

На правах рукописи



Чурилова Мария Александровна

**Применение функционального подхода для надёжного
апостериорного контроля точности при адаптивном
решении эллиптических задач**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет», ИПММ, кафедра «Прикладная математика».

Научный руководитель: *кандидат физико-математических наук*

Фролов Максим Евгеньевич

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор

Голоскоков Дмитрий Петрович

доктор технических наук, профессор

Бухановский Александр Валерьевич

Ведущая организация:

ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Защита состоится «18» февраля 2015 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 в ФГАОУ ВО «СПбПУ», расположенном по адресу: 195251 Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29, I корпус, аудитория 41.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» и на сайте www.spbstu.ru.

Автореферат разослан «_____» _____ 2014 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,

д.т.н., проф.



Григорьев Б.С.

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию одного из современных подходов к апостериорной оценке точности приближённых решений и адаптации расчётных сеток. В работе рассматриваются три класса эллиптических краевых задач: стационарная задача диффузии, реакции-диффузии и задача линейной упругости. Реализованы соответствующие адаптивные алгоритмы на базе вычисления функциональных мажорант погрешности приближённых решений, получаемых стандартным методом конечных элементов. Помимо численного анализа, также представлено теоретическое обоснование вычислительных свойств мажорант для задачи реакции-диффузии и линейной упругости.

Актуальность исследования. Одной из важных проблем в области прикладной математики является проблема контроля точности приближённых решений краевых задач различных типов. Его необходимость возникла с развитием численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных, когда появилась потребность в явно вычисляемой гарантированной верхней оценке нормы погрешности (ошибки). Помимо глобальной оценки, полезно также иметь представление о локальном распределении погрешности по исследуемой области для эффективной реализации алгоритмов адаптации расчётной сетки.

Теория апостериорного контроля ошибок активно развивается с конца 70х годов XX века. Работами, лежащими в основе рассматриваемой теории, принято считать работы I. Babuška и W.C. Rheinboldt, хотя хорошо известны и более ранние публикации, в которых рассматриваются близкие проблемы, например, работы W. Prager, J.L. Synge и вариационный подход С.Г. Михлина. С 80х годов XX века начинают также развиваться методы построения адаптивных алгоритмов, основанные на апостериорном анализе локального распределения погрешности. Среди первых работ можно выделить работы I. Babuška и W.C. Rheinboldt, O.C. Zienkiewicz и J.Z. Zhu, E. Rank и O.C. Zienkiewicz, W.G. Szymczak и I. Babuška, R. Verfürth, M. Ainsworth и соавторов. Таким образом, подходы к созданию методов апостериорного контроля точности изучаются уже более тридцати лет. К настоящему моменту число публикаций по данной тематике исчисляется сотнями и продолжает увеличиваться. Большинство работ развивают и дополняют уже сформировавшиеся подходы, ориентированные исключительно на анализ галеркинских аппроксимаций. Достаточно полные обзоры по тематике исследования можно найти, например, в монографиях R. Verfürth (1996); M. Ainsworth и J.T. Oden (2000); P. Neittaanmäki и S. Repin (2004); P. Ladevèze и J.P. Pelle (2005); S. Repin (2008); W. Bangerth и R. Rannacher (2003), I. Babuška и T. Strouboulis (2001), R. Verfürth (2013), O. Mali, P. Neittaanmäki и S. Repin (2014).

Начиная со второй половины 90-х годов XX века, С.И. Репиным и коллегами разрабатывается фундаментальный подход к построению апостериорных оценок погрешности, развивающий работы С.Г. Михлина. Первые оценки были получены в работе S. Repin и L.S. Xanthis (1996) с помощью вариационных методов и элементов теории двойственности, поэтому изначально этот подход назывался «методом двойственных мажорант». В более поздних работах результаты были получены с помощью интегральных преобразований, а подход стал называться «функциональным», поскольку позволяет контролировать любое приближённое решение из соответствующего функционального класса и привлекает общие методы, работающие на уровне функциональных пространств, а не только их дискретных аналогов. Подробно он описан в указанных ранее монографиях С.И. Репина и коллег.

Диссертационная работа посвящена исследованию функциональных апостериорных оценок погрешности. Эти оценки отличаются универсальностью — они не накладывают дополнительных ограничений на гладкость и другие свойства приближённого решения и не содержат констант, зависящих от расчётной сетки, которые необходимо пересчитывать при её адаптации. Оценки являются надёжными в самом широком понимании термина, поскольку сохраняют свои теоретические свойства при практической реализации и позволяют контролировать погрешности различной природы, в том числе, связанные с ошибками реализации численных алгоритмов, что особенно важно при работе в коммерческих программных продуктах с закрытым кодом. Стандартные подходы теории апостериорного контроля точности не обладают такими возможностями.

Целью работы является проведение исследования вычислительных свойств и аспектов практического применения функциональных апостериорных оценок для различных эллиптических задач, рассматриваемых в обобщённой постановке. Работа существенно дополняет и расширяет другие подобные исследования, встречающиеся в литературе. В ней поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Представлено теоретическое обоснование вычислительных свойств функциональных мажорант для стационарной задачи реакции-диффузии, плоской и пространственной задачи линейной теории упругости.
2. В программном комплексе MATLAB реализованы адаптивные алгоритмы, основанные на функциональных апостериорных оценках для стационарной задачи диффузии, задачи реакции-диффузии и плоской задачи линейной теории упругости.
3. Численным экспериментом обоснована методика реализации — выбор аппроксимаций свободных переменных и способ вычисления мажорант.

4. Подтверждена эффективность адаптивных алгоритмов на серии краевых задач, включающих задачи с разрывами первого рода в коэффициентах уравнения, а также задачи с геометрическими особенностями (входящие углы, отверстия).

