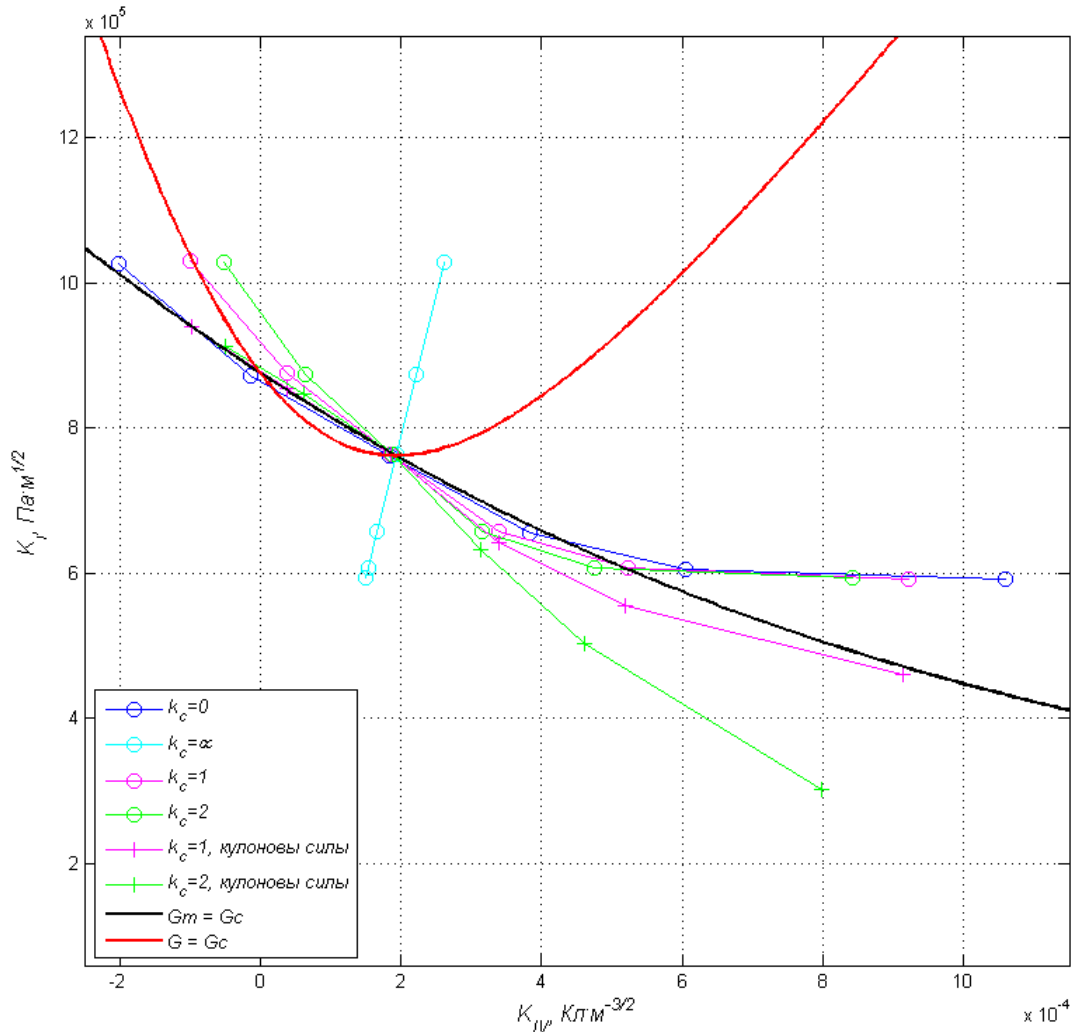


Рисунок 5. Сравнение критериев трещиностойкости для различных значений диэлектрической проницаемости материала трещины κ_c

Из рисунка 5 видно, что график при $\kappa_c = 0$ (непроницаемая трещина) достаточно хорошо совпадает с критерием $G_m = G_c$ (9) (гипербола на плоскости $K_I - K_{IV}$). Аналогичный вывод был сделан в работе [9] при рассмотрении только непроницаемых трещин. Следует отметить, что правая часть графика, там где внешняя механическая нагрузка достаточно мала, а электрическая велика, значительно отклоняется от критерия (9). Учет наличия максвелловских напряжений (кулоновы силы) с помощью граничного условия (25) при $\kappa_c = 1$ дает лучшее приближение к критерию $G_m = G_c$.

