Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Ильяшенко Александр Сергеевич

МОДЕЛИ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИОРИТЕТНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ ВЫТАЛКИВАЮЩИМ МЕХАНИЗМОМ

Специальность 05.13.18 — «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
канд-т физ.-мат. наук, доцент
Заяц О.И.

Санкт-Петербург – 2014

Оглавление

Введение

Теория массового обслуживания (ТМО) является прикладной вероятностной дисциплиной, которая занимается изучением математических моделей разнообразных реальных систем, предназначенных для обработки поступающих на их вход потоков заявок (требований). Важной задачей ТМО является расчет возникающих очередей. Поэтому ее часто также называют «теорией очередей».

История ТМО насчитывает более ста лет. Первый период наиболее интенсивного ее развития относится к пятидесятым-семидесятым годам прошлого века. Тогда были детально изучены важнейшие типовые модели систем массового обслуживания (СМО), которые успешно применяли в самых разнообразных приложениях, в том числе и в телекоммуникационных. Далее развитие ТМО несколько замедлилось. Для большинства задач, допускающих простое решение, оно уже было известно. Кроме того, появление персональных ЭВМ стимулировало широкое распространение методов статистического (имитационного) моделирования. Число работ, посвященных теоретическому анализу качественно новых моделей СМО, существенно снизилось.

Новый подъем исследований в области ТМО начался в девяностые годы. Он был вызван появлением глобальных компьютерных сетей и Интернета. Сетевые технологии сильно опережают в своем развитии теоретическое понимание сетевых взаимодействий. Разумеется, можно изучать телематические устройства и путем статистического моделирования, не пытаясь строить их аналитическую модель. Такой подход, однако, не позволяет всесторонне изучить модель «в целом» и является узконаправленным на ее исследование при конкретных заранее заданных параметрах.

Едва ли не единственное адекватное аналитическое описание сетевой среды в настоящее время дает ТМО. Но классические простейшие однопотоковые модели СМО недостаточно точно моделируют реальные сетевые взаимодействия. Потоки в сетях формируются многими источниками и различаются по ряду признаков (скорости передачи через каналы связи, пропускной способности виртуальных соединений, доступности буферной памяти, допустимому уровню потерь и т.п.).

Многопотоковые СМО не только точнее описывают телематические устройства, но и позволяет решать для них новые задачи, включая задачи управления. В ТМО разработаны два основных приема управления многопотоковыми СМО: приоритезация и использование выталкивающего механизма. Приоритет устанавливает определенную иерархию потоков, то есть задает преимущества в обслуживании одних типов заявок перед другими. Выталкивающий механизм вводит подобные же преимущества по постановке в очередь, позволяя высокоприоритетным требованиям вытеснить неприоритетные из накопителя системы.

В ТМО изучено много видов приоритетов, основными из которых по Б.В.Гнеденко является: абсолютный, относительный, чередующийся и изменяющийся. Приоритезация эффективно решает задачу управления в двух случаях: при бесконечном буфере, либо в слабо загруженной сети. Если буфер ограничен, а загрузка низкоприоритетными требованиями высока, то возможно «забивание» системы или буфера, сводящее на нет эффект приоритезации.

Для устранения эффекта «забивания» и служит выталкивающий механизм. В литературе подробно разобран лишь детерминированный выталкивающий механизм, систематическим изучением которого занимались Г.П. Башарин и его ученики. Детерминированный выталкивающий механизм эффективен при малой интенсивности высокоприоритетного потока, однако при ее увеличении до некоторого критического уровня происходит «забивание» буфера уже приоритетными заявками.

Для повышения эффективности и гибкости управления можно было бы применить вероятностный (рандомизированный) выталкивающий механизм, когда выталкивание из буфера происходит не автоматически, безусловно, а лишь с некоторой заданной вероятностью α . Последняя играет роль параметра управления. Этот прием взят на вооружение многими сетевыми инженерами и практиками, но соответствующая теория практически отсутствует. Настоящая диссертация призвана восполнить этот пробел.

Изучение приоритетных СМО началось в пятидесятые годы прошлого века. В семидесятые годы появились первые монографии Н. Джейсуола, а также группы авторов из МГУ (под руководством Б.В. Гнеденко). Важные результаты по СМО с приоритетами принадлежат Б.В. Гнеденко [83], Г.П. Башарину, И.Н. Коваленко, О.И. Бронштейну, И.М. Духовному, П.П. Бочарову, А.В. Печинкину, В.А. Кокотушкину, В.П. Рыкову, Г.П. Климову, Д.Г. Михалеву, Э.А. Даниеляну, М.Ю. Китаеву, Д. Кёнигу, Н. Джейсуолу, Т.Л. Саати, Х. Уайту, Л.С. Кристи, Ф. Стефану, а также многим другим ученым.

Несмотря на обилие работ по общей теории приоритетным СМО, лишь считанные единицы из них допускают наличие выталкивающего механизма. Применительно к детерминированному выталкивающему механизму имеется только цикл работ Г.П. Башарина, а также две статьи В.А. Кокотушкина и Д.Г. Михалева и несколько работ зарубежных авторов.

В начале нашего века в литературы был расмотрен новый вид выталкивающего механизма - вероятностной выталкивающий механизм, изучением которого занимались Н.О. Вильчевский, К.Е. Авраченков и Г.Л. Шевляков [92, 93] на примере одноканальной марковской СМО при наличии относительного приоритета. О.И. Заяц, В.С. Заборовский, В.А. Мулюха и А.С. Вербенко [94, 95] детально разобрали аналогичную систему с абсолютным приоритетом при условии, что выталкивание с канала обслуживания осуществлялось тоже с заданной вероятностью.

В работах этих авторов было показано, что изменение параметра вероятностного выталкивающего механизма – вероятности выталкивания низкоприоритетного требования из системы высокоприоритетным, является эффективным способом управления процессом работы СМО.

Настоящая диссертационная работа содержит исследование двухпотоковых марковских моделей СМО, снабженных вероятностным выталкивающим механизмом, для основных наиболее употребительных типов приоритетов (абсолютного, относительного, чередующегося и вероятностного).

Целью диссертационной работы является исследование моделей приоритетных систем массового обслуживания с вероятностным выталкивающим механизмом. Для достижения поставленных целей в диссертации решены следующие **задачи**:

1. Введены новые модели приоритетных СМО с вероятностным выталкиванием;
2. Разработан метод исследования рассматриваемых моделей, основанный на методе производящих функций и условиях их аналитичности, позволяющий снизить вычислительную сложность задачи;
3. Разработан программный комплекс, реализующий алгоритмы вычисления вероятностей потери требований с использованием: исходной системы уравнений равновесия; «укороченной» системы уравнений, полученной по результатам применения метода;
4. Детально изучена зависимость вероятности потери требований от параметра выталкивающего механизма и выявлен ряд качественных эффектов;
5. Введено понятие областей «запирания» системы для низкоприоритетного потока требований и определены их границы;
6. Введено понятие области «линейности» системы для каждого типа требований и определены их границы.

Объектом исследования в работы служат приоритетные СМО, снабженные вероятностным выталкивающим механизмом.

Предметом исследования является предложенной в работе общий метод, базирующийся на методе производящих функций и методах теории функций комплексного переменного.

Научная новизна. В работе введены в научный оборот новые модели приоритетных СМО, снабженные вероятностным выталкивающим механизмом. В дополнение к известным ранее моделям таких систем с относительным приоритетом рассмотрены также системы с абсолютным, чередующимся и вероятностным приоритетом. Тем самым завершено теоретическое изучение всех основных (по классификации Б.В. Гнеденко) видов приоритетов в комбинации с вероятностным выталкивающим механизмом для марковских двухпотоковых СМО. Автором впервые получены следующие **результаты**:

1. Построены фазовые пространства, размеченные графы состояний и СУР для всех моделей приоритетных СМО класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1$ при $1 \le i \le 4$;
2. Разработан метод понижения размерности СУР, основанный на теории производящих функций и условиях их аналитичности;
3. Проведено детальное исследование влияния параметра выталкивающего механизма на вероятности потерь СМО классов $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1$ при $1 \le i \le 4$;
4. Введено понятие областей «запирания» и построены их границы для СМО приведенных выше классов для низкоприоритетного трафика;
5. Введено понятие областей «линейности» и построены границы этих областей как диаграмм загрузки, где имеет силу линейный закон потерь в зависимости от параметра выталкивающего механизма.

Обоснованность и достоверность всех полученных в диссертации результатов подтверждается, с одной стороны, строгим математическим исследованием с использованием общепринятых методов теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, математического анализа и, с другой стороны, широкой апробацией в печатных трудах и докладах на конференциях.

Практическая значимость работы. Построенные в работе новые математические модели приоритетных СМО позволяют создавать новые, более эффективные телематические устройства, рационально выбирать режимы их работы, прогнозировать качественные особенности их поведения при различных состояниях сетевой среды. Результаты диссертационного исследования используются на практике при проектировании и изготовлении ряда сетевых устройств, в частности, межсетевых экранов отечественного производства (модель ССПТ-2 и ее модификации, производимые ЗАО «НПО РТК» и «ФРАКТЕЛ»). Другим успешным примером приложения разработанной теории является удаленное управление робототехническими комплексами в условиях ограниченной пропускной способности каналов связи в отечественных космических экспериментах «Контур» и «Контур-2» по организации силомоментного удаленного управления с поверхности Земли робототехническим комплексом на борту МКС («Контур») и робототехническим комплексом на поверхности Земли с борта МКС («Контур-2»).

Апробация работы. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Научном семинаре «Проблемы современных информационно-вычислительных систем» (Москва, МГУ, 2011)
2. Международной конференции «Экстремальная робототехника» (Санкт-Петербург, ЦНИИ РТК, 2012)
3. Международной конференции «Numerical Computations: theory and algorithms» (Италия, Фалерна, 2013)
4. XIV Международной конференции «Next generation wired/wireless advanced networks and systems» (Санкт-Петербург, 2014)

Результаты, полученные автором работы дважды удостоены грантов правительства Санкт-Петербурга (2012 и 2013 гг.), а также отмечены именной стипендией Президента РФ молодым ученым и аспирантам (СП-2013).

Личный вклад. Автор участвовал в постановке задачи, формулировке целей и задач исследования. Автор лично дорабатывал метод понижения размерности СУР на основе ранее опубликованных работ других исследователей. Модели СМО с чередующимся и вероятностным приоритетом являются новыми и предложены автором. Автором также собственноручно разработан комплекс программ для расчета основных технических характеристик рассматриваемых в работе СМО и проведен весь численный эксперимент. Статьи и доклады, отражающие содержание работы, писались при личном участии автора.

Во **введении** приводится обоснование актуальности и практической значимости темы диссертационной работы. Дается краткое описание целей и задач диссертационного исследования и дается описание структурных разделов диссертации.

Первая глава начинается с проведения обзора литературы и рассмотрения задач в обозначениях описанных в предыдущем разделе, для которых были получены результаты в более ранних работах по схожим направлениям. Дается описание расширения нотации Г.П. Башарина для обозначения моделей рассматриваемых в рамках диссертационной работы. Приводится обзор основных методов исследования моделей теории массового обслуживания. Подробно рассматриваются задачи, решение которых легло в основу разработанного метода. Приводится краткое описание метода, использованного для решения задачи Уайта, Кристи и Стефана системы с двумя входящими потоками, одинаково распределенным временем обслуживания и бесконечным накопителем класса $M_2/M/1/f_2$. Дается подробное описание задачи, поставленной на диссертационное исследование, формулировка целей и задач, решаемых в данной работе.

Вторая глава посвящена рассмотрению и описанию разработанного метода снижения размерности системы линейных уравнений Колмогорова порядка $k(k+1)/2$ для двухпотоковых приоритетных систем с конечным накопителем и выталкивающим механизмом, а также рассмотрению приложений этого метода к моделям систем массового обслуживания с классическими типами приоритетов: относительным и абсолютным. Для обеих систем приводится описание фазового пространства, использованного для описания набора состояний, в которых может находится система, и рассмотрен размеченный граф состояний с всеми возможными переходами между ними. Также в обобщенном виде записывается система уравнений равновесия Колмогорова и результат применения разработанного метода. В качестве основного результата приведена построенная система линейных уравнений порядка $(k+1)$ и описаны особенности ее решения. По результатм рассмотрения этих систем дается детальное описание метода метоа снижения порядка системы линейных уравнений.

В **третьей главе** рассматриваются двухпотоковые марковские системы с нестандартными типами приоритетов: чередующимся и вероятностным. В качестве основных результатов описаны отличия в применении разработанного метода уменьшения размерности системы уравнений равновесия Колмогорова и приведены итоговые укороченные системы линейных уравнений.

Четвертая глава посвящена рассмотрению численных результатов, полученных при помощи формул, полученных в диссертационной работе. В качестве основной исследуемой характеристики приоритетных моделей рассматривается вероятность потери требований обоих типов, поступающих на вход системы. Приведено доказательство теоремы о способе вычисления вероятностей потери обоих типов требований в рассматриваемых системах все выражения для нахождения вероятностей потери требований в случаях со всеми тремя типами приоритетов. Приводится описание концепции областей линейности и запирания для рассматриваемых систем. Построены зависимости вероятностей потери обоих типов требований от параметра вероятностного выталкивающего механизма – вероятности вытеснения из накопителя неприоритетного требований приоритетным, а также построены все области линейности и запирания. Отдельно для системы с вероятностным приоритетом рассмотрены зависимости от параметра приоритета – вероятности обслуживания требования первого типа.

В заключении приведены основные результаты диссертационного исследования и выводы

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, выводов и списка литературы. Объем диссертации составил 145 страниц, в том числе: титульный лист – 1 стр., оглавление – 2 стр., основной текст - 132 стр., библиография из 111 наименований - 10 стр.

Глава 1. Обзор литературы и постановка задачи исследования

1.1. Обзор литературы

Интерес к изучению приоритетных систем массового обслуживания обусловлен быстрым развитием компьютерных и, в частности, сетевых технологий. Многие технические системы имеют возможность задания приоритета по обработке данных. Интерес к задачам этого типа впервые возник еще в середине прошлого века, и был связан с началом развития компьютерной техники и исследованием сложных телекоммуникационных и информационных систем. За первые десятилетия в этом направлении появилось множество различных работ, посвященных подобным задачам, поэтому возникла настоятельная необходимость построить строгую теорию, сформировать математический аппарат и общие методы исследования. Это огромная работа, которая продолжается до сих пор. Приоритетные системы исследованы не до конца и очень много вопросов, связанных с ними, остаются открытыми и по сей день. Сначала исследовались простейшие одноканальные двухпотоковые системы, а позже они были взяты за основу для более сложных многоканальных приоритетных систем общего вида, потому что достаточно полно позволяют описывать их составляющие части.

Следует отметить, что в последние годы и десятилетия интенсивность исследований моделей СМО существенно возросла. Предлагаются новые модели таких систем, переосмысливаются и усовершенствуются старые модели и модели, более детально и всесторонне изучаются качественные свойства СМО и области их применения [107, 108]. Это связано прежде всего с бурным развитием сетевых технологий и сети Интернет. Дело в том, что использование аппарата приоритетных СМО является строгим аналитическим подходом к моделированию сложных сетевых взаимодействий.

1.1.1 Первоначальный период развития теории приоритетных систем обслуживания

Рассмотрим вначале основные работы, которые появились в начальный период развития рассматриваемой теории. В конце шестидесятых – начале семидесятых годов появились первые монографии по приоритетным системам, которые в основном касались одноканальных систем. Нужно обратить особое внимание на содержательную работу Н. Джейсуола [34], вскоре переведенную на русский язык [84], а также работы отечественных специалистов, прежде всего фундаментальную монографию под редакцией Б.В. Гнеденко [83], а также монографию О.И. Бронштейна и И.М. Духовного [90], Э.А.Даниляна [91] и многих других авторов. Отечественная школа ТМО, возглавляемая Б.В. Гнеденко, всегда находилась на передовых позициях, касающихся этой области. Под редакцией Б.В. Гнеденко была выпущена упоминавшаяся выше коллективная монография ведущих специалистов, изучавших приоритетные системы совместно с вышеупомянутым автором [83], которая и по сей день является самым полным руководством по имеющимся теоретическим данным в рассматриваемой области ТМО, хотя с момента ее выхода в свет прошло уже почти 40 лет.

Любая система массового обслуживания имеет в качестве одной из основных глобальных характеристик количество независимых входящих потоков требований (заявок). Рассморетрение приоритетных систем массового обслуживания имеет смысл только для случая, как минимум, двух различных входящих потоков требований. В этом случае возможно введение приоритета по обслуживанию или по постановке в очередь одного потока перед другими. Конкретное содержание предоставляемых преимуществ, зависит от структуры самой модели, причем способы введения приоритетов могут иметь самый разнообразный вид. В работе Б.В. Гнеденко детально разбираются четыре основных типа приоритетов: относительный, абсолютный, чередующийся и изменяющийся (последний иногда называют динамическим). Все эти типы приоритетов широко освещаются в литературе и специальных работах по исследованию приоритетных СМО. Разберем более подробно каждый из упомянутых выше видов приоритета по отдельности.

При введении *относительного* приоритета в системах массового обслуживания, предназначенных для обработки двух потоков, поступающие требования одного потока в систему пользуются приоритетом лишь по постановке в очередь перед требованиями второго потока. В случае нескольких входящих потоков требований $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ приоритеты по постановке в очередь выстраиваются по возрастанию присваиваемого каждому потоку индекса приоритета. Поток с индексом i имеет приоритет над всеми потоками с большими индексами, и все заявки из этого потока обслуживаются раньше, чем требования из потоков с индексом j при $i < j$. Еще одним важным моментом является то, что, если требованию из менее приоритетного потока поступило на обслуживание, то оно обслуживается до конца, вне зависимоти от того, что за требования успевают поступить в накопитель системы за время его обслуживания. То есть обслуживание низкоприоритетного требования не прерывается в случае поступления в систему высокоприоритетных требований.

Впервые в литературе эта дисциплина была рассмотрена А. Кобхэмом в работе [15]. Интерес не исчерпывался только одной работой иследователей по этому виду приоритета. Развитие этой идеи последовало во множестве работ таких авторов как Л. Миллер [6], Н. Джейсуол [20], Л. Такач [22] и работах других исследователей [16, 17, 18, 19, 21, 106]. Во всех этих перечисленных работах рассматривались СМО, в которые требования, поступали от бесконечного числа источников нагрузки.

Еще одним видом приоритетной дисциплины является *абсолютный* приоритет. Процесс обслуживания при этом виде приоритета совпадает со случаем относительно приоритета с одним существенным отличием: высокоприоритетные требования могут прерывать обслуживание низкоприоритетных. Системы с абсолютным приоритетом классифицируются по способу дальнейшей обработки требования, обслуживание которого было прервано. Рассматривают системы с дообслуживанием, при которых обслуживание прерванного требования продолжается с момента прерывания или с обслуживания заново, когда система освободится от всех высокоприоритетных требований. Еще одним классом систем являются системы с потерями, когда прерванное требование покидает СМО и теряется.

Впервые в литературе абсолютный приоритет встречается в работах Уайта, Кристи [1] и Стефана [2]. Также данная приоритетная дисциплина разрабатывалась в цикле исследований К. Хиткоута [3, 4, 5], работе Л. Миллера [6] и работах других авторов [7, 8, 10, 22]. Системы с ненадежными приборами обслуживания, при которых обслуживающий прибор может выходить из строя через случайный интервал времени, были исследованы в работах [9, 32, 33, 51]. Как показал Б.В. Гнеденко, такие системы можно трактовать, как приоритетные, если поток отказов интерпретировать, как дополнительный входящий поток, обладающий абсолютным приоритетом. Были изучены также системы с конечным числом источников нагрузки и абсолютным приоритетом (на эту тему имеются работы [11, 12, 13, 14]).

В дополнение к двум приведенным классическим (по классификации Г.П. Башарина, которая будет приведена в п. 1.1.2) типам приоритетов, в своей классификации Б.В. Гнеденко выделяет чередующийся приоритет. Процесс функционирования систем с этим типом приоритета можно описать следующим образом. Первоначально в свободной системе не определен тип требований, которые имеют преимущества по обслуживанию и постановке в очередь. После поступления требований любого из типов, приоритет закрепляется за этим типом требований и остается закрепленным за ним до момента полного освобождения системы от требований этого “локально” приоритетного типа. Далее первое же требование, которое поступит на обслуживание, определяет выбор приоритета на следующий период занятости канала обслуживания и всей системы в целом. Данные тип приоритета был введен в статье Б. Ави-Итжаком, И. Максвеллом и Л. Миллером [25] для системы с мгновенным переключением приоритетов. Также для него были получены аналитические результаты и с учетом времени переключения прибора в работах [26, 27, 28].

Последним типом приоритета, рассмотренным Б.В.Гнеденко, был изменяющийся приоритет. Основной идеей этого вида приоритета является задание приоритета перед каждым выбором требования для обслуживания. В качестве параметров для выбора можно использовать интенсивности входящих потоков или длины очередей требований различных потоков. В своих работах [29, 30, 31] Джексон рассматривает системы, в которых выбор требования для обслуживания зависит от времени, которое требование провело в системе в ожидании обслуживания. В последствии эти исследования послужили основой нового направления в теории приоритетных СМО – теории приоритетных СМО с ориентацией [103]. В качестве одного из основных и наиболее употребительных способов задания приоритета можно назвать вероятностный приоритет, при котором перед каждым обслуживанием требование выбирается с некоторой заданной вероятностью из определенного потока.

Н. Джейсуол [34, 84] рассматривает еще один вид приоритета – так называемый смешанный приоритет. В случае относительного приоритета велика вероятность заставить приоритетное требование ждать длительное время, если неприоритетное требование только что заняло канал обслуживания. Другая нежелательная ситуация может возникнуть, если в случае относительного приоритета приоритетное требование вытеснит с канала обслуживания неприоритетное, которое длительное время находилось на обслуживании и почти завершилось. Для решения этих проблем и рекомендуют вводить смешанный приоритет [23, 24], при котором в зависимости от длительности пребывания требования на канале обслуживания, поступившему высокоприоритетному требованию присваивается абсолютный приоритет, если требование пробыло на облуживании меньше заданного порога, или относительный приоритет, в противном случае.

1.1.2 Классификация приоритетных СМО по Г.П. Башарину

Из приведенного выше описания типов существующих разновидностей приоритетов можно заключить, что постановка задач из раздела приоритетных систем массового обслуживания требует достаточно объемных пояснений, связанных с заданием большого числа градаций: количества входящих потоков требований, распределений интервалов времени между поступлением требований для каждого потока, распределением времени обслуживания на каждом из каналов, объемом и структурой накопителя. Кроме того в теории приоритетных систем приходится рассматривать понятие выталкивающего механизма, который позволяет в случае ограниченного накопителя, задать способ вытеснения низкоприоритетных требований высокоприоритетными. В литературе для краткости записи и наглядности используется система сокращенных обозначений для приоритетных СМО, которая является модификацией классической классификации Д.Кендалла [85]. Впервые её применил Б.В.Гнеденко как раз в монографии [83].

Общее обозначение марковских СМО по Кендаллу [85] выглядит как $M/M/m/k/l$. Первые два символа M обозначают, что входящий поток в СМО является простейшим, а обслуживание происходит по показательному закону [85]. Для описания других типов закона распределения интервалов времени между поступлениями требований и временем обслуживания могут быть использованы также следующие типовые символы:

- D – регулярный поток, с постоянным интервалом времени, или фиксированное время;
- E_r – поток Эрланга порядка r или распределение времени по закону Эрланга;
- H_r – поток Кокса порядка r или гиперэкспоненцильный закон распределения;
- G – произвольный закон распределения интервалов и длительности обслуживания.

Далее, целое m обозначает число каналов обслуживания в системе, k – её суммарную емкость (включая как каналы обслуживания, так и накопитель), а l – число источников нагрузки. Если на вход системы поступает несколько простейших потоков с различными приоритетами и с различными интенсивностями поступления требований, то первая буква заменяется на вектор (например, $\vec{M}_r$), где r обозначает число таких потоков. В случае постоянной интенсивности обслуживания всех потоков вторая буква M сохраняется без векторной записи. Если же интенсивность обслуживания каждого потока отличается от других, то символ M меняется на векторный $\vec{M}_r$.

Если для всех требований накопитель будет общим, то целое число k характеризует полную емкость системы, то есть число каналов плюс число мест для ожидания. Но может возникнуть ситуация, когда для разного типа требований число мест доступных в накопителе не будет одинаковым. Тогда вводят обозначение $\vec{k} = \{k_1, ..., k_r\}$, где каждое k_i задает отдельно емкость системы по каждому типу требований. Такие системы называются неполнодоступными. Те же обозначения можно использовать и для источников нагрузки $\vec{l} = \{l_1, ..., l_2\}$, каждая компонента вектора $\vec{l}$ является числом источников нагрузки для конкретного типа требований.

На начальной стадии исследований приоритетных СМО, эти обозначения снабжались дополнительным текстовым описанием действующего в системе приоритета, что делало формулировки задач чрезмерно громоздкими и труднообозримыми. Выход из данной ситуации был предложен одним из крупнейших российских специалистов по теории приоритетных систем Г.П. Башариным, который использовал свою систему обозначений для приоритетных СМО. Он предложил добавлять к обозначению Б.В. Гнеденко дополнительный символ f_i^j, поясняющий тип приоритета [35, 36].

С этим нововведением обозначения марковских систем принимают вид $\vec{M}_r / \vec{M}_r / m / \vec{k} / \vec{l} / f_i^j$, где i и j – целые числа, характеризующие различные способы организации приоритетных систем. Нижний индекс i задает тип приоритета: i = 0 – без приоритета, i = 1 – относительный приоритет, а i = 2 – абсолютный приоритет. Верхний индекс j определяет тип выталкивающего механизма, который действует в полностью заполненном накопителе при поступлении нового приоритетного требования. При $j = 0$ – выталкивающий механизм не действует (т.е. требование безусловно теряется), а $j = 2$ – детерминированный механизм, согласно которому всегда вытесняется требованием с меньшим приоритетом.

1.1.3 Приоритетные системы, попадающие под классификацию Г.П. Башарина

Рассмотрим вначале системы, которые были разобраны в литературе и характеризуются относительным приоритетом. В работе [37] Г.П. Башарин рассмотрел многоканальную систему класса $\vec{M}_2 / M / k / s / f_1^0$ с двумя потоками требований, одинаковым временем обслуживания обоих потоков, конечным накопителем и относительным приоритетом. В работе [38] В.А. Кокотушкин и Д.Г. Михалев дали обобщение этой системы на случай более чем двух потоков для моделей $\vec{M}_r / M / m / k / f_1^2$, $\vec{M}_r / M / 1 / k / f_2^2$. П.П. Бочаров и В.Т. Лысенкова [39, 40] рассмотрели эту же систему класса $\overrightarrow{M_2} / \overrightarrow{M_2} / 1 / s / f_1^0$ в случае различного времени обслуживания требований. А в работе [41] П.П. Бочаров изучил случай, когда время обслуживания, распределено по закону Эрланга, причем параметры этого закона различаются для разных входящих потоков требований.

Широко исследован класс систем, в которых для различных потоков требований создаются раздельные очереди, одну из которых обычно считают неограниченной. Системы классов $\overrightarrow{M_2} / M / k / \{s, \infty\} / f_1$ и $\overrightarrow{M_2} / \overrightarrow{M_2} / 1 / \{s, \infty\} / f_1$ исследовал И.М. Духовный [42]. Случай бесконечного совместного накопителя для нескольких входящих потоков и нескольких каналов обслуживания детально разобрал Г.П. Башарин [44]. Также имеются три работы, а именно [38], [43] и [49], в которых рассматривается детерминированный выталкивающий механизм для систем с относительным приоритетом класса $\vec{M}_r / M / k / s / f_1^2$ в первых двух работах и класса $\vec{M}_2 / \overrightarrow{D_2} / 1 / s / f_1^2$ в третьей, соответственно.

Еще нужно упомянуть работу [80], в которой методом вложенных цепей Маркова исследована полумарковская система $\overrightarrow{M_2}/G/1/k/f_1^2$. В работах [81, 82] также исследованы подобные же полумарковские системы $\overrightarrow{M_2}/\overrightarrow{G_2}/1/k/f_1^2$ и $\overrightarrow{M_2}/\overrightarrow{G_2}/1/k/f_1^0$. Отметим, что с точки зрения техники вычислений изучение полумарковских систем, аналогичных [80, 81, 82] мало чем отличается от соответствующих марковских систем. Меняется лишь способ получения системы уравнений равновесия. Для их получения приходится вначале строить вложенную цепь Маркова.

Отдельно можно выделить работы, в которых рассматривается случай частично разделенных очередей, когда требования обоих типов имеют свою собственную доступную часть накопителя, причем остается еще часть накопителя, общая для обоих типов требований [86]. Еще одним интересным случаем, является случай порогового выталкивающего механизма, когда выталкивающий механизм начинает функционировать только после увеличения количества неприоритетных требований в системе выше заданного уровня [87].

Абсолютный приоритет тоже довольно широко распространен в работах по приоритетным системам. Например, в работах В.А. Кокотушкина и Д.Г. Михалева [45] и [46] рассмотрена система с выталкиванием класса $\vec{M}_2/M/1/k/f_2^2$, а в работах [47] и [48] Г.П. Башарин изучил систему с абсолютным приоритетом, без выталкивания и с различающимися распределениями времени обслуживания двух типов требований как в случае раздельного, так и в случае общего накопителя соответственно.

Одним из основных методов исследования немарковских систем массового обслуживания является метод вложенных цепей Маркова. Данный метод для большого числа практически значимых систем позволяет получить аналитическое решение и найти многие вероятностные характеристики изучаемых моделей. В дополнение к этому методу Г.П. Климовым [52] был предложен метод введения дополнительного события, который позволяет получить аналитическое решение для целого класса систем [50].

Еще одно усложнение, которое часто вводят в процессе функционирования систем массового обслуживания – это так называемый «разогрев» обслуживающего прибора. В реальных системах обработка заявок не всегда начинается мгновенно и требует определенного времени на подготовку обслуживания. Такие системы были рассмотрены, например, в работах [53, 54, 110, 111].

В системах с чередованием приоритетов различают системы с мгновенным переключением приоритетов, а также с переключением, на которое затрачивается определенное время. Такие системы называются системами с «переналадкой». Случай марковских моделей такого типа изучен в работах [55, 56], а случай произвольного распределения времени обслуживания требований $\vec{M}_2/\overrightarrow{G_2}/1/\infty/f_1$ можно найти в статьях [69, 70, 71]. Система с несколькими входящими потоками и чередованием приоритетов между ними детально исследована методом вложенных цепей Маркова в работах И.М. Духовного [57, 58, 59, 60].

Для исследования полумарковских систем $\vec{M}_2/\overrightarrow{G_2}/1/\infty$ с чередующимся приоритетом в работах [65, 66, 67, 68] был взят на вооружение метод виртуального времени ожидания [64], который сочетался с методом введения дополнительного события [50, 52].

В практических приложениях СМО часто встречается случай ненадежного прибора, в котором обслуживающий прибор с некоторой вероятностью может выходить из строя. На период отказа прибора в системе полностью прекращается обслуживание требований конкретно на этом приборе и требования или поступают на другие приборы или начинают накапливаться вплоть до момента его восстановления. Такими системами занимались Э.А. Даниелян и Б.Н. Димитров в работах [61, 62, 63].

Еще одна заслуживающая внимания серия исследований была проведена в работах [72, 73] по изучению критических ситуаций для систем массового обслуживания. Под критической ситуацией здесь понимается наступление такого состояния системы, которое по мнению исследователя выходит за рамки ее нормального функционирования. В качестве примера можно привести состояние, в котором количество неприоритетных требований в накопителе системы превышает заданный уровень или же, когда время ожидания обслуживания выходит за заданные рамки. С практической точки зрения, интересны также результаты, полученные для систем массового обслуживания при экстремально больших нагрузках и определение временных характеристик таких систем. Например, в работе [74] приводится исследование системы $\vec{M}_2 / \overrightarrow{G_2} / 1 / \infty / f_2$ при аномально больших загрузках.

Существует класс приоритетных систем массового обслуживания, в которых обслуживание требований происходит в несколько этапов. Такие системы называются многоэтапными. Подобные системы рассматривались в работе Л. Шраге [79] при выборе смешанного приоритета на каждом этапе обслуживания. Интересный цикл работ принадлежит В.Ф. Матвееву, который рассматривал однолинейные системы с многоэтапным обслуживанием в своих работах [75, 76, 77, 78].

Еще один, новый вид выталкивающего механизма был введено в научную литературу сравнительно недавно. Речь идет о вероятностном выталкивающем механизме. Данный механизм является определенным компромиссом между полярными случаями отсутствующего и детерминированного выталкивания. Впервые он был предложен Н.О. Вильчевским, К.Е. Авраченковым и Г.Л. Шевляковым в работе [92], после чего полученные в ней результаты были дополнены и обобщены в [93]. В этих работах рассматривалась двухпотоковая марковская система с относительным приоритетом класса $\vec{M}_2 / M / 1 / k / f_1^1$ и вероятностным выталкиванием. Общая идея указанных работ заключается в том, что, в отличие от детерминированного выталкивания, высокоприоритетное требование выталкивает из накопителя низкоприоритетное требование не всегда, а лишь с некоторой заданной вероятностью α. Если взять $\alpha = 0$, то получим случай отсутствия выталкивания, а при $\alpha = 1$ имеем случай детерминированного выталкивающего механизма. Одним из важнейших результатов этих работ стало предложение по расширению нотации Г.П. Башарина, касающиеся приоритетных систем. Н.О. Вильчевский предложил использовать недостающий у Г.П. Башарина вариант задания верхнего индекса для символа приоритета $f_i^{\,j}$, когда j=1, для обозначения вероятностного выталкивания. Это использование является логичным, так как данный тип выталкивания занимает промежуточное положение между отсутствием выталкивания (j=0) и детерминированным выталкивающим механизмом (j=2). С учетом этого индекса рассмотренная в работах [92, 93] система становится системой вновь введенного класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_1^1$.

Исследования подобных систем в последние годы были продолжены в работах [94, 95]. Для решения был применен метод, аналогичный методу работ [92, 93], и целью являлось изучение системы с абсолютным приоритетом $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_2^1$. Однако, в работах [94, 95] был допущен ряд неточностей и исследуемая система фактически имела несколько иной вид приоритета, отличающийся от абсолютного, а именно, требование с канала обслуживания выталкивалось точно таким же образом, как и функционировал вероятностный выталкивающий механизм в накопителе. Таким образом, в момент переполнения накопителя начинал действовать вероятностный приоритет, причем его приоритетная вероятность совпадала с вероятностью выталкивания из накопителя.

В настоящей диссертационной работе рассматриваются марковские системы с вероятностным выталкиванием в установившемся режиме. По результатам приведенного выше анализа публикаций, касающихся приоритетных систем обслуживания можно выделить два основных метода, которые использовались для решения подобного рода задач: метод рекуррентных соотношений и метод производящих функций. Отметим, что в диссертации, как и в приведенном обзоре, мы ограничимся изучением только установившимся режимом работы СМО.

Важные результаты по изучению приоритетных систем в установившемся режиме принадлежат Г.П. Башарину, его ученикам и последователям. Представители этой научной школы строили решение с использованием метода рекуррентных соотношений (МРС). Метод рекуррентных соотношений, является алгоритмическим и дает лишь последовательность действий, приводящих к решению. Получение с помощью МРС аналитических результирующих формул затруднено. Между тем альтернативный метод производящих функций (МПФ) дает аналитическое решение для целого ряда задач и позволяет сравнительно легко получить в ходе решения не только сами финальные вероятности состояний системы, но также и другие интересующие исследователя характеристики, в том числе и временные. Более конкретно, заметим, что метод производящих функций в ряде специальных случаев позволяет получить аналитическое решение, как, например, в задаче [1, 2], а также при граничных значениях $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ в задачах [92, 93, 94, 95]. Известны, также, задачи, для которых метод производящих функций дает более простое решение, чем метод рекуррентных соотношений [88, 89]. В общем случае он приводит к системам линейных алгебраических уравнений, порядок которой пропорционален k. В отличие от этого метод рекуррентных соотношений Г.П. Башарина требует решения системы, порядок которой пропорционален k^2 . Для того, чтобы продемонстрировать преимущества метода производящих функций, разберем более подробно аналитическое решение задачи для приоритетной системы с ожиданием класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/f_2$, данные в классических работах Х. Уайта и Л. Кристи [1], а также Ф. Стефана [2].

1.2. Решение методом производящих функций задачи Уайта-Кристи-Стефана для системы класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/f_2$.

Рассмотрим установившийся режим в системе класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/f_2$. Размеченный граф состояний приводится на рис. 1.1. Состояния нумеруются двумя индексами. Первый из них указывает на число требований первого типа в системе, а второй – на число имеющихся требований второго типа. Данная система является системой с ожиданием и в ней нет потерь при постановке требования на обслуживание. Отсутствие потерь обусловлено бесконечным объемом накопителя. Таким образом, все поступающие в систему требования занимают место в накопителе и ожидают своего обслуживания. В данной системе требования первого типа имеют абсолютный приоритет перед требованиями второго типа и могут выталкивать их прямо с канала обслуживания. В этом случае вытолкнутые заявки второго типа переходят в накопитель и начинают обслуживание заново после завершения обслуживания всех высокоприоритетных требований в системе.