Методологическая и теоретическая основа исследования, достоверность полученных результатов. Доказательство утверждений о вычислительных свойствах исследуемых мажорант основано на строгих методах функционального анализа, математической физики и теории двойственности вариационного исчисления, а также использовании известных неравенств. При численной реализации привлекается хорошо изученный конечный элемент на основе кусочно-линейной аппроксимации, а также конечный элемент Равьяра-Тома нулевого порядка. Расчётные процедуры реализованы с привлечением MATLAB PDE Toolbox. Для контроля погрешности производимых вычислений используются задачи с известным точным решением, сравнение с ранее опубликованными близкими по тематике результатами других авторов, а также сравнение между собой различных подходов в рамках одной задачи.

Научная новизна исследования. В работе впервые доказаны утверждения о вычислительных свойствах функциональных мажорант и основанных на них индикаторов погрешности для стационарной задачи реакции-диффузии и задачи линейной упругости. Предложена новая методика вычисления оценок и впервые реализованы соответствующие адаптивные алгоритмы. С помощью серии численных экспериментов обоснован выбор используемых аппроксимаций, а также алгоритм вычисления мажорант погрешности.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработанные в диссертации методы позволяют явно контролировать точность приближённых решений ряда практически важных краевых задач. Проведённые теоретические и численные исследования подтверждают эффективность предлагаемого подхода и его преимущества по сравнению с другими известными методами апостериорного контроля точности. Полученные результаты могут быть полезны в ВУЗах и НИИ Санкт-Петербурга, найдя своё применение в учебном процессе и инженерных расчётах, а также могут быть использованы в научных исследованиях, проводящихся в СПбПУ и ПОМИ им. В.А. Стеклова РАН.

Положения, выносимые на защиту:

1. Новая методика реализации функционального подхода к апостериорному контролю точности при адаптивном решении эллиптических краевых задач: стационарной задачи диффузии, задачи реакции-диффузии и задачи о плоской деформации, основанная на привлечении аппроксимации Равьяра-Тома на триангуляциях.
2. Анализ результатов численных экспериментов и вывод о том, что выбранная методи-

ка позволяет получить адаптивные сетки лучшего качества и сохранить высокую эффективность надёжного контроля энергетической нормы погрешности, по сравнению с функциональным подходом, основанным на использовании стандартной для метода конечных элементов непрерывной кусочно-линейной аппроксимации, которая достаточно подробно исследовалась в работах других авторов.

3. Серия доказанных утверждений (теорем) о вычислительных свойствах мажорант для задач реакции-диффузии и линейной упругости, обеспечивающая теоретическое обоснование высокого качества численных результатов работы соответствующих адаптивных алгоритмов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях: международной конференции «4th Workshop on Advanced Numerical Methods for Partial Differential Equation Analysis» ММИ им. Л. Эйлера (Санкт-Петербург, 2011г.); конференции «XL Неделя Науки СПбГУ» (Санкт-Петербург, 2011г.); международной конференции «The 17th European Conference on Mathematics for Industry» (Лунд, Швеция, 2012г.); конференции «Студенты и молодые ученые - инновационной России» (Санкт-Петербург, 2013г.); 7-ом Всероссийском форуме «Наука и инновации в технических университетах» (Санкт-Петербург, 2013г.).

Благодарности. Представленные результаты получены при частичной поддержке грантов РФФИ № 11-01-00531-а и № 14-01-31273-мол_а, при поддержке Правительства Санкт-Петербурга (конкурсы 2012 и 2013 годов для студентов и аспирантов) и в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации в 2013 году, а также при поддержке стипендии Правительства Российской Федерации на 2013-2014 уч. год.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ (из них 3 работы в журналах Перечня ВАК).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 132 страницы. В тексте содержится 39 рисунков, 18 таблиц. Список литературы включает 97 наименований.

Содержание работы

Во **введении** представлен обзор литературы по апостериорным методам контроля точности, обоснован выбор темы исследования, его актуальность и научная новизна. Изложено краткое содержание диссертации и её структура.

Первая глава посвящена развитию методик численной реализации функциональной мажоранты для задачи диффузии. Для упрощения теория изложена на примере задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega; \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где Ω — ограниченная связная область в \mathbb{R}^2 с границей $\partial\Omega$, непрерывной по Липшицу, $f \in L^2(\Omega)$. Рассматривается обобщённая постановка: найти элемент $u \in V_0$, удовлетворяющий соотношению

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx, \quad \forall w \in V_0, \quad (2)$$

где $V_0 = \mathring{W}_2^1(\Omega)$ — подпространство функций из пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$, обращающихся в ноль на границе области.

В *первом параграфе* приводится вариационный подход С.И. Репина к получению апостериорных оценок. В нём используется вариационная постановка задачи (2) и двойственная к ней, а также ортогональное разложение Гельмгольца. Итоговая оценка выглядит следующим образом

$$\|\nabla(u - v)\| \leq M_{IP}(v, y) := \|\nabla v - y\| + C_{F\Omega} \|\operatorname{div} y + f\|, \quad (3)$$

где $\|\dots\|$ обозначает стандартные нормы в соответствующих L^2 -пространствах, $v \in V_0$ — некоторое приближённое решение, а $C_{F\Omega}$ — постоянная из неравенства Фридрихса. В оценке присутствует свободная переменная $y \in H(\Omega, \operatorname{div}) := \{q \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \operatorname{div} q \in L^2(\Omega)\}$. С помощью неравенства Коши эту оценку можно записать в более удобной для вычислений форме с произвольной константой $\beta > 0$

$$\|\nabla(u - v)\|^2 \leq M_{IP}^2(v, y, \beta) := (1 + \beta)\|\nabla v - y\|^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) C_{F\Omega}^2 \|\operatorname{div} y + f\|^2. \quad (4)$$

Слагаемые в мажорантах $M_{IP}(v, y)$ и $M_{IP}^2(v, \beta, y)$ связаны с невязками уравнений $p = \nabla u$ и $\operatorname{div} p + f = 0$, которые формируют исходную систему соотношений, лежащих в основе (1). Если в правой части оценки (3) положить $y = p$, то будет достигнуто равенство. Оценка (4) превращается в равенство при $y = p$ и $\beta \rightarrow 0$. Таким образом, обе мажоранты точны и для эффективной оценки погрешности необходимо построить последовательность элементов y , сходящуюся к p в пространстве $H(\Omega, \operatorname{div})$.