Таким образом, учет кулоновых сил может быть необходим при больших значениях внешних электрических нагрузок. Такой же вывод делается в аналогичных работах, где рассматриваются другие виды испытаний на разрушение, например в работе [26].

Еще одним важным вопросом является выбор значения диэлектрической проницаемости среды внутри трещины. В работе [27] рассматривается случай частичного контакта шероховатых берегов трещины (crack bridging), что значительно изменяет эффективное значение проницаемости среды.

Применение критерия $G = G_c$ (7) демонстрирует значительное отличие от результатов эксперимента и более низкую точность в сравнении с критерием (9). Однако полученный вывод требует дальнейшей экспериментальной и теоретической проверки.

Выводы

Выполнено сравнение различных критериев разрушения пьезокерамических материалов при комбинированном электромеханическом нагружении для модели полупроницаемой трещины с данными экспериментальных исследований. Рассмотрены различные виды граничных условий на берегах трещины: выполнен вариативный учет проницаемости среды внутри трещины, а также учет наличия максвелловских напряжений (сил кулоновского взаимодействия берегов трещины). Сравнение результатов конечно-элементного расчета с данными эксперимента по разрушению компактных образцов показало, что учет проницаемости трещины и наличия максвелловских напряжений позволяет получить хорошее совпадение с критерием $G_m = G_c$, основанным на рассмотрении только механической составляющей скорости освобождения энергии.

Литература

1. Dawson B. Vibration condition monitoring techniques for rotating machinery // The Shock and Vibration Digest. 1976. No. 8(12). Pp. 3–8.
2. Исхаков Ш.Ш., Ковалев Ф.Е., Васкевич В.М., Рыжиков В.Ю. Оценка надёжности эксплуатации зданий и сооружений по методикам возникновения риска их неработоспособных состояний // Инженерно-строительный журнал. 2012. №7(33). С. 76–88.
3. Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Конечно-элементное моделирование процессов разрушения и оценка ресурса элементов автодорожного моста с учётом коррозионных повреждений // Инженерно-строительный журнал. 2012. №7(33). С. 32–42.
4. Солдатенко Т.Н. Модель остаточного ресурса инженерных систем с высоким уровнем износа // Инженерно-строительный журнал. 2012. №6 (32). С. 64–72.
5. Богоявленская В.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н., Цветков Р.В. Моделирование в системах мониторинга механического поведения инженерных сооружений и природных объектов // VI Сессия Научного совета РАН по механике: материалы Всероссийской конференции, Барнаул, Белокуриха, 26–31 июля 2012. С. 38–39.
6. Ni Y.Q., Wong K.Y., Xia Y. Health checks through landmark bridges to sky-high structures // Advances in Structural Engineering. 2011. Vol. 14. No. 1. Pp. 103–119.
7. Матвеев В.П., Клигман Е.П., Юрлов М.А., Юрлова Н.А. Моделирование и оптимизация динамических характеристик smart-структур с пьезоматериалами // Физическая мезомеханика. 2012. Т.15. №1. С. 75–85.
8. Бобцов А.А., Бойков В.И., Быстров С.В., Григорьев В.В. Исполнительные устройства и системы для микроперемещений. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. 131 с.
9. Park S.B., Sun C.T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics // Journal of the American Ceramic Society. 1995. Vol. 78(6). Pp. 1475–1480.
10. Tobin A.G., Pak Y.E. Effect of electric fields on fracture behavior of PZT ceramics // Proceedings of SPIE Int. Soc. Opt. Eng. 1993. No. 1916. Pp. 78–86.
11. Fu R., Zhang T. Y. Effects of an electric field on the fracture toughness of poled lead zirconate titanate ceramics // Journal of the American Ceramic Society. 2000. No. 83(5). Pp. 1215–1218.
12. Schneider G.A., Heyer V. Influence of the electric field on Vickers indentation crack growth in BaTiO₃ // Journal of the European Ceramic Society. 1999. No. 19. Pp. 1299–1306.