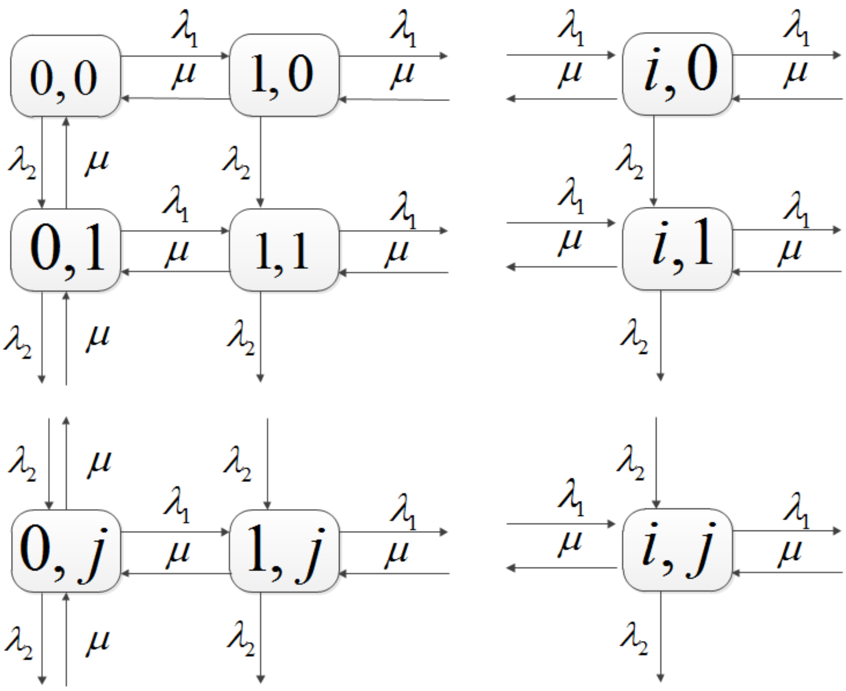

Рисунок 1.1 - Размеченный граф состояний для системы $\overrightarrow{M_2}/M/1/f_2$

Согласно рис. 1.1 система уравнений Колмогорова в установившемся режиме имеет вид:

$$\begin{aligned}
&-(\lambda_1+\lambda_2)P_{0,0}+\mu(P_{1,0}+P_{0,1})=0,(i=0,\,j=0),\\
&-(\lambda_1+\lambda_2+\mu)P_{i,0}+\mu P_{i+1,0}+\lambda_1 P_{i-1,0}=0,(i>0,\,j=0),\\
&-(\lambda_1+\lambda_2+\mu)P_{0,j}+\mu(P_{1,j}+P_{0,j+1})+\lambda_2 P_{0,j-1}=0,(i=0,\,j>0),\\
&-(\lambda_1+\lambda_2+\mu)P_{i,j}+\mu P_{i+1,j}+\lambda_1 P_{i-1,j}+\lambda_2 P_{i,j-1}=0,(i>0,\,j>0).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Для дальнейшего исследования эти уравнения удобно переписать в единообразном виде следующим образом:

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\mu(1-\delta_{i,0}\delta_{j,0}))P_{i,j}+\mu P_{i+1,j}+\mu\delta_{i,0}P_{i,j+1}+$$
$$+\lambda_1 P_{i-1,j}+\lambda_2 P_{i,j-1}=0,(i\geq 0,\, j\geq 0), \tag{1.2}$$

где $\delta_{i,j}$ обозначает дельта-символ Кронекера и считается, что $P_{i,j}\equiv 0$, если хотя бы один из индексов (i, j) отрицателен. В исходных работах [1, 2] запись с помощью дельта-символа (1.2) не использовалась, однако этот прием постоянно будет применятся в дальнейшем и позволяет упростить вычисления. Поэтому с самого начала возьмем его на вооружение.

1.2.1. Вычисление производящей функции

Для решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (1.2) применим метод производящих функций. Производящую функцию определим в виде:

$$G(u,v)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P_{i,j}u^i v^j. \tag{1.3}$$

Вследствие выполнения условия нормировки:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P_{i,j}=1 \tag{1.4}$$

функция (1.3) удовлетворяет условию

$$G(1,1)=1. \tag{1.5}$$

Кроме того, как функция комплексных аргументов (u,v) она является аналитической в бикруге

$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2 \quad , \tag{1.6}$$

представляющем прямое (декартово) произведение двух единичных кругов

$$\Omega_1=\{u:|u|\leq 1\},\Omega_2=\{v:|v|\leq 1\}, \tag{1.7}$$

то есть в области

$$\Omega=\{(u,v):|u|\leq 1,|v|\leq 1\}, \tag{1.8}$$

В области Ω функция (1.3) не может иметь никаких особых точек: ни полюсов, ни точек ветвления, ни существенно особых точек. Это свойство будет существенно использовано при решении.

Умножим обе части равенства (1.2) на произведение $u^i v^j$ и просуммируем по всем допустимым значениям (i, j). Получаем

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\mu)G(u,v)+\mu G(0,0)+\mu\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P_{i+1,j}u^i v^j+ \\ +\mu\sum_{j=0}^{\infty}P_{0,j+1}v^j+\lambda_1\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P_{i-1,j}u^i v^j+\lambda_2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}P_{i,j-1}u^i v^j=0, \tag{1.9}$$

где учтено, что

$$P_{0,0}=G(0,0) \tag{1.10}$$

Теперь преобразуем оставшиеся суммы в (1.9) следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P_{i+1,j}u^i v^j=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P_{i,j}u^{i-1}v^j=u^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P_{i,j}u^i v^j-\sum_{j=0}^{\infty}P_{0,j}v^j\right]= \\ =u^{-1}\left[G(u,v)-G(0,v)\right], \tag{1.11}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}P_{0,j+1}v^j=\sum_{j=1}^{\infty}P_{0,j}v^{j-1}=v^{-1}\left[\sum_{j=0}^{\infty}P_{0,j}v^j-P_{0,0}\right]=v^{-1}\left[G(0,v)-G(0,0)\right], \tag{1.12}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P_{i-1,j}u^i v^j=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P_{i,j}u^{i+1}v^j=uG(u,v), \tag{1.13}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}P_{i,j-1}u^i v^j=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P_{i,j}u^i v^{j+1}=vG(u,v), \tag{1.14}$$

после чего подставим (1.11)-(1.14) в (1.9).

В результате получим

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\mu)G(u,v)+\mu G(0,0)+\mu u^{-1}\left[G(u,v)-G(0,v)\right]+ \\ +\mu v^{-1}\left[G(0,v)-G(0,0)\right]+\lambda_1 uG(u,v)+\lambda_2 vG(u,v)=0, \tag{1.15}$$

что дает после элементарных алгебраических преобразований

$$\left[\lambda_1(u-1)+\lambda_2(v-1)+\mu(u^{-1}-1)\right]G(u,v)+\mu(v^{-1}+u^{-1})G(0,v)+ \\ +\mu(1-v^{-1})G(0,0)=0. \tag{1.16}$$

Разрешая уравнение (1.16) относительно $G(u,v)$ и вводя коэффициенты использования по каждому типу требований

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}, \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu}, \tag{1.17}$$

получим

$$G(u,v) = \frac{(u-v)G(0,v) + u(v-1)G(0,0)}{\left[\rho_1 u(1-u) + \rho_2 u(1-v) + (u-1)\right]v}. \tag{1.18}$$

Отметим, что по смыслу поставленной задачи должны выполняться неравенства

$$0 \le \rho_1 < 1, 0 \le \rho_2 < 1, \tag{1.19}$$

а также

$$0 \le \rho < 1, \tag{1.20}$$

где

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu}, \tag{1.21}$$

обозначает суммарный коэффициент использования системы по обоим типам требований. Неравенства (1.19)-(1.20) гарантируют существование установившегося режима в рассматриваемой системе.

Легко видеть, что при любом v числитель (1.18) является линейной функцией относительно u, а знаменатель – квадратичной функцией u. Поэтому, если рассматривать G как функцию аргумента u, то она будет иметь два полюса. Ни один из них не может располагаться в круге Ω_1, определяемом (1.7). Рассмотрим знаменатель (1.18). С точностью до знака знаменатель совпадает с полиномом

$$R(u,v) = \rho_1 u^2 - \left[\rho_1 + \rho_2(1-v) + 1\right]u + 1. \tag{1.22}$$

Последний имеет два корня

$$u_{1,2} = \frac{\left[\rho_1 + \rho_2(1-v) + 1\right] \mp \sqrt{\left[\rho_1 + \rho_2(1-v) + 1\right]^2 - 4\rho_1}}{2\rho_1}. \tag{1.23}$$

Как показано в работах [1, 2], при соблюдении неравенств (1.19), корень u_1 лежит внутри круга Ω_1, а корень u_2 – вне этого круга при любых v, принадлежащих Ω_2. Таким образом, корень u_1 противоречит условию аналитичности G в бикруге Ω, определяемом (1.8).

Доказательство того, что $|u_1|<1$ при любом $|v|<1$ достаточно громоздко, однако сравнительно легко доказывается, что ровно один корень (1.22) лежит внутри Ω_1, а один – вне его. Для этой цели применим теорему Руше (см., например, [104]). Действительно, положим

$$R(u,v) = R_1(u,v) + R_2(u,v), \tag{1.24}$$

где

$$\begin{aligned} &R_1 = \rho_1 u^2 + 1, \\ &R_2 = -\left[\rho_1 + \rho_2(1-v) + 1\right]u, \end{aligned} \tag{1.25}$$

а также обозначим через Γ_1 границу Ω_1:

$$\Gamma_1 = \{u : |u| = 1\}. \tag{1.26}$$

Далее рассмотрим граничные значения модуля функций R_1 и R_2 на окружности Γ_1.

Имеем

$$|R_1|_{\Gamma_1} = 1 + \rho_1, \tag{1.27}$$

$$|R_2|_{\Gamma_1} = |\rho_1 + \rho_2(1-v) + 1|. \tag{1.28}$$

Оценивая правую часть (1.28) при $v \in \Omega_2$ по модулю, получим

$$\begin{aligned} &|R_2|_{\Gamma_1} = |\rho_1 + 1 + \rho_2 \operatorname{Re}(1-v) + i\rho_2 \operatorname{Im}(1-v)| = \\ &= \sqrt{(\rho_1 + 1 + \rho_2 \operatorname{Re}(1-v))^2 + \rho_2^2 \operatorname{Im}^2(1-v)}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Очевидно, что при $v \in \Omega_2$ всегда

$$\operatorname{Re}(1-v) \geq 0, \tag{1.30}$$

причем знак равенства достигается только при $v = 1$. Отсюда следует, что

$$|R_2|_{\Gamma_1} > 1 + \rho_1, v \in \Omega_2, v \neq 1, \tag{1.31}$$

$$|R_1|_{\Gamma_1} = 1 + \rho_1, v \neq 1. \tag{1.32}$$

Итак при всех $v \in \Omega_2$, отличных от 1, имеем

$$|R_2|_{\Gamma_1} > |R_1|_{\Gamma_1} \tag{1.33}$$

Но тогда по теореме Руше [104] полином (1.24), представляющий сумму R_1 и R_2, имеет внутри Γ_1 столько же нулей (с учетом их кратности), что и полином R_2, т.е. всего лишь один корень. Второй корень необходимо лежит вне Γ_1. Случай v = 1 является особым. При v = 1 корень u_1 = 1, то есть лежит на Γ_1, а $u_2 = \dfrac{1}{\rho_1} \notin \Omega_1$.

Особый случай укладывается в общую схему рассуждений, так как точка u = 1, v = 1 принадлежит Ω. (см. (1.8)), и в этой точке G должна быть аналитической, как и всюду в Ω.

Таким образом, производящая функция (1.18) при любом $v \in \Omega_2$ имеет полюс $u = u_1 \in \Omega_1$, и нужно потребовать

$$\operatorname*{Res}_{u=u_1} G = 0, v \in \Omega_2. \tag{1.34}$$

Из этого условия получаем уравнение

$$(u_1 - u)G(0,v) + (v-1)u_1 G(0,0) = 0, \tag{1.35}$$

отражающее тот факт, что u = u_1 является корнем числителя (1.18), т.е. u_1 представляет собой устранимую особую точку G. Вычитая левую часть (1.35) из числителя (1.18) и сокращая затем числитель и знаменатель (1.18) на $(u$ - $u_1)$, находим

$$G(u,v) = \frac{G(0,v) + (v-1)G(0,0)}{\rho_1(u_2 - u)v}. \tag{1.36}$$

Из последнего выражения исключим $G(0,v)$. Для этого воспользуемся (1.35), что дает

$$G(0,v) = \frac{u_1(v-1)G(0,0)}{(v-u_1)}. \tag{1.37}$$

Подставляя выражения (1.37) в (1.36), будем иметь

$$G(u,v) = \frac{G(0,0)(v-1)}{\rho_1(u_2 - u)(v-u_1)}. \tag{1.38}$$

Теперь исключим отсюда u_2, воспользовавшись формулами Виета для квадратного уравнения (1.22). Вторую из них перепишем в виде

$$u_2 = \frac{1}{\rho_1 u_1}, \tag{1.39}$$

в результате чего получаем

$$G(u,v) = \frac{G(0,0)(v-1)u_1}{(1-\rho_1 u_1 u)(v-u_1)}. \tag{1.40}$$

Перейдем к определению постоянной $G(0,0)$. Она находится из условия нормировки (1.5). Имеем

$$G(0,0) = (1-\rho_1)\lim_{v\to 1}\frac{v-u_1}{v-1}, \tag{1.41}$$

где учтено, что

$$\lim_{v\to 1} u_1 = \frac{(\rho_1+1)-\sqrt{(\rho_1+1)^2-4\rho_1}}{2\rho_1} = \frac{(\rho_1+1)-(1-\rho_1)}{2\rho_1} = 1. \tag{1.42}$$

Для вычисления предела (1.41) воспользуемся правилом Лопиталя, которое дает

$$\lim_{v\to 1}\frac{v-u_1}{v-1} = 1 - \lim_{v\to 1}\frac{du_1}{dv}. \tag{1.43}$$

Подсчитаем производную $\frac{du_1}{dv}$. Напомним, что при любом $v\in\Omega_2$ корень $u_1 = u_1(v)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho_1 u_1^2 - \left[\rho_1 + \rho_2(1-v) + 1\right]u_2 + 1 = 0. \tag{1.44}$$

Дифференцируя при $v\in\Omega_2$ обе части (1.44) по v и разрешая полученное уравнение относительно $\frac{du_1}{dv}$, находим

$$\frac{du_1}{dv} = \frac{\rho_2 u_1}{\left[\rho_1 + \rho_2(1-v) + 1\right] - 2\rho_1 u_1}. \tag{1.45}$$

Переход в (1.45) к пределу при $v \to 1$ с учетом (1.42) даст

$$\lim_{v\to 1}\frac{du_1}{dv} = \frac{\rho_2}{1-\rho_1}. \tag{1.46}$$

Подставляя (1.46) в (1.43), а результат подстановки – далее в (1.41), имеем окончательно

$$G(0,0) = 1 - \rho_1 - \rho_2 = 1 - \rho. \tag{1.47}$$

Таким образом, выражение (1.40) в итоге перепишется в виде

$$G(u,v) = \frac{(1-\rho)(v-1)u_1}{(1-\rho_1 u_1 u)(v-u_1)}. \tag{1.48}$$

В работах [1] и [2] доказано, что при любом $v \in \Omega_2$

$$\frac{(v-1)u_1}{(v-u_1)} = \frac{(1-\rho_1 u_1)}{1-\rho_1 u_1 - \rho_2 v}. \tag{1.49}$$

Окончательным выражением для производящей функции будет

$$G(u,v) = \frac{(1-\rho)(1-\rho_1 u_1)}{(1-\rho_1 u_1 u)(1-\rho_1 u_1 - \rho_2 v)}. \tag{1.50}$$

Напомним, что u_1 здесь является функцией от v, определяемой (1.23). Вполне естественно, что для приоритетных заявок

$$G(u,1) = \frac{(1-\rho_1)}{(1-\rho_1 u)}, \tag{1.51}$$

что соответствует геометрическому закону с параметром ρ_1. Для неприоритетных заявок получаем более сложный закон распределения, характериземый производящей функцией

$$G(1,v) = \frac{(1-\rho)}{(1-\rho_1 u_1 - \rho_2 v)}. \tag{1.52}$$

Используя маргинальные производящие функции (1.51) и (1.52), можно получить все искомые вероятностные характеристики, относящиеся как к высокоприоритетным, так и к низкоприоритетным заявкам. Эти вычисления приводятся в следующем разделе.

1.2.2. Вычисление вероятностных характеристик

Условимся соответствующие характеристики относящиеся к высокоприоритетным заявкам помечать снизу индексом 1, а низкоприоритетные – также снизу, но индексом 2. Имеем для вероятности ожидания

$$P_{aw,1}=P\{N_1\ge 1\}=1-P\{N_1=0\}=\rho_1, \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned}P_{aw,2}&=P\{N_1+N_2\ge 1\}=1-P\{N_1=0,N_2=0\}=\\&=1-P_{0,0}=1-(1-\rho)=\rho_1+\rho_2.\end{aligned} \tag{1.54}$$

Среднее число приоритетных требований в системе (по свойствам геометрического закона) будет таким:

$$\overline{n_1}=\frac{\rho_1}{1-\rho_1}. \tag{1.55}$$

Среднее число низкоприоритетных требований согласно (1.52) дается следующим равенством

$$\overline{n_2}=\left.\frac{\partial G(1,v)}{\partial v}\right|_{v=1}=\left.\frac{(1-\rho)(\rho_1\frac{du_1}{dv}+\rho_2)}{(1-\rho_1u_1-\rho_2v)^2}\right|_{v=1}, \tag{1.56}$$

что влечет с учетом (1.42) и (1.46)

$$\overline{n_2}=\frac{\rho_2}{(1-\rho)(1-\rho_1)}. \tag{1.57}$$

Общее число требований в системе (обоих типов)

$$\begin{aligned}\overline{n}&=\overline{n_1}+\overline{n_2}=\frac{\rho_1}{(1-\rho_1)}+\frac{\rho_2}{(1-\rho)(1-\rho_1)}=\frac{\rho_1(1-\rho)+\rho_2}{(1-\rho)}=\\&=\frac{(\rho_1+\rho_2)(1-\rho_1)}{(1-\rho)(1-\rho_1)}=\frac{\rho}{1-\rho},\end{aligned} \tag{1.58}$$

Получим среднее число занятых каналов каждым из видов требований. Очевидно, для первого типа требований

$$\overline{n_{ЗК,1}}=P\{N_1>0\}=\rho_1. \tag{1.59}$$

Для требований второго типа

$$\overline{n_{ЗК,2}}=P\{N_2>0,N_1=0\}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_{0,n}=\left.\frac{\partial G(0,v)}{\partial v}\right|_{v=1}. \tag{1.60}$$

Согласно (1.50), полагая u=0, получим

$$G(0,v)=\frac{(1-\rho_1)(1-\rho_1u_1)}{(1-\rho_1u_1-\rho_2v)}. \tag{1.61}$$

Дифферецируя (1.61) по v, получаем

$$\frac{\partial G(0,v)}{\partial v}=(1-\rho)\frac{\left[-\rho_1 u_1^{'}(1-\rho_1 u_1-\rho_2 v)+(\rho_1 u_1^{'}+\rho_2)(1-\rho_1 u_1)\right]}{(1-\rho_1 u_1-\rho_2 v)^2}=$$
$$=\frac{(1-\rho)\rho_2(\rho_1 v u_1^{'}-\rho_1 u_1+1)}{(1-\rho_1 u_1-\rho_2 v)^2}. \tag{1.62}$$

Используя (1.46), находим

$$\overline{n_{3K,2}}=\frac{\rho_2\left(\dfrac{\rho_1\rho_2}{1-\rho_1}+(1-\rho_1)\right)}{(1-\rho)}=\frac{\rho_2(\rho_1\rho_2+(1-\rho_1)^2)}{(1-\rho)(1-\rho_1)}. \tag{1.63}$$

Общее число занятых каналов всеми типами требований вычисляется так

$$\overline{n_{3K}}=\overline{n_{3K,1}}+\overline{n_{3K,2}}=\rho_1+\frac{\rho_2(\rho_1\rho_2+(1-\rho_1)^2)}{(1-\rho)(1-\rho_1)}. \tag{1.64}$$

Согласно (1.58) общее число требований в рассматриваемой системе оказалось таким же, как в аналогичной системе без приоритета, но эти требования по-разному распределяются между каналом обслуживания и очередью. Действительно, рассмотрим разность

$$\overline{n_{3K,2}}-\rho_2=\frac{\rho_2\left(\dfrac{\rho_1\rho_2}{1-\rho_1}+(1-\rho_1)\right)}{(1-\rho)}-\rho_2=$$
$$=\rho_2\frac{\rho_1\rho_2+(1-\rho_1)^2-(1-\rho_1-\rho_2)(1-\rho_1)}{(1-\rho)(1-\rho_1)}=\frac{\rho_2^2}{(1-\rho)(1-\rho_1)}. \tag{1.65}$$

Следовательно,

$$\overline{n_{3K,2}}=\rho_2+\frac{\rho_2^2}{(1-\rho)(1-\rho_1)}, \tag{1.66}$$

$$\overline{n_{3K}}=\rho+\frac{\rho_2^2}{(1-\rho)(1-\rho_1)}. \tag{1.67}$$

то есть загрузка канала выше, чем в системе без приоритета.

Теперь рассмотрим среднюю длину очереди. Имеем для приоритетных требований

$$\overline{n_{queue,1}} = \overline{n_1} + \overline{n_{3K,1}} = \frac{\rho_1}{(1-\rho_1)} - \rho_1 = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} \tag{1.68}$$

Для обычных требований

$$\overline{n_{queue,2}} = \overline{n_2} - \overline{n_{3K,2}} = \frac{\rho_2}{(1-\rho)(1-\rho_1)} - \frac{\rho_2(\rho_1\rho_2 + (1-\rho_1)^2)}{(1-\rho)(1-\rho_1)} = \frac{\rho_1\rho_2(2-\rho)}{(1-\rho)(1-\rho_1)}. \tag{1.69}$$

Используя (1.58) и (1.67) можем записать

$$\overline{n_{queue}} = \overline{n} - \overline{n_{3K}} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)} - \frac{\rho_2^2}{(1-\rho)(1-\rho_1)} \tag{1.70}$$

Таким образом, общее число требований в системах $M/M/1$ и $\overrightarrow{M_2}/M/1$ одинаково и определяется (1.58), но в системе с приоритетом большее их количество находится на обслуживании, а в аналогичной системе без приоритета – в очереди.

Приведенный пример решения задачи методом производящих функций демонстрирует его гибкость и показывает возможность быстрого вычисления всех основных вероятностных характеристик. Их можно легко получить, исследовав производящую функцию вероятностей состояний рассматриваемой системы. Этот пример ярко показывает преимущества МПФ и еще раз объясняет, почему в данной работе предпочтение отдается именно этому методу.

1.3. Постановка задачи

Приведенный выше анализ литературы по тематике приоритетных систем обслуживания свидетельствует, что достаточно подробно исследованы системы с основными типами приоритетов, но только при отсутствии какого-либо вида выталкивания. По результатам анализа численных результатов, содержащихся в рассмотренных работах, можно сделать вывод, что приоритизация, как таковая эффективно решает задачу управления СМО в двух случаях: при бесконечном буфере, либо в слабо загруженной системе. Если буфер ограничен, а загрузка низкоприоритетными требованиями высока, то возможно «забивание» системы или буфера, сводящее на нет эффект приоритизации.

Для устранения эффекта «забивания» по существу и служит выталкивающий механизм. В литературе подробно разобран лишь детерминированный его вариант. Однако, детерминированный выталкивающий механизм сам по себе эффективен лишь при малой интенсивности высокоприоритетного трафика, но при ее увеличении до некоторого критического уровня вновь происходит «забивание» буфера теперь уже приоритетными заявками.

Для повышения эффективности и гибкости управления можно применить вероятностный (рандомизированный) выталкивающий механизм, когда выталкивание из буфера происходит не автоматически, безусловно, а лишь с некоторой заданной вероятностью α. Причем ее можно рассматривать в качестве параметра управления. В работах [92, 93, 94, 95] показано, что данный параметр имеет существенное влияние на вероятностные характеристики системы.

В п. 1.1 данной главы было разъяснено, что в качестве основных типов приоритетов, которые используют в системах массового обслуживания, Б.В. Гнеденко выделял четыре их вида: относительный, абсолютный, чередующийся и изменяющийся (динамический). В качестве самого простого и универсального частного случая изменяющегося приоритета в диссертации предлагается рассмотреть вероятностный приоритет, при котором перед каждым периодом занятости системы производится новый выбор типа приоритетного требования для обслуживания с заданной вероятностью. В данной диссертационной работе предлагается дополнить классификацию Г.П. Башарина за счет всех остальных приоитетов, включаемых Б.В. Гнеденко в группу основных. Для этого предлагается использовать символ приоритета i=3 для чередующегося, а i=4 для вероятностного приоритетов.

В пункте 1.2 была показана высокая эффективность метода производящих функций применительно к задаче для двухпотоковой приоритетной системы с бесконечным накопителем, отличающейся от задач, разбираемых в диссертационной работе только емкостью накопителя.

1.3.1. Цель исследования

С учетом всех этих замечаний, целью исследования в диссертационной работе является исследование моделей приоритетных систем массового обслуживания с вероятностным выталкивающим механизмом классов $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1,(i=\overline{1,4})$.

1.3.2. Задачи исследования

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи. Во-первых, необходимо дать детальное описание структуры и процесса функционирования моделей классов $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1,(i=\overline{1,4})$, поскольку эти модели при $i=\overline{2,4}$ ранее не были рассмотрены в литературе. Для этого потребуется описать правила, которым будут подчиняться требования при попадании в систему и описать весь цикл их обслуживания.

Во-вторых, для исследования этих моделей следует разработать метод, который позволил бы снизить порядок решаемой системы уравнений равновесия Колмогорова для рассматриваемых систем с величины асимптотически пропорциональной k^2, где k – емкость накопителя, до меньшего порядка. В качестве основного для метода был выбрал метод производящих функций. Его эффективность для двухпотоковых систем при $k\to\infty$ была продемонстрирована в п. 1.2, а при конечных k порядок системы решаемых уравнений удается снизить до величины, пропорциональной k.

В-третьих, необходимо разработать программный комплекс, реализующий алгоритмы вычисления вероятностей потери требований с использованием результатов применения разработанного в диссертационной работе метода к рассматриваемым в работе моделям приоритетных СМО. А также, в виду сложности аналитических выкладок необходимо разработать комплекс программ, с использованием которого появится возможность проверки полученных аналитических решений с использованием решения исходной системы уравнений равновесия.

В-четверых, необходимо выявить и провести исследование качественных особенностей поведения рассматриваемых систем при различных значениях интенсивностей входящих потоков и параметра вероятностного выталкивающего механизма. В качестве основных особенностей изучаемых систем рассматриваются такие эффекты как «запирание» системы для низкоприоритетных требований (близость вероятности потери требований этого типа к единице), а также линейный закон потерь, согласно которому зависимость вероятности потери требований каждого из типов от параметра вероятностного выталкивающего механизма, при определенных соотношениях загрузочных коэффициентов оказывается близка к линейной.

Поэтому в работе ставится задача корректно ввести понятие «областей линейности» и «областей запирания» для рассматриваемых классов СМО и определить их конкретные границы. Для этого потребуется при помощи полученных результирующих выражений вычислить вероятности потери требований в широком диапазоне изменения коэффициентов загрузки по обоим типам требований и изучить картину их поверхностей уровня в пространстве загрузочных параметров.

Глава 2. Системы $\overrightarrow{M_2} / M / 1 / k / f_i^1$ с классическими типами приоритетов и вероятностным выталкивающим механизмом (*i*=1, 2)

В этой главе основное внимание будет уделено СМО с абсолютным приоритетом. Случай относительного приоритета обсуждается менее подробно, так как относящиеся к нему результаты легко получаются по аналогии со случаем абсолютного приоритета. Также, случай абсолютного приоритета будет служить образцом и прототипом для рассмотрения других систем в третьей главе настоящей работы.

2.1. Случай абсолютного приоритета

Рассмотрим двухпотоковую систему массового обслуживания с вероятностным выталкивающим механизмом и абсолютным приоритетом класса $\overrightarrow{M_2} / M / 1 / k / f_2^1$ в установившемся режиме. Процесс в этой системе является марковским. Он обладает свойством эргодичности, что гарантирует существование не зависящих от начального состояния финальных вероятностей. Последние удовлетворяют стационарной системе уравнений Колмогорова.

Фазовое пространство для этой системы (совокупность всевозможных состояний, в которых может находиться система) определим в виде:

$$\Omega = \left\{ (i, j) : i = \overline{0, k},\ j = \overline{0, k-i} \right\}. \tag{2.1}$$

Определим вероятности состояний для фазового пространства (2.1) как:

$$P(i, j; t) = P\{N_1(t) = i, N_2(t) = j\}, (i = \overline{0, k};\ j = \overline{0, k-i}), \tag{2.2}$$

где $N_q(t)$ обозначает число требований q -го типа в системе в момент времени t.

Составим размеченный граф состояний системы для этой задачи, который изобразим на рис. 2.1. Каждая вершина соответствует некоторому состоянию из Ω , а каждая стрелка соответствует переходу из одного состояния в сообщающиеся с ним. На диагонали данного графа, где $i + j = k$, будет действовать механизм вытеснения низкоприоритетных требований с вероятностью α.

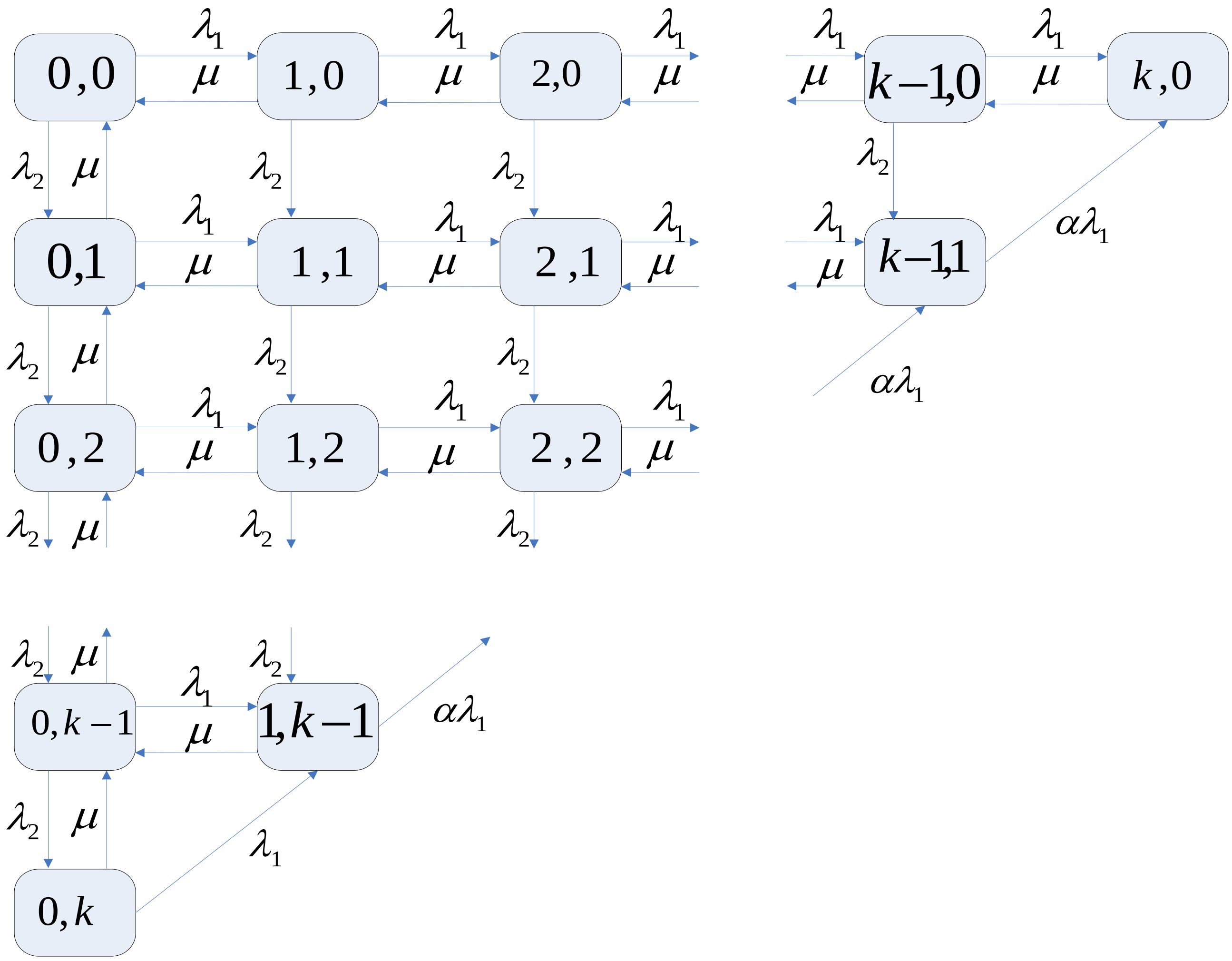

Рисунок 2.1 - Размеченный граф состояний для системы $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_2^1$

Находясь в состоянии $(i,k-i)$, где $0 \le i \le k-1$, возможен переход в состояние $(i+1,k-i-1)$, который происходит с интенсивностью $\alpha\lambda_1$, где α есть вероятность вытеснения. Однако на диагонали есть особое состояние $(0,k)$, для которого будет всегда действовать абсолютный приоритет по обслуживанию, проявляющийся как выталкивающий механизм с вероятностью выталкивания равной единице. Если вся система заполнена только неприоритетными требованиями, то тогда приоритетное требование всегда безальтернативно займет канал обслуживания.

Введем финальные вероятности для этой системы:

$$P_{i,j} = \lim_{t\to\infty} P(i,j;t), (i = \overline{0,k},\ j = \overline{0,k-i}). \quad (2.3)$$

Теперь воспользуемся построенным графом состояний и построим систему уравнений Колмогорова для финальных вероятностей по стандартным правилам [85]. В результате этих действий получим систему уравнений равновесия (далее для краткости СУР) в виде, представленном Леммой 2.1.

Лемма 2.1. *Система уравнений равновесия Колмогорова для СМО класса* $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_2^1$ *имеет вид*

$$\begin{aligned}
&-[\lambda_1(1-\delta_{j,k-i}) + \alpha\lambda_1(1-\delta_{i,k})\delta_{j,k-i} + (1-\alpha)\lambda_1\delta_{i,0}\delta_{j,k-i} + \lambda_2(1-\delta_{j,k-i}) + \\
&+\mu(1-\delta_{i,0}\delta_{j,0})]P_{i,j} + \mu P_{i+1,j} + \mu\delta_{i,0}P_{i,j+1} + \lambda_2 P_{i,j-1} + \lambda_1 P_{i-1,j} + \\
&+\alpha\lambda_1\delta_{j,k-i}P_{i-1,j+1} + (1-\alpha)\lambda_1\delta_{j,k-i}\delta_{i,1}P_{i-1,j+1} = 0, (0 \le i \le k; 0 \le j \le k-i),
\end{aligned} \quad (2.4)$$

где δ_{ij} обозначает дельта-символ Кронекера и равен

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \ne j. \end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства справедливости полученной СУР, рассмотрим по отдельности каждый переход в графе состояний и убедимся в том, что соответствующее слагаемое присутствует в (2.4). Уравнения (2.4) выполняются при всех $i, j \ge 0$, для которых выполняется условие $i + j \le k$. Здесь вводится следующее соглашение, которое будет использоваться на протяжении всей диссертационной работы:

$$P_{i,j} \equiv 0,\ (i < 0, j < 0, i + j > k). \quad (2.5)$$

Далее поясним с учетом этих особенностей каждое слагаемое, входящее в уравнения (2.4):

а) Поступление приоритетного требования приводит к изменению всех состояний, кроме тех, для которых $i + j = k$. Поэтому при вероятности $P_{i,j}$ интенсивность λ_1 стоит с множителем $(1-\delta_{j,k-i})$, который обнуляется при $i + j = k$.

б) Поступление неприоритетного требования полностью аналогично первому случаю, поэтому при вероятности $P_{i,j}$ интенсивность λ_2 стоит с таким же множителем $(1-\delta_{j,k-i})$.

в) Всегда возможен переход с интенсивностью μ из любого состояния кроме $(0,0)$. Тогда искомый множитель при вероятности этого состояния будет выглядеть следующим образом: $(1-\delta_{i,0}\delta_{j,0})$.

Эти три правила описывают все исходящие из любой вершины стрелки, которым будут соответствовать в уравнениях Колмогорова слагаемые, снабженные знаком минус. Осталось пояснить стрелки, которые входят в каждую вершину и вызывают появление слагаемых, снабженных знаком плюс:

г) При выполнении приоритетного требования (с интенсивностью обслуживания μ), всегда осуществляется переход из состояния $(i+1, j)$ в состояние (i, j). Такие переходы возможны в любом состоянии кроме тех, которые находятся на диагонали графа и для которых $i+j=k$. Если принять во внимание соглашение (2.5), то можно не вводить дополнительные дельтаобразные символы, описывающие этот случай и оставить слагаемые в уравнении такими, какими они и выписаны выше.

д) Неприоритетные требования выполняются только после того, как выполнились все приоритетные требования, и в накопителе их больше нет. Этому случаю отвечают состояния $(0, j)$ для $1 \le j \le k$. А переход осуществляется от состояния $(0, j+1)$ к состоянию $(0, j)$. Для описания данного перехода нужно ввести поправочный множитель $\delta_{i,0}$ при $P_{i,j+1}$. Также соглашение (2.5) гарантирует, что данный переход не будет осуществлен при $j=k$.

е) При наличии свободных мест в системе, поступление неприоритетного требования приводит к переходу из состояния $(i, j-1)$ в состояние (i, j) с интенсивностью λ_2. При $j=0$ описанный переход невозможен, так как $P_{i,-1}\equiv 0$ по соглашению (2.5).

ж) Приход приоритетного требования переводит систему из состояния $(i-1,j)$в состояние(i,j)с интенсивностью λ_1. Такой переход осуществим для всех состояний кроме $(0,j)$.

з) Это последнее слагаемое. Именно с помощью него реализуется вероятностный выталкивающий механизм, который более подробно был описан в первой главе настоящей работы. Приоритетное требование приходит в систему с интенсивностью λ_1. Если накопитель полон (случай $i+j=k$) и в нем есть неприоритетные требования, то тогда с вероятностью α осуществляется замещение одного из неприоритетных требований приоритетным. Переход из состояния $(i-1,j+1)$ в состояние (i,j) осуществляется с интенсивностью $\alpha\lambda_1$. А так как это верно только для полного накопителя, то при $P_{i-1,j+1}$будет стоять множитель $\delta_{j,k-i}$. При i = 0, j = k реализуется абсолютный приоритет по обслуживанию, поэтому добавляется дополнительное слагаемое с множителем $(1-\alpha)$.