Во *втором параграфе* приводится вывод аналогичных оценок на основе интегральных преобразований обобщенной постановки задачи без привлечения теории двойственности.

В *третьем параграфе* собраны доказанные в работах М.Е. Фролова, П. Нейттаанмяки, и С.И. Репина, а также С.И. Репина, С. Саутера и А. Смолянского и в монографии С.И. Ре-

пина утверждения о вычислительных свойствах мажорант (3) и (4), и основанного на них индикатора локальных ошибок.

В четвертом параграфе обсуждается мажоранта для задачи диффузии со смешанными краевыми условиями

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{в } \Omega; \\ u = u_0 & \text{на } \Gamma_1; \\ n \cdot A\nabla u = F & \text{на } \Gamma_2, \end{cases} \quad (5)$$

где $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in W_2^1(\Omega)$, $F \in L^2(\Gamma_2)$, а за n обозначена единичная нормаль к границе области $\partial\Omega$, которая состоит из двух непересекающихся частей $\Gamma_1 \neq \{\emptyset\}$ и Γ_2 . Матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^2$ — симметричная, её коэффициенты могут терпеть разрыв первого рода в области Ω . Предполагается также что существуют положительные постоянные c_1 и c_2 , такие что

$$c_1^2|\eta|^2 \leq A\eta \cdot \eta \leq c_2^2|\eta|^2, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Мажоранта погрешности для этой задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} |||u - v|||^2 &\leq M_{IDF}^2(v, y, \beta) := \\ &:= (1 + \beta) |||A\nabla v - y|||_*^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \mathbb{C}^2 (\|f + \operatorname{div} y\|^2 + \|F - y \cdot n\|_{\Gamma_2}^2), \end{aligned} \quad (7)$$

где $|||u - v|||^2 = \int_{\Omega} A\nabla(u - v) \cdot \nabla(u - v) dx$, $|||y|||_*^2 = \int_{\Omega} A^{-1}y \cdot y dx$, а $\|\dots\|_{\Gamma_2}$ — норма, вычисленная по части границы Γ_2 . Константа \mathbb{C} в мажоранте включает в себя константу из неравенства Фридрихса и константу из неравенства следа. В качестве индикатора погрешности используются локальные вклады в первое слагаемое мажоранты на каждом элементе

$$\eta_T = \left(\int_T (A\nabla v - y) \cdot (\nabla v - A^{-1}y) dx \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Таким образом, первая часть главы содержит известные результаты, необходимые для полноты представления материала.

Пятый параграф полностью посвящен вычислительному эксперименту. Все изложенные в нём результаты и их анализ являются новыми. Для сравнения с классическими подходами рассматривается приближённое решение v , полученное стандартным методом конечных элементов, которое обозначается u_h , где h — характерный размер расчётной сетки. Помимо глобальной оценки энергетической нормы погрешности, рассматривается задача адаптации сетки с помощью индикатора (8). Проведено сравнение картины его локального распределения с истинным распределением погрешности для случая, когда известно точное решение

задачи. Если точное решение неизвестно, вместо него использовалась аппроксимация, полученная на более мелкой сетке $u_{ref} = u_{h/4}$. Подобная практика является общепринятой. В литературе такое решение называется «reference solution», далее будет использоваться термин «эталонное». Соответствующий «эталонный» индикатор погрешности обозначен за $\eta_T^{ref} = \left(\int_T A \nabla \tilde{e} \cdot \nabla \tilde{e} dx \right)^{1/2}$, где $\tilde{e} = u_{ref} - u_h$. Эталонное решение используется также при вычислении индекса эффективности оценок и относительной погрешности

$$I_{eff} = \frac{M(u_h, \dots)}{\|u_{ref} - u_h\|}, \quad e\% = \frac{\|u_{ref} - u_h\|}{\|u_{ref}\|} \times 100\%,$$

где $M(u_h, \dots)$ — общее обозначение мажоранты. Адаптивные алгоритмы реализованы в программном комплексе MATLAB, в котором также имеется встроенный стандартный индикатор, основанный на явном методе невязок. Помимо него, проводилось сравнение с другим классическим индикатором, основанным на сглаживании градиента приближённого решения.

В параграфе также обсуждается выбор аппроксимации свободной переменной y в (7) и (8). Показано, что использование стандартных кусочно-линейных аппроксимаций метода конечных элементов может приводить к нежелательному сгущению сетки в случае наличия разрыва первого рода в коэффициентах уравнения. Этот эффект связан с невозможностью обеспечить разрыв касательной составляющей вектора y при переходе через межэлементную границу. Для преодоления этой проблемы использована смешанная аппроксимация Равьяра-Тома нулевого порядка. Приведём один характерный пример — задачу с условием Дирихле и разрывом в коэффициенте матрицы: $a_{11} = 1$ в подобластях I и III, $a_{11} = 2$ в подобластях II и IV, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$, правая часть постоянна и равна единице во всей области Ω , которая приведена на рисунке 1 (а).

Индикатор η_T с классическими непрерывными аппроксимациями обозначен η_T^{con} , а с аппроксимацией Равьяра-Тома η_T^{RT} . В таблице 1 приведены результаты для некоторых шагов адаптации сетки и для случая равномерного её измельчения, за N обозначено количество узлов сетки, на рисунке 1 (б–г) представлены узлы расчётных сеток, получившиеся в результате работы адаптивных алгоритмов, соответствующие последним строкам в таблице. Структура сетки для η_T^{con} значительно отличается от эталонной — в ней имеются зоны избыточного сгущения узлов на внутренней границе подобластей, которые исчезают при использовании аппроксимации Равьяра-Тома.