Ивашов И.В., Семенов А.С. Влияние граничных условий на берегах трещины на процесс разрушения поликристаллической пьезокерамики

13. Wang H., Singh R. N. Crack propagation in piezoelectric ceramics: effects of applied electric fields // Journal of Applied Physics. 1997. No. 81(11). Pp. 7471–7479.
14. Jelitto H., Keßler H., Schneider G. A., Balke H. Fracture behavior of poled piezoelectric PZT under mechanical and electrical loads // Journal of the European Ceramic Society. 2005. No. 25. Pp. 749–757.
15. Gehrig F., Jelitto H., Schneider G.A. Fracture criterion for a conducting crack in poled PZT-PIC 151 investigated by stable crack growth // Acta Materialia. 2008. No. 56. Pp. 222–229.
16. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 470 с.
17. Suo Z., Kuo C.M., Barnett D.M., Willis J.R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1992. No. 40. Pp. 739–65.
18. Уйстрайх К.Б., Семёнов А.С., Мельников Б.Е. Конечно-элементное моделирование процессов разрушения пьезокерамических образцов при комбинированном электромеханическом нагружении // Морские Интеллектуальные Технологии. 2011. №3. С. 96–100.
19. Семёнов А.С., Бальке Х., Мельников Б.Е. Моделирование поликристаллической пьезокерамики методом конечно-элементной гомогенизации // Морские Интеллектуальные Технологии. 2011. №3. С. 109–115.
20. Semenov A.S., Liskowsky A.C., Balke H. Return mapping algorithms and consistent tangent operators in ferroelectroelasticity // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2010. Vol. 81. Pp. 1298–1340.
21. Semenov A.S., Kessler H., Liskowsky A., Balke H. (2006). On a vector potential formulation for 3D electromechanical finite element analysis // Communications in Numerical Methods in Engineering. 2006. Vol. 22. Pp. 357–375.
22. Semenov A.S., Liskowsky A.C., Neumeister P., Balke H. Effective computational methods for the modeling of ferroelectroelastic hysteresis behavior // In: Kuna M., Ricoeur A. Proceedings of the IUTAM “Multiscale Modelling of Fatigue, Damage and Fracture in Smart Materials, held in Freiberg, Germany, September 1-4, 2009. 2011. Vol. 24. Pp. 43–53.
23. Hao H., Shen Z.Y. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications // Engineering Fracture Mechanics. 1992. No. 47(6). Pp. 793–802.
24. Landis C.M. Energetically consistent boundary conditions for electromechanical fracture // International Journal of Solids and Structures. 1992. No. 41. Pp. 6291–6315.
25. Ricoeur A., Kuna M. Electrostatic tractions at crack faces and their influence on the fracture mechanics of piezoelectrics // International Journal of Fracture. 2009. No. 157. Pp. 3–12.
26. Li Q., Ricoeur A., Kuna M. Coulomb traction on a penny-shaped crack in a three dimensional piezoelectric body // Archive of Applied Mechanics. 2011. No. 81. Pp. 685–700.
27. Neumeister P., Jurisch M., Jelitto H., Enger A.R., Schneider G.A., Balke H. (2013). Effective permittivity of air-filled cracks in piezoelectric ceramics due to crack bridging // Acta Materialia. 2013. No. 61. Pp. 1061–1069.

*Илья Владимирович Ивашов, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(950)0323148; эл. почта: i.ivashov55@gmail.com*

*Артем Семенович Семенов, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(905)2721188; эл. почта: Semenov.Artem@googlemail.com*

© Ивашов И.В., Семенов А.С., 2014

doi: 10.5862/MCE.51.1

Influence of crack face boundary conditions on the fracture of polycrystalline piezoelectric ceramics

I.V. Ivashov*St-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia
+79500323148; e-mail: i.ivashov55@gmail.com***A.S. Semenov***St-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia
+79052721188; e-mail: Semenov.Artem@googlemail.com*

Key words

piezoelectricity; crack; fracture

Abstract

Today structural health monitoring is a widely developing field that enables real-time damage detection of engineering structures and elements. Monitoring is carried out using a set of sensors, most of which contain piezoelectric materials. So far the problem of crack resistance and lifetime estimation for polycrystalline piezoelectric materials has not been fully solved.