Учитывая в размеченном графе стрелки, соответствующие всем перечисленным выше переходам, приходим к системе линейных алгебраических уравнений (2.4). Эта система имеет бесконечное количество решений, так как определитель ее матрицы равен нулю. Если почленно сложить все уравнения, то в левой части результирующего уравнения получим тождественный нуль. Это говорит о линейной зависимости уравнений, то есть о том, что одно из уравнений является линейной комбинацией остальных уравнений. Благодаря этому, можно выбросить какое-либо одно уравнение из системы и заменить его условием нормировки

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}P_{i,j}=1. \qquad (2.6)$$

Полученная система линейных уравнений, состоящая из набора уравнений (2.4) и нормированного уравнения (2.6), имеет единственное решение. Его можно получить, непосредственно решив эту систему, включающую $k(k+1)/2$ уравнений с таким же количеством неизвестных. Однако, метод, предалагаемый в данной главе, позволяет уменьшить размерность задачи с $k(k+1)/2$ до k+1, причем получить систему уравнений с квазитреугольной матрицей. Покажем каким образом это можно сделать.

2.1.1 Вычисление производящей функции

Определим производящую функцию вероятностей $P_{i,j}$ в виде

$$G(u,v)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}P_{i,j}u^i v^j. \tag{2.7}$$

Согласно (2.7) условие нормировки для производящей функции выглядит следующим образом:

$$G(1,1)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}P_{i,j}=1. \tag{2.8}$$

Введенная таким образом производящая функция с условием нормировки (2.8) имеет выражение, задаваемое Теоремой 2.1.

<u>Теорема 2.1.</u> *Производящая фукнция (2.7) для СМО класса* $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_2^1$ *удовлетворяет уравнению*

$$\begin{gathered}[\lambda_1 u(1-u)+\lambda_2 u(1-v)+\mu(u-1)]vG(u,v)=\mu(u-v)G(0,v)+\\ +\mu u(v-1)G(0,0)+\alpha\lambda_1 u^{k+1}(v-u)P_{k,0}+(1-\alpha)\lambda_1 P_{0,k}v^k u(u-v)\\ +[\alpha\lambda_1(u-v)+\lambda_1(1-u)v+\lambda_2(1-v)v]u\sum_{i=0}^{k}P_{i,k-i}u^i v^{k-i}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

<u>Доказательство.</u> Умножим левую и правую части уравнения (2.4) на $u^i v^j$ и просуммируем по всем тем значениям индексов (i,j), которые входят в выражение для $G(u,v)$. Получим в результате:

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda_1+\lambda_2+\mu)G(u,v)+(\lambda_1+\lambda_2-\alpha\lambda_1)\sum_{i=0}^{k}P_{i,k-i}u^i v^{k-i}+\alpha\lambda_1 P_{k,0}u^k+\\
&+\mu P_{0,0}+\mu\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i}P_{i+1,j}u^i v^j+\mu\sum_{j=0}^{k-1}P_{0,j+1}v^j+\lambda_2\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{k-i}P_{i,j-1}u^i v^j+\\
&+\lambda_1\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}P_{i-1,j}u^i v^j+\alpha\lambda_1\sum_{i=1}^{k}P_{i-1,k-i+1}u^i v^{k-i}-(1-\alpha)\lambda_1 P_{0,k}v^k+\\
&+(1-\alpha)\lambda_1 P_{0,k}uv^{k-1}=0.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Далее выразим все слагаемые, присутствующие в (2.10) через производящую функцию. Рассмотрим каждое из них по отдельности и переобозначим через $\{\Sigma_i\}_{i=1}^{6}$. Сумму

$$
\Sigma_1=\sum_{i=0}^{k}P_{i,k-i}u^i v^{k-i} \tag{2.11}
$$

оставим пока без изменений. Вторую сумму преобразуем так:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_2&=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i}P_{i+1,j}u^i v^j=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}P_{i,j}u^{i-1}v^j=\\
&=\frac{1}{u}\left[\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}P_{i,j}u^i v^j-\sum_{j=0}^{k}P_{0,j}v^j\right]=\frac{1}{u}\left[G(u,v)-G(0,v)\right].
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Аналогично выражается сумма

$$
\Sigma_3=\sum_{j=0}^{k-1}P_{0,j+1}v^j=\sum_{j=1}^{k}P_{0,j}v^{j-1}=\frac{1}{v}\left[G(0,v)-G(0,0)\right]. \tag{2.13}
$$

Эти выражения становятся очевидны, если учесть следующие стандартные правила работы с производящими функциями:

$$
G(0,0)=P_{0,0}, \tag{2.14}
$$

$$
G(0,v)=\sum_{j=0}^{k}P_{0,j}v^j . \tag{2.15}
$$

Далее получим выражение для оставшихся сумм:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_4&=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{k-i}P_{i,j-1}u^i v^j=v\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{k-i}P_{i,j-1}u^i v^{j-1}=v\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i-1}P_{i,j-1}u^i v^j=\\
&=v\left[G(u,v)-\sum_{i=0}^{k}P_{i,k-i}u^i v^j\right]=v\left[G(u,v)-\Sigma_1\right],
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

а также

$$\Sigma_5 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} P_{i-1,j}u^i v^j = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i+1} P_{i,j}u^{i+1}v^j = u\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i+1} P_{i,j}u^i v^j =$$

$$= u\left[\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i+1} P_{i,j}u^i v^j - \sum_{i=k}^{k}\sum_{j=0}^{-1} P_{i,j}u^i v^j\right] = u\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i+1} P_{i,j}u^i v^j = \tag{2.17}$$

$$= u\left[\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} P_{i,j}u^i v^j - \sum_{i=0}^{k} P_{i,k-i}u^i v^{k-i}\right] = u\left[G(u,v) - \Sigma_1\right].$$

Наконец, последняя сумма будет выглядеть следующим образом:

$$\Sigma_6 = \sum_{i=1}^{k} P_{i-1,k-i+1}u^i v^{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} P_{i,k-i}u^{i+1}v^{k-i-1} = \frac{u}{v}\sum_{i=0}^{k-1} P_{i,k-i}u^i v^{k-i} =$$

$$= \frac{u}{v}\left[\sum_{i=0}^{k} P_{i,k-i}u^i v^{k-i} - P_{k,0}u^k\right] = \frac{u}{v}\left[\Sigma_1 - P_{k,0}u^k\right]. \tag{2.18}$$

Появление этой последней суммы обусловлено наличием вероятностного выталкивающего механизма в системе.

Подставляя (2.11)-(2.18) в уравнение для производящей функции (2.10), будем иметь

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)G(u,v) + (\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha\lambda_1)S_1 + \alpha\lambda_1 P_{k,0}u^k + \mu G(0,0) +$$

$$+\mu\frac{1}{u}[G(u,v) - G(0,v)] + \mu\frac{1}{v}[G(0,v) - G(0,0)] + \lambda_2 v[G(u,v) - \Sigma_1] + \tag{2.19}$$

$$+\lambda_1 u[G(u,v) - \Sigma_1] + \alpha\lambda_1\frac{u}{v}[\Sigma_1 - P_{k,0}u^k] + (1-\alpha)\lambda_1 P_{0,k}v^{k-1}(u - v) = 0.$$

Разрешим (2.19) относительно производящей функции. Подставляя выражение (2.11) для Σ_1 и домножая обе части равенства на uv, приходим к искомому уравнению. Тем самым получено доказываемое выражение для производящей функции финальных вероятностей системы $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_2^1$, что и завершает доказательство.

Прежде чем искать сами вероятности, получим производящие функции вероятностей для каждого типа требований N_1, N_2, а также для суммарного их числа $N = N_1 + N_2$.

Вначале найдем производящую функцию для вероятностей числа приоритетных требований. Введем суммарную интенсивность входящего потока:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \tag{2.20}$$

коэффициенты использования по каждому типу требований:

$$\rho_s = \lambda_s / \mu, \quad (s = \overline{1,2}), \tag{2.21}$$

а также полный коэффициент использования всей системы:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \lambda / \mu. \tag{2.22}$$

Положим $v = 1$ в (2.9) и поделим левую и правую части на $(1-u)\mu$, тогда получим

$$\begin{gathered}[\rho_1 u - 1]G(u,1) = -G(0,1) + \rho_1(1-\alpha)u\sum_{i=0}^{k} P_{i,k-i}u^i + \\ +\alpha\rho_1 u^{k+1}P_{k,0} - (1-\alpha)\rho_1 P_{0,k}u.\end{gathered} \tag{2.23}$$

Функция $G(u,1)$, определяемая (2.25), имеет полюс при $u = 1/\rho_1$. Между тем производящая функция должна быть полиномом относительно обеих переменных u,v, поэтому должно выполняться следующее условие аналитичности

$$\operatorname*{Res}_{u=1/\rho_1} G(u,1) = 0, \tag{2.24}$$

которое дает уравнение

$$0 = -G(0,1) + \rho_1(1-\alpha)\frac{1}{\rho_1}\sum_{i=0}^{k} P_{i,k-i}\frac{1}{\rho_1^i} + \alpha\rho_1\frac{1}{\rho_1^{k+1}}P_{k,0} - (1-\alpha)\rho_1 P_{0,k}\frac{1}{\rho_1}. \tag{2.25}$$

Теперь избавимся от всех слагаемых в (2.23), которые не зависят от аргумента u. Вычтем из правой части (2.23) правую часть (2.25), поделим обе части на $[\rho_1 u - 1]$, а затем воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{i=1}^{n} q^i = q\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{2.26}$$

Результатом этих преобразований будет следующее выражение для производящей функции финальных вероятностей числа приоритетных требований

$$G(u,1)=(1-\alpha)\left(\sum_{j=0}^{k}u^j\sum_{i=j}^{k}P_{i,k-i}\rho_1^{j-i}\right)+$$
$$.\quad +\alpha P_{k,0}(\sum_{j=0}^{k}u^j\rho_1^{j-k})-(1-\alpha)\rho_1P_{0,k}(u-\frac{1}{\rho_1}) \qquad (2.27)$$

Введем вероятности числа приоритетных требований в системе

$$q_n=P\{N_1=n\},\qquad (0\le n\le k) \qquad (2.28)$$

и их производящую функцию

$$G_1(u)=G(u,1)=\sum_{i=0}^{k}q_iu^i. \qquad (2.29)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u в (2.27) и (2.29), будем иметь:

$$q_{k-j}=(1-\alpha)\sum_{i=1}^{j}p_i\rho_1^{i-j}+p_0\rho_1^{-j}-(1-\alpha)\,p_k\delta_{j,k},(j=\overline{0,k}). \qquad (2.30)$$

В (2.30) использовано обозначение, которое далее будет применяться во всей работе.

$$p_i=P_{k-i,i} \qquad (2.31)$$

Теперь, найдя значения этих “диагональных” вероятностей, определяемых (2.31), мы сможем найти и распределение приоритетных требований.

Таким же образом можно найти распределение числа низкоприоритетных требований. Для этого подставим в (2.9) $u=1$ и, проделав аналогичные алгебраические преобразования, получим

$$\{v\rho_2\}G(1,v)=-G(0,0)+G(0,v)+$$
$$+(\rho_1\alpha+\rho_2v)\sum_{i=0}^{k}P_{i,k-i}v^{k-i}-\alpha\rho_1P_{k,0}+(1-\alpha)\rho_1P_{0,k}v^k \qquad (2.32)$$

Сократим на $v\rho_2$ и подставим выражения (2.14) и (2.15). В результате имеем

$$G_2(v)=G(1,v)=\frac{1}{\rho_2}\left(\sum_{i=1}^{k}P_{0,i}v^{i-1}+\rho_1\alpha\sum_{i=0}^{k-1}P_{i,k-i}v^{k-i-1}+\rho_2\sum_{i=0}^{k}P_{i,k-i}v^{k-i}+(1-\alpha)\rho_1P_{0,k}v^{k-1}\right). \qquad (2.33)$$

При использовании соглашения (2.5), (2.33) запишется так

$$G_2(v)=\frac{1}{\rho_2}\left[\sum_{i=0}^{k}v^i(P_{0,i+1}+\rho_1\alpha\,p_{i+1}+\rho_2p_i+(1-\alpha)\rho_1P_{0,k}\delta_{i,k-1})\right]. \qquad (2.34)$$

Тогда из (2.34) можно получить распределение вероятностей числа неприоритетных требований

$$s_n = P\{N_2 = n\}, (0 \le n \le k), \qquad (2.35)$$

в следующем виде:

$$s_i = (P_{0,i+1} + \rho_1 \alpha p_{i+1} + \rho_2 p_i + (1-\alpha)\rho_1 P_{0,k}\delta_{i,k-1}) / \rho_2 . \qquad (2.36)$$

Осталось рассмотреть распределение общего числа требований в системе. Соответствующая производящая функция имеет вид $G(u,u)$. Вначале определим вероятности

$$r_n = P\{N = n\}, (n = \overline{0,k}), \qquad (2.37)$$

где N – суммарное число требований в системе. Запишем условие связи этих вероятностей с вероятностями $P_{i,j}$:

$$r_n = \sum_{i=0}^{n} P_{i,n-i} . \qquad (2.38)$$

Вводя указанные обозначения, получим выражение для производящей функции финальных вероятностей общего числа требований, определяемой равенством

$$G_\Sigma(u) = \sum_{n=0}^{k} r_n u^n . \qquad (2.39)$$

Воспользовавшись свойствами производящей функции, получим связь между маргинальной производящей функцией $G_\Sigma(u)$ и производящей функцией всей системы:

$$\begin{aligned} G_\Sigma(u) &= \sum_{n=0}^{k}\sum_{i=0}^{n} P_{i,n-i}u^n = \sum_{n=0}^{k}\sum_{i=0}^{n} P_{i,n-i}u^i u^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{n=i}^{k} P_{i,n-i}u^i u^{n-i} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i} P_{i,j}u^i u^j = G(u,u). \end{aligned} \qquad (2.40)$$

Подстановка в уравнение (2.9) $v = u$ дает

$$G_\Sigma(u) = \frac{u(1-u)G(0,0) + (u-1)\rho u^{k+2} r_k}{(\rho u^2 - (1+\rho)u + 1)u} , \qquad (2.41)$$

где используется условие (2.38) и обозначение (2.22).

Рассмотрим знаменатель (2.41), разложим его на множители

$$(\rho u^2-(1+\rho)u+1)u=(u-1)(\rho u-1)\ , \qquad (2.42)$$

и заметим, что

$$G(0,0)=P_{0,0}=r_0=G_\Sigma(0). \qquad (2.43)$$

Из (2.41) с помощью (2.42) - (2.43) получим

$$G_\Sigma(u)=\frac{-G_\Sigma(0)+\rho u^{k+1}r_k}{(\rho u-1)}. \qquad (2.44)$$

Функция (2.44) аналитична относительно u и представляет полином степени не выше k, поэтому должно выполняться условие аналитичности

$$\operatorname*{Res}_{u=1/\rho} G_\Sigma(u)=0\cdot \qquad (2.45)$$

Из этого условия следует, что

$$r_k=\rho^k G_\Sigma(0). \qquad (2.46)$$

Воспользовавшись (2.46) и (2.44), получим

$$G_\Sigma(u)=\frac{G_\Sigma(0)(1-(\rho u)^{k+1})}{(1-\rho u)}. \qquad (2.47)$$

Использование условия нормировки (2.8), только для функции (2.47) дает:

$$G_\Sigma(0)=\frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}. \qquad (2.48)$$

В итоге, выражение для искомой производящей функции будет следующим:

$$G_\Sigma(u)=\frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}*\frac{1-(\rho u)^{k+1}}{1-\rho u}. \qquad (2.49)$$

Полученный результат – это хорошо известный усеченный геометрический закон. Выражения (2.27), (2.34) и (2.49) являются выражениями для производящих функции финальных вероятностей числа различных требований находящихся в системе. С их помощью можно получить все искомые вероятностные характеристики системы, такие как вероятность потерь неприоритетного требования, вероятность ожидания неприоритетного требования, вероятность вытеснения требования из системы.

2.1.2 Вычисление финальных вероятностей системы

Производящая функция (2.9) должна быть полиномом степени k относительно u. Между тем согласно (2.9) она имеет два полюса, которые являются корнями уравнения

$$[\rho_1 u(1-u)+\rho_2 u(1-v)+(u-1)]=0. \tag{2.50}$$

Они выражаются следующим образом:

$$u_{1,2}=\frac{\left[\rho_1+\rho_2(1-v)+1\right]\mp\sqrt{\left[\rho_1+\rho_2(1-v)+1\right]^2-4\rho_1}}{2\rho_1}. \tag{2.51}$$

Применяя к корням уравнения (2.50) теорему Виета, получаем

$$u_1+u_2=\frac{\left[\rho_1+\rho_2(1-v)+1\right]}{\rho_1},\ u_1u_2=\frac{1}{\rho_1}. \tag{2.52}$$

Разрешая уравнение (2.9) относительно $G(u,v)$, находим

$$G(u,v)=\frac{(u-v)G(0,v)+u(u-1)G(0,0)+\alpha\rho_1 u^{k+1}(v-u)P_{k,0}+}{v\rho_1(u-u_1)(u-u_2)}\cdots$$
$$\frac{+[\alpha\rho_1(u-v)+\rho_1(1-u)v+\rho_2(1-v)v]u\sum_{i=0}^{k}P_{i,k-i}u^i v^{k-i}+(1-\alpha)\rho_1 P_{0,k}v^k u(u-v)}{v\rho_1(u-u_1)(u-u_2)}, \tag{2.53}$$

где $u_{1,2}$ определяются по формуле (2.51). Так как производящая функция имеет два указанных выше полюса, то должны выполняться два условия аналитичности:

$$\operatorname*{Res}_{u=u_1}G(u,v)=0, \tag{2.54}$$

$$\operatorname*{Res}_{u=u_2}G(u,v)=0. \tag{2.55}$$

Запишем в явном виде условие (2.54)

$$\begin{aligned}&(u_1-v)G(0,v)+u_1(v-1)G(0,0)+\alpha\rho_1 u_1^{k+1}(v-u_1)P_{k,0}+\\&+[\alpha\rho_1(u_1-v)+\rho_1(1-u_1)v+\rho_2(1-v)v]u_1\sum_{i=0}^{k}P_{i,k-i}u_1^i v^{k-i}+\\&+(1-\alpha)\rho_1 P_{0,k}v^k u_1(u_1-v)=0\end{aligned} \tag{2.56}$$

Далее вычтем левую часть (2.56) из правой части (2.9) и разделим обе части на $(u-u_1)$, что дает

$$[\rho_1 v(u-u_2)]G(u,v)=(1-v)G(0,0)-G(0,v)+$$
$$+\sum_{i=0}^{k}P_{i,k-i}v^{k-i}[\rho_1(v-\alpha\frac{u^{i+2}-u_1^{i+2}}{u-u_1}+v(\rho_1(\alpha-1)+\rho_2(v-1))\frac{u^{i+1}-u_1^{i+1}}{u-u_1}]+ \quad (2.57)$$
$$+\alpha\rho_1 P_{k,0}\left(\frac{u^{k+2}-u_1^{k+2}}{u-u_1}-v\frac{u^{k+1}-u_1^{k+1}}{u-u_1}\right)+(1-\alpha)\rho_1 P_{0,k}v^k(u+u_1).$$

Таким же образом используем условие (2.55), находим

$$(1-v)G(0,0)-G(0,v)+$$
$$+\sum_{i=0}^{k}P_{i,k-i}v^{k-i}\left[\rho_1(v-\alpha)\frac{u_2^{i+2}-u_1^{i+2}}{u_2-u_1}+v(\rho_1(\alpha-1)+\rho_2(v-1))\frac{u_2^{i+1}-u_1^{i+1}}{u_2-u_1}\right]+ \quad (2.58)$$
$$+\alpha\rho_1 P_{k,0}\left(\frac{u_2^{k+2}-u_1^{k+2}}{u_2-u_1}-v\frac{u_2^{k+1}-u_1^{k+1}}{u_2-u_1}\right)+(1-\alpha)\rho_1 P_{0,k}v^k(u_2+u_1)=0.$$

Рассмотрим отношение вида

$$Q_i=\frac{u_2^i-u_1^i}{u_2-u_1}, \quad (2.59)$$

представляющее собой разделенную разность функции u_i, вычисленную для точек $u = u_1$ и $u = u_2$.

Для этих отношений справедливо следующее свойство:

$$\frac{1}{u-u_2}\left(\frac{u^{i+2}-u_1^{i+2}}{u-u_1}-\frac{u_2^{i+2}-u_1^{i+2}}{u_2-u_1}\right)=\sum_{j=0}^{i}u_1^j\frac{u^{i+1-j}-u_2^{i+1-j}}{u-u_2}=\sum_{j=0}^{i}u^jQ_{i+1-j}\,. \quad (2.60)$$

Введем обозначение

$$S_i=\sum_{j=0}^{i-2}u^jQ_{i-j-1} \quad (2.61)$$

и произведем эту замену после того, как вычтем из (2.57) выражение (2.58) и поделим результат на $(u-u_2)$. В результате получим

$$\rho_1 vG(u,v)=P_{0,k}v^k\rho_1(v-\alpha)+P_{0,k}v^k\rho_1(\alpha-1)+\sum_{i=1}^{k-1}P_{i,k-i}v^{k-i}[\rho_1(v-\alpha)S_{i+2}+$$
$$+v(\rho_1(\alpha-1)+\rho_2(v-1))S_{i+1}]+\rho_1 vP_{k,0}(S_{k+2}+S_{k+1}(\varepsilon(v-1)-1)). \quad (2.62)$$

Далее преобразуем (2.62), в обозначениях (2.61). Тогда выражение для производящей функции примет следующий вид:

$$G(u,v)=u^kP_{k,0}+u^{k-1}(\rho_1^{-1}P_{k,0}+(v-\alpha)P_{k-1,1})+P_{i,k-i}v^{k-i-1}(\alpha-1)\delta_{i,0}+$$
$$+\sum_{i=0}^{k-2}u^i\{P_{k,0}[Q_{k-i+1}-(1+\varepsilon(1-v))Q_{k-i}]+(1-\alpha v^{-1})P_{i,k-i}v^{k-i}+ \quad , \quad (2.63)$$
$$+\sum_{j=i+1}^{k-1}((1-\alpha v^{-1})Q_{j+1-i}+(\alpha-(1+\varepsilon(1-v))Q_{j-1}))P_{j,k-j}v^{k-j}\}$$

где введено обозначение

$$\varepsilon=\frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (2.64)$$

Рассмотрим разность $Q_{k-i+1}-(1+\varepsilon(1-v))Q_{k-i}$. Преобразуем её следующим образом:

$$Q_{k-i+1}-(1+\varepsilon(1-v))Q_{k-i}=\frac{u_2^{k-i+1}-u_1^{k-i+1}}{u_2-u_1}-(u_2+u_1-\rho_1^{-1})\frac{u_2^{k-i}-u_1^{k-i}}{u_2-u_1}=$$
$$\frac{u_2^{k-i+1}-u_1^{k-i+1}-u_2^{k-i+1}+u_2u_1^{k-i}-u_1u_2^{k-i}+u_1^{k-i+1}+\rho_1^{-1}u_2^{k-i}-\rho_1^{-1}u_1^{k-i}}{u_2-u_1}= \quad (2.65)$$
$$=\frac{u_2u_1(u_1^{k-i-1}-u_2^{k-i-1})+\rho_1^{-1}(u_2^{k-i}+u_1^{k-i})}{u_2-u_1}=\rho_1^{-1}(Q_{k-i}-Q_{k-i-1})$$

Используя (2.65), можно выделить множители при одинаковых степенях u в (2.63). В итоге получим следующую систему уравнений:

$$q_k(v)=P_{k,0},$$
$$q_{k-1}(v)=\rho_1^{-1}P_{k,0}+(v-\alpha)P_{k-1,1},$$
$$\dots$$
$$q_i(v)=P_{k,0}\rho_1^{-1}(Q_{k-i}-Q_{k-i-1})+ \quad (2.66)$$
$$+\sum_{j=i+1}^{k-1}(\rho_1^{-1}(Q_{j-i}-Q_{j-i-1})+\alpha(Q_{j-i}-v^{-1}Q_{j-i+1}))P_{j,k-j}v^{k-j}+$$
$$+(1-\alpha v^{-1})P_{i,k-i}v^{k-i}+P_{i,k-i}v^{k-i-1}(\alpha-1)\delta_{i,0},(i=\overline{0,k-2}),$$

где левая часть всех этих уравнений дается равенством

$$q_i(v)=\sum_{j=0}^{k-i}P_{i,j}v^j,(0\le i\le k).$$

Преобразуем еще раз эту систему уравнений, заменяя теперь индекс i на индекс

k–i, и воспользуемся обозначениями (2.31). Тогда в окончательном виде система перепишется в виде:

$$
\begin{aligned}
&q_k(v) = p_0, \\
&q_{k-1}(v) = \rho_1^{-1} p_0 + (v-\alpha) p_1, \\
&\dots \\
&q_{k-i}(v) = p_0 \rho_1^{-1}(Q_i - Q_{i-1}) + \sum_{j=1}^{i-2}((\rho_1^{-1}+\alpha)Q_{i-j} - \rho_1^{-1} Q_{i-j-1}) p_j v^j + \\
&+(\rho_1^{-1}+\alpha) p_{i-1} v^{i-1} - \alpha \sum_{j=0}^{i-2} Q_{i-j} p_{j+1} v^j + (1-\alpha v^{-1}) p_i v^i + \\
&+ p_i v^i (\alpha v^{-1} - v^{-1}) \delta_{i,k}, (2 \le i \le k)
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

Теперь докажем, что правые части выражений (2.67) действительно являются полиномами относительно v . Этот факт очевиден из общих соображений, но он пока не следует из полученных формул, так как корни u_1 и u_2, задаваемые в виде (2.51) полиномами v не являются, а выражаются через радикалы. Для этого рассмотрим прием, который был предложен авторами статей [92, 93]. Перепишем корни u_1 и u_2 в комплексном виде:

$$u_1 = a_1 e^{i\phi_1}, u_2 = a_2 e^{i\phi_2}. \tag{2.68}$$

Тогда, с учетом формул (2.52),

$$u_1 = \frac{e^{i\phi}}{\rho_1^{1/2}}, u_2 = \frac{e^{-i\phi}}{\rho_1^{1/2}}, \tag{2.69}$$

где ϕ определяется следующим уравнением

$$\cos(\phi) = \frac{1+\rho-\rho_2 v}{2\rho_1^{1/2}} = t(v). \tag{2.70}$$

Если вспомнить определение (2.59) величин Q_j и определение (2.51) корней u_1 и u_2, то нетрудно показать, что

$$Q_j = \rho_1^{(1-j)/2} U_{j-1}(t(v)), (1 \le j \le k+1), \tag{2.71}$$

где $U_i(x)$ - полиномов Чебышева второго рода [96].

Раскладывая правую часть (2.71) в ряд Тейлора по степеням v, имеем

$$Q_j = \rho_1^{(1-j)/2} U_{j-1}(t(v)) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{U_{j-1}^{(i)}(t_0)}{i!} (-1)^i \frac{(\rho_2 v)^i}{(2\rho_1^{1/2})^i} . \qquad (2.72)$$

Далее используем выражение [96] полиномов Чебышева второго рода, через полиномы Гегенбауэра $C_n^{\upsilon}(x)$ порядка n с индексом υ, имеющее вид:

$$U_n^{(m)}(x) = 2^m m! C_{n-m}^{m+1}(x). \qquad (2.73)$$

Для удобства введем в (2.72) следующие обозначения

$$\beta = -\frac{\rho_2}{\rho_1^{1/2}}, \qquad (2.74)$$

$$Q_j = \rho_1^{(1-j)/2} \sum_{i=0}^{j-1} C_{j-1-i}^{i+1}(t_0) \beta^i v^i , \qquad (2.75)$$

$$t_0 = t(0) = \frac{1+\rho}{2\rho_1^{1/2}} . \qquad (2.76)$$

Подставим (2.74) - (2.76) в (2.67) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях v. Рассмотрим более подробно выражение (2.67) при произвольном значении *i*. После подстановки получим

$$q_{k-i}(v) = p_0 \rho_1^{-1}(Q_i - Q_{i-1}) + (1 - \alpha v^{-1}) p_i v^i + p_i v^i (\alpha v^{-1} - v^{-1}) \delta_{i,k} +$$
$$+ (\rho_1^{-1} + \alpha) p_{i-1} v^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-2} ((\rho_1^{-1} + \alpha) Q_{i-j} - \rho_1^{-1} Q_{i-j-1}) p_j v^j - \alpha \sum_{j=0}^{i-2} Q_{i-j} p_{j+1} v^j$$

Преобразуем отдельно слагаемые, входящие в эту формулу. Для краткости опустим аргумент у полиномов Гегенбауэра, так как он везде будет одинаковым. Первое слагаемое выразится так:

$$\begin{aligned} p_0 \rho_1^{-1}(Q_i - Q_{i-1}) &= p_0 \rho_1^{-1} \rho_1^{(1-i)/2} C_0^i \beta^{i-1} v^{i-1} + \\ &+ p_0 \rho_1^{-1} \sum_{j=0}^{i-2} \rho_1^{(1-i)/2} \left[C_{i-1-j}^{j+1} - \rho_1^{1/2} C_{i-2-j}^{j+1} \right] \beta^j v^j \end{aligned} \qquad (2.77)$$

Аналогично для второго слагаемого получим

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{j=0}^{i-2} Q_{i-j} p_{j+1} v^j &= \alpha \sum_{j=0}^{i-2} v^j \sum_{s=0}^{j} \rho_1^{(1-i+s)/2} p_{s+1} C_{i-1-j}^{j-s+1} \beta^{j-s} + \\ &+ \alpha v^{i-1} \sum_{s=0}^{i-2} \rho_1^{(1-i+s)/2} p_{s+1} C_0^{i-s} \beta^{i-1-s} \end{aligned} \qquad (2.78)$$

Наконец, третье слагаемое преобразуется к виду:

$$\sum_{j=1}^{i-2}((\rho_1^{-1}+\alpha)Q_{i-j}-\rho_1^{-1}Q_{i-j-1})p_j v^j =$$
$$= v^{i-1}\sum_{j=1}^{i-2}((\rho_1^{-1}+\alpha)\rho_1^{(1-i+j)/2}C_0^{i-j}\beta^{i-1-j})p_j + \quad (2.79)$$
$$+\sum_{j=1}^{i-2}v^j\sum_{s=1}^{j}p_s((\rho_1^{-1}+\alpha)\rho_1^{(1-i+s)/2}C_{i-1-j}^{j-s+1}-\rho_1^{-1}\rho_1^{(1-i+s+1)/2}C_{i-2-j}^{j-s+1})\beta^{j-s}$$

Теперь подставим полученные выражения в приведенное выше выражение для $q_{k-i}(v)$ и выделим коэффициенты при различных степенях *v*. Тогда, согласно формуле (2.28), найдем следующие выражения для $P_{k-i,j}$ при различных значениях *j*:

$$P_{k-i,i} = p_i, (j=i)$$
$$P_{k-i,i-1} = p_0\rho_1^{-1}\rho_1^{(1-i)/2}C_0^i\beta^{i-1}+(\rho_1^{-1}+\alpha)p_{i-1}-\alpha p_i +$$
$$+\sum_{j=1}^{i-2}p_j((\rho_1^{-1}+\alpha)\rho_1^{(1-i+j)/2}C_0^{i-j})\beta^{i-j-1} -$$
$$-\alpha\sum_{s=0}^{i-2}\rho_1^{(1-i+s)/2}p_{s+1}\beta^{i-1-s}C_0^{i-s}+p_i(\alpha-1)\delta_{i,k}, (j=i-1),$$
$$P_{k-i,j} = p_0\rho_1^{-1}\rho_1^{(1-i)/2}\beta^j(C_{i-1-j}^{j+1}-\rho_1^{1/2}C_{i-2-j}^{j+1}) + \quad (2.80)$$
$$+\sum_{s=1}^{j}p_s((\rho_1^{-1}+\alpha)\rho_1^{(1-i+s)/2}C_{i-1-j}^{j-s+1}-\rho_1^{-1}\rho_1^{(1-i+s+1)/2}C_{i-2-j}^{j-s+1})\beta^{j-s} -$$
$$-\alpha\sum_{s=0}^{j}\rho_1^{(1-i+s)/2}C_{i-1-j}^{j-s+1}p_{s+1}\beta^{j-s}, (j=\overline{1,i-2}),$$
$$P_{k-i,0} = p_0\rho_1^{-1}\rho_1^{(1-i)/2}(C_{i-1}^1-\rho_1^{1/2}C_{i-2}^1)-\alpha\rho_1^{(1-i)/2}C_{i-1}^1 p_1, (j=0).$$

С помощью (2.80) запишем общую формулу для представленных финальных вероятностей и представим ее в виде приводимой далее Теоремы 2.2. При её доказательстве использовалось соглашение, что по определению

$$C_n^m \equiv 0, n<0. \quad (2.81)$$

<u>Теорема 2.2.</u> *Вероятности всех состояний СМО* $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_2^1$ *выражаются через вероятности состояний* $p_i = P_{k-i,i}$ *той же СМО с полностью заполненным накопителем при всех* $(j=\overline{0,i-1})$, *как*

$$P_{k-i,j}=\rho_1^{-1}\rho_1^{(1-i)/2}\beta^j(C_{i-1-j}^{j+1}-\rho_1^{1/2}C_{i-2-j}^{j+1})p_0+(\alpha-1)\delta_{i,k}\delta_{j,i-1}p_i+$$
$$+\sum_{s=1}^{j}((\rho_1^{-1}+\alpha)\rho_1^{(1-i+s)/2}C_{i-1-j}^{j-s+1}-\rho_1^{(-i+s)/2}C_{i-2-j}^{j-s+1})\beta^{j-s}p_s-\alpha\sum_{s=0}^{j}\rho_1^{(1-i+s)/2}C_{i-1-j}^{j-s+1}\beta^{j-s}p_{s+1}, \quad (2.82)$$

где $\rho_i=\lambda_i/\mu$ - коэффициенты использования по i-му типу требований; C_n^ν - полином Гегенбауэра порядка n с индексом ν , взятый при аргументе $\rho_1^{-1/2}(1+\rho_1+\rho_2)/2$; $\beta=-\rho_2\rho_1^{-1/2}$.

Таким образом, все финальные вероятности оказались выражены через «диагональные» вероятности (2.29). Ясно, что, найдя неизвестные (2.29), получим и все остальные финальные вероятности системы.

2.1.3. Построение укороченной системы уравнений

Перейдем к заключительной части решения, а именно, используя системы выражений (2.38), получим систему уравнений для нахождения p_i . Вначале слегка преобразуем (2.38) к более удобному для нас эквивалентному виду

$$r_n=\sum_{i=0}^{n}P_{i,n-i}=\sum_{i=0}^{n}P_{n-i,i}\,. \quad (2.83)$$

Далее запишем (2.82) для случая j=i. Запишем выражения (2.82) для вероятностей $P_{n-i,i}$,считая, что $0\le n\le k-1$

$$P_{n-j,j}=p_0\rho_1^{-1}\rho_1^{(1-k+n-j)/2}\beta^j(C_{k-1-n}^{j+1}-\rho_1^{1/2}C_{k-2-n}^{j+1})+$$
$$+\sum_{s=1}^{j}p_s\rho_1^{(1-k+n-j+s)/2}((\rho_1^{-1}+\alpha)C_{k-1-n}^{j-s+1}-\rho_1^{-1/2}C_{k-2-n}^{j-s+1})\beta^{j-s}- \quad (2.84)$$
$$-\alpha\sum_{s=0}^{j}\rho_1^{(1-k+n-j+s)/2}C_{k-1-n}^{j-s+1}p_{s+1}\beta^{j-s}+p_{k-n+j}(\alpha-1)\delta_{n,j}\delta_{n,k-1}.$$

Теперь получим из (2.83) выражение для r_n , суммируя правые части (2.84). Согласно (2.83), вновь разобьем правую часть (2.84) на три слагаемых. Имеем для первого слагаемого:

$$\sum_{j=0}^{n}p_0\rho_1^{-1}\rho_1^{(1-k+n-j)/2}\beta^j(C_{k-n-1}^{j+1}-\rho_1^{1/2}C_{k-n-2}^{j+1})=p_0\rho_1^{-1}\sum_{j=0}^{n}\rho_1^{(1-k+n-j)/2}\beta^j(C_{k-n-1}^{j+1}-\rho_1^{1/2}C_{k-n-2}^{j+1}). \quad (2.85)$$

Второе слагаемое приводится к виду

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{j} p_s \rho_1^{(1-i+s)/2}((\rho_1^{-1}+\alpha)C_{i-1-j}^{j-s+1}-\rho_1^{-1/2}C_{i-2-j}^{j-s+1})\beta^{j-s} =$$
$$=\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{s=j}^{n}\rho_1^{(1-k+n-s+j)/2}((\rho_1^{-1}+\alpha)C_{k-1-n}^{s-j+1}-\rho_1^{-1/2}C_{k-2-n}^{s-j+1})\beta^{s-j}. \tag{2.86}$$

Наконец, третье слагаемое выглядит так

$$-\alpha\sum_{j=0}^{n}\sum_{s=0}^{j}\rho_1^{(1-k+n-j+s)/2}C_{k-1-n}^{j-s+1}p_{s+1}\beta^{j-s} =$$
$$=-\alpha\sum_{j=1}^{n} p_j\sum_{s=j}^{n}\rho_1^{(1-k+n-j+s)/2}C_{k-1-n}^{s-j+1}\beta^{s-j}-\alpha\sum_{s=1}^{n+1}p_s\rho_1^{(s-k)/2}C_{k-1-n}^{n-s+2}\beta^{n+1-s}. \tag{2.87}$$

Найдем явные выражения для вероятностей r_n . Для этого второй множитель в выражении (2.49) разложим в сумму геометрической прогрессии и выделим коэффициенты при степенях u , что даст:

$$P\{N=n\}=r_n=\frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}\rho^n,(0\le n\le k). \tag{2.88}$$

Тогда после несложных алгебраических преобразований (2.85), с использованием обозначений (2.85) - (2.87), получим

$$\sum_{j=0}^{z}P_{z-j,j}=p_0\rho_1^{-1}\sum_{j=0}^{z}\rho_1^{(1-k+z-j)/2}\beta^j(C_{k-z-1}^{j+1}-\rho_1^{1/2}C_{k-z-2}^{j+1})+$$
$$+\sum_{j=1}^{z}p_j\sum_{s=j}^{z}\rho_1^{(1-k+z-s+j)/2}((\rho_1^{-1}+\alpha)C_{k-1-z}^{s-j+1}-\rho_1^{-1/2}C_{k-2-z}^{s-j+1})\beta^{s-j}-$$
$$-\alpha\sum_{j=1}^{z}p_j\sum_{s=j}^{z}\rho_1^{(1-k+z-j+s)/2}C_{k-1-z}^{s-j+1}\beta^{s-j}-\alpha\sum_{s=1}^{z+1}p_s\rho_1^{(s-k)/2}C_{k-1-z}^{z-s+2}\beta^{z+1-s}+$$
$$+p_k(\alpha-1)\delta_{z,k-1}=p_0\rho_1^{-1}\zeta_z-\alpha\varphi_z p_{z+1}+\sum_{j=1}^{z}p_j\xi_{z,j}+p_k(\alpha-1)\delta_{z,k-1}. \tag{2.89}$$

Теперь можно записать итоговую систему уравнений и оформить этот рещультат в виде Теоремы 2.3, которая позволит найти все интересующие нас неизвестные (2.31).