Результаты первой главы диссертации опубликованы в [1] и [4] в соавторстве с М.Е. Фроловым, где автору полностью принадлежит реализация и, совместно, анализ результатов, а также в работе [2].

Таблица 1. Пример 1. Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{con}			η_T^{RT}			p/м разбиение	
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$
289	10.32	289	10.32	1.22	289	10.32	1.30	289	10.32
383	7.46	383	7.50	1.36	401	7.43	1.40	1089	5.36
577	6.29	537	6.64	1.28	577	6.74	1.28	4225	2.73
867	4.86	793	5.46	1.34	897	5.07	1.35	16641	1.38
4803	2.03	3541	2.61	1.36	5179	2.11	1.33		
		5001	2.18						

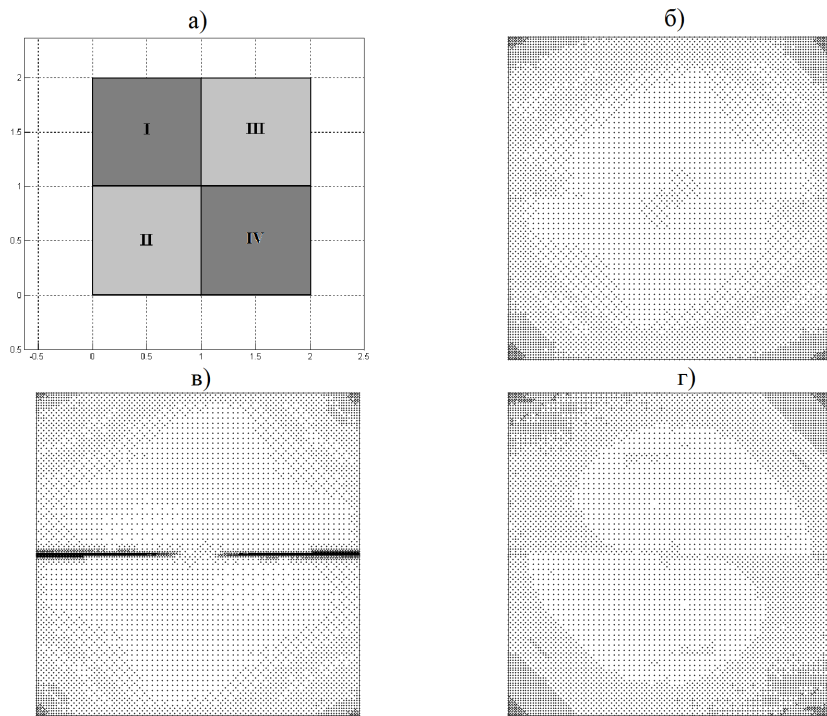


Рис. 1. Пример 1. Геометрия области (а) и финальные адаптивные сетки для индикаторов (б) η_T^{ref} , (в) η_T^{con} и (г) η_T^{RT}

Вторая глава диссертации посвящена функциональным апостериорным оценкам для задачи реакции-диффузии

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + \rho^2 u = f & \text{в } \Omega; \\ u = u_0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (9)$$

где $\rho(x) > 0$ — коэффициент реакции. Обобщенное решение $u \in V = u_0 + V_0$ определяется соотношением

$$\int_{\Omega} (A\nabla u \cdot \nabla w + \rho^2 u w) dx = \int_{\Omega} f w dx, \quad \forall w \in V_0. \quad (10)$$

Контролируемая норма погрешности имеет вид $\| [u - v] \| := (\| \|u - v\| \|^2 + \|\rho(u - v)\|^2)^{1/2}$.

В *первом параграфе* приводятся три типа мажорант погрешности, которые теоретически применимы для различных диапазонов значения коэффициента реакции ρ . Для наиболее универсальной из них, полученной в работе С.И. Репина и С. Саутера, а именно

$$\| [u - v] \|^2 \leq M_{RD}^2(v, y, \beta) := (1 + \beta) \| \|A\nabla v - y\| \|^2_* + \int_{\Omega} \frac{\mathbb{C}^2(1 + \beta)}{\mathbb{C}^2\rho^2(1 + \beta) + \beta} r_{\Omega}^2(v, y) dx, \quad (11)$$

где $r_{\Omega}(v, y) = f - \rho^2 v + \operatorname{div} y$ во *втором параграфе* доказаны вычислительные свойства в предположении, что для коэффициента реакции справедлива двусторонняя оценка $0 < \rho_1 \leq \rho(x) \leq \rho_2, \quad \forall x \in \Omega$.

Так как для любого $v \in V$ и $\beta > 0$ мажоранта $M_{RD}^2(v, y, \beta)$ — выпуклый, непрерывный и коэрцитивный функционал, следовательно, существует элемент y_{β} , зависящий от приближённого решения v и параметра β , такой что $M_{RD}^2(v, y_{\beta}, \beta) = \inf_{y \in Y} M_{RD}^2(v, y, \beta)$, где $Y = \mathbb{H}(\Omega, \operatorname{div})$.