The paper considers fundamentals of linear fracture electromechanics, fracture parameters and fracture criteria. The main difference from linear fracture mechanics is the need for taking into account relative permeability of media inside the crack gap and crack face Coulomb interaction. Different types of crack face boundary conditions and their numerical implementation were described.

The paper presents the results of finite element modeling of the fracture toughness experiments conducted on the compact tension specimens under combined electromechanical loading. Different types of crack face boundary conditions and their influence on fracture toughness were analyzed and different fracture criteria were compared to the experimental data.

References

1. Dawson B. Vibration condition monitoring techniques for rotating machinery. *The Shock and Vibration Digest*. 1976. No. 8 (12). Pp. 3–8.
2. Iskhakov Sh.Sh., Kovalev F.E., Vaskevich V.M., Ryzhikov V. Yu. Otsenka nadezhnosti ekspluatatsii zdaniy i sooruzheniy po metodikam vozniknoveniya riska ikh nerabotosposobnykh sostoyaniy [Estimating reliability of buildings and structures according to the methods of the risk of unserviceability]. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No.7(33). Pp. 76–88. (rus)
3. Benin A.V., Semenov A.S., Semenov S.G., Melnikov B.E. Konechno-elementnoye modelirovaniye protsessov razrusheniya i otsenka resursa elementov avtodorozhnogo mosta s uchetom korrozionnykh povrezhdeniy [Finite element modeling of fracture processes and estimation of durability of the road bridge with account of corrosion damages]. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No.7(33). Pp. 32–42. (rus)
4. Soldatenko T.N. Model ostatochnogo resursa inzhenernykh sistem s vysokim urovnem iznosa [Model of the residual resource of plumbing systems with high level of wear]. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No.6(32). Pp. 64–72. (rus)
5. Bogoyavlenskaya V.A., Matveyenko V.P., Shardakov I.N., Tsvetkov R.V. Modelirovaniye v sistemakh monitoringa mekhanicheskogo povedeniya inzhenernykh sooruzheniy i prirodnykh ob'yektov [Simulation systems monitoring the mechanical behavior of engineering structures and natural sites]. *VI Sessiya Nauchnogo soveta RAN po mekhanike: materialy Vserossiyskoy konferentsii* [6 Session of the Scientific Council on Mechanics: Proceedings of the All-Russian Conference]. Barnaul, Belokurikha, July 26–31, 2012. Pp. 38–39. (rus)
6. Ni Y.Q., Wong K.Y., Xia Y. Health checks through landmark bridges to sky-high structures. *Advances in Structural Engineering*. 2011. Vol. 14. No. 1. Pp. 103–119.
7. Matveyenko V.P., Kligman Ye.P., Yurlov M.A., Yurlova N.A. Modelirovaniye i optimizatsiya dinamicheskikh kharakteristik smart-struktur s pyezomaterialami [Simulation and optimization of dynamic characteristics of smart-structures with piezomaterials]. *Physical Mesomechanics Journal*. 2012. Vol. 15. No.1. Pp. 75–85. (rus)