<u>Теорема 2.3.</u> *Вероятности состояний* $p_i = P_{k-i,i}$ *системы* $\overrightarrow{M_2} / M / 1 / k / f_2^1$, *соответствующие полностью заполненному накопителю, определяются укороченной системой уравнений*

$$\begin{gathered} \rho_1^{-1}\zeta_s p_0 + \sum_{j=1}^{s}\xi_{s,j}p_j - \alpha\varphi_s p_{s+1} + (\alpha-1)\delta_{s,k-1}p_k = r_s, (s=\overline{0,k-1}), \\ \sum_{i=0}^{k} p_i = r_k, \end{gathered} \tag{2.90}$$

где коэффициенты ζ_s, φ_s *и* $\xi_{s,j}$ *определяются равенствами*

$$\begin{gathered} \zeta_z = \sum_{j=0}^{z}\rho_1^{(1-k+z-j)/2}\beta^j(c_{k-z-1}^{j+1} - \rho_1^{1/2}c_{k-z-2}^{j+1}), \varphi_z = \rho_1^{(z+1-k)/2}c_{k-1-z}^{1}, \\ \xi_{z,j} = \sum_{s=j}^{z}\rho_1^{(z-k-s+j)/2}(\rho_1^{-1/2}c_{k-1-z}^{s-j+1} - c_{k-2-z}^{s-j+1})\beta^{s-j} - \alpha\rho_1^{(j-k)/2}\beta^{z+1-j}c_{k-1-z}^{z-j+2}, \end{gathered} \tag{2.91}$$

а r_n *обозначают вероятности распределения общего числа требований*

$$r_n = \mathrm{P}\{N_1 + N_2 = n\} = \frac{1-(\rho_1+\rho_2)}{1-(\rho_1+\rho_2)^{k+1}}(\rho_1+\rho_2)^n, (n=\overline{0,k}), \tag{2.92}$$

совпадающие с однопотоковой моделью $M / M / 1 / k$.

Всего неизвестных в системе (2.90) $k+1$, а пока выведено только k уравнений

$$r_z = \sum_{j=0}^{z}P_{z-j,j} = p_0\rho_1^{-1}\zeta_z - \alpha\varphi_z p_{z+1} + \sum_{j=1}^{z}p_j\xi_{z,j} + p_k(\alpha-1)\delta_{z,k-1}, (0 \le z \le k-1). \tag{2.93}$$

Дополним систему условием (2.38) при $n=k$, тогда получим еще одно уравнение, замыкающее систему

$$r_k = \sum_{i=0}^{k}P_{k-i,i}\,. \tag{2.94}$$

Полученная система (2.93) – (2.94), где коэффициенты задаются согласно (2.91) – (2.92), является итоговой системой линейных алгебраических уравнений, решив которую, можно найти все вероятности состояний, а с их помощью и все интересующие нас характеристики системы.

2.1.4. Решение укороченной системы уравнений

Матрица системы заполняется сначала коэффициентами из уравнения (2.94), а потом коэффициентами из уравнений (2.93). Эта матрица имеет особый вид, который позволит ускорить процесс решения данной системы линейных уравнений, используя разбиение на блоки. Профиль матрицы системы для частного случая k = 21 представлен на рис. 2.2.

Используя специальный вид матрицы системы, можно предложить простой алгоритм решения соответствующей системы уравнений. Представим эту матрицу в виде блочной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{b}^T \\ \vec{a} & A \end{pmatrix} \tag{2.95}$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - векторы размерности k, а матрица A – квадратная порядка k.

Аналогичным образом представим также вектора $\vec{p}$ и $\vec{c}$ имеющий размерность k+1:

$$p = \begin{pmatrix} p_0 \\ \hline \hat{\vec{p}} \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} c_0 \\ \hline \hat{\vec{c}} \end{pmatrix}. \tag{2.96}$$

Решаемая система при этом примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{b}^T \\ \vec{a} & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_0 \\ \hline \hat{\vec{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \hline \hat{\vec{c}} \end{pmatrix} \tag{2.97}$$

причем A – треугольная матрица. Благодаря такой особой структуре, процесс решения можно ускорить по сравнению с решением исходной системы.

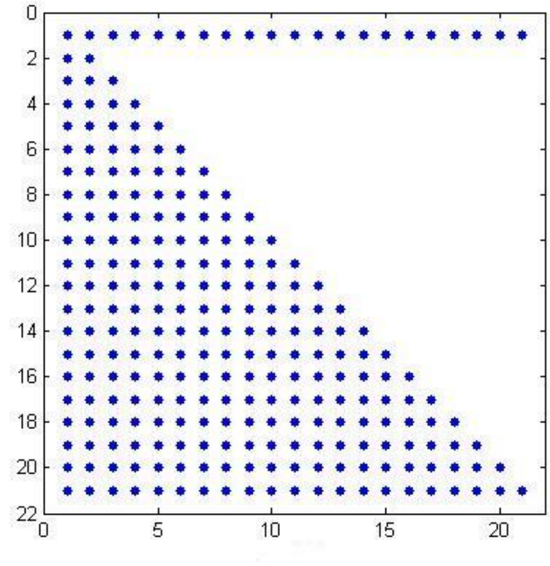

Рисунок 2.2 - Профиль матрицы итоговой системы (случай k = 21)

Запишем элементы системы (2.99) покомпонентно

$$\hat{p}_i = p_i, (i = \overline{1,k}), \tag{2.98}$$

$$A_{i,j} = \begin{cases} -\alpha\varphi_{i+1} + (\alpha - 1)\delta_{z,k-1},\ j = i, \\ \xi_{i+1,\,j+1},\ j = \overline{0, i-1}, \end{cases} \tag{2.99}$$

$$b_i = 1, (i = \overline{1,k}), \tag{2.100}$$

$$a_i = \rho_1^{-1}\zeta_{i+1}, (i = \overline{1,k}), \tag{2.101}$$

$$c_0 = \frac{(1-\rho)\rho^k}{1-\rho^{k+1}} \tag{2.102}$$

$$\hat{c}_i = \frac{(1-\rho)\rho^{i-1}}{1-\rho^{k+1}}, (i = \overline{1,k}). \tag{2.103}$$

Перемножим поблочно систему (2.97), и тогда получим следующую систему матричных уравнений

$$\begin{cases} p_0 + \vec{b}^T \vec{\hat{p}} = c_0 \\ p_0 \vec{a} + A\vec{\hat{p}} = \vec{\hat{c}} \end{cases}. \tag{2.104}$$

Решая (2.104) вначале относительно p_0, находим

$$p_0 = \frac{c_0 - \vec{b}^T A^{-1} \vec{\hat{c}}}{1 - \vec{b}^T A^{-1} \vec{a}}, \tag{2.105}$$

где положим $\vec{b}^T A^{-1} = \vec{z}^T$, причем вектор $\vec{z}$ является решением следующей вспомогательной линейной системы порядка k

$$A^T \vec{z} = \vec{b}. \tag{2.106}$$

Все остальные вероятности системы (2.106) выражаются через p_0 так:

$$\vec{\hat{p}} = A^{-1}\vec{\hat{c}} - p_0 A^{-1}\vec{a}. \tag{2.107}$$

В итоге мы пришли к заявленному в самом начале результату, т.е. свели решение системы уравнений Колмогорова относительно полного набора финальных вероятностей, имеющей порядок $k(k+1)/2$, к решению системы линейных уравнений относительно одних только “диагональных” вероятностей с треугольной матрицей порядка $k+1$. Теперь для того чтобы решить задачу и найти все финальные вероятности системы нужно проделать следующие действия:

1. Решить систему (2.106);
2. Вычислить p_0 по формуле (2.105);
3. Найти остальные вероятности $\vec{\hat{p}}$ из (2.104) по формуле (2.107);
4. По формуле (2.84) найти все финальные вероятности.

2.2 Случай относительного приоритета

Решение приоритетной СМО с относительным приоритетом было получено впервые в 2003 г. К.Е.Авраченковым, Н.О.Вильчевским и Г.Л.Шевляковым (далее АВШ) [92, 93]. Но реализация данного метода была в большей степени искусством авторов этой работы, чем общим методов решения такого рода задач. Чтобы глубже разобраться в этой задаче и решить ее с помощью универсального общего подхода, воспользуемся методом нахождения производящей функции, описанным в предыдущих разделах настоящей главы.

Рассмотрим установившийся режим в системе с относительным приоритетом. Процесс в такой системе остается, естественно, марковским, и по эргодической теореме А.А.Маркова [105] сохраняет свойство эргодичности, что обеспечивает существование финальных вероятностей. Составим для них систему уравнений Колмогорова по общим правилам [85]. Из-за различий в типе приоритета, рассуждения будут несколько отличаться от приведенных в п. 2.1 – 2.4.

Введем фазовое пространство для этой СМО. Состояние системы будем описывать также, как в случае абсолютного приоритета, то есть с помощью числа требований $N_j(t)$, стоящих в очереди и относящихся к соответствующему типу. В этом и состоит главное отличие от оригинального решения, где фазовое пространство задавалось с помощью пары чисел N_1 и $N = N_1 + N_2$. Положим в нашем решении

$$P(i, j; t) = P\{N_1(t) = i, N_2(t) = j\}, (i = \overline{0, k-1}, j = \overline{0, k-1-i}). \quad (2.108)$$

При таком введении состояний для системы с относительным приоритетом возникает сложность, связанная с распадением на два состояния случая $\{N_1 = 0, N_2 = 0\}$. Далее сохраним обозначения $\{O\}$, соответственно, для случаев полного простоя СМО и отсутствия очереди $\{0,0\}$. Введем финальные вероятности таким же образом как и раньше, считая, что

$$P_O(t) = P\{N_{3K}(t) = 0\}, P_O = \lim_{t\to\infty} P_O(t), \quad (2.109)$$

$$P_{0,0}(t) = P\{N_1(t) = 0, N_2(t) = 0, N_{3K}(t) = 1\}, P_{0,0} = \lim_{t\to\infty} P_{0,0}(t), \quad (2.110)$$

где $N_{3K}(t)$ обозначает число занятых каналов обслуживания.

Размеченный граф состояний для этой системы представлен на рис. 2.3. Будем называть этот граф, как и граф на рис. 2.1, исходным. Вероятности состояний на исходном графе должны удовлетворять условию нормировки

$$P_O + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1-i} P_{i,j} = 1. \quad (2.111)$$

В системе уравнений Колмогорова состояние (2.109) будет соединяться только с состоянием (2.110), поэтому уравнение для него будет следующим:

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) P_O + \mu P_{0,0} = 0. \quad (2.112)$$

Следовательно между соответствующими двумя вероятностями существует простая линейная связь

$$P_O = \frac{1}{\rho} P_{0,0}, \tag{2.113}$$

где использованы обозначения (2.20) – (2.22).

Теперь запишем уравнение равновесия для состояния $\{0,0\}$:

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) P_{0,0} + (\lambda_1 + \lambda_2) P_O + \mu (P_{1,0} + P_{0,1}) = 0. \tag{2.114}$$

Тогда, используя (2.113), получим уравнение следующего вида:

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) P_{0,0} + \mu (P_{1,0} + P_{0,1}) = 0. \tag{2.115}$$

Все остальные уравнения Колмогорова, уже не содержащие P_O, не изменятся и будут оставаться такими же как и в прежней системе (2.4), только без слагаемого, отвечающего за абсолютный приоритет при постановке требования на канал, входящего в уравнения с множителем $(1-\alpha)$.

Исходя из приведенных соображений, можно построить модифицированный граф состояний (рис. 2.4), который уже не содержит «пустого» состояния $\{O\}$. При использовании этого графа условие нормировки производящей функции следует заменить новым модифицированным условием

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} P_{i,j} = 1 - \frac{1}{\rho} P_{0,0} \tag{2.116}$$

или, что то же самое, условием

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \left(1 + \frac{1}{\rho} \delta_{i,0} \delta_{j,0}\right) P_{i,j} = 1. \tag{2.117}$$

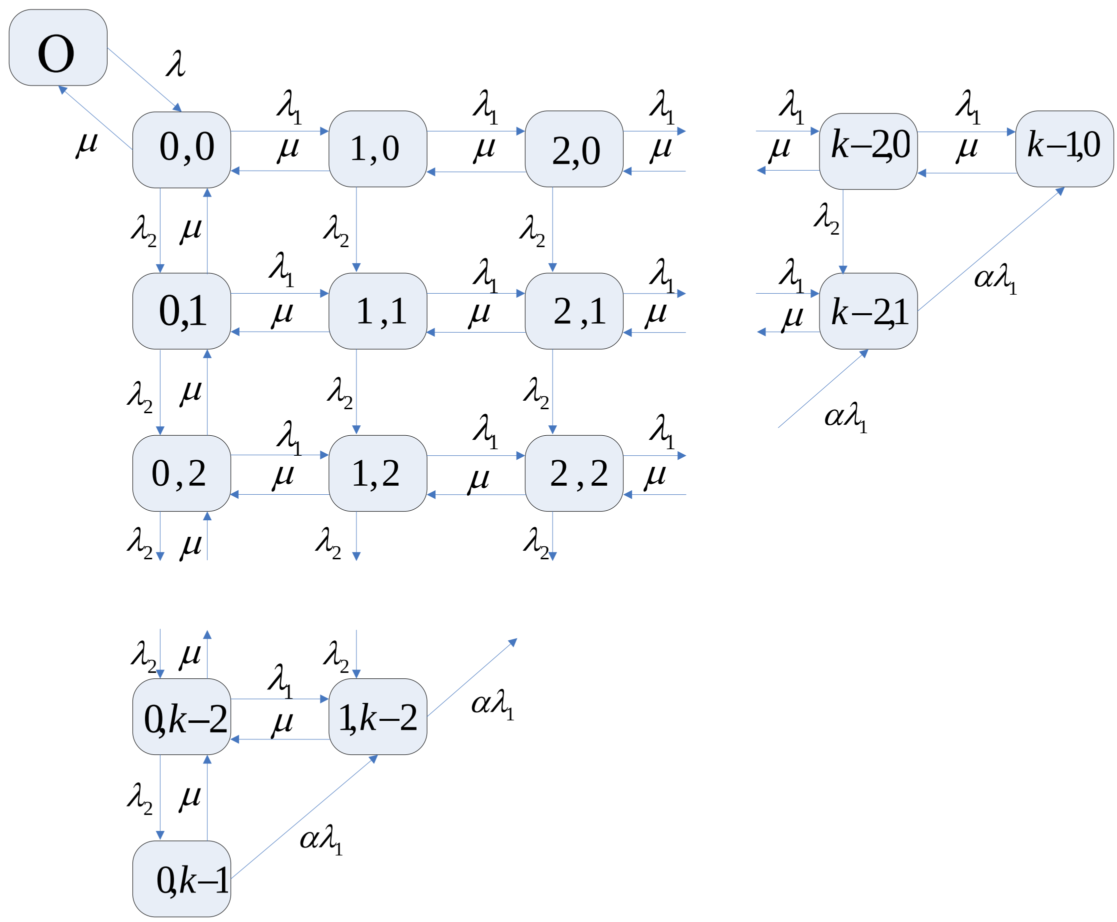

Рисунок 2.3 - Размеченный граф состояний для системы $\overrightarrow{M_2} / M / 1 / k / f_1^1$

Тогда про состояние простоя системы при расчете производящей функции можно полностью забыть, запомнив лишь связь (2.113), позволяющую восстановить вероятность этого состояния по данным модифицированного графа.

Таким образом, итоговая система уравнений будет выглядеть точно так же как система (2.90) - (2.92) только её порядок k уменьшится на единицу, а в уравнениях будет отсутствовать слагаемое, отвечающее за реализацию абсолютного приоритета при вытеснении низкоприоритетного требования с канала обслуживания. Система уравнений равновесия представлена Леммой 2.2.

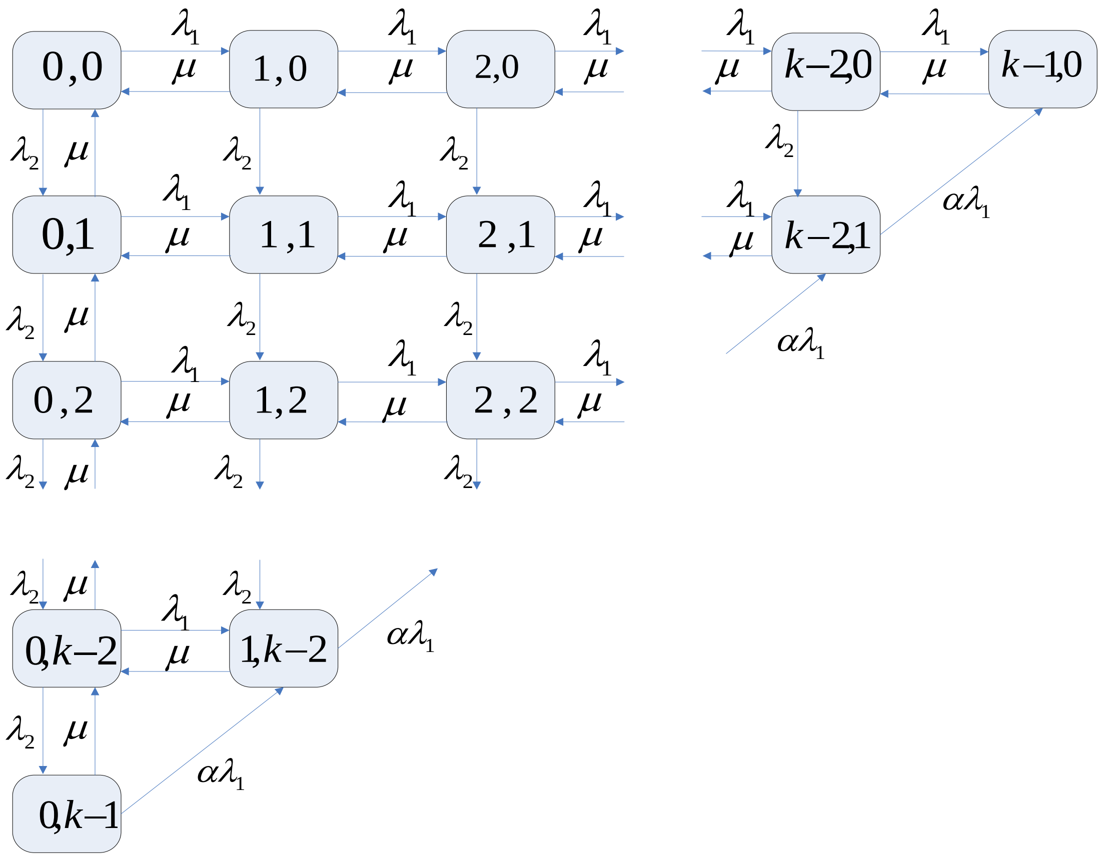

Рисунок 2.4 - Модифицированный граф состояний для системы $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_1^1$

<u>Лемма 2.2.</u> *Система уравнений равновесия Колмогорова для СМО класса* $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_1^1$ *имеет вид*

$$\begin{aligned}
&-[\lambda_1(1-\delta_{j,k-1-i})+\alpha\lambda_1(1-\delta_{i,k-1})\delta_{j,k-1-i}+\lambda_2(1-\delta_{j,k-1-i})+\\
&+\mu(1-\delta_{i,0}\delta_{j,0})]P_{i,j}+\mu P_{i+1,j}+\mu\delta_{i,0}P_{i,j+1}+\lambda_2 P_{i,j-1}+\lambda_1 P_{i-1,j}+\\
&+\alpha\lambda_1\delta_{j,k-1-i}P_{i-1,j+1}=0,(0\le i\le k-1;0\le j\le k-1-i).
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Производящая функция для системы с относительным приоритетом вводится в виде

$$G(u,v)=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i}P_{i,j}u^i v^j. \tag{2.119}$$

Уравнение для производящей функции состояний системы с относительным приоритетом получается после последовательности шагов, аналогичных системе с абсолютным приоритетом и представлено Теоремой 2.4.

<u>Теорема 2.4.</u> *Производящая функция (2.119) для СМО класса* $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_1^1$ *удовлетворяет уравнению*

$$[\lambda_1 u(1-u)+\lambda_2 u(1-v)+\mu(u-1)]vG(u,v)=\mu(u-v)G(0,v)+$$
$$+\mu u(v-1)G(0,0)+\alpha\lambda_1 u^k(v-u)P_{k-1,0}+(1-\alpha)\lambda_1 P_{0,k-1}v^{k-1}u(u-v) \qquad (2.120)$$
$$+[\alpha\lambda_1(u-v)+\lambda_1(1-u)v+\lambda_2(1-v)v]u\sum_{i=0}^{k-1}P_{i,k-1-i}u^i v^{k-1-i}.$$

Используя условия аналитичности производящей функции (2.119) и выполняя последовательность преобразований, выполненных в п. 2.2 настоящей главы, приходим к выражению для вероятностей состояний системы через вероятности «диагональных» состояний в виде, представленном в Теореме 2.5.

Теорема 2.5. *Вероятности всех состояний СМО* $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_1^1$ *выражаются через вероятности состояний* $p_i=P_{k-1-i,i}$ *той же СМО с полностью заполненным накопителем при всех* $(j=\overline{0,i-1})$, *как*

$$P_{k-1-i,j}=\rho_1^{-1}\rho_1^{(1-i)/2}\beta^j(C_{i-1-j}^{j+1}-\rho_1^{1/2}C_{i-2-j}^{j+1})p_0+(\alpha-1)\delta_{i,k-1}\delta_{j,i-1}p_i+$$
$$+\sum_{s=1}^{j}((\rho_1^{-1}+\alpha)\rho_1^{(1-i+s)/2}C_{i-1-j}^{j-s+1}-\rho_1^{(-i+s)/2}C_{i-2-j}^{j-s+1})\beta^{j-s}p_s-\alpha\sum_{s=0}^{j}\rho_1^{(1-i+s)/2}C_{i-1-j}^{j-s+1}\beta^{j-s}p_{s+1}, \qquad (2.121)$$

где $\rho_i=\lambda_i/\mu$ - коэффициенты использования по i-му типу требований; C_n^ν - полином Гегенбауэра порядка n с индексом ν , взятый при аргументе $\rho_1^{-1/2}(1+\rho_1+\rho_2)/2$; $\beta=-\rho_2\rho_1^{-1/2}$.

Осталось сделать последнее уточнение, которое связано с вероятностями r_n . Распределение этих вероятностей в задаче с абсолютным приоритетом выглядело как усеченный геометрический закон

$$r_i=\frac{(1-\rho)\rho^i}{1-\rho^{k+1}},(i=\overline{0,k}) \qquad (2.122)$$

Для относительного приоритета получается несколько иное выражение

$$r_i=\frac{(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}}\rho^{i+1},(i=\overline{0,k-1}). \qquad (2.123)$$

Запишем итоговую систему уравнений, которая позволит найти все интересующие нас значения «диагональных» вероятностей (2.31). Всего неизвестных k , а пока известно только $k-1$ уравнение

$$r_z = \sum_{j=0}^{z} P_{z-j,j} = p_0 \rho_1^{-1} \zeta_z - \alpha \phi_z p_{z+1} + \sum_{j=1}^{z} p_j \xi_{z,j}, (0 \le z \le k-2). \qquad (2.124)$$

Дополним систему условием (2.123) при $n = k-1$, тогда получим еще одно уравнение, замыкающее систему

$$r_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} P_{k-1-i,i} \,. \qquad (2.125)$$

Полученная система (2.124) – (2.125), с обозначениями (2.126) – (2.128), является искомой системой линейных алгебраических уравнений, решив которую, можно найти все интересующие нас характеристики системы.

$$\zeta_z = \sum_{j=0}^{z} \rho_1^{(-k+z-j)/2} \beta^j (C_{k-z-2}^{j+1} - \rho_1^{1/2} C_{k-z-3}^{j+1}), \qquad (2.126)$$

$$\phi_z = \rho_1^{(z-k)/2} C_{k-2-z}^{1}, \qquad (2.127)$$

$$\begin{aligned} \xi_{z,j} = \sum_{s=j}^{z} \rho_1^{(z-k+1-s+j)/2} (\rho_1^{-1/2} C_{k-2-z}^{s-j+1} - C_{k-3-z}^{s-j+1}) \beta^{s-j} - \\ -\alpha \rho_1^{(j-k+1)/2} \beta^{z+1-j} C_{k-2-z}^{z-j+2}. \end{aligned} \qquad (2.128)$$

Эта система с вычислительной точки зрения обладает всеми свойствами системы задачи с абсолютным приоритетом и имеет матрицу системы точно с таким же профилем. Поэтому алгоритм решения совершенно аналогичен вышеизложенному.

<u>Теорема 2.6.</u> *Вероятности состояний* $p_i = P_{k-1-i,i}$ *системы* $\overrightarrow{M_2} / M / 1 / k / f_1^1$, *соответствующие полностью заполненному накопителю, определяются укороченной системой уравнений*

$$\begin{aligned} &\rho_1^{-1} \zeta_s p_0 + \sum_{j=1}^{s} \xi_{s,j} p_j - \alpha \varphi_s p_{s+1} + (\alpha - 1) \delta_{s,k-2} p_{k-1} = r_s, (s = \overline{0, k-2}), \\ &\sum_{i=0}^{k-1} p_i = r_{k-1}, \end{aligned} \qquad (2.129)$$

где коэффициенты ζ_s, φ_s *и* $\xi_{s,j}$ *определяются равенствами (2.126)-(2.128).*

2.3. Общие замечания, касающиеся метода решения задачи

Основное содержание второй главы диссертации составляет решение задачи для случая абсолютного приоритета, приведенное в разделах 2.1.1-2.1.4. Это решение не только представляет собой важный и практически значимый пример исследования конкретной приоритетной системы, но и весьма важно и показательно для понимания тех методов и приемов, которые могут быть взяты на вооружение при решении многих других, более сложных задач, касающихся достаточно широкого класса марковских двухпотоковых СМО.

Отчасти эта важная методологическая роль подхода, изложенного в п.п. 2.1.1 – 2.1.4, была показана в предыдущем разделе 2.2, в котором на основе ранее изложенной теории удалось сравнительно быстро и просто разобрать решение задачи для случая относительного приоритета. По своей математической сложности эта задача аналогична задаче с абсолютным приоритетом, но все решение свелось к ряду уточнений и дополнений в ранее изложенный алгоритм. По той же самой схеме можно разобрать целый ряд аналогичных систем, что и будет сделано в третьей главе диссертации.

Для того, чтобы акцентировать внимание на наиболее важных деталях алгоритма решения и используемых при этом технических приемах, остановимся более подробно на основных этапах решения. Последовательно опишем эти этапы, сопроводив их описание необходимыми комментариями.

2.3.1 Формирование фазового пространства

Поскольку речь идет о двухпотоковых СМО, то их состояние должно характеризоваться двумерным фазовым вектором $\vec{N} = \{N_1, N_2\}$. Физические смысл компонент $\vec{N}$, в принципе, выбирать можно по-разному. Например, в основополагающей статье [92] под N_1 понимается общее число требований, а под N_2 - число тех из них, которые являются высокоприоритетными. Такой подход является весьма удобным, разумным и оправданным в случае относительного приоритета, разобранном в указанной работе.

Между тем, автор диссертации ставил перед собой более широкую цель: разработать достаточно общий метод, пригодный в целом классе приоритетных задач на обслуживание. В литературе имеется положительный опыт несколько иного определения фазового вектора, когда под N_1 и N_2 понимается соответственно, число высокоприоритетных и низкоприоритетных требований.

Это направление восходит к классическим работам Уайта-Кристи [1] и Стефана [2], опубликованным еще в пятидесятые годы прошлого века. Подобный выбор фазовых переменных весьма удобен и часто используется в прикладных исследованиях [97]. Из последних работ в области теории телекоммуникаций, где он используется, отметим обстоятельный цикл работ [94, 95], авторы которого систематически разрабатывали данный подход и в ряде других публикаций [98, 99, 100].

В настоящей диссертации автор везде придерживается определения фазового пространства, аналогично работам [94, 95], которое представляется наиболее удобным для целей нашего исследования.

2.3.2 Запись системы уравнений равновесия Колмогорова

Поскольку рассматриваемые в диссертации СМО являются марковскими, и притом эргодическими, то запись для них СУР не составляет никакого труда. Вывод уравнений равновесия и их конкретный вид можно найти в любом руководстве по ТМО (см., например, [85, 101, 102]). Вместе с тем, для реализации предлагаемого в диссертации метода СУР целесообразно переписать в особом, специальном виде.

Обратимся к размеченным графам состояний, представленным на рис. 2.1 и 2.4. С точки зрения топологии этих графов, на них можно выделить внутренние узлы, окруженные со всех сторон другими узлами графа, и граничные узлы, расположенные по краям графа. Для этих двух групп узлов уравнения равновесия записываются по-разному и имеют разный аналитическией вид. При последующем вычислении производящей функции наличие граничных узлов приводит к появлению большого числа «особых» комбинаций индексов, нарушает единообразие аналитических выводов и существенно увеличивает громоздкость вычислений.

Чтобы обойти эту трудность, в работах [94, 95] предлагается очень простой, но весьма эффективный технический прием. Для граничных узлов графа состояний уравнения записываются по тому же шаблону, как и для внутренних» но фактически отсутствующие интенсивности перехода обнуляются с помощью введения множителя, пропорционального дельта-символу Кронекера. В результате СУР представляется в форме, даваемой леммой 2.1. Это замечание кажется сугубо техническим, однако на практике позволяет существенно снизить трудоемкость вычислений и избежать возможных ошибок, что особенно существенно для более сложных моделей СМО, разбираемых в следующей главе.

2.3.3 Вычисление производящей функции финальных вероятностей состояний системы

Как уже отмечалось в обзоре, приведенном в главе 1, существуют два основных метода решения СУР для приоритетных СМО: метод рекуррентных соотношений (МРС) Г.П. Башарина [35, 47], а также метод производящих функций (МПФ). В литературе иногда высказывается мнение, что МПФ эффективен только в случае неограниченногот объема накопителя, так как только в этом случае удается получить в замкнутом виде аналитическое решение задачи. Это мнение верно лишь только отчасти, и, причем в меньшей его части. Действительно, с помощью МПФ получить решение СУР в случае ограниченного накопителя пока не удалось, но данный метод, тем не менее, позволяет снизить порядок решаемой СУР, путем перехода к «укороченной» системе уравнений. Систематическая разработка этой идеи, впервые высказанной в работе [93] и развитой затем в статьях [94, 95], является одной из целей настоящего диссертационного исследования.

Если записать СУР в виде, задаваемом леммами 2.1 и 2.2, то вычисление производящей функции финальных вероятностей не составит труда. Результат этих вычислений представлен в теоремах 2.1 и 2.4. Эта теорема позволяет представить искомую производящую функцию в виде отношения двух полиномов. Полином в числителе дроби имеет порядок, на две единицы превосходящий порядок самой производящей функции и содержит в своих коэффициентах ряд неизвестных пока вероятностей, приче относящихся к граничным узлам размеченного графа состояний. Полином, стоящий в знаменателе полностью определен и имеет второй порядок.

Отметим, что описанная структура производящей функции полностью сохраняется и для более сложных приоритетных дисциплин обслуживания, причем полином из знаменателя либо полностью сохраняет свой вид при переходе к более сложным моделям приоритетного обслуживания, либо лишь незначительно усложняется путем добавления небольшого числа простых по своему виду слагаемых. Это делает алгоритм решения, разобранный в главе 2, универсальным и пригодным в качестве образца и прототипа для рассматриваемого в диссертации класса приоритетных систем.

Производящая функция для любой СМО конечной емкости должна являться полиномом соответствующего конечного порядка и не может иметь полюсов, возникающих согласно теоремам 2.1 и 2.4 в точках, являющихся корнями полинома, стоящего в знаменателе. Это дает два условия аналитичности производящей функции, позволяющие устранить указанные особенности таким же способом, как это было проделано для системы с абсолютным приоритетом в данной главе.

2.3.4 Устранение особенностей производящей функции

Как уже отмечалось, стоящий в числителе выражения полином для $G(u,v)$ для производящей функции, включает ряд неизвестных вероятностей, отвечающих «граничным» состояниям размеченного графа СМО. Обозначим через $u_1(v)$ и $u_2(v)$ корни полинома, стоящего в знаменателе G относительно аргумента u. Приравнивая к нулю вычеты G при $u = u_1$ и $u = u_2$, получаем два дополнительных ограничения, накладываемые на вероятности «граничных» состояний. Эти ограничения имеют вид линейных уравнений относительно сохранившихся в числителе G вероятностей.

Процедура устранения особенностей проводится для всех моделей СМО стандартным образом. Левая часть вновь полученных линейных ограничений, которая в силу этих ограничений должна обращатся в нуль, вычитается из числителя G. Если было взято ограничение, устраняющее полюс $u=u_j$, то после такого преобразования числитель производящей функции будет иметь корень $u=u_j$, а тогда этот числитель и знаменатель можно будет сократить на $(u-u_j)$. Далее подобным образом же устраняется особенность во втором полюсе функции G с использованием результата сокращения числителя и знаменателя.

В результате описанных преобразований производящая функция G, включающая все без исключения вероятности состояний, оказывается выраженной через некоторый полином от аргументов u и v, в котором присутствуют только вероятности «граничных» состояний.

Следует отметить, что после выполнения процедуры устранения особенностей в выражении для G могут сохраняться вероятности далеко не всех «граничных» состояний, а лишь некоторой их части, которые далее будут называться «опорными» состояниями. Например, для систем с абсолютным и относительным приоритетом в роли «опорных» состояний выступают «диагональные» состояния размеченных графов рис. 2.1 и 2.4. (см. Теорему 2.2). В более сложных примерах из главы 3 число «опорных» состояний может увеличиваться. При этом, однако, важно заметить, что общее число состояний размеченного графа СМО при увеличении емкости системы k асимптотически пропорционально k^2, а число граничных состояний (и тем более число “опорных” состояний) асимптотически пропорционально k.

2.3.5 Получение «укороченной» системы уравнений

«Укороченная» система уравнений записывается относительно вероятностей «опорных» состояний и выводится следующим образом. В правой части выражения для G, полученного путем устранения особенностей согласно п.2.3.4 сохраняются только вероятности «опорных» состояний. Если в этом выражении приравнять друг другу коэффициенты при комбинациях степеней, соответствующих вероятностям «опорных» состояний, то получаем «укороченную» систему уравнений для вероятностей этих опорных состояний. Если же, приравнять друг другу коэффициенты при вероятностях всех остальных состояний, то приходим к выражениям остальных вероятностей через «опорные».

Для систем, относящихся к главе 2, этот метод приводит к результатам, представленным в теореме 2.3 и результатам в п. 2.2. Здесь получается самый низкий порядок укороченной системы уравнений, самый простой вид уравнений и элементарный вывод этих уравнений. В более сложных примерах главы 3 увеличивается порядок укороченной системы, а для вывода части входящих в нее уравнений, отвечающих «недиагональным» состояниям приходится раскрывать неопределенности по правилу Лопиталя для применения свойства аналитичности производящей функции в точке 0 по одному из аргументов.

2.3.6 Преобразование коэффициентов «укороченной» системы уравнений

Описанный выше метод получения укороченной системы уравнений теоретически является безупречным, однако при его реализации возникает одна техническая сложность. Дело в том, что в коэффициенты так полученных уравнений войдут степени корней $u_1(v)$ и $u_2(v)$, которые, вообще говоря, выражаются через v с помощью радикалов, преобразование которых к виду степенных функций от v вызывает определенные трудности.

Эта трудность была преодолена авторами работы [92] с помощью следующего приема. Как оказалось, коэффициенты укороченной системы линейных уравнений содержат разделенные разности второго порядка от степеней аргумента, взятые в точках u_1 и u_2. Как показали К.Е. Авраченков, Н.О. Вильчевский и Г.Л. Шевляков, эти разделенные разности можно выразить через полиномы Чебышева второго рода, а последние удобно представить с помощью ультрасферических полиномов Гегенбауэра [93]. Эти представления коэффициентов полностью сохраняют свою силу и для других типов приоритетов из числа разобранных далее в главе 3.

Описание алгоритма решения в целом и отдельных его шагов выше было приведено на основе материала главы 2, касающегося только абсолютного и относительного приоритетов. Вместе с тем, все эти шаги и приемы исследования сохраняют свою силу и для более сложных моделей приоритизации, в частности, тех которым посвящается следующая глава.

Глава 3. Системы $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1$ с неклассическими типами приоритетов и вероятностным выталкивающим механизмом (*i*=3,4)

В разделе 1.1.2 настоящей диссертации была рассмотрена классическая система сокращенных обозначений приоритетных СМО, принадлежащая Г.П. Башарину. Напомним, что согласно этой системе в обозначении $\overrightarrow{A_r}/\overrightarrow{B_r}/m/k/f_j^i$ тип приоритета определяется значением i в последнем символе, причем сам Башарин ограничился лишь двумя наиболее употребительными на практике типами приоритетов: абсолютным (*i*=2) и относительным (*i*=1).

В разделе 1.3.1 автором было предложено дополнить базовый набор типовых приоритетов чередующимся (*i*=3) и вероятностным приоритетом (*i*=4). Подобное дополнение и расширение нотации Г.П. Башарина основывается на мнении Б.В. Гнеденко [83], который причислял к числу основных приоритетов именно те четыре из них, которые мы предлагаем взять за основу классификации.

Нужно сказать, что классификация приоритетных СМО не сводится только лишь к выбору удобных сокращенных обозначений. Она позволяет систематизировать все многообразие возможных вариантов дисциплин обслуживания, привести его к стройной системе, а также в определенной степени стимулирует развитие исследований в этой области. Так, например, сразу после своего появления классификации Башарина стала очень популярной, появилось много работ, авторы которых стремились «закрыть» определенные позиции этой классификации, изучив соответствующие типовые СМО.