Теорема 1. *Если y_{β} минимизирует мажоранту $M_{RD}^2(v, y, \beta)$ на Y при фиксированных $v \in V$ и $\beta > 0$, то существует элемент $\bar{w} \in V_0$ такой, что $y_{\beta} = A\nabla(\bar{w} + u_0)$.*

Теорема 2. *В условиях Теоремы 1 справедливы оценки: $\| \|y_{\beta} - p\| \|^2_* \leq C\beta, \quad \|\operatorname{div}(y_{\beta} - p)\| \leq C\beta$, где $p = A\nabla u$, а C — некоторая константа.*

Таким образом, при $\beta \rightarrow 0$ последовательность y_{β} стремится к p в Y . Рассмотрим теперь индикатор погрешности, основанный на мажоранте (11). За $\varepsilon(x)$ обозначим подинтегральное выражение нормы ошибки $\varepsilon(x) = A\nabla(u(x) - v(x)) \cdot \nabla(u(x) - v(x)) + \rho^2(u(x) - v(x))^2$. Мажоранту (11) можно разбить на два слагаемых $M_{RD}^2(v, y_{\beta}, \beta) = m_{RD_i}^2 + m_{RD_r}^2$, где

$$m_{RD_i}^2 = \| \|A\nabla v - y_{\beta}\| \|^2_* + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} r_{\Omega}^2(v, y_{\beta}) dx,$$

$$m_{RD_r}^2 = \beta \left(\| \|A\nabla v - y_{\beta}\| \|^2_* - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2(\mathbb{C}^2\rho^2(1 + \beta) + \beta)} r_{\Omega}^2(v, y_{\beta}) dx \right).$$

По Теореме 2 $m_{RD_i}^2 \rightarrow \| [u - v] \|^2, \quad m_{RD_r}^2 \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$, поэтому в качестве индикатора погрешности можно использовать первое слагаемое. Обозначим за μ его подинтегральное выражение

$$\mu(x) = A^{-1}(A\nabla v(x) - y_{\beta}(x)) \cdot (A\nabla v(x) - y_{\beta}(x)) + \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{div} y_{\beta}(x) + f(x) - \rho^2(x)v(x))^2.$$

Для заданных μ и ε и любого положительного δ определим множество

$$\Omega_{\delta} = \{x \in \Omega \mid |\mu(x) - \varepsilon(x)| \geq \delta\}.$$

Теорема 3. Мера Лебега множества Ω_δ стремится к нулю при $\beta \rightarrow 0$.

При реализации вычисления апостериорной оценки необходима дискретизация соответствующей задачи, которая строится на основе конечномерных подпространств гильбертова пространства $H(\Omega, \text{div})$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. Если последовательность конечномерных подпространств $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ предельно плотна в Y , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\substack{y_k \in Y_k \\ \beta > 0}} M_{RD}^2(v, y_k, \beta) = |[u - v]|^2.$$

Теорема 5. Пусть для последовательности пар (β_k, y_k) , минимизирующих $M_{RD}^2(v, y, \beta)$ на $\mathbb{R}^+ \times Y_k$, имеет место сходимость $\beta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Тогда

$$y_k \rightharpoonup A\nabla u \text{ в } Y \text{ при } k \rightarrow \infty \text{ (слабая сходимость)}.$$

В третьем параграфе представлены численные результаты работы адаптивных алгоритмов, в том числе для одной задачи с известным точным решением и для задач с разрывами в коэффициентах уравнения. Исследована зависимость эффективности трёх различных мажорант погрешности от величины коэффициента реакции. Рассмотрим пример с разрывом в коэффициенте матрицы: $a_{11} = a_{22} = 1$ в подобластях I и IV, $a_{11} = a_{22} = 10$ в подобластях II и III, $a_{12} = a_{21} = 0$, $\rho^2 = 1$, $f = 1$, $u_0 = 0$. Область Ω изображена на рисунке 2 (а). В таблице 2 представлены результаты расчётов, на рисунках 2 (б–г) — адаптивные сетки, соответствующие последней строке таблицы, анализ которых подтверждает выводы, сделанные в первой главе.

Результаты второй главы диссертации опубликованы в [3], [5] и [6]. Теоретические и прикладные результаты [3] и [5] получены лично автором, а в [6] автору принадлежит реализация вычислений.

Таблица 2. Пример 2. Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{con}			η_T^{RT}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
308	15.78	308	15.78	1.62	308	15.78	1.46
1071	7.79	1175	8.34	1.59	1189	7.82	1.41
1966	5.67	2337	6.01	1.56	2373	5.53	1.42
8783	2.66	14055	2.69	1.59	11745	2.51	1.42
11736	2.31	19534	2.30	1.52	15880	2.16	1.42

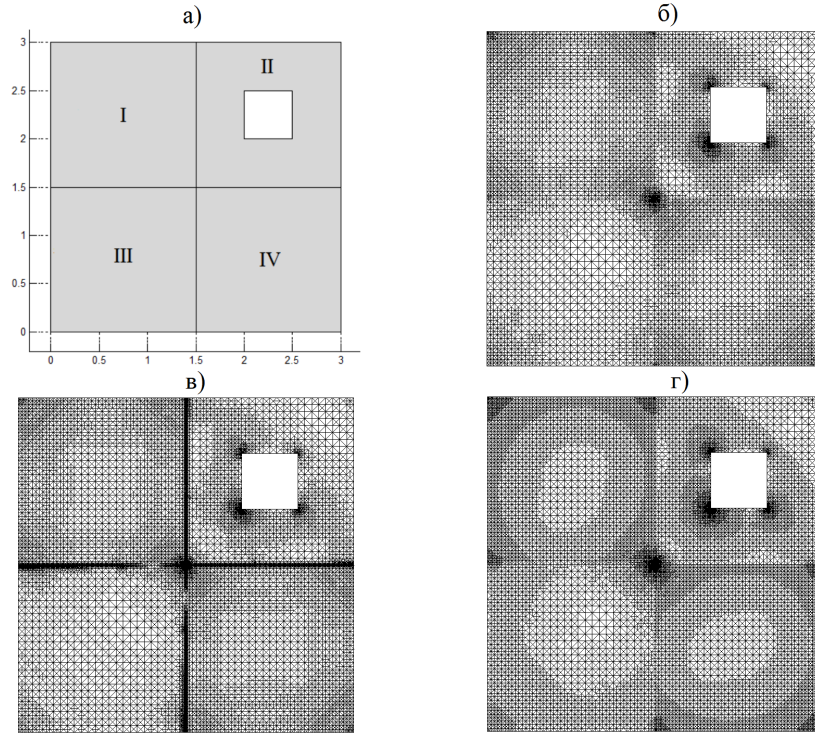


Рис. 2. Пример 2. Геометрия области (а) и финальные адаптивные сетки для индикаторов (б) η_T^{ref} , (в) η_T^{con} и (г) η_T^{RIT}