8. Bobtsov A.A., Boykov V.I., Bystrov S.V., Grigoryev V.V. *Ispolnitelnyye ustroystva i sistemy dlya mikroperemeshcheniy* [Executive devices and Systems for micromovings]. Saint-Petersburg: SPBGU ITMO, 2011. 131 p. (rus)
9. Park S.B., Sun C.T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*. 1995. No. 78(6). Pp. 1475–1480.
10. Tobin A. G., Pak Y. E. (1993). Effect of electric fields on fracture behavior of PZT ceramics. *Proceedings of SPIE Int. Soc. Opt. Eng.* 1993. No. 1916. Pp. 78–86.
11. Fu R., Zhang T. Y. Effects of an electric field on the fracture toughness of poled lead zirconate titanate ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*. 2000. No. 83(5). Pp. 1215–1218.
12. Schneider G.A., Heyer V. Influence of the electric field on Vickers indentation crack growth in BaTiO₃. *Journal of the European Ceramic Society*. 1999. No. 19. Pp. 1299–1306.
13. Wang H., Singh R. N. Crack propagation in piezoelectric ceramics: effects of applied electric fields. *Journal of Applied Physics*. 1997. No. 81(11). Pp. 7471–7479.
14. Jelitto H., Keßler H., Schneider G.A., Balke H. Fracture behavior of poled piezoelectric PZT under mechanical and electrical loads. *Journal of the European Ceramic Society*. 2005. No. 25. Pp. 749–757.
15. Gehrig F., Jelitto H., Schneider G.A. Fracture criterion for a conducting crack in poled PZT-PIC 151 investigated by stable crack growth. *Acta Materialia*. 2008. No. 56. Pp. 222–229.
16. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. *Elektromagnitoupругost pyezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel* [Electromagnetoelasticity of piezoelectric and conductive bodies]. Moscow: Nauka, 1988. 470 p. (rus)
17. Suo Z., Kuo C.M., Barnett D.M., Willis J.R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. *Journal of the Mechanics and Physics Solids*. 1992. No. 40. Pp. 739–765.
18. Uystaykh K.B., Semenov A.S., Melnikov B.Ye. Konechno-elementnoye modelirovaniye protsessov razrusheniya pyezokeramicheskikh obraztsov pri kombinirovannom elektromekhanicheskom nagruzhenii [Modeling of fracture processes in piezoelectric ceramics under combined electromechanical loading]. *Marine Intelligent Technologies*. 2011. No.3. Pp. 96–100. (rus)
19. Semenov A.S., Balke H., Melnikov B.Ye. Modelirovaniye polikristallicheskoy pyezokeramiki metodom konechno-elementnoy gomogenizatsii [Modeling of polycrystalline piezoceramics on the base of finite-element homogenization technique]. *Marine Intelligent Technologies*. 2011. No.3. Pp. 109–115. (rus)
20. Semenov A.S., Liskowsky A.C., Balke H. Return mapping algorithms and consistent tangent operators in ferroelectroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2010. Vol. 81. Pp. 1298–1340.
21. Semenov A.S., Kessler H., Liskowsky A., Balke H. (2006). On a vector potential formulation for 3D electromechanical finite element analysis. *Communication Numerical Methods in Engineering*. 2006. Vol. 22. Pp. 357–375.
22. Semenov A.S., Liskowsky A.C., Neumeister P., Balke H. (2011) Effective computational methods for the modeling of ferroelectroelastic hysteresis behavior. In: Kuna M., Ricoeur A. *Proceedings of the IUTAM "Multiscale Modelling of Fatigue, Damage and Fracture in Smart Materials, held in Freiberg, Germany, September 1-4, 2009*. 2011. Vol. 24. Pp. 43–53.
23. Hao H., Shen Z.Y. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications. *Engineering Fracture Mechanics*. 1992. No. 47(6). Pp. 793–802.
24. Landis C.M. Energetically consistent boundary conditions for electromechanical fracture. *International Journal of Solids and Structures*. 1992. No. 41. Pp. 6291–6315.
25. Ricoeur A., Kuna M. Electrostatic tractions at crack faces and their influence on the fracture mechanics of piezoelectrics. *International Journal of Fracture*. 2009. No. 157. Pp. 3–12.
26. Li Q., Ricoeur A., Kuna M. (2011). Coulomb traction on a penny-shaped crack in a three dimensional piezoelectric body. *Archive of Applied Mechanics*. 2011. No. 81. Pp. 685–700.
27. Neumeister P., Jurisch M., Jelitto H., Enger A.R., Schneider G.A., Balke H. (2013). Effective permittivity of air-filled cracks in piezoelectric ceramics due to crack bridging. *Acta Materialia*. 2013. No. 61. Pp. 1061–1069.

Full text of this article in Russian: pp. 5–15