Вначале опишем более подробно дисциплины обслуживания для двух вновь рассматриваемых типов приоритетов: чередующегося и вероятностного. Начнем с описания чередующегося приоритета для двухпотоковой марковской СМО. В случае двух типов требований поступление на обслуживание требований второго типа происходит только после полного завершения обслуживания всех имеющихся требований первого типа. После окончания обслуживания последнего требования первого типа происходит переключение режима работы системы. После переключения режима абсолютный приоритет по обслуживанию переходит ко второму типу требований до их полного выполнения. После чего приоритет опять переключается на первый тип требований до их полного выполнения, и подобные переключения циклически повторяются. Важной особенностью этого типа приоритета является то, что среди известных приоритетных дисциплин эта дисциплина обеспечивает наименьшее число переключений режимов работы обслуживающего устройства.

Далее разберем дисциплину вероятностного приоритета в случае СМО того же класса. В отличие от всех ранее рассмотренных типов приоритетов, этот тип приоритета не задает жесткий заранее заданный порядок обслуживания, больших групп требований. При вероятностном приоритете перед каждым новым началом операции обслуживания производится случайный выбор типа требования на обслуживание, причем с заранее фиксированной вероятностью. И в этом случае на обслуживание с заданной вероятностью может попасть требование как первого, так и второго типа. Как дополнение к такому типу приоритета, можно рассмотреть в качестве параметра не только вероятность выбора, но и количество этих требований в системе или интенсивности входящих потоков, что позволяет сделать процесс управления системой еще более гибким. Далее ограничимся самым простым случаем вероятностного приоритета с фиксированной приоритетной вероятностью для первого потока. Остальные могут быть рассмотрены точно таким же образом, как и этот.

3.1. Система с чередующимся приоритетом

Рассмотрим двухпотоковую систему массового обслуживания с вероятностным выталкивающим механизмом и чередующимся приоритетом класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_3^1$ в установившемся режиме. Процесс в этой системе, как и в системах, рассмотренных в главе 2, тоже будет марковским и эргодическим, что гарантирует существование финальных вероятностей, не зависящих от начального состояния системы. Они удовлетворяют стационарной системе уравнений Колмогорова.

3.1.1. Фазовое пространство модели и построение СУР

Определим фазовое пространство в виде:

$$\Omega = \{\varnothing\} \cup \left\{ (n,i,j) : n=\overline{1,2}; i=\overline{0,k-1}; j=\overline{0,k-1-i} \right\}, \tag{3.1}$$

Составим размеченный граф состояний системы для этой задачи, который изображен на рис. 3.1. Данный граф условно можно разбить на две части. Левый подграф отвечает за процесс функционирования системы в режиме, когда более высоким приоритетом обладают требования первого типа, а правый подграф описывает переход этого более высокого приоритета к требованиям второго типа.

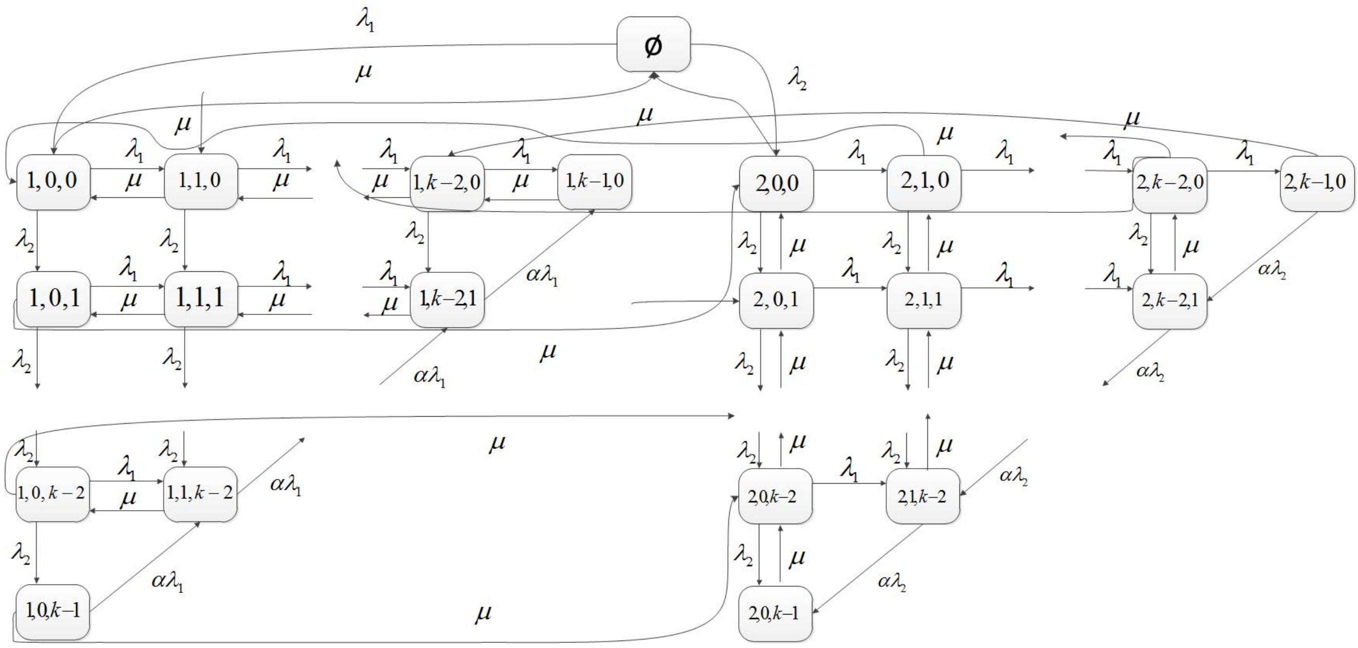

Рисунок 3.1. Размеченный граф состояний для СМО $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_3^1$.

Состояния (n, i, j) задают состояния накопителя системы. Первый индекс описывает номер типа требования, которое в данный момент находится на обслуживании, а также которые имеют в данный момент приоритет по постановке в очередь. Второй и третий индексы описывают количество требований первого и второго типа в накопителе системы, также, как и в случае относительного приоритета.

Каждый подграф описывается аналогично системе с относительным приоритетом, описанной в п. 2.6. Переходы между этими подграфами соответствуют переключению приоритета от одного типа требований к другому. Переходы, которые происходят на нижней диагонали подграфов по прежнему, как и в системах главы 2, отвечают процессу вероятностного выталкивания требований из накопителя системы.

Учитывая вид фазового пространства (3.1) и структуру размеченного графа, представленного на рис. 3.1, можно получить СУР для этой СМО. Она дается следующей леммой.

<u>Лемма 3.1.</u> *Система уравнений равновесия для СМО* $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_3^1$ *имеет вид*

$$\begin{cases} (\mu+(\lambda_1+\lambda_2)(1-\delta_{i+j,k-1})+\alpha\lambda_1\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{j,0}))P_{i,j}^{(1)}=\lambda_1(1-\delta_{i,0})P_{i-1,j}^{(1)}+ \\ +\lambda_2(1-\delta_{j,0})P_{i,j-1}^{(1)}+\mu\delta_{j,0}(1-\delta_{i,k-1})P_{i+1,0}^{(2)}+\mu(1-\delta_{i+j,k-1})P_{i+1,j}^{(1)}+ \\ +\alpha\lambda_1\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{i,0})P_{i-1,j+1}^{(1)}+\lambda_1\delta_{i,0}\delta_{j,o}P_{\varnothing}, \\ (\mu+(\lambda_1+\lambda_2)(1-\delta_{i+j,k-1})+\alpha\lambda_2\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{i,0}))P_{i,j}^{(2)}=\lambda_2\delta_{i,0}\delta_{j,0}P_{\varnothing}+ \\ +\lambda_1(1-\delta_{i,0})P_{i-1,j}^{(2)}+\lambda_2(1-\delta_{j,0})P_{i,j-1}^{(2)}+\mu(1-\delta_{i+j,k-1})P_{i,j+1}^{(2)}+\mu\delta_{i,0}(1-\delta_{j,k-1})P_{0,j+1}^{(1)}+ \\ +\alpha\lambda_2\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{j,0})P_{i+1,j-1}^{(2)}, \end{cases} \tag{3.2}$$

где индексы i и j удовлетворяют условиям $(0\le i\le k-1; 0\le j\le k-1-i)$.

<u>Доказательство.</u> Правильность полученной СУР может быть показана путем рассмотрения каждого перехода на размеченном графе состояний по отдельности. При составлении СУР также действует соглашение (2.6), введенное ранее.

Все переходы, которые осуществляются в рамках каждого отдельно взятого из подграфов, аналогичны переходам, уже описанным ранее в главе 2, и вводятся аналогичным образом. Для завершения доказательства необходимо лишь описать те переходы, которые связывают левый и правый подграфы.

Переключение режимов работы на размеченном графе соответствует переходам из одного подграфа в другой. Тип требований, который в данный момент является приоритетным, изменится только тогда, когда в системе не останется требований этого типа, но имеются требования другого типа. Эти состояния могут быть описаны, как $(1,0,i)$ и $(2,i,0)$. Переходы из указанных состояний осуществляются с интенсивностью μ в состояния $(2,0,i-1)$ и $(1,i-1,0)$, соответственно.

Таким образом, рассмотрены все переходы, преставленные на размеченном графе состояний, и видно, что все слагаемые, которые входят в полученные уравнения, соответствуют этим переходам.

Полученная СУР (3.2) включает два набора уравнений, первый из которых отвечает за состояния левого подграфа, а второй набор, соответственно, описывает правый подграф.

3.1.2. Вычисление производящей функции

Следующим шагом разработанного метода является нахождение выражения для производящей функции вероятностей состояний рассматриваемой системы.

Из-за наличия двух различных наборов вероятностей состояния $P_{i,j}^{(n)}$, отвечающих n=1 и n=2, выражение для производящей функции будет иметь более сложный вид, чем в случае абсолютного приоритета (см. формулу (2.7)).

$$G(u,v,w)=\sum_{n=1}^{2}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i}P_{i,j}^{(n)}u^i v^j w^{n-1}=G^{(1)}(u,v)+wG^{(2)}(u,v). \tag{3.3}$$

Здесь $G^{(n)}(u,v)$ означает условную производящую функцию при условии, что обслуживается требование n-го типа.

Рассматривая по отдельности каждый подграф получим уравнения, которым удовлетворяют условные производящие функции $G(n)$. Эти уравнения задаются Теоремой 3.1.

<u>Теорема 3.1.</u> *Для СМО с чередующимся приоритетом* $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_3^1$ *условные производящие функции* $G^{(1)}(u,v)$ *и* $G^{(2)}(u,v)$, *определяемые согласно (3.3), удовлетворяют уравнениям*

$$\begin{aligned}
&[(1+\rho)-(\rho_1 u+\rho_2 v)-1/u]G^{(1)}(u,v)=\rho_1 P_\varnothing+((\rho-\alpha\rho_1)-(\rho_1 u+\rho_2 v)+\alpha\rho_1 u/v)\\
&\sum_{i=0}^{k-1}P^{(1)}_{i,k-1-i}u^i v^{k-1-i}+\alpha\rho_1 P^{(1)}_{k-1,0}u^{k-1}(1-u/v)+[G^{(2)}(u,0)-P^{(2)}_{0,0}-G^{(1)}(0,v)]/u,\\
&[(1+\rho)-(\rho_1 u+\rho_2 v)-1/v]G^{(2)}(u,v)=\rho_2 P_\varnothing+((\rho-\alpha\rho_2)-(\rho_1 u+\rho_2 v)+\alpha\rho_2 v/u)\\
&\sum_{i=0}^{k-1}P^{(2)}_{i,k-1-i}u^i v^{k-1-i}+[-G^{(2)}(u,0)+G^{(1)}(0,v)-P^{(1)}_{0,0}]/v+\alpha\rho_2 P^{(2)}_{0,k-1}v^{k-1}(1-v/u).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

<u>Доказательство.</u> Для получения уравнений (3.4) рассмотрим отдельно левый и правый подграфы рис. 3.1. Домножим уравнения из (3.2), соответствующие состояниям (n,i,j) при конкретном фиксированном n, на $u^i v^j$ и просуммируем по всем возможным значениям i и j согласно (3.3).

Вначале рассмотрим уравнения в СУР (3.2) для левого подграфа:

$$\begin{aligned}
&(\mu+(\lambda_1+\lambda_2)(1-\delta_{i+j,k-1})+\alpha\lambda_1\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{j,0}))P^{(1)}_{i,j}=\lambda_1(1-\delta_{i,0})P^{(1)}_{i-1,j}+\\
&+\lambda_2(1-\delta_{j,0})P^{(1)}_{i,j-1}+\mu\delta_{j,0}(1-\delta_{i,k-1})P^{(2)}_{i+1,0}+\mu(1-\delta_{i+j,k-1})P^{(1)}_{i+1,j}+\\
&+\alpha\lambda_1\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{i,0})P^{(1)}_{i-1,j+1}+\lambda_1\delta_{i,0}\delta_{j,o}P_\varnothing
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Разделим левую и правую часть на μ:

$$\begin{aligned}
&(1+\rho(1-\delta_{i+j,k-1})+\alpha\rho_1\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{j,0}))P^{(1)}_{i,j}=\rho_1(1-\delta_{i,0})P^{(1)}_{i-1,j}+\\
&\rho_2(1-\delta_{j,0})P^{(1)}_{i,j-1}+\delta_{j,0}(1-\delta_{i,k-1})P^{(2)}_{i+1,0}+(1-\delta_{i+j,k-1})P^{(1)}_{i+1,j}+\\
&+\alpha\rho_1\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{i,0})P^{(1)}_{i-1,j+1}+\rho_1\delta_{i,0}\delta_{j,0}P_\varnothing
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Суммируем по $i=\overline{0,k-1},\ j=\overline{0,k-1-i}$, умножим каждое уравнение на $u^i v^j$:

$$\begin{aligned}
&(1+\rho_1)G^{(1)}(u,v)+(\alpha\rho_1-\rho)\Sigma_1-\alpha\rho_1 P^{(1)}_{k-1,0}u^{k-1}=\rho_1\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i-2}P^{(1)}_{i-1,j}u^i v^j+\\
&+\rho_2\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1-i}P^{(1)}_{i,j-1}u^i v^j+\sum_{i=0}^{k-2}P^{(2)}_{i+1,0}u^i+\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i-2}P^{(1)}_{i+1,j}u^i v^j+\alpha\rho_1\sum_{i=1}^{k-1}P^{(1)}_{i-1,k-i}u^i v^{k-1-i}+\rho_1 P_\varnothing
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Упростим выражение, используя выражения аналогичное (2.11) для величины Σ_1 с вероятностями состояний левого подграфа

$$\Sigma_1=\sum_{i=0}^{k-1}P^{(1)}_{i,k-1-i}u^i v^{k-1-i}$$

рассмотрев слагаемые по отдельности:

$$\rho_1\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i}P_{i-1,j}^{(1)}u^iv^j=\rho_1u\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-i}P_{i,j}^{(1)}u^iv^j=\rho_1u[G^{(1)}(u,v)-\Sigma_1] \qquad (3.8)$$

$$\rho_2\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1-i}P_{i,j-1}^{(1)}u^iv^j=\rho_2v\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-2-i}P_{i,j}^{(1)}u^iv^j=\rho_2v[G^{(1)}(u,v)-\Sigma_1] \qquad (3.9)$$

$$\sum_{i=0}^{k-2}P_{i+1,0}^{(2)}u^i=\frac{1}{u}[\sum_{i=0}^{k-2}P_{i+1,0}^{(2)}u^{i+1}]=\frac{1}{u}[G^{(2)}(u,0)-P_{0,0}^{(2)}] \qquad (3.10)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i-2}P_{i+1,j}^{(1)}u^iv^j=\frac{1}{u}\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-i-2}P_{i+1,j}^{(1)}u^{i+1}v^j=\frac{1}{u}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i}P_{i,j}^{(1)}u^iv^j=\\&=\frac{1}{u}[G^{(1)}(u,v)-G^{(1)}(0,v)]\end{aligned} \qquad (3.11)$$

$$\alpha\rho_1\sum_{i=1}^{k-1}P_{i-1,k-i}^{(1)}u^iv^{k-1-i}=\alpha\rho_1\frac{u}{v}\sum_{i=0}^{k-2}P_{i,k-1-i}^{(1)}u^iv^{k-1-i}=\alpha\rho_1\frac{u}{v}[\Sigma_1-P_{k-1,0}^{(1)}u^{k-1}] \qquad (3.12)$$

После подстановки (3.8)-(3.12) в (3.7) и приведения подобных членов получим уравнение для условной производящей функции, соответствующей случаю, когда приоритет по обслуживанию и постановке в очередь имеют требования первого типа. После всех преобразований, опуская очевидные промежуточные вычисления, приходим к искомому уравнению

$$\begin{aligned}&[(1+\rho)-(\rho_1u+\rho_2v)-\frac{1}{u}]G^{(1)}(u,v)=((\rho-\alpha\rho_1)-(\rho_1u+\rho_2v)+\\&+\alpha\rho_1\frac{u}{v})\Sigma_1+\alpha\rho_1P_{k-1,0}^{(1)}u^{k-1}(1-\frac{u}{v})+\frac{1}{u}[G^{(2)}(u,0)-P_{0,0}^{(2)}-G^{(1)}(0,v)]+\rho_1P_{\varnothing}\end{aligned} \qquad (3.13)$$

Теперь рассмотрим правый подграф, который соответствует случаю, когда в системе приоритет по обслуживанию и по постановке в очередь перешел к потоку требований второго типа. Запишем отдельно уравнения (3.2) для состояний правого подграфа

$$\begin{aligned}&(\mu+(\lambda_1+\lambda_2)(1-\delta_{i+j,k-1})+\alpha\lambda_2\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{i,0}))P_{i,j}^{(2)}=\lambda_2\delta_{i,0}\delta_{j,0}P_{\varnothing}+\\&+\lambda_1(1-\delta_{i,0})P_{i-1,j}^{(2)}+\lambda_2(1-\delta_{j,0})P_{i,j-1}^{(2)}+\mu(1-\delta_{i+j,k-1})P_{i,j+1}^{(2)}+\\&+\mu\delta_{i,0}(1-\delta_{j,k-1})P_{0,j+1}^{(1)}+\alpha\lambda_2\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{j,0})P_{i+1,j-1}^{(2)}\end{aligned} \qquad (3.14)$$

Вновь разделим обе части этих уравнений на μ:

$$((1+\rho)+(\alpha\rho_2-\rho)\delta_{i+j,k-1}-\alpha\rho_2\delta_{i+j,k-1}\delta_{i,0})P_{i,j}^{(2)}=\rho_2\delta_{i,0}\delta_{j,0}P_{\varnothing}+$$
$$+\rho_1(1-\delta_{i,0})P_{i-1,j}^{(2)}+\rho_2(1-\delta_{j,0})P_{i,j-1}^{(2)}+(1-\delta_{i+j,k-1})P_{i,j+1}^{(2)}+ \quad (3.15)$$
$$+\delta_{i,0}(1-\delta_{j,k-1})P_{0,j+1}^{(1)}+\alpha\rho_2\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{j,0})P_{i+1,j-1}^{(2)}$$

Далее домножим обе части на $u^i v^j$ и просуммируем по всем $i=\overline{0,k-1}$, $j=\overline{0,k-1-i}$ для получения уравнения для условной производящей функции, соответствующей приоритету второго типа требований:

$$(1+\rho)G^{(2)}(u,v)+(\alpha\rho_2-\rho)\Sigma_2-\alpha\rho_2P_{0,k-1}^{(2)}v^{k-1}=\rho_2P_{\varnothing}+$$
$$+\rho_1\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i}P_{i-1,j}^{(2)}u^iv^j+\rho_2\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1-i}P_{i,j-1}^{(2)}u^iv^j+\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i-2}P_{i,j+1}^{(2)}u^iv^j+ \quad (3.16)$$
$$+\sum_{j=0}^{k-2}P_{0,j+1}^{(1)}v^j+\alpha\rho_2\sum_{i=0}^{k-2}P_{i+1,k-i-2}^{(2)}u^iv^{k-1-i}$$

Последнее уравнение преобразуем точно так же, как уравнение (3.7). Для этого рассмотрим все его слагаемые по отдельности и используем выражение

$$\Sigma_2=\sum_{i=0}^{k-1}P_{i,k-1-i}^{(2)}u^iv^{k-1-i},$$

только теперь для вероятностей состояний правого подграфа рис. 3.1:

$$\rho_1\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i}P_{i-1,j}^{(2)}u^iv^j=\rho_1u\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-i-2}P_{i,j}^{(2)}u^iv^j=\rho_1u[G^{(2)}(u,v)-\Sigma_2] \quad (3.17)$$

$$\rho_2\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i}P_{i,j-1}^{(2)}u^iv^j=\rho_2v\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i-2}P_{i,j}^{(2)}u^iv^j=\rho_2v[G^{(2)}(u,v)-\Sigma_2] \quad (3.18)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i-2}P_{i,j+1}^{(2)}u^iv^j=\frac{1}{v}[\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1-i}P_{i,j}^{(2)}u^iv^j]=\frac{1}{v}[G^{(2)}(u,v)-G^{(2)}(u,0)] \quad (3.19)$$

$$\sum_{j=0}^{k-2}P_{0,j+1}^{(1)}v^j=\frac{1}{v}\sum_{j=1}^{k-1}P_{0,j}^{(1)}v^j=\frac{1}{v}[G^{(1)}(0,v)-P_{0,0}^{(1)}] \quad (3.20)$$

$$\alpha\rho_2\sum_{i=0}^{k-2}P_{i+1,k-i-2}^{(2)}u^iv^{k-1-i}=\alpha\rho_2\frac{v}{u}[\sum_{i=1}^{k-1}P_{i,k-1-i}^{(2)}u^iv^{k-1-i}]=\alpha\rho_2\frac{v}{u}[\Sigma_2-P_{0,k-1}^{(2)}v^{k-1}] \quad (3.21)$$

Подставим полученные выражения для слагаемых (3.17)-(3.21) в (3.16) и, приведя подобные члены, получим уравнение для условной производящей функции с верхним индексом n=2:

$$[(1+\rho)-(\rho_1 u+\rho_2 v)-\frac{1}{v}]G^{(2)}(u,v)=((\rho-\alpha\rho_2)-(\rho_1 u+\rho_2 v)+$$
$$+\alpha\rho_2\frac{v}{u})\Sigma_2+\frac{1}{v}[-G^{(2)}(u,0)+G^{(1)}(0,v)-P_{0,0}^{(1)}]+\alpha\rho_2 P_{0,k-1}^{(2)}v^{k-1}(1-\frac{v}{u})+\rho_2 P_{\varnothing} \quad (3.22)$$

3.1.3. Вычисление вероятностей состояний системы

Чтобы получить выражения для вероятностей состояний системы, будем параллельно проводить все преобразования одновременно как для левого, так и для правого подграфов. Избавимся от u и v в знаменателе уравнений для условных производящих функций. Для этого домножим обе части уравнений на произведение uv, что дает:

$$G^{(1)}(u,v)=(((\rho-\alpha\rho_1)v-(\rho_1 u+\rho_2 v)v+\alpha\rho_1 u)u\Sigma_1+\alpha\rho_1 P_{k-1,0}^{(1)}u^k(v-u)+$$
$$(vG^{(2)}(u,0)-vP_{0,0}^{(2)}-G^{(1)}(0,v))+\rho_1 P_{\varnothing}uv)/((1+\rho)u-(\rho_1 u+\rho_2 v)u-1)v \quad (3.23)$$

$$G^{(2)}(u,v)=(((\rho-\alpha\rho_2)u-(\rho_1 u+\rho_2 v)u+\alpha\rho_2 v)v\Sigma_2+G^{(1)}(0,v)u-uG^{(2)}(u,0)-$$
$$uP_{0,0}^{(1)}+\alpha\rho_2 P_{0,k-1}^{(2)}v^k(u-v)+\rho_2 uvP_{\varnothing})/((1+\rho)v-(\rho_1 u+\rho_2 v)v-1)u. \quad (3.24)$$

Далее рассмотрим знаменатели в выражениях для условных производящих функций (3.23) и (3.24):

$$(1+\rho-\rho_2 v)u-\rho_1 u^2-1=0=-\rho_1(u-u_1)(u-u_2), \quad (3.25)$$

$$-\rho_2 v^2+(1+\rho-\rho_1 u)v-1=0=-\rho_2(v-v_1)(v-v_2). \quad (3.26)$$

Воспользуемся условиями аналитичности производздящих функций. Производящая функция (3.3) должна быть полиномом степени k относительно u и v. Согласно (3.23) и (3.24) она имеет две пары полюсов по два полюса, являющихся корнями знаменателей (3.25) и (3.26). В случае левого подграфа для корней знаменателя (3.25) может быть применена теорема Виета, которая дает связь между корнями в виде (2.54). Для правого подграфа теорема применяется совершенно аналогично, но по аргументу v, так что

$$v_1+v_2=\frac{[\rho_2+\rho_1(1-u)+1]}{\rho_2}, v_1 v_2=1/\rho_2. \quad (3.27)$$

Условия аналитичности могут быть записаны в следующем виде:

$$\operatorname*{Res}_{u=u_j} G^{(1)}(u,v)=0,(j=\overline{1,2}), \tag{3.28}$$

$$\operatorname*{Res}_{v=v_j} G^{(2)}(u,v)=0,(j=\overline{1,2}). \tag{3.29}$$

Обратимся вначале к условиям (3.28) и с их помощью преобразуем уравнение для условной производящей функции (3.23). Для этого вычтем из правой части (3.23) числитель при $u=u_1$ и разделим на $(u-u_1)$:

$$\begin{gathered}((\rho-\alpha\rho_1)v-\rho_2 v^2)\sum_{i=0}^{k-1}P^{(1)}_{i,k-1-i}v^{k-1-i}R_{i+1}+(\alpha\rho_1-\rho_1 v)\sum_{i=0}^{k-1}P^{(1)}_{i,k-1-i}v^{k-1-i}R_{i+2}+\\+\alpha\rho_1 P^{(1)}_{k-1,0}vR_k-\alpha\rho_1 P^{(1)}_{k-1,0}R_{k+1}+v\sum_{i=0}^{k-1}P^{(2)}_{i,0}R_i+\rho_1 vP_{\varnothing}=-\rho_1(u-u_1)vG^{(1)}(u,v)\end{gathered} \tag{3.30}$$

где введено обозначение $R_i(u)=\dfrac{u^i-u_1^i}{u-u_1}$.

Далее подставим $u=u_2$ в выражение (3.30) и вычтем его же из (3.30). В результате получим

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{k-1}P^{(1)}_{i,k-1-i}v^{k-1-i}[\rho_1(v-\alpha)S_{i+2}+v(\rho_2(\alpha-1)+\rho_2(v-1))S_{i+2}]+\\+P^{(1)}_{k-1,0}\rho_1 v(S_{k+1}+(\varepsilon(v-1)-1)S_k)-v\sum_{i=0}^{k-1}P^{(2)}_{i,0}S_i=\rho_1 vG^{(1)}(u,v)\end{gathered} \tag{3.31}$$

где

$$S_i=\frac{1}{u-u_2}\left(\frac{u^i-u_1^i}{u-u_1}-\frac{u_2^i-u_1^i}{u_2-u_1}\right) \tag{3.32}$$

обозначает разделенную разность второго порядка для функции u^i.

Теперь приступим к следующему шагу разработанного метода. Найдем разложение (3.31) по степеням u. Для этого воспользуемся разложением (2.63) из предыдущей главы и запишем преобразования каждого слагаемого из (3.31) в отдельности:

$$\sum_{i=0}^{k-1}P^{(1)}_{i,k-1-i}v^{k-1-i}\rho_1(v-\alpha)\sum_{j=0}^{i}u^jQ_{i-j+1}=\sum_{j=0}^{k-2}u^j\sum_{i=j}^{k-2}P^{(1)}_{i,k-1-i}v^{k-1-i}\rho_1(v-\alpha)Q_{i-j+1} \tag{3.33}$$

$$\sum_{i=0}^{k-2} P_{i,k-1-i}^{(1)} v^{k-1-i} v(\rho_1(\alpha-1)+\rho_2(v-1)) \sum_{j=0}^{i-1} u^j Q_{i-j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{k-3} u^j \sum_{i=j+1}^{k-2} P_{i,k-1-i}^{(1)} v^{k-j} (\rho_1(\alpha-1)+\rho_2(v-1)) Q_{i-j} \tag{3.34}$$

$$P_{k-1,0}^{(1)} \rho_1 v(S_{k+1}-S_k)(1-\varepsilon(v-1)) = P_{k-1,0}^{(1)} \rho_1 v(\sum_{l=0}^{k-1} u^j Q_{k-j} - (1-\varepsilon(v-1)) \sum_{j=0}^{k-2} u^j Q_{k-1-j}) =$$
$$= P_{k-1,0}^{(1)} \rho_1 v(\sum_{j=0}^{k-1} u^j (Q_{k-j} - (1-\varepsilon(v-1)) Q_{k-1-j})) = P_{k-1,0}^{(1)} \rho_1 v \sum_{j=0}^{k-1} u^j \rho_1^{-1} (Q_{k-1-j} - Q_{k-j-2}) \tag{3.35}$$

$$-v \sum_{j=0}^{k-1} P_{j,0}^{(2)} S_j = -v \sum_{i=0}^{k-1} P_{i,0}^{(2)} \sum_{j=0}^{i-2} u^j Q_{i-j-1} = -v \sum_{j=0}^{k-3} u^j \sum_{i=j+2}^{k-1} P_{i,0}^{(2)} Q_{i-j-1}$$

В результате после деления на $\rho_1 v$ обеих частей будем иметь:

$$\sum_{j=0}^{k-2} u^j \sum_{i=j}^{k-2} P_{i,k-1-i}^{(1)} v^{k-1-i} (1-\alpha v^{-1}) Q_{i-j+1} + \sum_{j=0}^{k-3} u^j \sum_{i=j+1}^{k-2} P_{i,k-1-i}^{(1)} v^{k-1-i} ((\alpha-1)+\varepsilon(v-1)) Q_{i-j} +$$
$$+ P_{k-1,0}^{(1)} \sum_{j=0}^{k-1} u^j (\rho_1^{-1})(Q_{k-1-j} - Q_{k-j-2}) - \rho_1^{-1} \sum_{j=0}^{k-3} u^j \sum_{i=j+2}^{k-1} P_{i,0}^{(2)} Q_{i-j-1} = G^{(1)}(u,v) \tag{3.36}$$

Продолжим преобразование в соответствии с общей схемой, изложенной в главе 2.

$$G^{(1)}(u,v) = \sum_{j=0}^{k-3} u^j [P_{j,k-1-j}^{(1)} v^{k-1-j} (1-\alpha v^{-1}) + P_{k-1,0}^{(1)} (\rho_1^{-1})(Q_{k-1-j} - Q_{k-j-2}) +$$
$$+ \sum_{i=j+1}^{k-2} P_{i,k-1-i}^{(1)} v^{k-1-i} ((1-\alpha v^{-1}) Q_{i-j+1} + ((\alpha-1)+\varepsilon(v-1)) Q_{i-j}) - \tag{3.37}$$
$$- \rho_1^{-1} \sum_{i=j+2}^{k-1} P_{i,0}^{(2)} Q_{i-j-1}] + u^{k-2} (P_{k-2,1}^{(1)} v(1-\alpha v^{-1}) Q_1 + P_{k-1,0}^{(1)} \rho_1^{-1}) + u^{k-1} P_{k-1,0}^{(1)}$$

Разложение производящей функции по степеням u позволяет получить выражение для вероятностей числа приоритетных требований в накопителе системы. Для этого выделим множители при одинаковых степенях аргумента u и воспользуемся выражением для условной производящей функции левого подграфа в виде

$$G^{(1)}(u,v) = \sum_{i=0}^{k-1} q_i^{(1)}(v) u^i \,.$$

В итоге получим следующее выражение:

$$\begin{gathered}
q_j^{(1)}(v)=P_{j,k-1-j}^{(1)}v^{k-1-j}(1-\alpha v^{-1})+P_{k-1,0}^{(1)}(\rho_1^{-1})(Q_{k-1-j}-Q_{k-j-2})+\\
+\sum_{i=j+1}^{k-2}P_{i,k-1-i}^{(1)}v^{k-1-i}(Q_{i-j+1}-(1+\varepsilon(1-v))Q_{i-j}+\alpha Q_{i-j}-\alpha v^{-1}Q_{i-j+1})-\\
-\rho_1^{-1}\sum_{i=j+2}^{k-1}P_{i,0}^{(2)}Q_{i-j-1}=P_{j,k-1-j}^{(1)}v^{k-1-j}(1-\alpha v^{-1})+P_{k-1,0}^{(1)}(\rho_1^{-1})(Q_{k-1-j}-Q_{k-j-2})+\\
\sum_{i=j+1}^{k-2}P_{i,k-1-i}^{(1)}v^{k-1-i}((\rho_1^{-1})(Q_{i-j}-Q_{i-j-1})+\alpha(Q_{i-j}-v^{-1}Q_{i-j-1}))-\rho_1^{-1}\sum_{i=j+2}^{k-1}P_{i,0}^{(2)}Q_{i-j-1}
\end{gathered}\tag{3.38}$$

Для удобства работы с индексами заменим в $q_j^{(1)}(v)$ индекс j на $k-1-j$, что дает:

$$\begin{gathered}
q_{k-1-j}^{(1)}(v)=P_0^{(1)}(\rho_1^{-1})(Q_j-Q_{j-1})+(1-\alpha v^{-1})P_j^{(1)}v^j+\sum_{i=1}^{j-2}P_i^{(1)}v^i((\rho_1^{-1}+\alpha)Q_{j-i}-\\
-\rho_1^{-1}Q_{j-i-1})+(\rho_1^{-1}+\alpha)P_{j-1}^{(1)}v^{j-1}-\alpha\sum_{i=0}^{j-2}P_{i+1}^{(1)}v^iQ_{j-1}-(\rho_1^{-1})\sum_{i=0}^{j-2}P_{k-1-i,0}^{(2)}Q_{j-i-1}
\end{gathered}\tag{3.39}$$

Теперь вновь воспользуемся разложением полинома Q_{j-i} по полиномам Гегенбауэра (2.74) и разложим по степеням v каждое слагаемое в отдельности:

$$\begin{gathered}
P_0^{(1)}(\rho_1^{-1})(Q_j-Q_{j-1})=P_0^{(1)}\rho_1^{-1}\rho_1^{\frac{1-j}{2}}C_0^j\beta^{j-1}v^{j-1}+\\
+P_0^{(1)}(\rho_1^{-1})\sum_{i=0}^{j-2}\rho_1^{\frac{1-j}{2}}[C_{j-i-1}^{i+1}-\rho_1^{\frac{1}{2}}C_{j-i-2}^{S+1}]\beta^iv^i,
\end{gathered}\tag{3.40}$$

$$\begin{gathered}
\alpha\sum_{i=0}^{j-2}P_{i+1}^{(1)}v^iQ_{j-i}=\alpha\sum_{i=0}^{j-2}v^i\sum_{S=0}^{i}\rho_1^{\frac{1-j+S}{2}}P_{S+1}^{(1)}C_{j-1-i}^{i-S+1}\beta^{i-s}+\\
+\alpha v^{j-1}\sum_{S=0}^{j-2}\rho_1^{\frac{1-j+S}{2}}P_{S+1}^{(1)}C_0^{j-S}\beta^{j-S-1},
\end{gathered}\tag{3.41}$$

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{j-2}((\rho_1^{-1}+\alpha)Q_{j-i}-\rho_1^{-1}Q_{j-i-1})P_i^{(1)}v^i=v^{j-1}\sum_{i=1}^{j-2}((\rho_1^{-1}+\alpha)\rho_1^{\frac{1-j+i}{2}}C_0^{j-i}\beta^{j-i-1})P_i^{(1)}+\\
\sum_{i=1}^{j-2}v^i\sum_{S=1}^{i}P_S^{(1)}((\rho_1^{-1}+\alpha)\rho_1^{\frac{1-j+s}{2}}C_{j-i-1}^{i-S+1}-\rho_1^{-1}\rho_1^{\frac{1-j+S+1}{2}}C_{j-i-2}^{i-S+1})\beta^{i-S},
\end{gathered}\tag{3.42}$$

$$\begin{gathered}
(-\rho_1^{-1})\sum_{i=0}^{j-2}P_{k-1-i,0}^{(2)}Q_{j-i-1}=(\rho_1^{-1})\sum_{i=0}^{j-2}P_{k-1-i,0}^{(2)}\rho_1^{\frac{1-j+i+1}{2}}\sum_{S=0}^{j-i-2}C_{j-i-2-S}^{S+1}\beta^Sv^S=\\
=\sum_{S=0}^{j-2}v^S\beta^S\sum_{i=0}^{j-2-S}P_{k-1-i,0}^{(2)}\rho_1^{\frac{i-j}{2}}C_{j-i-2-S}^{S+1}.
\end{gathered}\tag{3.43}$$