Третья глава посвящена оценкам для задач линейной теории упругости. Постановка выглядит следующим образом: пусть упругое тело занимает область $\Omega \in \mathbb{R}^3$, его граница Γ состоит из двух непересекающихся частей $\Gamma_1 \neq \{\emptyset\}$ и Γ_2 . Нужно найти тензорные поля напряжений σ и деформаций ε , а также векторное поле перемещений u , удовлетворяющие уравнениям

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \mathbb{L} \varepsilon(u) \text{ в } \Omega; \\ \text{Div } \sigma + f = 0 \text{ в } \Omega; \\ u = u_0 \text{ на } \Gamma_1; \\ \sigma n = F \text{ на } \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (12)$$

где $\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T)$, $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ — плотность объемных сил, и $F \in L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^3)$ — заданные на части границы Γ_2 поверхностные силы, $u_0 \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ — заданные на части границы Γ_1 перемещения, \mathbb{L}_{ijklm} — тензор упругих констант. Предполагается, что существуют положительные постоянные l_1 и l_2 , такие что

$$l_1^2 |\varepsilon|^2 \leq \mathbb{L} \varepsilon : \varepsilon \leq l_2^2 |\varepsilon|^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{M}_{sym}^{3 \times 3},$$

где $\mathbb{M}_{sym}^{3 \times 3}$ — пространство симметричных тензоров второго ранга размерности 3 (пространство произвольных тензоров далее обозначается $\mathbb{M}^{3 \times 3}$). Также, предполагается, что компо-

ненты тензора ограничены и удовлетворяют условиям симметрии

$$\mathbb{L}_{ijklm} = \mathbb{L}_{jiklm} = \mathbb{L}_{kmlji}, \quad \mathbb{L}_{ijklm} \in L^\infty(\Omega) \quad i, j, k, m = \overline{1, 3}.$$

Энергетическая норма погрешности для задачи (12) вычисляется по формуле

$$|||u - v||| = \left(\int_{\Omega} \mathbb{L} \varepsilon(u - v) : \varepsilon(u - v) dx \right)^{1/2}.$$

В *первом параграфе* приводятся две функциональные апостериорные оценки для постановки «в перемещениях». Первая из них была получена в работе А.В. Музалевского и С.И. Репина с помощью вариационного подхода, а затем в монографии С.И. Репина с помощью интегральных преобразований, и имеет вид

$$\begin{aligned} |||u - v|||^2 &\leq M_{LE}^2(v, \tau, \beta) := \\ &:= (1 + \beta) |||\tau - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_*^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) C^2 (\|\operatorname{Div} \tau + f\|^2 + \|F - \tau n\|_{\Gamma_2}^2), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\frac{1}{C^2} = \min_{w \in V_0} \frac{|||w|||^2}{\int_{\Omega} |w|^2 dx + \int_{\Gamma_2} |w|^2 ds},$$

$v \in u_0 + V_0$, $V_0 = \{w \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_1\}$. Тензор $\tau \in \mathbb{H}(\Omega, \Gamma_2, \operatorname{Div})$, входящий в мажоранту, должен удовлетворять условию симметрии, β — произвольная положительная константа. Введём обозначения: $\Sigma(\Omega) := L^2(\Omega, \mathbb{M}^{3 \times 3})$, $\Sigma_s(\Omega) := L^2(\Omega, \mathbb{M}_{sym}^{3 \times 3})$. Тогда пространство $\mathbb{H}(\Omega, \Gamma_2, \operatorname{Div})$ определяется следующим образом:

$$\mathbb{H}(\Omega, \Gamma_2, \operatorname{Div}) = \{\tau \in \Sigma(\Omega) \mid \operatorname{Div} \tau \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \tau n \in L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^3)\}.$$

Оценка (13) является аналогом оценки (7). Первое слагаемое M_{LE}^2 выражает погрешность, возникающую из-за неточного соответствия полей определяющему соотношению $\sigma = \mathbb{L} \varepsilon(u)$ (закон Гука), второе представляет невязку в уравнении равновесия $\operatorname{Div} \sigma + f = 0$, а третье — невязку в граничных условиях $\sigma n = F$.

Вычисление мажоранты M_{LE} требует построения симметричного тензора τ . Условию симметрии можно удовлетворить, если для аппроксимации свободного тензора используются стандартные конечные элементы со степенями свободы в узлах. Как показывают результаты работ А.В. Музалевского и С.И. Репина, а также М.Е. Фролова, такие аппроксимации не всегда позволяют получить качественные оценки погрешности и не обеспечивают стабильного поведения индекса эффективности в процессе измельчения сеток. Поэтому, в работе С.И. Репина была предложена другая мажоранта, не требующая симметрии свободного тензора и

позволяющая использовать смешанные аппроксимации, а именно

$$\begin{aligned}
|||u - v|||^2 &\leq \widehat{M}_{LE}^2(v, \widehat{\tau}, \beta_1, \beta_2) := (1 + \beta_1) |||\widehat{\tau}_{\text{sm}} - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||^2_* + \\
&+ \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) (1 + \beta_2) C^2 (\|\text{Div } \widehat{\tau} + f\|^2 + \|\widehat{\tau}n - F\|_{\Gamma_2}^2) + \\
&+ \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \left(1 + \frac{1}{\beta_2}\right) \left(\frac{C_{\Omega\Gamma_1}}{l_1}\right)^2 \|\widehat{\tau}_{\text{sk}}\|^2,
\end{aligned} \tag{14}$$

где $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$ — свободные параметры, $\widehat{\tau}_{\text{sm}}$ и $\widehat{\tau}_{\text{sk}}$ — симметричная и кососимметричная части тензора $\widehat{\tau}$, а $C_{\Omega\Gamma_1}$ — константа в неравенстве Корна. Заметим, что оценка (14) совпадает с (13), если тензор $\widehat{\tau}$ симметричен. Дополнительное слагаемое в (14), содержащее кососимметричную часть тензора, играет роль «штрафа».

Во *втором параграфе* приводятся доказательства вычислительных свойств мажорант (13) и (14).

Теорема 6. *Если последовательность конечномерных подпространств $\{\Theta_s^i\}_{i=1}^\infty$ предельно плотна в $\Theta_s = \text{H}(\Omega, \Gamma_2, \text{Div}) \cap \Sigma_s(\Omega)$, то*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{\substack{\tau_i \in \Theta_s^i \\ \beta > 0}} M_{LE}^2(v, \tau_i, \beta) = |||u - v|||^2.$$

Если последовательность конечномерных подпространств $\{\Theta^i\}_{i=1}^\infty$ предельно плотна в $\Theta = \text{H}(\Omega, \Gamma_2, \text{Div})$, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{\substack{\widehat{\tau}_i \in \Theta^i \\ \beta_1 > 0, \beta_2 > 0}} \widehat{M}_{LE}^2(v, \widehat{\tau}_i, \beta_1, \beta_2) = |||u - v|||^2.$$

Теорема 7. *Пусть последовательность пар (τ_i, β_i) , минимизирующая $M_{LE}^2(v, \tau, \beta)$ на $\Theta_s^i \times \mathbb{R}^+$, такова, что $\beta_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$, тогда $\tau_i \rightarrow \sigma$ в Θ_s при $i \rightarrow \infty$.*

Можно показать, что аналогичное утверждение верно и для мажоранты $\widehat{M}_{LE}^2(v, \widehat{\tau}, \beta_1, \beta_2)$.

Далее представлено обоснование выбора индикатора погрешности. Обозначим за $\theta(x)$ подынтегральное выражение энергетической нормы ошибки

$$\theta(x) = \mathbb{L} \varepsilon(u(x) - v(x)) : \varepsilon(u(x) - v(x)).$$

Мажоранту M_{LE} можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$M_{LE}^2(v, \tau, \beta) = (1 + \beta) m_{LE1}^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) m_{LE2}^2,$$

где

$$m_{LE1}^2 = |||\tau - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||^2_*, \quad m_{LE2}^2 = C^2 (\|\text{Div } \tau + f\|^2 + \|F - \tau n\|_{\Gamma_2}^2).$$

Мажоранту \widehat{M}_{LE} также можно записать в виде

$$\widehat{M}_{LE}^2(v, \widehat{\tau}, \beta_1, \beta_2) = (1 + \beta_1) \widehat{m}_{LE1}^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \widehat{m}_{LE2}^2,$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{m}_{LE1}^2 &= \|\widehat{\tau}_{\text{sm}} - \mathbb{L} \varepsilon(v)\|_*^2, \\ \widehat{m}_{LE2}^2 &= (1 + \beta_2) C^2 (\|\text{Div} \widehat{\tau} + f\|^2 + \|\widehat{\tau}n - F\|_{\Gamma_2}^2) + \left(1 + \frac{1}{\beta_2}\right) \left(\frac{C_{\Omega\Gamma_1}}{l_1}\right)^2 \|\widehat{\tau}_{\text{sk}}\|^2. \end{aligned}$$

В предположениях Теоремы 7

$$\begin{aligned} m_{LE1}^2 &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} \|u - v\|^2, & m_{LE2}^2 &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \\ \widehat{m}_{LE1}^2 &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} \|u - v\|^2, & \widehat{m}_{LE2}^2 &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Поэтому в качестве индикатора погрешности, как в случае симметричного тензора τ , так и при отсутствии ограничения симметрии, можно использовать только первое слагаемое мажорант. Обозначим подынтегральное выражение (на примере второй оценки)

$$\mu(x) = (\mathbb{L}^{-1} \widehat{\tau}_{\text{sm}} - \varepsilon(v)) : (\widehat{\tau}_{\text{sm}} - \mathbb{L} \varepsilon(v)), \text{ для } \widehat{\tau} \in \Sigma(\Omega).$$

По аналогии с рассмотренными ранее задачами, верно утверждение о том, что локальный индикатор μ воспроизводит погрешность θ .

Для численных экспериментов была выбрана задача о плоской деформации в случае однородных изотропных материалов. Преобразование мажорант с учётом этих предположений приводится в *третьем параграфе*.

В *четвертом параграфе* обсуждаются два способа аппроксимации для свободного тензора, присутствующего в оценках. Для мажоранты (13) использованы классические кусочно-линейные аппроксимации для каждой компоненты тензора, позволяющие явно учитывать его симметричность. Для оценки (14), в которой на тензор не накладывается ограничения, были выбраны аппроксимации Равьяра-Тома нулевого порядка.