После всех описанных преобразований получим:

$$
\begin{aligned}
&q^{(1)}_{k-j}(v) = P^{(1)}_0 \rho_1^{-1} \rho_1^{\frac{1-j}{2}} C_0^j \beta^{j-1} v^{j-1} + P^{(1)}_0 \rho_1^{-1} \sum_{i=0}^{j-2} \rho_1^{\frac{1-j}{2}} [C^{i+1}_{j-i-1} - \rho_1^{\frac{1}{2}} C^{i+1}_{j-i-2}] \beta^i v^i + \\
&+ v^{j-1} \sum_{S=1}^{j-2} ((\rho_1^{-1} + \alpha) \rho_1^{\frac{1-j+S}{2}} C_0^{j-S} \beta^{j-1-S}) P^{(1)}_S + (1 - \alpha v^{-1}) P^{(1)}_j v^j + \\
&+ \sum_{i=1}^{j-2} v^i \sum_{S=1}^{i} P^{(1)}_S ((\rho_1^{-1} + \alpha) \rho_1^{\frac{1-j+S}{2}} C^{i-S+1}_{j-i-1} - \rho_1^{-1} \rho_1^{\frac{1-j+S+1}{2}} C^{i-S+1}_{j-i-2}) \beta^{i-S} - \\
&- \alpha \sum_{i=0}^{j-2} v^i \sum_{S=0}^{i} \rho_1^{\frac{1-j+S}{2}} P^{(1)}_{S+1} C^{i-S+1}_{j-i-1} \beta^{i-S} - \alpha v^{j-1} \sum_{S=0}^{j-2} \rho_1^{\frac{1-j+S}{2}} P^{(1)}_{S+1} C_0^{j-S} \beta^{j-1-S} - \\
&- \sum_{i=0}^{j-2} v^i \beta^i \sum_{S=0}^{j-2-i} P^{(2)}_{k-1-S,0} \rho_1^{\frac{S-j}{2}} C^{i+1}_{j-S-i-2} + (\rho_1^{-1} + \alpha) P^{(1)}_{j-1} v^{j-1}
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Выпишем здесь отдельно коэффициенты при различных степенях v^i:

$$
\begin{aligned}
&-\alpha P^{(1)}_j + (\rho_1^{-1} + \alpha) P^{(1)}_{j-1} + P^{(1)}_0 \rho_1^{-1} \rho_1^{\frac{1-j}{2}} C_0^j \beta^{j-1} + \\
&+ \sum_{S=1}^{j-2} ((\rho_1^{-1} + \alpha) \rho_1^{\frac{1-j+S}{2}} C_0^{j-S} \beta^{j-1-S}) P^{(1)}_S - \alpha \sum_{S=0}^{j-2} \rho_1^{\frac{1-j+S}{2}} P^{(1)}_{S+1} C_0^{j-S} \beta^{j-1-S}, (i = j-1), \\
&\sum_{S=1}^{i} P^{(1)}_S ((\rho_1^{-1} + \alpha) \rho_1^{\frac{1-j+S}{2}} C^{i-S+1}_{j-i-1} - \rho_1^{-1} \rho_1^{\frac{1-j+S+1}{2}} C^{i-S+1}_{j-2-i}) \beta^{i-S} - \\
&- \beta^i \sum_{S=0}^{j-i-2} P^{(2)}_{k-1-S,0} \rho_1^{\frac{S-j}{2}} C^{i+1}_{j-S-i-2} - \alpha \sum_{S=0}^{i} \rho_1^{\frac{1-j+S}{2}} P^{(1)}_{S+1} C^{i-S+1}_{j-1-i} \beta^{i-S} + \\
&+ P^{(1)}_0 \rho_1^{-1} \rho_1^{\frac{1-j}{2}} [C^{i+1}_{j-i-1} - \rho_1^{\frac{1}{2}} C^{i+2}_{j-i-2}] \beta^i, (i = \overline{1, j-2}), \\
&P^{(1)}_0 \rho_1^{-1} \rho_1^{\frac{1-j}{2}} [C^1_{j-1} - \rho_1^{\frac{1}{2}} C^1_{j-2}] - \alpha \rho_1^{\frac{1-j}{2}} P^{(1)}_1 C^1_{j-1} - \sum_{S=0}^{j-2} P^{(2)}_{k-1-S,0} \rho_1^{\frac{S-j}{2}} C^1_{j-S-2}, (i = 0).
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

Итоговое выражение для $P^{(1)}_{k-1-j,i}$ таково:

$$
\begin{aligned}
P^{(1)}_{k-1-j,i} &= \sum_{S=1}^{i} P^{(1)}_S ((\rho_1^{-1} + \alpha) \rho_1^{\frac{1-j+S}{2}} C^{i-S+1}_{j-i-1} - \rho_1^{-1} \rho_1^{\frac{2-j+S}{2}} C^{i-S+1}_{j-i-2}) \beta^{i-S} - \\
&- \alpha \sum_{S=0}^{i} \rho_1^{\frac{1-j+S}{2}} P^{(1)}_{S+1} C^{i-S+1}_{j-i-1} \beta^{i-S} - \beta^i \sum_{S=0}^{j-2-i} P^{(2)}_{k-1-S,0} \rho_1^{\frac{S-j}{2}} C^{i+1}_{j-S-i-2} + \\
&+ P^{(1)}_0 \rho_1^{-1} \rho_1^{\frac{1-j}{2}} [C^{i+1}_{j-i-1} - \rho_1^{\frac{1}{2}} C^{i+1}_{j-i-2}] \beta^i
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

Преобразование уравнения для условной производящей функции, соответствующей правому подграфу, осуществляется в той же последовательности. Вначале воспользуемся условием аналитичности для производящей функции, удовлетворяющей уравнению (3.24) в виде

$$\operatorname*{Res}_{v=v_1} G^{(2)}(u,v)=0 \tag{3.47}$$

Запишем его в явном виде

$$\begin{gathered}((\rho-\alpha\rho_2)u-(\rho_1 u+\rho_2 v_1)u+\alpha\rho_2 v_1)v_1\Sigma_2\big|_{v=v_1}+G^{(1)}(0,v_1)u- \\ -uG^{(2)}(u,0)-uP_{0,0}^{(1)}+\alpha\rho_2 P_{0,k-1}^{(2)}v_1^k(u-v_1)+\rho_2 u v_1 P_{\varnothing}=0.\end{gathered} \tag{3.48}$$

Вычтем (3.48) из числителя (3.24) и разделим на $(v-v_1)$:

$$\begin{gathered}-\rho_2 u(v-v_2)G^{(2)}(u,v)=\sum_{i=0}^{k-1}P_{k-1-i,i}^{(2)}u^{k-1-i}[(\rho_1 u(1-u)+u\rho_2(1-\alpha))R_{i+1}+ \\ +\rho_2(\alpha-u)R_{i+2}]+u\sum_{j=0}^{k-1}P_{0,j}^{(1)}R_j+\alpha\rho_2 P_{0,k-1}^{(2)}(uR_k-R_{k+1})+\rho_2 uP_{\varnothing}\end{gathered} \tag{3.49}$$

где

$$R_i(v)=\frac{v^i-v_1^i}{v-v_1}. \tag{3.50}$$

Воспользуемся вторым условием аналитичности и вычтем его из правой части выражения (3.49). Получим

$$\begin{gathered}\rho_2 uG^{(2)}(u,v)=\sum_{i=0}^{k-2}P_{k-1-i,i}^{(2)}u^{k-1-i}\left[u(\rho_1(u-1)+\rho_2(\alpha-1))S_{i+2}\right]- \\ -u\sum_{i=0}^{k-1}P_{0,i}^{(1)}S_i-u\sum_{i=0}^{k-1}P_{0,i}^{(1)}S_i+P_{0,k-1}^{(2)}(\alpha\rho_2(S_{k+1}-uS_k)+ \\ +(u(\rho_1(u-1)+\rho_2(\alpha-1))S_k+\rho_2(u-\alpha)S_{k+1})\end{gathered} \tag{3.51}$$

где $\varepsilon=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$, а $S_i=\sum_{j=0}^{i}v^jQ_{i+1-j}$ при $Q_i=R_i(v_2)$, а $R_i(v)$ взято из (3.50).

Подставим разложение S_i по степеням v в каждое из слагаемых в отдельности. Тогда после подстановки выражения для S_i в (3.51) и деления обеих частей на $(\rho_2 u)$ получим следующее разложение:

$$G^{(2)}(u,v)=v^{k-1}P^{(2)}_{0,k-1}+v^{k-2}(P^{(2)}_{1,k-2}u(1-\alpha u^{-1})Q_1+P^{(2)}_{0,k-1}(\rho_2^{-1})(Q_1-Q_0))+$$
$$+\sum_{i=j+1}^{k-2}[P^{(2)}_{k-1-i,i}u^{k-1-i}((1-\alpha u^{-1})Q_{i-j+1}+(\varepsilon(u-1)+(\alpha-1))Q_{i-j})-\rho_2^{-1}\sum_{i=j+2}^{k-1}P^{(1)}_{0,i}Q_{i-j-1}] \quad (3.52)$$

Представим производящую функцию состояний правого подграфа в виде полинома, разложенного по степеням v,

$$G^{(2)}(u,v)=\sum_{i=0}^{k-1}q_i^{(2)}(u)v^i \ .$$

Тогда, используя указанное представление, и, производя замену индекса аналогично (3.39), можно записать вероятности числа приоритетных требований в накопителе системы для правого подграфа в виде:

$$q^{(2)}_{k-1-j}(u)=P^{(2)}_{j,k-1-j}u^j(1-\alpha u^{-1})+P^{(2)}_{0,k-1}(\rho_2^{-1})(Q_j-Q_{j-1})-\rho_2^{-1}\sum_{i=k-j+1}^{k-1}P^{(1)}_{0,i}Q_{i-k+j}+$$
$$+\sum_{i=k-j}^{k-2}P^{(2)}_{k-1-i,i}u^{k-1-i}((\rho_2^{-1})(Q_{i-k+1+j}-Q_{i-k+j})+\alpha(Q_{i-k+1+j}-u^{-1}Q_{i-k+j+2})) \quad (3.53)$$

Отличительной особенностью преобразований для правого подграфа является видоизмененное разложение разделенных разностей через полиномы Гегенбауэра по степеням v, которое получается аналогично разложению (3.46), только для корней v_1 и v_2.

Для его получения представим корни знаменателя (3.26) в комплексном виде через их модуль и аргумент $v_1=a_1e^{i\varphi_1}, v_2=a_2e^{i\varphi_2}$. Преобразуем их к виду

$$v_1=\frac{e^{i\varphi}}{\rho_2^{1/2}},\ v_2=\frac{e^{-i\varphi}}{\rho_2^{1/2}}, \quad (3.54)$$

откуда получим выражения для аргумента полиномов Чебышева второго рода

$$\cos\varphi=\frac{(1+\rho)-\rho_1 u}{2\rho_2^{1/2}}=t(u). \quad (3.55)$$

После подстановки полученного выражения для аргумента, приходим к разложению вида

$$Q_j=\rho_2^{\frac{1-j}{2}}U_{j-1}(t(v))=\rho_2^{\frac{1-j}{2}}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{U^{(i)}_{j-1}(t_0^{(2)})}{i!}(-1)^i\frac{(\rho_1 u)^i}{(2\rho_2^{1/2})^i}=\rho_2^{\frac{1-j}{2}}\sum_{i=0}^{j-1}C^{i+1}_{j-1-i}(t_0^{(2)})\beta_2^i u^i, \quad (3.56)$$

где $\beta_2 = -\dfrac{\rho_1}{\rho_2^{1/2}}$ $t_0^{(2)} = \dfrac{1+\rho}{2\rho_2^{1/2}}$.

Далее разложим каждое слагаемое по степеням u, и после элементарных преобразований будем иметь:

$$
\begin{aligned}
q_{k-1-j}^{(2)}(u) &= P_0^{(2)}\rho_2^{\frac{-1-j}{2}}\Big(\sum_{i=0}^{j-2}\beta_2^i u^i (C_{j-1-i}^{i+1} - \rho_2^{1/2}C_{j-2-i}^{i+1})\Big) + (\rho_2^{-1}+\alpha)P_{j-1}^{(2)}u^{j-1} + \\
&+u^{j-1}\sum_{i=1}^{j-2}((\rho_2^{-1}+\alpha)\rho_2^{\frac{1-j+i}{2}}C_0^{j-i}\beta_2^{j-i-1})P_i^{(2)} + P_j^{(2)}u^j(1-\alpha u^{-1}) + \\
&+\sum_{i=1}^{j-2}u^i\sum_{S=1}^{i}P_S^{(2)}\beta_2^{i-S}((\rho_2^{-1}+\alpha)C_{j-1-i}^{i-S+1} - \rho_2^{-1/2}C_{j-2-i}^{i-S+1})\rho_2^{\frac{1-j+S}{2}} - \\
&-\alpha\sum_{i=0}^{j-2}u^i\sum_{S=0}^{i}\rho_2^{\frac{1-j+S}{2}}P_{S+1}^{(2)}C_{j-1-i}^{i-S+1}\beta_2^{i-S} - \alpha u^{j-1}\sum_{S=0}^{j-2}\rho_2^{\frac{1-j+S}{2}}P_{S+1}^{(2)}C_0^{j-S}\beta_2^{j-S-1} - \\
&-\sum_{i=0}^{j-2}u^i\beta_2^i\sum_{S=0}^{j-i-2}P_{0,k-1-S}^{(1)}\rho_2^{\frac{S-j}{2}}C_{j-i-2-S}^{i+1} + P_0^{(2)}\rho_2^{\frac{-j-1}{2}}C_0^j\beta_2^{j-1}u^{j-1}
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

Теперь выделим отдельно коэффициенты при всех степенях u^i от 0 до j :

$$
\begin{aligned}
&(\rho_2^{-1}+\alpha)P_{j-1}^{(2)} + \sum_{i=1}^{j-2}((\rho_2^{-1}+\alpha)\rho_2^{\frac{1-j+i}{2}}C_0^{j-i}\beta_2^{j-i-1})P_i^{(2)} - \\
&\alpha\sum_{S=0}^{j-2}\rho_2^{\frac{1-j+S}{2}}P_{S+1}^{(2)}C_0^{j-S}\beta_2^{j-S-1} - \alpha P_j^{(2)} + P_0^{(2)}\rho_2^{\frac{-1-j}{2}}C_0^j\beta_2^{j-1}, (i=j-1), \\
&P_0^{(2)}\rho_2^{\frac{-1-j}{2}}\beta_2^i(C_{j-1-i}^{i+1} - \rho_2^{1/2}C_{j-2-i}^{i+1}) + \sum_{S=1}^{i}P_0^{(2)}\beta_2^{i-S}((\rho_2^{1-1}+\alpha)C_{j-1-i}^{i-S+1} - \rho_2^{-1/2}C_{j-2-i}^{i-S+1})\rho_2^{\frac{1-j+S}{2}} - \\
&-\alpha\sum_{S=0}^{i}\rho_2^{\frac{1-j+S}{2}}P_{S+1}^{(2)}C_{j-1-i}^{i-S+1}\beta_2^{i-S} - \beta_2^i\sum_{S=0}^{j-i-2}P_{0,k-1-S}^{(2)}\rho_2^{\frac{S-j}{2}}C_{j-i-2-S}^{i+1}, (i=\overline{1, j-2}), \\
&P_0^{(2)}\rho_2^{\frac{-1-j}{2}}(C_{j-1}^1 - \rho_2^{1/2}C_{j-2}^1) - \alpha\rho_2^{\frac{1-j}{2}}P_1^{(2)}C_{j-1}^1 - \sum_{S=0}^{j-2}P_{0,k-1-S}^{(1)}\rho_2^{\frac{S-j}{2}}C_{j-2-S}^1, (i=0).
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Итоговое выражение для $P_{i,k-1-j}^{(2)}$ при $i=\overline{0, j-1}$ и $j=\overline{0,k-1}$ таково:

$$
\begin{aligned}
P_{i,k-1-j}^{(2)} &= P_0^{(2)}\rho_2^{\frac{-1-j}{2}}\left[C_{j-i-1}^{i+1} - \rho_2^{1/2}C_{j-2-i}^{i+1}\right]\beta_2^i + \sum_{S=1}^{i}P_S^{(2)}\beta_2^{i-S}((\rho_2^{-1}+\alpha)C_{j-1-i}^{i-S+1} - \\
&-\rho_2^{-1/2}C_{j-2-i}^{i-S+1})\rho_2^{\frac{1-j+S}{2}} - \alpha\sum_{S=0}^{i}\rho_2^{\frac{1-j+S}{2}}P_{S+1}^{(2)}C_{j-1-i}^{i-S+1}\beta_2^{i-S} - \beta_2^i\sum_{S=0}^{j-i-2}P_{0,k-1-S}^{(1)}\rho_2^{\frac{S-j}{2}}C_{j-i-2-S}^{i+1}
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

Результаты всех приведенных выше преобразований позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Вероятности произвольных состояний СМО* $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_3^1$ *выражаются через вероятности «диагональных» состояний* $p_i^{(1)} = P_{k-1-i,i}^{(1)}, p_i^{(2)} = P_{i,k-1-i}^{(2)}$ *и вероятности «граничных» состояний* $s_i^{(1)} = P_{0,i}^{(1)}, s_i^{(2)} = P_{i,0}^{(2)}$ *по формулам*

$$\begin{aligned} P_{k-1-j,i}^{(1)} = &\sum_{S=1}^{i} p_S^{(1)}((\rho_1^{-1}+\alpha)\rho_1^{(1-j+S)/2} c_{j-i-1}^{i-S+1}(t_0^{(1)}) - \rho_1^{(-j+S)/2} c_{j-i-2}^{i-S+1}(t_0^{(1)}))\beta_1^{i-S} \\ &-\alpha\sum_{S=0}^{i}\rho_1^{(1-j+S)/2} p_{S+1}^{(1)} c_{j-i-1}^{i-S+1}(t_0^{(1)})\beta_1^{i-S} - \beta_1^i \sum_{S=0}^{j-2-i} s_{k-1-S}^{(2)} \rho_1^{(S-j)/2} c_{j-S-i-2}^{i+1}(t_0^{(1)}) + \\ &+ p_0^{(1)}\rho_1^{(-1-j)/2}[c_{j-i-1}^{i+1}(t_0^{(1)}) - \rho_1^{1/2} c_{j-i-2}^{i+1}(t_0^{(1)})]\beta_1^i, \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} P_{i,k-j}^{(2)} = &\sum_{S=1}^{i} p_S^{(2)}((\rho_2^{-1}+\alpha)\rho_2^{(1-j+S)/2} c_{j-i-1}^{i-S+1}(t_0^{(2)}) - \rho_2^{(-j+S)/2} c_{j-i-2}^{i-S+1}(t_0^{(2)}))\beta_2^{i-S} - \\ &-\alpha\sum_{S=0}^{i}\rho_2^{(1-j+S)/2} p_{S+1}^{(2)} c_{j-i-1}^{i-S+1}(t_0^{(2)})\beta_2^{i-S} - \beta_2^i \sum_{S=0}^{j-2-i} s_{k-S}^{(1)} \rho_2^{(S-j)/2} c_{j-S-i-2}^{i+1}(t_0^{(2)}) + \\ &p_0^{(2)}\rho_2^{(-1-j)/2}[c_{j-i-1}^{i+1}(t_0^{(2)}) - \rho_2^{1/2} c_{j-i-2}^{i+1}(t_0^{(2)})]\beta_2^i, \end{aligned} \tag{3.61}$$

где $\beta_1 = -\rho_2\rho_1^{-1/2}, \beta_2 = -\rho_1\rho_2^{-1/2}, t_0^{(1)} = (1+\rho_1+\rho_2)\rho_1^{-1/2}/2, t_0^{(2)} = (1+\rho_1+\rho_2)\rho_2^{-1/2}$.

3.1.4. Построение укороченной системы уравнений

В п. 3.1.3 было показано, что вероятности всех состояний рассматриваемой системы класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_3^1$ с чередующимся приоритетом могут быть выражения только через «диагональные» состояния

$$p_i^{(1)} = P_{k-1-i,i}^{(1)}, p_i^{(2)} = P_{i,k-1-i}^{(2)} \tag{3.62}$$

и вероятности «граничных» состояний

$$s_i^{(1)} = P_{0,i}^{(1)}, s_i^{(2)} = P_{i,0}^{(2)}. \tag{3.63}$$

Таким образом, для нахождения всех состояний системы достаточно нахождения только $4k$-2 неизвестных. Составим «укороченную» систему линейных уравнений для рассматриваемой системы. Для этого потребуется найти $4k$-2 линейно независимых уравнений, которые будут содержать только необходимые вероятности (3.62) и (3.63).

Для этого воспользуемся связью левого и правого подграфов и запишем, используя выражения, полученные в теореме 3.2 для «граничных» вероятностей. Таким образом получим выражения для «граничных» состояний одного подграфа, выраженные через «диагональные» вероятности этого же подграфа и «граничные» состояния другого подграфа. Таким образом получим $2k$-2 уравнений, которые описывают связь только между неизвестными, входящими в укороченную систему.

Для получения второго набора уравнений преобразуем (3.23) так, чтобы выделить все слагаемые с множителем $1/u$.

$$\begin{gathered}[((1+\rho)-(\rho_1 u+\rho_2 v))G^{(1)}(u,v)-((\rho-\alpha\rho_1)-(\rho_1 u+\rho_1 v)+\alpha\rho_1\frac{u}{v})\Sigma_1 \\ -\alpha\rho_1 P^{(1)}_{k-1,0}u^{k-1}(1-\frac{u}{v})-\rho_1 P_{\varnothing}]+\frac{1}{u}[G^{(1)}(0,v)+P^{(2)}_{0,0}-G^{(2)}(u,0)-G^{(1)}(u,v)]=0\end{gathered} \tag{3.64}$$

Далее рассмотрим предел при $u\to\infty$ обеих частей уравнения (3.64)

$$\begin{gathered}\lim_{u\to 0}[((1+\rho)-(\rho_1 u+\rho_2 v))G^{(1)}(u,v)-((\rho-\alpha\rho_1)- \\ -(\rho_1 u+\rho_1 v)+\alpha\rho_1\frac{u}{v})\Sigma_1-\alpha\rho_1 P^{(1)}_{k-1,0}u^{k-1}(1-\frac{u}{v})-\rho_1 P_{\varnothing}]= \\ =((1+\rho)-\rho_2 v)G^{(1)}(0,v)-((\rho-\alpha\rho_1)-\rho_2 v)P^{(1)}_{0,k-1}v^{k-1}-\rho_1 P_{\varnothing}\end{gathered} \tag{3.65}$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}[G^{(1)}(0,v)+P^{(2)}_{0,0}-G^{(2)}(u,0)-G^{(1)}(u,v)]=-P^{(2)}_{1,0}-\sum_{j=0}^{k-2}P^{(1)}_{1,j}v^j \tag{3.66}$$

Найденные пределы (3.65) и (3.66) позволяют после их подстановки в (3.64) получить разложение по степеням v для вычета условной производящей функции левого подграфа при v=0, который тоже должен быть равным нулю.

$$((1+\rho)-\rho_2 v)\sum_{j=0}^{k-1}P^{(1)}_{0,j}v^j-((\rho-\alpha\rho_1)-\rho_2 v)P^{(1)}_{0,k-1}v^{k-1}-\rho_1 P_{\varnothing}-P^{(2)}_{1,0}-\sum_{j=0}^{k-2}P^{(1)}_{1,j}v^j=0. \tag{3.67}$$

Рассмотрим коэффициенты при степенях v^j:

$$\begin{gathered}-\rho_2 P^{(1)}_{0,k-1}+\rho_2 P^{(1)}_{0,k-1}=0,(j=k) \\ (1+\alpha\rho_1)P^{(1)}_{0,k-1}-\rho_2 P^{(1)}_{0,k-2}=0,(j=k-1)\end{gathered} \tag{3.68}$$

$$(1+\rho)P_{0,j}^{(1)}-\rho_2 P_{0,j-1}^{(1)}-P_{1,j}^{(1)}=0,(j=\overline{1,k-2})$$

$$(1+\rho)P_{0,0}^{(1)}-\rho_1 P_{\varnothing}-P_{1,0}^{(2)}-P_{1,0}^{(1)}=0,(j=0)$$

Подставив в эти уравнения выражения для $P_{1,j}^{(1)}$ через набор неизвестных (3.62) и (3.63), получим:

$$\begin{aligned}&P_{1,j}^{(1)}=P_{k-1-(k-2),j}^{(1)}=P_0^{(1)}\rho_1^{\frac{(1-k)}{2}}[C_{k-3-j}^{j+1}-\rho_1^{1/2}C_{k-4-j}^{j+1}]\beta^j+\\&\sum_{S=1}^{j}P_S^{(1)}((\rho_1^{-1}+\alpha)\rho_1^{\frac{(3-k+S)}{2}}C_{k-j-3}^{j-S+1}-\rho_1^{\frac{(2-k+S)}{2}}C_{k-j-4}^{j-S+1})\beta^{j-S}-\\&-\alpha\sum_{S=0}^{j}\rho_1^{\frac{(3-k+S)}{2}}P_{S+1}^{(1)}C_{k-j-3}^{j-S+1}\beta^{j-S}-\beta^j\sum_{S=0}^{k-j-4}P_{k-2-S,0}^{(2)}\rho_1^{\frac{(S-k+2)}{2}}C_{k-S-j-4}^{j+1},\end{aligned}\qquad(3.69)$$

$$P_{1,0}^{(1)}=P_0^{(1)}\rho_1^{\frac{(1-k)}{2}}[C_{k-3}^{1}-\rho_1^{1/2}C_{k-4}^{1}]-\alpha\rho_1^{\frac{(3-k)}{2}}P_1^{(1)}C_{k-3}^{1}-\sum_{S=0}^{k-4}P_{k-1-S,0}^{(2)}\rho_1^{\frac{S-k+2}{2}}C_{k-S-4}^{1}\qquad(3.70)$$

Поскольку левая часть выражения (3.67) должна быть равной нулю при любом значении аргумента v, то это означает, что должны быть равны нулю все коэффициенты ее разложения по степеням v. Выпишем коэффициенты при соответствующих степенях v^j и приравняем их всех к нулю:

$$(1+\alpha\rho_1)P_{0,k-1}^{(1)}-\rho_2 P_{0,k-2}^{(1)}=0,(j=k-1),$$

$$\begin{aligned}&(1+\rho)P_{0,j}^{(1)}-\rho_2 P_{0,j-1}^{(1)}-P_0^{(1)}\rho_1^{-\frac{k-1}{2}}[C_{k-3-j}^{j+1}-\rho_1^{1/2}C_{k-4-j}^{j+1}]\beta^j-\\&-\sum_{S=1}^{j}P_S^{(1)}((\rho_1^{-1}+\alpha)\rho_1^{\frac{(3-k+S)}{2}}C_{k-j-3}^{j-S+1}-\rho_1^{\frac{(2-k+S)}{2}}C_{k-j-4}^{j-S+1})\beta^{j-S}+\\&+\alpha\sum_{S=0}^{j}\rho_1^{\frac{3-k+S}{2}}P_{S+1}^{(1)}C_{k-j-3}^{j-S+1}\beta^{j-S}+\beta^j\sum_{S=0}^{k-j-4}P_{k-1-S,0}^{(2)}\rho_1^{\frac{(S-k+2)}{2}}C_{k-S-j-4}^{j+1}=0,(j=\overline{1,k-2}),\end{aligned}\qquad(3.71)$$

$$\begin{aligned}&(1+(\rho-\frac{\rho_1}{\rho}))P_{0,0}^{(1)}-\frac{\rho_1}{\rho}P_{0,0}^{(2)}-P_{1,0}^{(2)}-P_0^{(1)}\rho_1^{\frac{(-k+1)}{2}}[C_{k-3}^{1}-\rho_1^{1/2}C_{k-4}^{1}]+\\&+\alpha\rho_1^{\frac{(3-k)}{2}}P_1^{(1)}C_{k-3}^{(1)}+\sum_{S=0}^{k-4}P_{k-4,0}^{(2)}\rho_1^{\frac{(S-k+2)}{2}}C_{k-S-4}^{1}=0,(j=0).\end{aligned}$$

Полученный набор уравнений (3.71) включает k уравнений, содержащих в качестве неизвестных только вероятности (3.62) и (3.63). Для построения «укороченной» системы линейных уравнений остается получить еще k уравнений.

Подобным же образом строится набор уравнений, вытекающих из условия аналитичности условной производящей функции, относящейся к правому подграфу. Для его получения используется выражение (3.61) при значениях индексов $(i,1)$, применяя которое находим коэффициенты при u^i:

$$(1+\alpha\rho_2)P_{k-1,0}^{(2)}-\rho_1 P_{k-2,0}^{(2)}=0,(i=k-1)$$

$$\begin{gathered}(1+\rho)P_{i,0}^{(2)}-\rho_1 P_{i-1,0}^{(2)}-P_0^{(2)}\rho_2^{-{(k-1)}/{2}}[C_{k-3-i}^{i+1}-\rho_2^{1/2}C_{k-i-4}^{i+1}]\beta^i-\\ -\sum_{S=1}^{i}P_S^{(2)}\beta^{i-S}[(\rho_2^{-1}+\alpha)C_{k-i-3}^{i-S+1}-\rho_2^{-1/2}C_{k-i-4}^{i-S+1}]\rho_2^{\frac{(3-k+S)}{2}}+\\ +\alpha\sum_{S=0}^{i}\rho_2^{\frac{(3-k+S)}{2}}P_{S+1}^{(2)}C_{k-3-i}^{i-S+1}\beta^{i-S}+\beta^i\sum_{S=0}^{k-i-4}P_{0,k-1-S}^{(1)}\rho_2^{\frac{(S-k+2)}{2}}C_{k-i-S+2}^{i+1}=0,(i=\overline{1,k-2})\end{gathered}\qquad(3.72)$$

$$\begin{gathered}(1-\frac{\rho_2}{\rho}+\rho)P_{0,0}^{(2)}-\frac{\rho_2}{\rho}P_{0,0}^{(1)}-P_{0,1}^{(1)}-P_0^{(2)}\rho_2^{-{(k-1)}/{2}}[C_{k-3}^{1}-\rho_2^{1/2}C_{k-4}^{1}]+\\ +\alpha\rho_2^{\frac{(3-k)}{2}}P_1^{(2)}C_{k-3}^{1}+\sum_{S=0}^{k-4}P_{0,k-1-S}^{(1)}\rho_2^{\frac{(S-k+2)}{2}}C_{k-4-S}^{1}=0,(i=0)\end{gathered}$$

Набор уравнений (3.72) является последним искомым набором линейных уравнений, который завершает формирование «укороченной» системы, состоящей из $4k$-2 уравнений и имеющей такое же число неизвестных. Решение этой системы позволяет найти неизвестные вероятности состояния системы класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_3^1$ в «опорных» состояниях, а с их помощью найти значения вероятностей пребывания системы и во всех остальных состояниях.

Как отмечалось в начале данного раздела, чередующийся приоритет обеспечивает минимизацию числа переключений канала обслуживания с одного типа требований на другой. Это позволяет применять такой приоритет для управления приоритетными СМО с ориентацией [103]. Под ориентацией здесь понимается необходимость затратить определенное время на переключение канала обслуживания с одного типа требований на другой. В нашей модели время на ориентацию не учитывается, но очевидно, что предлагаемая дисциплина обслуживания позволяет его минимизировать. Введение вероятностного выталкивающего механизма, который также является чередующимся, дополнительно улучшает показатели подобной СМО.

Далее перейдем к изучению второго вида неклассических приоритетов, выделенного Б.В. Гнеденко, а именно, вероятностного приоритета.

3.2. Система с вероятностным приоритетом

Рассмотрим систему с вероятностным приоритетом, в которой перед каждой новой загрузкой обслуживающего прибора происходит случайный розыгрыш номера входящего потока требований, из которого будет взято очередное требование на обслуживание. Размеченный граф состояний для такой системы представлен на рис. 3.2.

3.2.1. Построение фазового пространства и СУР

Фазовое пространство для марковского процесса в этой системе можно ввести следующим образом

$$\Omega = \{O\} \cup \left\{(n_1, n_2) : n_1 = \overline{0, k-1}, n_2 = \overline{0, k-i-n_1}\right\}. \qquad (3.73)$$

Здесь состояние $\{O\}$ означает полный простой системы, когда она совершенно свободна от требований, а остальные состояния (n_1, n_2) соответствуют ситуации, когда в накопителе имеется n_1 требований первого и n_2 требований второго типа, причем общее счило требований в очереди не превосходит емкости накопителя $(k-1)$. Подчеркнем, что состояние $\{O\}$ и состояние $\{(0,0)\}$ не совпадают: в первом случае канал обслуживания занят, а во втором он свободен. Подчеркнем также, что при введении фазового пространства по правилу (3.73) тип требования, находящегося на обслуживании, мы не отслеживаем, а наблюдаем только за длиной очередей каждого типа требований.

В соответствии с выбранным фазовым пространством (3.73) определим вероятности состояния накопителя

$$P_{n_1 n_2}(t) = P\left\{N_1(t) = n, N_2(t) = n_2\right\}, \tag{3.74}$$

где $N_i(t)$ обозначает число требований i-ого типа в накопителе в момент t. Ко всем этим вероятностям при всевозможных неотрицательных n_1 и n_2, удовлетворяющих условию $n_1 + n_2 \le k-1$, следует добавить еще одну вероятность $P_O(t)$ полного простоя системы. При этом под вероятностью $P_{0,0}(t)$ понимается вероятность того, что накопитель свободен, но канал обслуживания занят каким-либо требованием, неважно какого типа. Так введенное множество состояний (3.73) является полным, а для соответствующих вероятностей при любом $t \ge 0$ выполняется условие нормировки

$$P_O(t) + \sum_{n_1=0}^{k-1} \sum_{n_2=0}^{k-1-n_1} P_{n_1,n_2}(t) = 1. \tag{3.75}$$

Как уже отмечалось, в соответствии с теоремой Маркова [7] процесс в данной системе будет эргодическим. Действительно, все интенсивности перехода постоянны, так что процесс однороден. Все состояния графа сообщаются друг с другом и образуют один-единственный класс сообщающихся состояний. Следовательно, процесс является приводимым. Число состояний конечно. Все эти свойства гарантируют эргодичность и существование финальных вероятностей

$$P_O = \lim_{t\to\infty} P_O(t), P_{n_1,n_2} = \lim_{t\to\infty} P_{n_1,n_2}(t), (n_1 = \overline{0,k-1}, n_2 = \overline{0,k-1-n_1}.) \tag{3.76}$$

В данной системе действует вероятностный приоритет. В качестве основного параметра этой дисциплины берется величина æ$_1$ - вероятности выбора на обслуживание требования из первого потока. Также, вводится вероятность выбора требования на обслуживание из второго потока как æ$_2$. Причем, сумма этих вероятностей равна единице, поскольку в рассматриваемой системе возможны только эти два случая в момент поступления нового требования на обслуживающее устройство.

Размеченный граф состояний данной СМО изображен на рис. 3.2. На основании размеченного графа состояний записывается система уравнений

Колмогорова относительно финальных вероятностей (3.76). На графе состояний рис. 3.1 сосотяние $\{O\}$ сообщается с одним единственным состоянием $\{(0,0)\}$. Поэтому уравнение Колмогорова для состояния $\{O\}$ будет включать лишь две вероятности

$$-(\lambda_1+\lambda_2)P_O+\mu P_{0,0}=0. \qquad (3.77)$$

Вероятность P_O войдет также в уравнение для состояния $(0,0)$

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\mu)P_{0,0}+(\lambda_1+\lambda_2)P_0+\mu(P_{0,1}+P_{1,0})=0\ . \qquad (3.78)$$

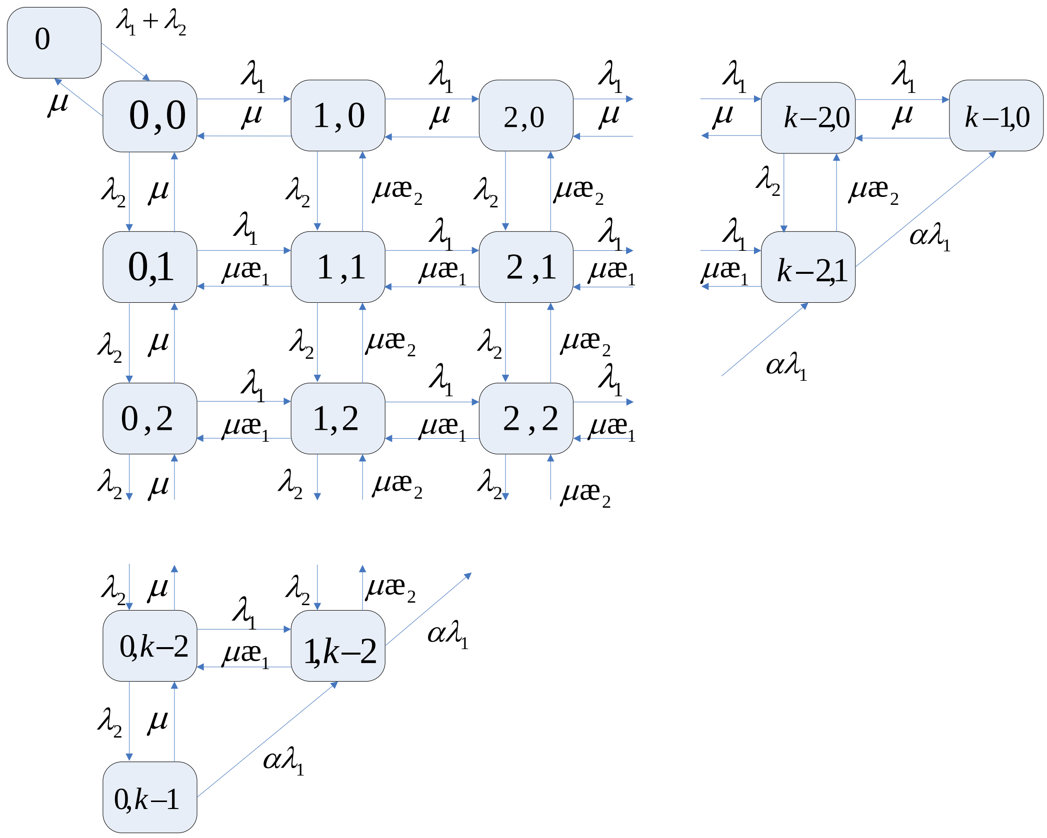

Рисунок 3.2 - Размеченный граф состояний для системы $\vec{M}_2/M/1/k/f_4^1$ в исходном виде

Выражая P_O из (3.77) и подставляя результат в (3.78), получим

$$-(\lambda_1+\lambda_2)P_{0,0}+\mu(P_{0,1}+P_{1,0})=0. \qquad (3.79)$$

Во всех остальных уравнениях системы P_O отсутствует, так как все остальные состояния не сообщаются с $\{O\}$.

Этому результату можно придать следующий вид. Перейдем от исходного размеченного графа состояний рис. 3.2 к модифицированному размеченному графу, представленному на рис. 3.3. Уравнения для всех вероятностей, относящихся ко второму размеченному графу, будут теми же самыми, что и для графа рис. 3.2, а вероятность P_O может быть вычислена согласно (3.77) в виде

$$P_O = \frac{1}{\rho} P_{0,0}, \tag{3.80}$$

где вновь использованы обозначения (2.22) - (2.24).

Если пользоваться модифицированным размеченным графом, то состояние $\{O\}$ вообще исключается из рассмотрения, а тогда условия нормировки (3.75) для финальных вероятностей следует переписать в виде

$$\sum_{n_1=0}^{k-1} \sum_{n_2=0}^{k-1-n_1} P_{n_1 n_2} + \frac{1}{\rho} P_{0,0} = 1. \tag{3.81}$$

В размеченном графе рис. 3.3 можно выделить три группы состояний: 1) Угловые состояния $(0,0)$, $(k-1,0)$ и $(0,k-1)$; 2) Граничные состояния $(0,j)$, $(i,0)$, $(i,k-1-i)$, где $i=\overline{1,k-2}$, $j=\overline{1,k-2}$; 3) Внутренние состояния (i,j), где $i \neq 0$, $j \neq 0$, $i+j<k-1$. Поскольку эти три группы состояний различаются топологически, то для них разными будут и уравнения Колмогорова.

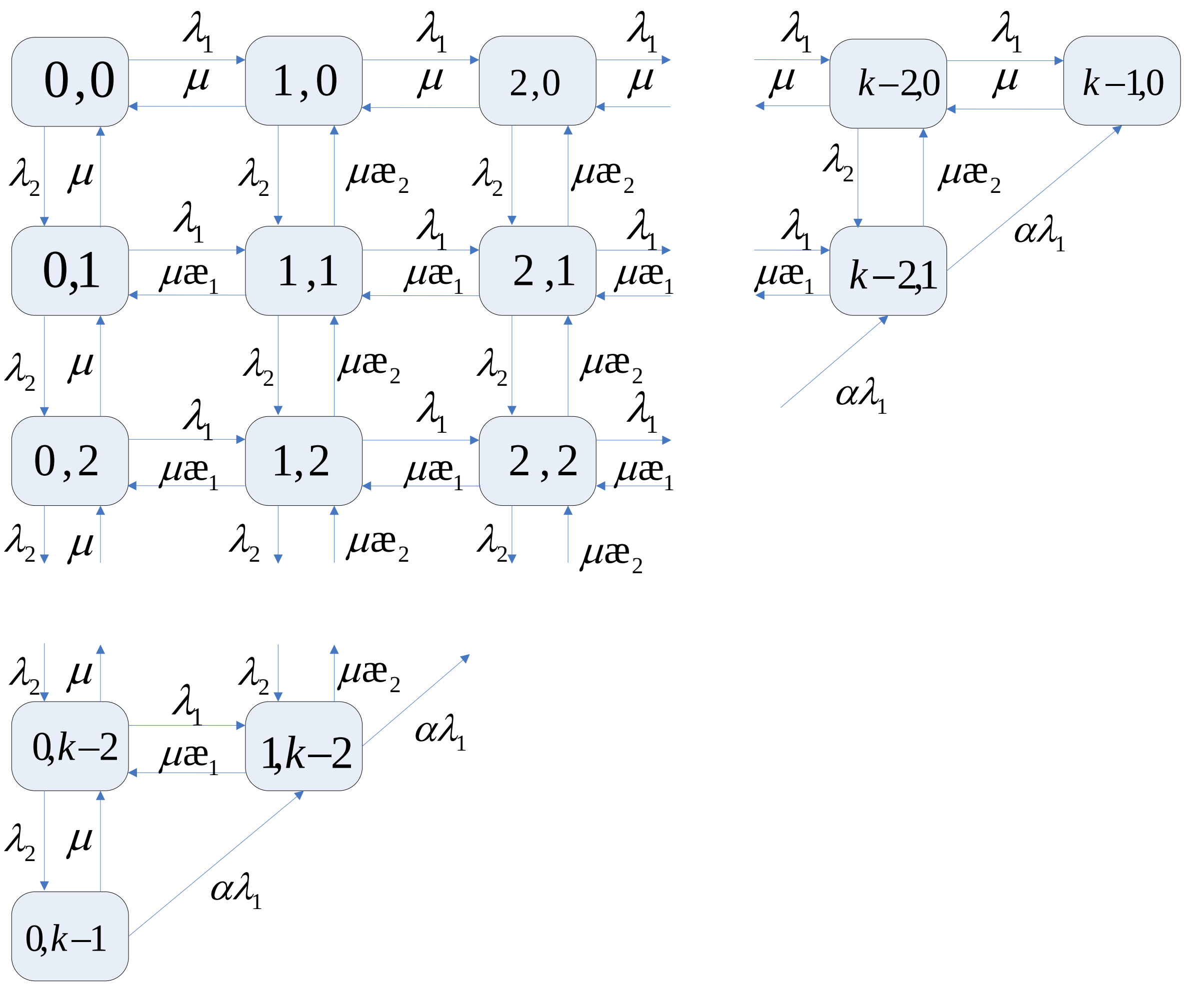

Рисунок 3.3 -Модифицированный граф состояний системы $\vec{M}_2 / M / 1 / k / f_4^1$

Вначале выпишем уравнения в явном виде для всех перечисленных групп состояний

$$\begin{cases} -(\lambda_1+\lambda_2)P_{0,0}+\mu(P_{1,0}+P_{0,1})=0,(i=0,\, j=0), \\ -\mu P_{k-1,0}+\lambda_1 P_{k-2,1}+\alpha\lambda_1 P_{k-2,0}=0,(i=k-1,\, j=0), \\ -(\alpha\lambda_1+\mu)P_{0,k-1}+\lambda_2 P_{0,k-2}=0,(i=0,\, j=k-1), \\ -(\lambda_1+\lambda_2+\mu)P_{0,j}+\ae_1\mu P_{1,j}+\mu P_{0,j+1}+\lambda_2 P_{0,j-1}=0,(i=0, 1\le j\le k-2), \\ -(\lambda_1+\lambda_2+\mu)P_{i,0}+\mu P_{i+1,0}+\ae_2\mu P_{i,1}+\lambda_1 P_{i-1,0}=0,(1\le i\le k-2,\, j=0), \\ -(\alpha\lambda_1+\mu)P_{i,k-1-i}+\lambda_2 P_{i,k-i}+\lambda_1 P_{i-1,k-1-i}+\alpha\lambda_1 P_{i-1,k-i}=0,(1\le i\le k-2, i+j=k-1) \\ -(\lambda_1+\lambda_2+\mu)P_{i,j}+\ae_1\mu P_{i+1,j}+\ae_2\mu P_{i,j+1}+\lambda_1 P_{i-1,j}+\lambda_2 P_{i,j-1}=0,(i=\overline{1,k-2},\, j=\overline{1,k-2-i}), \end{cases} \tag{3.82}$$

Эти уравнения в соответствии с описанным во второй главе методом решения такого рода задач, целесообразно записать в единооднообразной форме с использованием символа Кронекера. По аналогии с подобной же системой, но при наличии абсолютного приоритета имеем следующую систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{gathered}((\lambda_1+\lambda_2)(1-\delta_{i+j,k-1})+\alpha\lambda_1\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{i,k-1})+\mu)P_{i,j}=\lambda\delta_{i,0}\delta_{j,0}P_{\varnothing}+ \\ +\lambda_1(1-\delta_{i,0})P_{i-1,j}+\lambda_2(1-\delta_{j,0})P_{i,j-1}+æ_1\mu(1-\delta_{j,0})(1-\delta_{i+j,k-1})P_{i+1,j}+ \\ +æ_2\mu(1-\delta_{i,0})(1-\delta_{i+j,k-1})P_{i,j+1}+\mu\delta_{j,0}(1-\delta_{i,k})P_{i+1,0}+ \\ \mu\delta_{i,0}(1-\delta_{j,k-1})P_{0,j+1}+\alpha\lambda_1\delta_{i+j,k-1}(1-\delta_{i,0})P_{i-1,j+1}\end{gathered} \tag{3.83}$$

При такой записи уравнения (3.83) выполняются для всех неотрицательных (i,j), удовлетворяющих дополнительному условию $i+j\le k-1$, выражающему ограниченность объема накопителя. При этом следует принять во внимание, что условие (2.6) также выполняется.

Таким образом, задача исследования установившегося распределения вероятностей в системе $\vec{M}_2/M/1/k/f_4^1$ свелась к получению решения системы линейных алгебраических уравнений (3.83) при дополнительном условии нормировки (3.81).

3.2.2. Вычисление производящей функции для системы с вероятностным приоритетом

Введем производящую функцию финальных вероятностей аналогично определению (2.3), только с учетом того, что в данном случае система рассматриваются вероятности состояния, описывающие не количество требований в системе в целом, а только в ее накопителе, который, напомним, включает лишь k-1 место для ожидания.

Условие нормировки (3.81) для неё принимает вид

$$G(1,1)+\frac{1}{\rho}G(0,0)=1. \tag{3.84}$$

Умножим обе части равенства (3.83) на $u^i v^j$ и просуммируем по всем неотрицательным значениям (i,j), удовлетворяющим ограничению $i+j\le k-1$. Рассмотрим отдельно каждое из слагаемых в (3.83). Преобразуем эти суммы по методу главы 2 с целью выразить их через производящую функцию. Введем дополнительное обозначение для часто встречающейся суммы

$$\Sigma_1 = \sum_{i=0}^{k-1} P_{i,k-1-i} u^i v^{k-1-i} \tag{3.85}$$

С использованием этого обозначения (3.85) слагаемые в (3.83) преобразуются следующим образом. Для первой суммы имеем:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i-2} P_{i,j} u^i v^j = (\lambda_1 + \lambda_2)[G(u,v) - \Sigma_1] \tag{3.86}$$

Второе слагаемое приводится к виду:

$$\alpha\lambda_1 \sum_{i=0}^{k-1} P_{i,k-1-i} u^i v^{k-1-i} (1 - \delta_{i,k-1}) = \alpha\lambda_1 [\Sigma_1 - P_{k-1,0} u^{k-1}] \tag{3.87}$$

Третье слагаемое пропорционально G и равняется

$$\mu G(u,v). \tag{3.88}$$

Четвертое слагаемое останется без изменений:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i-1} \alpha \delta_{i,0} \delta_{j,0} P_{\varnothing} = \lambda P_{\varnothing} \tag{3.89}$$

Пятое и шестое слагаемое преобразуются похожим образом аналогично (3.86) и (3.89):

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1-i} P_{i-1,j} u^i v^j = \lambda_1 u \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-i-2} P_{i,j} u^i v^j = \lambda_1 u [G(u,v) - \Sigma_1] \tag{3.90}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1-i} \lambda_2 (1 - \delta_{j,0}) P_{i,j-1} = \lambda_2 v [G(u,v) - \Sigma_1] \tag{3.91}$$

Седьмое и восьмое слагаемые после серии несложных преобразований приводятся к виду:

$$æ_1 \mu \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i-2} P_{i+1,j} u^i v^j = \frac{æ_1 \mu}{u} [G(u,v) - G(u,0) - G(0,v) + P_{0,0}] \tag{3.92}$$

$$æ_2 \mu \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i-2} P_{i,j+1} u^i v^j = \frac{æ_1 \mu}{u} [G(u,v) - G(0,v) - G(u,0) + P_{0,0}] \tag{3.93}$$

Девятое и десятое слагаемые будут содержать значение производящей функции при одном из аргументов, равном нулю:

$$\mu\sum_{i=0}^{k-2}P_{i+1,0}u^i=\frac{\mu}{u}\sum_{i=1}^{k-1}P_{i,0}u^i=\frac{\mu}{u}[G(u,0)-P_{0,0}] \tag{3.94}$$

$$\mu\sum_{j=0}^{k-2}P_{0,j+1}v^j=\frac{\mu}{u}\sum_{j=1}^{k-1}P_{0,j}v^j=\frac{\mu}{v}[G(0,v)-P_{0,0}] \tag{3.95}$$

Наконец, одиннадцатое слагаемое будет включать параметр вероятностного выталкивающего механизма в виде множителя:

$$\alpha\lambda_1\sum_{i=1}^{k-1}P_{i-1,k-i}u^iv^{k-1-i}=\alpha\lambda_1\frac{u}{v}\sum_{i=0}^{k-2}P_{i,j}u^iv^j=\alpha\lambda_1\frac{u}{v}[\Sigma_1-P_{k-1,0}u^{k-1}]. \tag{3.96}$$

Используя полученные выражения для сумм (3.85)-(3.96) через производящую функцию, после приведения подобных членов находим

$$\begin{aligned}&((\lambda_1+\lambda_2+\mu)-(\lambda_1u+\lambda_2v)-(\frac{æ_1\mu}{u}+\frac{æ_2\mu}{v}))G(u,v)=\\&=\lambda P_{\varnothing}+((\lambda_1+\lambda_2)-\alpha\lambda_1-(\lambda_1u+\lambda_2v)+\alpha\lambda_1\frac{u}{v})\Sigma_1+\alpha\lambda_1P_{k-1,0}u^{k-1}(1-\frac{u}{v})+\\&+G(u,0)(\frac{\mu}{u}-\frac{æ_1\mu}{u}-\frac{æ_1\mu}{v})+G(0,v)(\frac{\mu}{v}-\frac{æ_1\mu}{u}-\frac{æ_2\mu}{v})+\\&+P_{0,0}(\frac{æ_1\mu}{u}+\frac{æ_2\mu}{u}-\frac{\mu}{u}-\frac{\mu}{v})\end{aligned} \tag{3.97}$$

Правильность полученного в левой части (3.97) выражения можно проверить так. Заметим, что размеченный граф состояний для системы $\vec{M}_2/M/1/k/f_4^1$, изображенный на рис. 3.2, совпадает с размеченным графом для системы $\vec{M}_2/M/1/k/f_1^1$, если положить $æ_1=1, æ_2=0$. Подставляя эти значения в (3.97), можно заметить, что полученное при такой подстановке уравнение для производящей функции (3.98) полностью совпадет с уравнением для производящей функции системы $\vec{M}_2/M/1/k/f_1^1$ (см. п. 2.5).

$$\left[\lambda_1(u-1)+\lambda_2(v-1)+\mu\left(\frac{1}{u}-1\right)\right]G(u,v)+\mu\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)G(0,v)+$$
$$+\mu\left(1-\frac{1}{v}\right)G(0,0)+\left[(1-\alpha)\lambda_1+\lambda_2(1-v)+\lambda_1 u\left(\frac{\alpha}{v}-1\right)\right]\Sigma_1+ \quad (3.98)$$
$$+\alpha\lambda_1 u^{k-1}\left(1-\frac{u}{v}\right)P_{k-1,0}=0.$$

Имеется ряд важных частных случаев, когда из физических соображений, даже не прибегая к вычислениям можно получить закон распределения числа требований в системе, а значит и производящую функцию финальных вероятностей. Эти частные случаи дают важный материал для проверки полученных общих формул, и их полезно рассмотреть здесь более подробно.

Начнем с получения распределения общего числа требований в накопителе нашей СМО, которое определяется величиной $N=N_1+N_2$. Ясно, что данное распределение можно найти по общим формулам для классической СМО класса $M/M/1/k$, на вход которой поступает простейший поток с суммарной интенсивностью $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$, а обслуживание происходит с той же интенсивностью μ, как в исходной системе $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_4^1$.

Хорошо известно, что общее число требований N_Σ в указанной однопотоковой системе распределено по усеченному геометрическому закону [3]:

$$P\{N_\Sigma=n\}=\frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}\rho^n,(n=\overline{0,k-1}) \quad (3.99)$$

Длина общей очереди связана с общим числом требований N_Σ следующим соотношением:

$$N=\begin{cases}0, N_\Sigma\le 1,\\ N_\Sigma-1, N_\Sigma>1\end{cases}. \quad (3.100)$$

Поэтому согласно (3.99)

$$r_n=P\{N=n\}=\frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}\cdot\rho^{n+1},(n=\overline{0,k-1}),$$
$$P_O=P\{N_\Sigma=0\}=\frac{r_O}{\rho}=\frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}. \quad (3.101)$$

Напомним, что у нас $N=0$ не тождественно $N_\Sigma=0$.

Убедимся, что именно такое распределение длины общей очереди получается, основываясь на производящей функции, удовлетворяющей уравнению (3.98). Введем в рассмотрение производящую функцию финальных вероятностей общей длины очереди

$$G_\Sigma(u)=\sum_{n=0}^{k-1} r_n u^n . \quad (3.102)$$

Из общих свойств производящих функций следует, что

$$G_\Sigma(u)=G(u,u), \quad (3.103)$$

где $G(u,v)$ - производящая функция двухпотоковой системы (3.98). Доказательство (3.103) можно найти, например, в [10, 15].

Подставляя в (3.98) $v=u$, находим, учитывая, что $æ_1+æ_2=1$:

$$G_\Sigma(u)=\frac{u(u-1)\left[G(0,0)-\rho u^k\sum_{i=0}^{k-1}P_{i,k-1-i}\right]}{u\left[(1+\rho)u-\rho u^2-1\right]}. \quad (3.104)$$

Далее преобразуем (3.104) к виду, позволяющему найти вероятности r_n.

Легко видеть, что

$$\sum_{i=0}^{k-1}P_{i,k-1-i}=r_{k-1} \quad (3.105)$$

дает вероятность полностью заполненного накопителя.

С другой стороны

$$G(0,0)=P_{0,0}=r_0=G_\Sigma(0) \quad (3.106)$$

есть вероятность того, что накопитель свободен от требований (но, напомним, что канал обслуживания при этом считается заполненным).

Поэтому после сокращений дроби (3.104) на произведение $u(u-1)$ и подстановки (3.105)-(3.106) будем иметь

$$G_\Sigma(u)=\frac{G_\Sigma(0)-\rho u^k r_{k-1}}{1-\rho u}. \quad (3.107)$$

Согласно определению (3.102) производящая функция $G_\Sigma(u)$ является полиномом степени $(k-1)$ и выражение (3.107) имеет полюс $u = 1/\rho$. Поэтому нужно потребовать, чтобы

$$\operatorname*{Res}_{u=\rho^{-1}} G_\Sigma(u) = 0, \tag{3.108}$$

что дает уравнение для определения $G_\Sigma(0)$:

$$G_\Sigma(0) - \rho^{1-k} r_{k-1} = 0. \tag{3.109}$$

Используя условие (3.108), выражая r_{k-1} из (3.109) и подставляя найденное выражение в (3.107), имеем

$$G_\Sigma(u) = G_\Sigma(0)\frac{1-(\rho u)^k}{1-(\rho u)}. \tag{3.110}$$

Неизвестную величину $G_\Sigma(0)$ находим из условия нормировки (3.80), которое дает

$$G_\Sigma(1) = 1 - \frac{1}{\rho}G_\Sigma(0). \tag{3.111}$$

Подставляя выражение (3.110) в (3.111) вначале определим $G_\Sigma(0)$ в виде

$$G_\Sigma(0) = \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}}, \tag{3.112}$$

что позволяет записать окончательный вид производящей функции вероятностей r_n

$$G_\Sigma(u) = \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}} \cdot \frac{1-(\rho u)^k}{1-(\rho u)}. \tag{3.113}$$

Если теперь рассчитать второй сомножитель в (3.113) по формуле геометрической прогрессии

$$\frac{1-(\rho u)^k}{1-(\rho u)} = \sum_{n=0}^{k-1}(\rho u)^n, \tag{3.114}$$

то становиться очевидным выполнение верхнего равенства (3.101), т.е. выполнение усеченного геометрического закона распределения длины общей очереди.

Теперь проведем еще одну проверку и рассмотрим, что дадут полученные формуы в случае, когда на вход СМО фактически поступает лишь один из потоков, например, первый, а интенсивность второго исчезающе мала $\lambda_2 = 0$. Ясно, что в этом случае система должна работать, как однопотоковая, причем распределение числа требований первого типа должна соответствовать обычной СМО класса $M/M/1/k$, а требований второго типа в системе не будет совсем.

Для этого случая параметры вероятностного приоритета будут иметь значения æ$_2 = 0$, æ$_1 = 1$. Тогда, подставляя указанные значения параметров в выражение для производящей функции (3.98), находим

$$\begin{gathered} G(u,v) = \frac{1}{\left[\rho_1(1-u)uv + (uv-v)\right]}\{(u-v)G(0,0) + (uv-u)G(0,0) + \\ +[\rho_1(1-u)uv + \alpha\rho_1 u(u-v)]P_{k-1,0}u^{k-1} + \alpha\rho_1 u^k (v-u)P_{k-1,0}\}. \end{gathered} \tag{3.115}$$

Сокращая числитель и знаменатель на произведение $v(1-u)$, получим

$$G(u,v) = \frac{G(0,0) - \rho_1 u^k P_{k-1,0}}{1-\rho_1 u}. \tag{3.116}$$

Выражение (3.115) совершенно аналогично ранее полученному выражению (3.107). Далее займемся устранением особенностей функции (3.116).

Вначале потребуем, чтобы производящая функция (3.116) не имела полюсов $\operatorname*{Res}_{u=\rho_1^{-1}} G(u,v) = 0$, откуда следует, что

$$G(0,0) - \rho_1^{1-k} P_{k-1,0} = 0. \tag{3.117}$$

Выражая отсюда $P_{k-1,0}$ в виде

$$P_{k-1,0} = \rho_1^{k-1} G(0,0)\frac{1-(\rho_1 u)^k}{1-(\rho_1 u)}, \tag{3.118}$$

находим

$$G(u,v)=G(0,0)\frac{1-(\rho_1 u)^k}{1-(\rho_1 u)}. \tag{3.119}$$

Используя условие нормировки (3.81), получим аналогично (3.112)

$$G(0,0)=\frac{\rho_1(1-\rho_1)}{(1-\rho_1^{k+1})}, \tag{3.120}$$

а тогда будем иметь

$$G(u,v)=\frac{\rho_1(1-\rho_1)}{(1-\rho_1^{k+1})}\frac{1-(\rho_1 u)^k}{1-(\rho_1 u)}, \tag{3.121}$$

что соответствует закону распределения

$$P_{i,j}=\begin{cases}0,\ j\ge 1,\\ \dfrac{(1-\rho_1)}{(1-\rho_1^{k+1})}\rho_1^{i+1},\ j=0, i=\overline{0,k-1}.\end{cases} \tag{3.122}$$

Распределение (3.115) означает, что в системе нет ни одного требования второго типа, а число приоритетных требований подчиняется усеченному геометрическому закону с параметром ρ_1, причем вероятность полного простоя системы

$$P_O=\frac{P_{0,0}}{\rho_1}=\frac{1-\rho_1}{1-\rho_1^{k+1}} \tag{3.123}$$

Все эти результаты полностью согласовываются с физическим смыслом задачи при соблюдении условия отсутствия потока неприоритетных требований.

Совершенно аналогично исследуется случай, когда отсутствует первый поток, то есть $\lambda_1=0$. Для этого случаю производящая функция будет иметь несколько иной вид

$$G(u,v)=\frac{\rho_2(1-\rho_2)}{(1-\rho_2^{k+1})}\frac{(1-(\rho_2 v)^k)}{(1-(\rho_2 v))}, \tag{3.124}$$

что соответствует закону распределения, аналогичному (3.122)

Если проделать все действия аналогичные случаю с $\lambda_2=0$, то и в этом случае получится физически ожидаемый результат.

$$P_{i,j} = \begin{cases} 0, i \geq 1, \\ \frac{(1-\rho_2)}{(1-\rho_2^{k+1})}\rho_2^{i+1}, i=0, j=\overline{0,k-1} \end{cases}$$

3.2.3. Вычисление вероятностей состояний системы

Обратимся к общему выражению для производящей функции (3.30). Эта функция имеет относительно u два полюса, совпадающих с корнями квадратного уравнения:

$$\rho_1(1-u)uv + \rho_2(1-v)uv + (uv - æ_1 v - æ_2 u) = 0. \tag{3.125}$$

Левая часть (3.125) представляет собой не что иное, как хорошо знакомый нам полином, стоящий в знаменателе дроби (3.98).

В отличие от систем, рассмотренных в главе 2, левая часть (3.125) уже не делится нацело только на v, так как появился член, пропорциональный $æ_2$, которое в общем случае отлично от нуля. Потому характер зависимости корней уравнений (3.125) от v будет несколько иной, чем в ранее рассмотренных системах. Изучим этот вопрос подробнее.

После деления обеих частей (3.125) на $\rho_1 v$ и перегруппировки слагаемых, получим

$$u^2 - \left(\frac{1+\rho}{\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}v - \frac{æ_2}{\rho_1}\frac{1}{v}\right)u + \frac{æ_1}{\rho_1} = 0. \tag{3.126}$$

Теперь для полученного квадратного уравнения можно записать по теореме Виета:

$$u_1 + u_2 = (1 + \varepsilon(1-v) + \frac{1}{\rho_1} - \frac{æ_2}{\rho_1 v}),\ u_1 u_2 = \frac{æ_1}{\rho_1} \tag{3.127}$$

Вопрос о том, будут ли корни вещественные или комплексные оставляем в стороне. У производящей функции вообще не должно быть никаких полюсов – ни вещественных, ни комплексных. Она должна являться полиномом суммарной степени не выше k-1 по обеим переменным. Тогда производящая функция (3.98), будучи полиномом, не может иметь никаких особых точек. Поэтому ее вычеты в обоих полюсах следует приравнять к нулю

$$\operatorname*{Res}_{u=u_1} G(u,v)=0, \operatorname*{Res}_{u=u_2} G(u,v)=0, \qquad (3.128)$$

причем равенства (3.128) должны выполняться при любом v.

Запишем уравнение для производящей функции (3.98), которое будем использовать для применения метода, описанного в главе 2:

$$\begin{gathered}\rho P_O uv+((\rho_1+\rho_2)v-\alpha\rho_1 v-(\rho_1 u+\rho_2 v)v+\alpha\rho_1 u)u\Sigma_1+\\ +\alpha\rho_1 P_{k-1,0}u^k(v-u)-æ_2 G(u,0)(v-u)+æ_1 G(0,v)(u-v)-\\ -P_{0,0}(æ_2 v+æ_1 u)=-\rho_1 v(u-u_1)(u-u_2)G(u,v)\end{gathered} \qquad (3.129)$$

Сначала вычтем из левой части уравнения (3.129) для производящей функции левую часть первого из условий (3.128) и разделим его на (u-u_1). В результате находим

$$\begin{gathered}\rho P_{\varnothing} v+((\rho_1+\rho_2)v-\alpha\rho_1 v-\rho_2 v^2)\sum_{i=0}^{k-1} P_{i,k-1-i}v^{k-1-i}R_{i+1}+\\ +(\alpha\rho_1-\rho_1 v)\sum_{i=0}^{k-1} P_{i,k-1-i}R_{i+2}v^{k-1-i}+\alpha\rho_1 P_{k-1,0}(vR_k-R_{k+1})+\\ +æ_2\sum_{i=0}^{k-1} P_{i,0}(vR_i-R_{i+1})+æ_1 G(0,v)-P_{0,0}æ_1=-\rho_1 v(u-u_2)G(u,v)\end{gathered} \qquad (3.130)$$

Затем подставим в полученное выражение (3.130) u = u_2, вычтем его еще раз из (3.130) и используем обозначения (2.63):

$$\begin{gathered}((\rho_1+\rho_2)v-\alpha\rho_1 v-\rho_2 v^2)\sum_{i=0}^{k-1} P_{i,k-1-i}v^{k-1-i}S_{i+1}+\\ +(\alpha\rho_1-\rho_1 v)\sum_{i=0}^{k-1} P_{i,k-1-i}R_{i+2}v^{k-1-i}+\alpha\rho_1 P_{k-1,0}(vR_k-R_{k+1})+\\ +æ_2\sum_{i=0}^{k-11} P_{i,0}(vR_i-R_{i+1})+æ_1 G(0,v)-P_{0,0}æ_1=\\ =-\rho_1 v(u-u_2)G(u,v)\end{gathered} \qquad (3.131)$$

Найдем разложение полученного выражения по степеням u, при условии, что для величин S_i верно разложение (2.63). Каждое слагаемое для наглядности преобразуем отдельно от других:

$$\alpha\rho_1 P_{k-1,0}(S_{k+1}-vS_k)=\alpha\rho_1 P_{k-1,0}(\sum_{j=0}^{k-1}u^j(Q_{k-j}-vQ_{k-1-j})), \tag{3.132}$$

$$æ_2\sum_{i=0}^{k-1}P_{i,0}(S_{i+1}-vS_i)=æ_2\sum_{j=0}^{k-2}u^j\sum_{i=j+1}^{k-1}P_{i,0}(Q_{i-j}-vQ_{i-j-1}), \tag{3.133}$$

$$-\rho_1(\alpha-v)\sum_{i=0}^{k-1}P_{i,k-1-i}v^{k-1-i}\sum_{j=0}^{i}u^jQ_{i-j+1}=-\rho_1(\alpha-v)\sum_{j=0}^{k-1}u^j\sum_{i=j}^{k-1}P_{i,k-1-i}v^{k-1-i}Q_{i-j+1}, \tag{3.134}$$

$$\begin{gathered}((\rho_1+\rho_2-\alpha\rho_1)v-\rho_2v^2)\sum_{i=0}^{k-1}P_{i,k-1-i}v^{k-1-i}\sum_{j=0}^{i-1}u^jQ_{i-j}=\\ =\alpha\rho_1P_{k-1,0}(\sum_{j=0}^{k-1}u^j(Q_{k-j}-vQ_{k-1-j}))+æ_2\sum_{j=0}^{k-2}u^j\sum_{i=j+1}^{k-1}P_{i,0}(Q_{i-j}-vQ_{i-j-1})+\\ +\rho_1(v-\alpha)\sum_{j=0}^{k-1}u^j\sum_{i=j}^{k-1}P_{i,k-1-i}v^{k-1-i}Q_{i-j+1}+\\ +(\rho_2v^2-(\rho_1+\rho_2-\alpha\rho_1)v)\sum_{j=0}^{k-2}u^j\sum_{i=j+1}^{k-1}P_{i,k-1-i}v^{k-1-i}Q_{i-j},\end{gathered} \tag{3.135}$$

Далее разложим сумму (3.135) по степеням u, тогда с учетом (3.132)-(3.135), приходим к результату:

$$\alpha\rho_1P_{k-1,0}Q_1-\rho_1(\alpha-v)P_{k-1,0}Q_1=\rho_1vQ_1P_{k-1,0},(j=k-1),$$

$$\begin{gathered}\alpha\rho_1P_{k-1,0}(Q_{k-j}-vQ_{k-1-j})+æ_2\sum_{i=j+1}^{k-1}P_{i,0}(Q_{i-j}-vQ_{i-j-1})+\\ +(\rho_2v^2-(\rho_1+\rho_2-\alpha\rho_1)v)\sum_{i=j+1}^{k-1}P_{i,k-1-i}v^{k-1-i}Q_{i-j}=\rho_1vq_j(v),(j=\overline{0,k-2}).\end{gathered} \tag{3.136}$$

Следующим шагом метода является нахождение разложения по степеням v. Для этого ранее всегда использовалась теорема Виета для корней знаменателя в выражении для производящей функции. Для рассматриваемой сейчас системы уже нельзя воспользоваться прежним выражением (2.77), так как знаменатель теперь имеет иной вид. Получим новое разложение разделенных разностей по степеням v для этого случая.

На основании теоремы Виета для произведения корней знаменателя эти корни в комплексном виде могут быть представлены так:

$$u_1=\frac{e^{i\varphi}æ_1^{1/2}}{\rho_1^{1/2}},\ u_2=\frac{e^{-i\varphi}æ_1^{1/2}}{\rho_1^{1/2}}\ .$$

Тогда, воспользовавшись формулами Эйлера, связывающими экспоненту с тригонометрическими функциями, можно получить:

$$\cos\varphi = (\frac{u_1+u_2}{2})(\frac{\rho_1}{æ_1})^{1/2} = (\frac{1+\rho-\rho_2 v}{2(\rho_1 æ_1)^{1/2}} - \frac{æ_2}{2(\rho_1 æ_1)^{1/2} v})$$

Далее, воспользовавшись выражением для полиномов Чебышева второго рода [96], можно установить следующую их связь с рассматриваемыми разделенными разностями:

$$Q_j = (\frac{æ_1}{\rho_1})^{j-1/2} U_{j-1}(\cos\varphi) = (\frac{\rho_1}{æ_1})^{1-j/2} U_{j-1}(\cos\varphi).$$

В данном случае будет уже недостаточно ограничиться получением разложения полинома Чебышева второго рода в ряд Тейлора в окрестности точки 0, потому что аргумент полиномов имеет более сложный вид, чем в ранее разобранных задачах. Для получения разложения по степеням v докажем специальную лемму.

<u>Лемма 3.3.</u> *Пусть $P_n(x)$ является полиномом степени x, тогда*

$$P_n(ax+\frac{b}{x}+c) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{\frac{n+k}{2}} \frac{a^i b^{i-k}}{i!(i-k)!} P_n^{(2i-k)}(c) x^k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{\frac{n-k}{2}} \frac{a^i b^{i+k}}{i!(i+k)!} P_n^{(2i+k)}(c) x^{-k}\,. \quad (3.137)$$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\phi(x,y) = P_n(ax+by+c)\,. \quad (3.138)$$

Раскладывая (3.138) в двойной ряд Тейлора по аргументам x и y, находим

$$\phi(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!} P_n^{(i+j)}(c) a^i b^j x^i y^j\,. \quad (3.139)$$

Полагая в (3.139) $y = x^{-1}$, будем иметь

$$P_n(ax+\frac{b}{x}+c) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} \frac{a^i}{i!}\frac{b^j}{j!} P_n^{(i+j)}(c) x^{i-j}\,. \quad (3.140)$$

Проделаем в полученной сумме замену индекса суммирования j на $k = i - j$. В результате получим

$$P_n(ax+\frac{b}{x}+c)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{2i-n}\frac{a^i}{i!}\frac{b^{i-k}}{(i+k)!}P_n^{(2i-k)}(c)x^k \, . \tag{3.141}$$

Далее поменяем порядок суммирования по i и k . В результате получим следующее представление суммы (3.141)

$$P_n(ax+\frac{b}{x}+c)=\sum_{k=-n}^{-1}[\sum_{i=0}^{\frac{k+n}{2}}\frac{a^i}{i!}\frac{b^{i-k}}{(i-k)!}P_n^{(2i-k)}(c)]x^k+\sum_{k=0}^{n}[\sum_{i=k}^{\frac{k+n}{2}}\frac{a^i}{i!}\frac{b^{i-k}}{(i-k)!}P_n^{(2i-k)}(c)]x^k \tag{3.142}$$

Заменяя во второй сумме k на $-k$, окончательно будем иметь требуемое выражение (3.137).