В *пятом параграфе* представлены примеры работы адаптивных алгоритмов. Рассмотрим один из них — тело состоит из трёх различных материалов, его геометрия представлена на рисунке 3 (а). Вся область закреплена по границе, объемная сила $f = \begin{pmatrix} 0 & -10^6 \end{pmatrix}^T$ Н/м³. Модуль Юнга для первого материала $E_I = 70 \cdot 10^9$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_I = 0.34$, для второго материала $E_{II} = 210 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{II} = 0.28$, для третьего материала $E_{III} = 110 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{III} = 0.35$. В таблице 3 приведены значения мажорант и индексов эффективности для нескольких сеток. Индекс эффективности для мажоранты M_{LE} растёт с измельчением сетки, что согласуется с результатами, полученными ранее М.Е. Фроловым для последовательности

вложенных четырёхугольных сеток. Узлы финальных сеток, получившихся после адаптации приведены на рисунке 3 (б–г). Индикатор с непрерывными аппроксимациями даёт нежелательное сгущение узлов на границе разрыва коэффициентов, которое отсутствует при использовании аппроксимаций Равьяра-Тома.

Результаты третьей главы диссертации опубликованы в работе автора [7].

Таблица 3. Пример 3. Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{con}			η_T^{RT}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
155	21.26	155	21.26	1.83	155	21.26	2.00
1672	5.38	2812	5.34	2.96	1904	5.18	2.18
7113	2.55	17849	2.40	3.79	8891	2.37	2.20

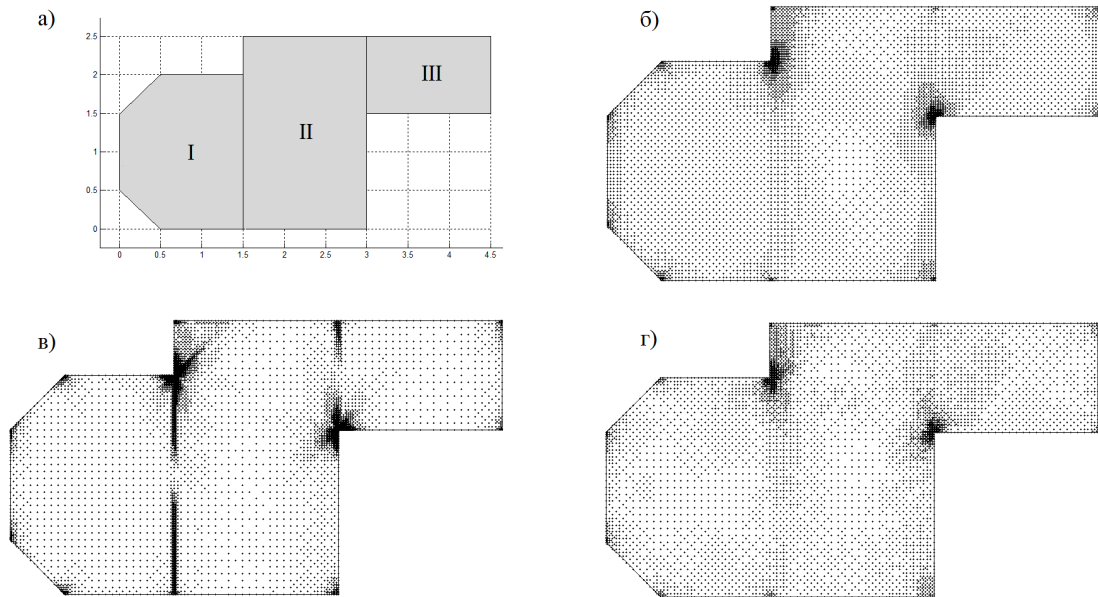


Рис. 3. Пример 3. Геометрия области (а) и финальные адаптивные сетки для индикаторов (б) η_T^{ref} , (в) η_T^{con} и (г) η_T^{RT}

Заключение. В диссертации представлено исследование функционального подхода к апостериорному контролю точности приближённых решений эллиптических задач. Доказан ряд важных утверждений о вычислительных свойствах мажорант погрешности и основанных на них локальных индикаторов. Значительная часть работы посвящена вычислительному эксперименту и анализу применимости функционального подхода к построению адаптивных алгоритмов.

По результатам проведённых исследований для двумерных задач можно заключить,

что функциональный подход позволяет эффективно оценить энергетическую норму погрешности приближённых решений, полученных методом конечных элементов, а также построить адаптивные расчётные сетки достаточно высокого качества с привлечением аппроксимаций, характерных для смешанных методов.

Публикации в журналах перечня ВАК

1. Фролов, М.Е. Адаптация сеток на основе функциональных апостериорных оценок с аппроксимацией Равьяра-Тома / М.Е. Фролов, М.А. Чурилова // Журн. Вычисл. Матем. и Математ. Физ. — 2012. — Т. 52, № 7. — С. 1277–1288.
2. Чурилова, М.А. Применение функционального подхода к адаптивному решению эллиптических задач / М.А. Чурилова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Физико-математические науки. — 2012. — № 4(158). — С. 64–69.
3. Чурилова, М.А. Вычислительные свойства функциональных апостериорных оценок для стационарной задачи реакции-диффузии / М.А. Чурилова // Вестник СПбГУ. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. — 2014. — Т. 1, № 1. — С. 68–78.

Статьи в научных изданиях

4. Чурилова, М.А. Применение функциональных апостериорных оценок в адаптивных алгоритмах решения эллиптических краевых задач / М.А. Чурилова, М.Е. Фролов // XL Неделя Науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. — 2011. — № 5. — С. 114–116.
5. Чурилова, М.А. Функциональные апостериорные оценки для стационарной задачи реакции-диффузии и их вычислительные свойства / М.А. Чурилова // Труды СПбГТУ. — 2013. — № 515. — С. 56–61.
6. Churilova, M.A. Matlab implementation of functional type a posteriori error estimates with raviart-thomas approximation / M.A. Churilova, M.E. Frolov // Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2012. — 2014. — Vol. 19. — P. 379–383.
7. Чурилова, М.А. Некоторые адаптивные алгоритмы решения задач плоской деформации и их сравнительный анализ / М.А. Чурилова // Наука и инновации в технических университетах: материалы Седьмого Всероссийского форума студентов, аспирантов и молодых ученых. — 2013. — С. 52–54.