Для получения искомого разложения воспользуемся результатами леммы 3.3, причем возьмем в качестве параметров леммы a, b, c следующие величины:

$$a=-\frac{\rho_2}{2(\rho_1 æ_1)^{1/2}}\, ,\ b=-\frac{æ_2}{2(\rho_1 æ_1)^{1/2}}\, ,\ c=\frac{1+\rho}{2(\rho_1 æ_1)^{1/2}}\, .$$

Тогда разложение разделенных разностей по степеням v примет вид:

$$\begin{aligned} Q_j=&(\frac{\rho_1}{æ_1})^{1-j/2}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{i=0}^{\frac{j-1+l}{2}}\frac{\rho_2^m æ_2^{m-l}(-1)^l}{2^{2m-l}(\rho_1 æ_1)^{\frac{2m-l}{2}}m!(m-l)!}U_{j-1}^{(2m-l)}(c)v^l+\\ &+(\frac{\rho_1}{æ_1})^{1-j/2}\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{m=0}^{\frac{j-1-l}{2}}\frac{\rho_2^m æ_2^{m+l}(-1)^l}{2^{2m+l}(\rho_1 æ_1)^{\frac{2m+l}{2}}m!(m+l)!}U_{j-1}^{(2m+l)}(c)v^{-l} \end{aligned} \tag{3.143}$$

Введем специальные обозначения для коэффициентов, стоящих при степенях v в полученном разложении, тогда это разложение (3.143) приобретет краткий и компактный вид:

$$Q_j=\sum_{l=0}^{j-1}\theta_{j,l}^{(+)}æ^l+\sum_{l=1}^{j-1}\theta_{j,l}^{(-)}æ^{-l}\, , \tag{3.144}$$

где

$$\theta_{j,l}^{(+)}=(\frac{\rho_1}{æ_1})^{1-j/2}\sum_{m=l}^{\frac{j-1+l}{2}}\frac{\rho_2^m æ_2^{m-l}(-1)^l}{2^{2m-l}(\rho_1 æ_1)^{\frac{2m-l}{2}}m!(m-l)!}P_{j-1}^{(2m-l)}(c) \tag{3.145}$$

$$\theta_{j,l}^{(-)}=(\frac{\rho_1}{æ_1})^{1-j/2}\sum_{m=0}^{j-1-l}\frac{\rho_2^m æ_2^{m+l}(-1)^l}{2^{2m+l}(\rho_1 æ_1)^{\frac{2m+l}{2}}m!(m+l)!}P_{j-1}^{(2m+l)}(c) \tag{3.146}$$

Рассмотрим полученные ранее уравнения для вероятностей наличия различного числа приоритетных требований в накопителе системы (3.136). Разложим его по степеням v, используя выражения (3.145). При этом учтем, что разложение по аргументу v должно включать только неотрицательные степени v. С учетом этого соображения все коэффициенты при отрицательных степенях v приравняем к нулю. Тогда первое слагаемое будет иметь вид:

$$\alpha\rho_1 P_{k-1,0}(Q_{j+1} - vQ_j) = \alpha\rho_1 P_{k-1,0}\Big(\sum_{l=0}^{j}(\theta^{(+)}_{j+1,l} - \theta^{(+)}_{j,l-1})v^l + (\theta^{(+)}_{j+1,0} - \theta^{(-)}_{j,1})\Big)$$

Второе слагаемое преобразуется к форме:

$$æ_2\sum_{i=0}^{j-1} P_{k-1-i,0}(Q_{j-i} - vQ_{j-i-1}) = æ_2\sum_{i=0}^{j-1} P_{k-1-i,0}(\theta^{(+)}_{j-i,0} - \theta^{(-)}_{j-i-1,1}) +$$
$$+æ_2\sum_{l=1}^{j-1} v^l \sum_{i=0}^{j-1-l} P_{k-1-i,0}(\theta^{(+)}_{j-i,l} - \theta^{(+)}_{j-i-1,l-1})$$

Третье слагаемое запишется следующим образом:

$$\rho_1\sum_{l=1}^{j+1} v^l \sum_{i=0}^{l-1} P_{k-1-i,i}\theta^{(+)}_{j-i+1,l-i-1} + \rho_1\sum_{l=0}^{j-1} v^l \sum_{i=l}^{\frac{j-1+l}{2}} P_{k-1-i,i}\theta^{(-)}_{j-i+1,-l+i+1} -$$
$$-\rho_1\alpha\sum_{l=0}^{j} v^l \sum_{i=0}^{l} P_{k-1-i,i}\theta^{(+)}_{j-i+1,l-i} - \rho_1\alpha\sum_{l=0}^{j-2} v^l \sum_{i=l+1}^{\frac{j+l}{2}} \theta^{(-)}_{j-i+1,-l+i} P_{k-1-i,i}$$

Четвертое слагаемое выразится так:

$$((\alpha-1)\rho_1 - \rho_2)v\sum_{i=0}^{j} P_{k-1-i,i}v^i Q_{j-i} = ((\alpha-1)\rho_1 - \rho_2)\sum_{l=1}^{j} v^l \sum_{i=0}^{l-1} P_{k-1-i,i}\theta^{(+)}_{j-i,l-i+1} +$$
$$+((\alpha-1)\rho_1 - \rho_2)\sum_{i=0}^{j-2} v^l \sum_{i=l}^{\frac{j+l-2}{2}} P_{k-1-i,i}\theta^{(-)}_{j-i,l+i+1}$$

Наконец, последнее, пятое слагаемое после отбрасывания отрицательных степеней v сохранит лишь следующие члены

$$\rho_2 v^2\sum_{i=0}^{j} P_{k-1-i,i}v^i Q_{j-i} = \rho_2\sum_{l=2}^{j+1} v^l \sum_{i=0}^{l-2} P_{k-1-i,i}\theta^{(+)}_{j-l,l-i-2} + \rho_2\sum_{l=1}^{j-1} v^l \sum_{i=l-1}^{\frac{j+l-3}{2}} \theta^{(-)}_{j-i,-l+i+2}P_{k-i,i} + \rho_2\sum_{i=0}^{\frac{j-3}{2}}\theta^{(-)}_{j-i,i+2}P_{k-1-i,i}.$$

Подставим полученные разложения для слагаемых с первого по пятое в (3.136) и разделим обе части (3.136) на $(\rho_1 v)$. В итоге получим:

$$q_{k-1-j}(v)=\alpha P_{k-1,0}\sum_{l=1}^{j}(\theta^{(+)}_{j+1,l}-\theta^{(+)}_{j,l-1})v^{l-1}+\frac{æ_2}{\rho_1}\sum_{l=1}^{j-1}v^{l-1}\sum_{i=0}^{j-1-l}P_{k-1-i,0}(\theta^{(+)}_{j-i,l}-\theta^{(+)}_{j-i-1,l-1})+$$
$$+\sum_{l=1}^{j+1}v^{l-1}\sum_{i=0}^{l-1}P_{k-1-i,i}\theta^{(+)}_{j-i+1,l-i-1}+\sum_{l=0}^{j-1}v^{l-1}\sum_{i=l}^{\frac{j-1+l}{2}}P_{k-1-i,i}\theta^{(-)}_{j-i+1,-l+i+1}-$$
$$-\alpha\sum_{l=0}^{j}v^{l-1}\sum_{i=0}^{l}P_{k-1-i,i}\theta^{(+)}_{j-i+1,l-i-1}-\alpha\sum_{i=0}^{j-2}v^{l-1}\sum_{i=l+1}^{\frac{j+l}{2}}\theta^{(-)}_{j-i+1,-l+i}P_{k-1-i,i}+ \qquad (3.147)$$
$$+((\alpha-1)-\varepsilon)\sum_{l=1}^{j}v^{l-1}\sum_{i=0}^{l-1}P_{k-1-i,i}\theta^{(+)}_{j-i,l-i-1}+((\alpha-1)-\varepsilon)\sum_{l=0}^{j-2}v^{l-1}\sum_{i=l}^{\frac{j+l-2}{2}}P_{k-1-i,i}\theta^{(-)}_{j-i,-l+i+1}+$$
$$+\varepsilon\sum_{l=2}^{j+2}v^{l-1}\sum_{i=0}^{l-2}P_{k-1-i,i}\theta^{(+)}_{j-i,l-i-2}+\varepsilon\sum_{l=1}^{j-1}v^{l-1}\sum_{i=l-1}^{\frac{j+l-3}{2}}\theta^{(-)}_{j-l,-l+i+2}P_{k-1-i,i}$$

Теперь можно записать в общем виде коэффициенты при каждой степени v в разложении (3.147), которые дают уравнения для вероятностей состояния накопителя системы через «диагональные» и «граничные» состояния:

$$P_{k-1-j,l}=\alpha P_{k-1,0}(\theta^{(+)}_{j+1,l+1}-\theta^{(+)}_{j,l})+\frac{æ_2}{\rho_1}\sum_{i=0}^{j-2-l}P_{k-1-i,0}(\theta^{(+)}_{j-i,l+1}-\theta^{(+)}_{j-i-1,l})+$$
$$+\sum_{i=0}^{l}P_{k-1-i,i}\theta^{(+)}_{j-i+1,l-i}+\sum_{i=l+1}^{\frac{j+l}{2}}P_{k-1-i,i}\theta^{(-)}_{j-i+1,-l+i}-\alpha\sum_{i=0}^{l+1}P_{k-1-i,i}\theta^{(+)}_{j-i+1,l+1-i}-$$
$$-\alpha\sum_{i=l+2}^{\frac{j+l+1}{2}}\theta^{(-)}_{j-i+1,-l-1+i}P_{k-1-i,i}+((\alpha-1)-\varepsilon)\sum_{i=0}^{l}P_{k-1-i,i}\theta^{(-)}_{j-l,-l+i}+\varepsilon\sum_{i=0}^{l-1}P_{k-1-i,i}\theta^{(+)}_{j-l.l-i-1}+ \qquad (3.148)$$
$$+\varepsilon\sum_{i=l}^{\frac{j+l-2}{2}}\theta^{(-)}_{j-i,-l+i+1}P_{k-1-i,i}$$

Таким образом все вероятности состояний накопителя системы класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_4^1$ могут быть выражены через $2k$-1 “опорную” вероятность состояний системы. Используя полученные выражения (3.148), приведем алгоритм для построения укороченной системы уравнений этой модели, аналогичный, подобным же алгоритмам, ранее построенным для других приоритетных систем в этой работе.

3.2.4. Построение укороченной системы уравнений

В предыдущем разделе было показано, что все вероятности состояний накопителя системы могут быть выражены через некоторые «опорные» вероятности, в роли которых выступают, во-первых, «диагональные» вероятности $P_{k-i,i}$ и, во-вторых, вероятности «граничных» состояний $P_{i,0}$, суммарное количество которых равняется $2k+1$. Таким образом, приходим к выводу, что для того, чтобы получить полную информацию об изучаемой системе и найти вероятности всех состояний накопителя, необходимо составить и решить систему линейных уравнений порядка $2k+1$. Поясним способ построения такой системы линейных уравнений, позволяющий найти эти вероятности.

Будем составлять систему линейных уравнений, которая будет состоять из двух частей. Для построения первой части воспользуемся приемом, детально описанным во второй главе. Прием заключается в использовании связи двухпотоковых систем массового обслуживания с однопотоковыми, в случае, если перестать различать отдельные потоки входящих требований и объединить их в один общий поток. Тогда первый набор уравнений может быть получен путем суммирования всех $P_{i,j}$ по диагоналям графа, таким же способом, как это было сделано в (2.95).

Второй набор уравнений будет получен с использованием условия аналитичности производящей функции в начале координат тем же способом, как это было сделано для системы с чередующимся приоритетом. Для этого перейдем к пределу при $v \to 0$ в выражении для производящей функции (3.97). Перед тем, как вычислять предел, разделим выражение (3.97) на две части, в первой из которых аргумент v отсутствует в знаменателе, а во второй присутствует:

$$\begin{gathered}(((\rho+1)-\rho_1 u+\rho_2 v-\frac{æ_1}{u})G(u,v)-\rho P_O-(\rho-\alpha\rho_1-\rho_1 u-\rho_2 v)\Sigma_1- \\ -\alpha\rho_1 P_{k-1,0}u^{k-1}-G(u,0)(\frac{æ_2}{u})+G(0,v)(\frac{æ_1}{u})+P_{0,0}\frac{æ_2}{u})+[-\frac{æ_2}{v}G(u,v)+ \\ +\alpha\rho_1 P_{k-1,0}\frac{u^k}{v}+\frac{G(u,0)æ_2}{v}-G(0,v)\frac{æ_1}{v}+P_{0,0}\frac{æ_1}{v}-\alpha\rho_1\frac{u}{v}\Sigma_1]\end{gathered} \tag{3.149}$$

Далее найдем предел от каждой из частей по отдельности. Для нахождения предела первой части достаточно подставить в нее v=0, что дает

$$\begin{aligned}
&((\rho_1+1)-\rho_1 u-\frac{æ_1}{u})G(u,0)-\rho P_O-(\rho-\rho_1 u)P_{k-1,0}u^{k-1}- \\
&-G(u,0)\frac{æ_2}{u}+G(0,0)\frac{æ_1}{u}+P_{0,0}\frac{æ_2}{u}=((\rho+1)-\rho_1 u-\frac{1}{u})G(u,0)- \\
&-P_{0,0}-(\rho-\rho_1 u)P_{k-1,0}u^{k-1}+P_{0,0}\frac{1}{u}
\end{aligned} \tag{3.150}$$

Для нахождения предела второй части приходится воспользоваться правилом Лопиталя:

$$\begin{aligned}
&-æ_2\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1-i}P_{i,j}u^i jv^{j-1}-\sum_{j=1}^{k-1}P_{0,j}jv^{j-1}æ_1-(\alpha\rho_1 u\sum_{i=0}^{k-1}P_{i,k-1-i}u^i v^{k-1-i})'_v= \\
&=-æ_2\sum_{i=0}^{k-i}\sum_{j=1}^{k-1-i}P_{i,j}u^i v^{j-1}j-\sum_{j=1}^{k-1}P_{0,j}jv^{j-1}æ_1-(\alpha\rho_1 u\sum_{i=1}^{k-1}P_{k-1-i,i}u^{k-1-i}iv^{i-1})'_v
\end{aligned} \tag{3.151}$$

Складывая (3.150) и (3.151) вместе, и, приравнивая к нулю коэффициенты при степенях u, получим вторую часть искомой системы линейных уравнений:

$$\begin{gathered}
P_{k-1,0}-\rho_1 P_{k-2,0}-\alpha\rho_1 P_{k-2,1}=0,(j=k-1) \\
(\rho+1)P_{i,0}-\rho_1 P_{i-1,0}-P_{i+1,0}-æ_2 P_{i,1}=0,(j=\overline{1,k-2}) \\
(\rho+1)P_{0,0}-P_{1,0}-P_{0,0}-P_{0,1}=0,(j=0)
\end{gathered} \tag{3.152}$$

Заметим, что в наборе уравнений (3.152) присутствуют вероятности вида $P_{i,1}$. От них можно избавиться, используя выражение (3.148) при подстановке индексов j=k-i и i=1. Осуществляя такую подстановку, получаем второй набор уравнений для нахождения всех нужных нам вероятностей: как «диагональных» $P_{k-1-i,i}$, так и «граничных» $P_{i,0}$.

По итогам третьей главы можно сделать вывод, что применение метода, описанного во второй главе, вполне возможно и для более сложных типов приоритетов. Были получены укороченные системы уравнений для моделей с чередующимся и вероятностным приоритетом и, тем самым, рассмотрены все двухпотоковые марковские системы с ограниченным накопителем и основными (по терминологии Б.В. Гнеденко) типами приоритетов.

Глава 4. Численные результаты для систем класса $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_i^1$ при различных типах приоритета

4.1. Анализ вероятностей потери

Рассмотретние моделей СМО с ограниченным накопителем в первую очередь предполагает возможность переполнения накопителя требованиями, что влечет за собой возможные потери требований обоих типов на входе в систему. Модели, которые исследованы в диссертационной работе наделены приоритетом как по обслуживанию, так и по постановке в очередь. Однако, как было разъяснено ранее, введение приоритета только по обслуживанию эффективно работает лишь в случае накопителя бесконечного размера. Поэтому в данных моделях добавлен еще и выталкивающий механизм, который позволяет управлять поведением системы даже в случае ограниченного накопителя. Особенностью введенного вероятностного выталкивающего механизма является то, что, во-первых, он позволяет осуществлять настройку системы за счет изменения вероятности выталкивания низкоприоритетного требования высокоприоритетным из накопителя, а в некоторых случаях и с канала обслуживания. Во-вторых, таким образом введенный выталкивающий механизм позволяет получить решение при любом значении параметра α, в том числе при $\alpha = 0$ (случай отсутствия выталкивания) и при $\alpha = 1$ (случай детерминированного выталкивания), которые были хорошо рассмотрены еще в классической литературе по приоритетным СМО, опубликованным еще в последние десятилетия прошлого века.

Поскольку в системах с ограниченным накопителем достаточно часто могут возникать потери, то для практических задач в первую очередь важно оценить объем потерь, которые могут возникнуть в процессе работы. Для этого было решено изучить такие характеристики, как вероятности потери требований первого и второго типов. Вероятности потери каждого из двух типов требований даются следующей леммой.

<u>Лемма 4.1.</u> *Вероятности потери каждого типа заявок выражаются в случае абсолютного приоритета в виде (4.1), относительного и вероятностного в виде (4.2), а чередующегося приоритета в виде (4.3).*

$$P_{loss}^{(1)} = p_0 + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{k-1} p_i, P_{loss}^{(2)} = r_k + \alpha\frac{\rho_1}{\rho_2}\sum_{i=1}^{k-1} p_i + \frac{\rho_1}{\rho_2} p_k, \tag{4.1}$$

$$P_{loss}^{(1)} = p_0 + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{k-1} p_i, P_{loss}^{(2)} = r_k + \alpha\frac{\rho_1}{\rho_2}\sum_{i=1}^{k-1} p_i, \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered} P_{loss}^{(1)} = p_0^{(1)} + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{k-1} p_i^{(1)} + \alpha\frac{\rho_2}{\rho_1}\sum_{i=1}^{k-1} p_i^{(2)} + \sum_{i=0}^{k-1} p_i^{(2)}, \\ P_{loss}^{(2)} = p_0^{(2)} + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{k-1} p_i^{(2)} + \alpha\frac{\rho_1}{\rho_2}\sum_{i=1}^{k-1} p_i^{(1)} + \sum_{i=0}^{k-1} p_i^{(1)}. \end{gathered} \tag{4.3}$$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим выражение (4.1) для случая абсолютного приоритета. Потери высокоприоритетных требований в системе с абсолютным приоритетом возможны в двух случаях. Во-первых, когда система уже заполнена высокоприоритетными требованиями, и, во-вторых, когда при наличии в системе низкоприоритетных требований высокоприоритетное требование не смогло вытолкнуть ни одно из них по правилам вероятностного выталкивающего механизма. Таким образом получаем первое из выражений (4.1). Поток потерь для низкоприоритетных требований состоит из трех частей: потери при заполненной системе с интенсивностью $\rho_2 r_k$, поток потерь в случае срабатывания вероятностного выталкивающего механизма с интенсвностью $\alpha\rho_1\sum_{i=1}^{k-1} p_i$, и поток потерь при реализации абсолютного приоритета по выталкиванию низкоприоритетного требования с канала обслуживания с интенсивностью $\rho_1 p_k$, когда система содержит только низкоприоритетные требования. Находя отношение суммарной интесивности потока потерь и потока низкоприоритетных требований с интенсивностью λ_2, приходим ко второму выражению из (4.1). Таким образом, были получены выражения для вычисления вероятностей потери требований обоих типов в системе с абсолютным приоритетом.

Аналогичное доказательство для системы с относительным приоритетом приведено в работе [93].

Вероятности потерь обоих типов требований для системы с вероятностным приоритетом имеют вид, аналогичный системе с относительным приоритетом. Потоки потерь требований формируются точно таким же образом. Размеченные графы этих систем отличаются только переходами между состояниями, поэтому выражение (4.2) будет верно и для этого случая тоже.

Осталось рассмотреть случай чередующегося приоритета. В этом случае поток потерь требований первого типа состоит из четырех частей.

Рассмотрим случай, когда приоритет отдан первому типу требований. Потери требований первого типа будут происходить с интенсивностью $\rho_1 p_0^{(1)}$, когда система уже заполнена требованиями только этого же типа. Вторая составляющая потока потерь образуется неудачными исходами при попытке выталкивания требования второго типа из накопителя и имеет интенсивность $(1-\alpha)\rho_1 \sum_{i=1}^{k-1} p_i^{(1)}$.

Теперь рассмотрим случай, когда приоритет отдан требованиям второго типа. Тогда потери требований первого типа происходят с интенсивностью $\alpha\rho_2 \sum_{i=1}^{k-1} p_i^{(2)}$ при успешной реализации вероятностного выталкивающего механизма для требований второго типа и сопутствующим выталкиванием требований первого типа, а также с интенсивностью $\sum_{i=0}^{k-1} p_i^{(2)}$, когда система заполнена только требованиями второго типа, которые момент поступления требования имеют приоритет по постановке в очередь и по обслуживанию. Суммируя все эти интенсивности, получаем интенсивность потока потерь требований первого типа для системы с чередующимся приоритетом, которая задается первым выражением из (4.1). Вероятность потери требований второго типа получается после проведения аналогичных рассуждений. Таким образом, лемму 4.1 можно считать доказанной.

Воспользуемся доказанной леммой для изучения вероятностных характеристик систем, которые были рассмотрены в предыдущих главах данной диссертационной работы.

Одним из важнейших свойств «укороченных» систем уравнений, полученных во второй и третьей главах, является факт того, что в качестве неизвестных в этих системах рассматриваются все вероятности, необходимые для вычисления вероятностей потери с использованием формул (4.1)-(4.3). Таким образом, для получения значения вероятностей потери обоих типов требований в рассматриваемых системах нет необходимости находить неизвестных вероятности всех состояний модели, а достаточно только решить «укороченную» систему линейных уравнений и найти значения вероятностей пребывания системы в «опорных» состояниях.

Для получения результатов численного исследования рассматриваемых систем массового обслуживания автором диссертационной работы был разработан комплекс программ на встроенном языке математического пакета MATLAB. В предыдущих главах был показан способ уменьшения порядка решаемой системы уравнений равновесия. Аналитические выражения, полученные во второй и третьей главе, достаточно сложны и требуют проверки. В качестве одного из способов проверки выбирается сравнение решений, получаемых при решении исходной СУР и решения «укороченных» систем уравнений.

Исходя из этих рассуждений, программный комплекс состоит из двух частей: модули для решения исходных СУР и модули для решения «укороченных» систем уравнений. У автора диссертационной работы имеется свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012619598 на тему «Программное обеспечение для расчета вероятностных характеристик двухпотоковых систем массового обслуживания с вероятностным выталкивающим механизмом»., выданное Роспатентом (Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 24.10.2012). Данный программный комплекс содержит в себе примеры модулей для расчета вероятностных характеристик рассматриваемых моделей.

4.1.1. Влияние типа приоритета

Первым из интересующих нас результатов является влияние на вероятности потери требований обоих типов параметра α вероятностного выталкивающего механизма. Для исследования этого вопроса рассмотрим два характерных режима работы системы. Первый режим соответствует слабой загрузке системы, а второй режим отвечает сильной загрузке системы приоритетными требованиями. В качестве конкретных значений параметров для этих режимов примем $\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9$ и $\rho_1 = 1.2, \rho_2 = 0.2$ соответственно. Результаты, полученные для системы с относительным приоритетом, представлены на рис. 4.1а и 4.1б. Похожие результаты для систем с относительным и абсолютным приоритетом были получены ранее при *k* = 31 в статьях [92, 93, 94, 95], поэтому для возможности сравнения наши результаты построены при таком же *k*. Для системы с абсолютным приоритетом графики представлены на рис. 4.2а и 4.2б. Для системы с чередующимся приоритетом результаты приведены на рис. 4.3а и 4.3б. Для системы с вероятностным приоритетом в качестве наиболее интересного был выбран случай равновероятного выбора на обслуживание требований обоих типов, то есть были взяты значения параметров $æ_1 = æ_2 = 0.5$. Результаты для этого случая представлены на рис. 4.4а и 4.4б.

При слабой загрузке зависимость вероятности потерь от вероятности вытеснения из накопителя является близкой к линейной вне зависимости от типа приоритета. Это видно из графиков, полученных для всех систем на рис. 4.1а – 4.4а.

При сильной же загрузке системы с приоритетами тоже начинают себя вести похожим образом и при определенных интенсивностях входных потоков будут игнорировать обычные требования, в частности это видно из рис. 4.1б-4.4б при вероятностях выталкивания близких к 1. Тогда обычные требования вообще не будут доходить до обслуживания и будут выталкиваться еще из накопителя или отвергаться на входе в систему. Такой эффект ранее был назван “забиванием” системы приоритетными требованиями, при котором накопитель системы заполняется приоритетными требованиями, с которыми система уже не успевает справлятся. В этом случае у низкоприоритетного требования практическине остается шанса занять место в накопителе системе, и уж, тем более, удержаться в нем до обслуживания.

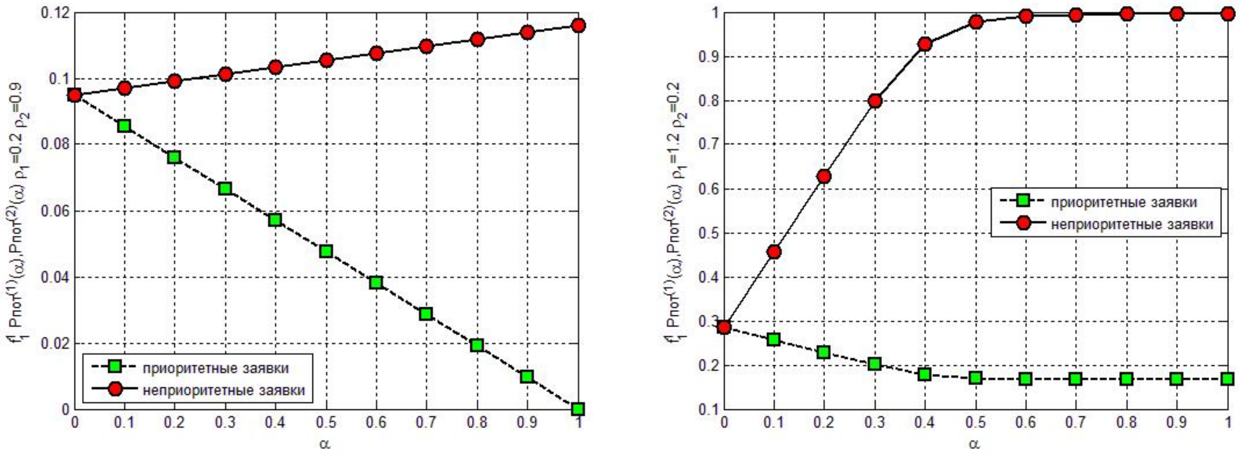

Рисунок 4.1 - Зависимость вероятности потери требований обоих типов от α для системы с относительным приоритетом: а) $\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9$; б) $\rho_1 = 1.2, \rho_2 = 0.2$

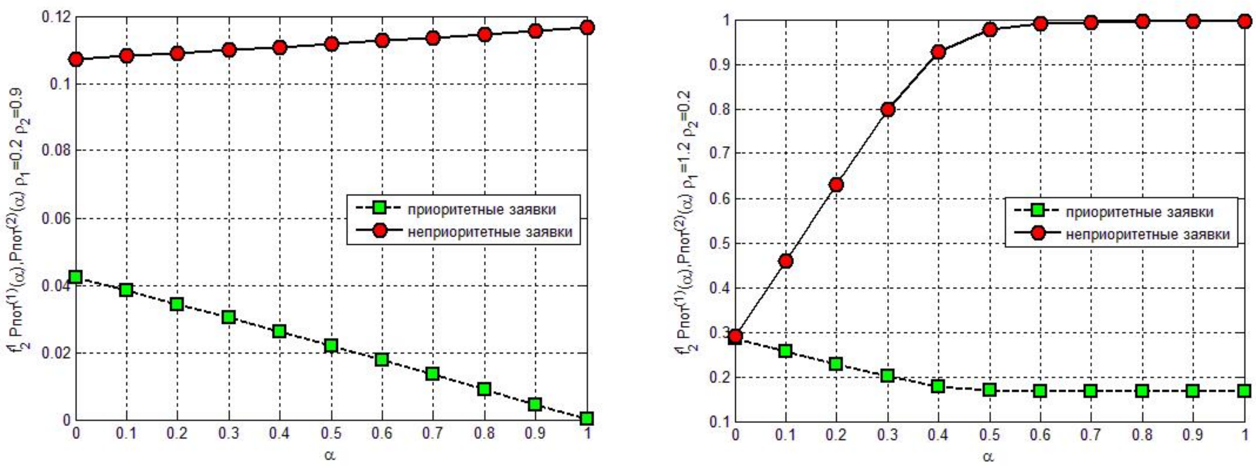

Рисунок 4.2 - Зависимость вероятности потери требований обоих типов от α для системы с абсолютным приоритетом: а) $\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9$; б) $\rho_1 = 1.2, \rho_2 = 0.2$

Если сравнивать влияние типа приоритета на поведение системы, то во всех трех случаях, самое сильное слияние на вероятности потерь все равно оказывает вероятностный выталкивающий механизм, который позволяет менять исследуемую характеристику для приоритетных требований в рассмотренных случаях до величины близкой к нулю в слабонагруженной системе и до некоторого минимума в сильнонагруженной, что является удобным механизмом настройки пропускной способности системы массового обслуживания.

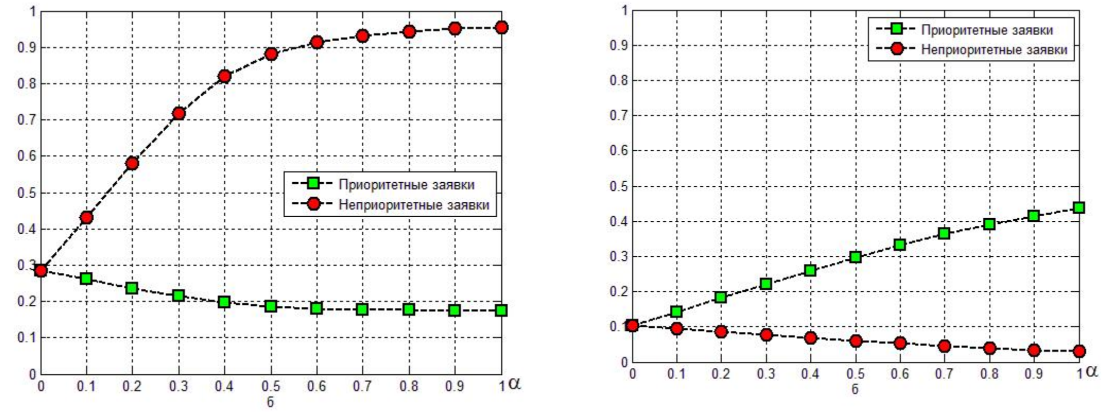

Рисунок 4.3 - Зависимость вероятности потери требований обоих типов от α для системы с чередующимся приоритетом: а) $\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9$; б) $\rho_1 = 1.2, \rho_2 = 0.2$

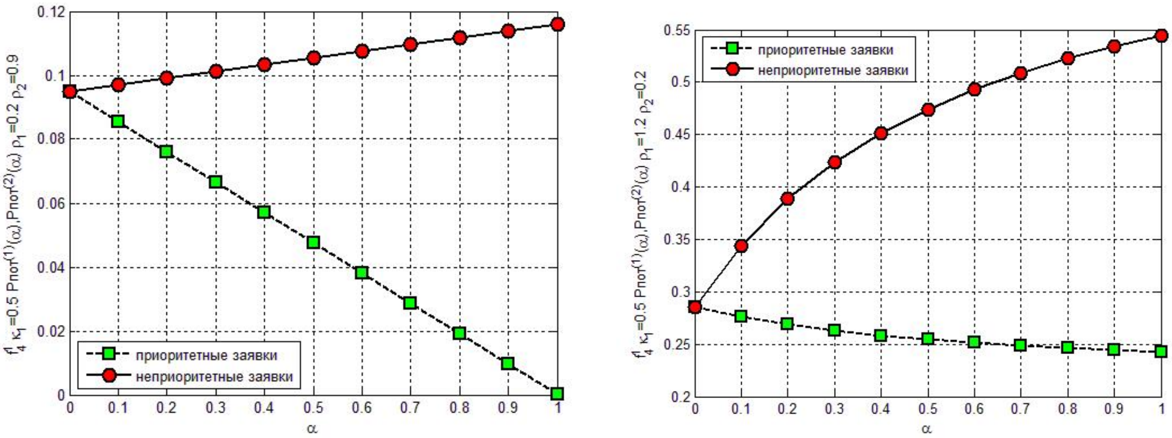

Рисунок 4.4 - Зависимость вероятности потери требований обоих типов от α для системы с вероятностным приоритетом: а) $\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9$; б) $\rho_1 = 1.2, \rho_2 = 0.2$

4.1.2. Влияние объема накопителя

Еще один важный вопрос, который ранее не был полноценно исследован, касается влияния объема накопителя на потери. Как было отмечено авторами [92, 93], максимально достигнутое ими k равнялось 31. Благодаря полученным в диссертации результатам, были проведены численные расчеты для большего диапазона значений k и исследованы зависимости вероятностей потери от емкости накопителя. Результирующие графики представлены на рис. 4.5 – 4.8. Работа систем рассматривалась в двух режимах: $(\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9)$ и $(\rho_1 = 1.2, \rho_2 = 0.9)$, что позволяет получить полное представление о характеристиках системы как при слабой загрузке высокоприоритетными требованиями, так и при высокой.

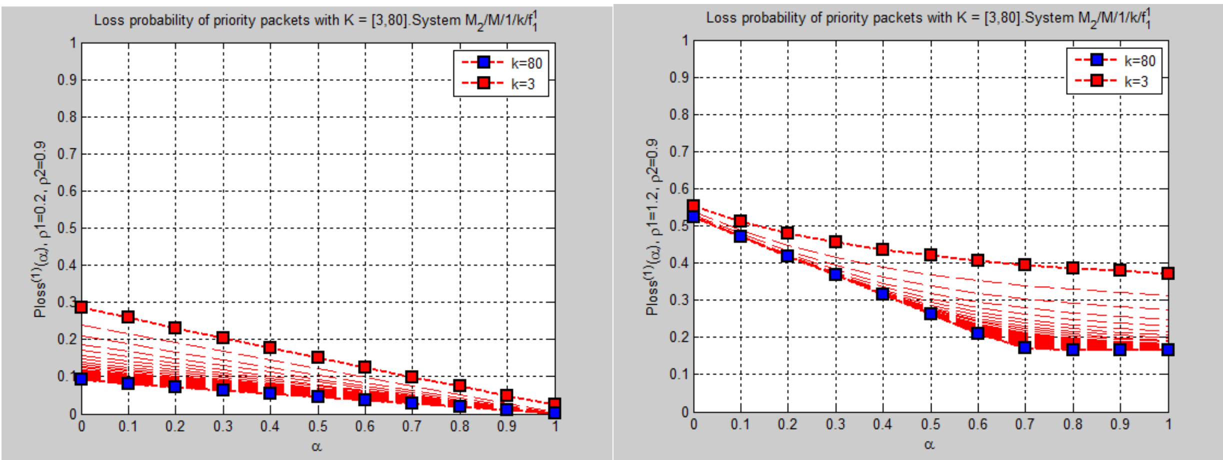

Рисунок 4.5 - Вероятность потери требований первого типа в системе $\overrightarrow{M_2} / M / 1 / k / f_1^1$ в зависимости от ее объема:а)$(\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9)$;б) $(\rho_1 = 1.2, \rho_2 = 0.9)$

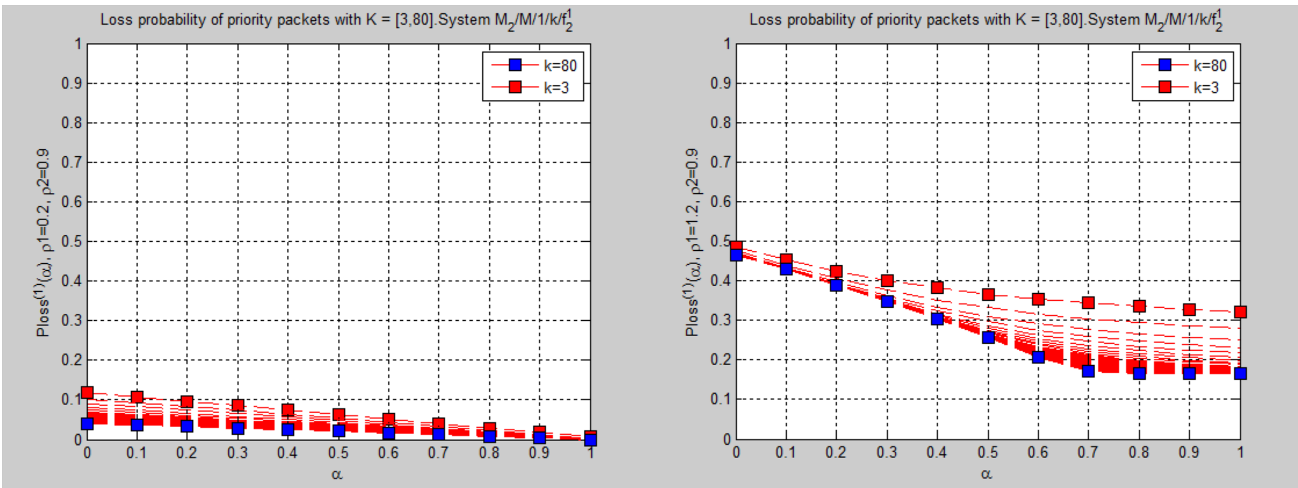

Рисунок 4.6 - Вероятность потери требований первого типа в системе $\overrightarrow{M_2} / M / 1 / k / f_2^1$ в зависимости от ее объема: а)$(\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9)$; б) $(\rho_1 = 1.2, \rho_2 = 0.9)$

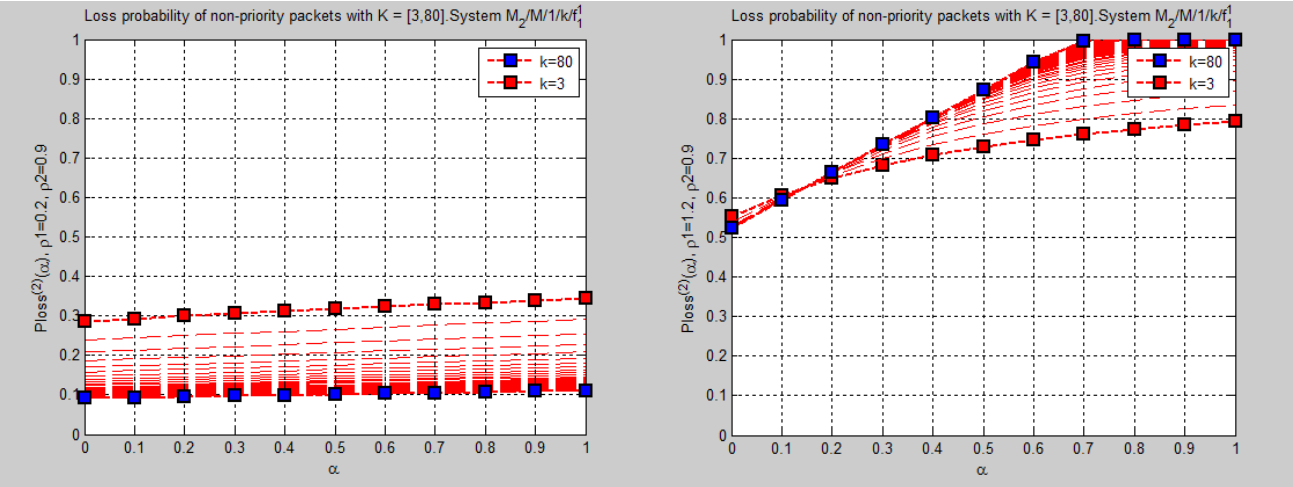

Рисунок 4.7 - Вероятность потери требований второго типа для системы $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_1^1$ в зависимости от ее объема: а) $(\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9)$; б) $(\rho_1 = 1.2, \rho_2 = 0.9)$

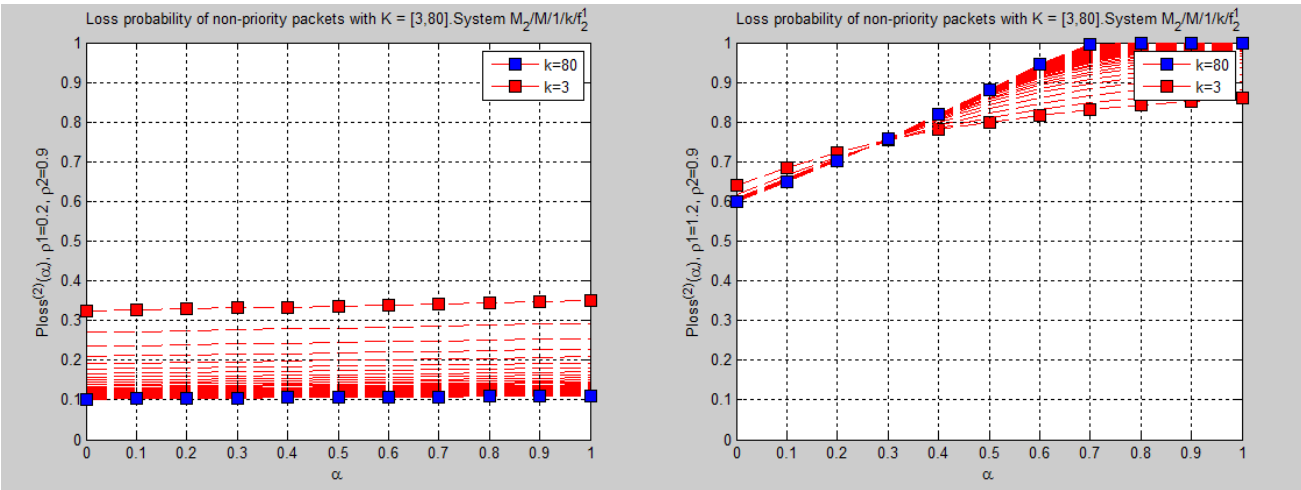

Рисунок 4.8 - Вероятность потери требований второго типа для системы $\overrightarrow{M_2}/M/1/k/f_2^1$ в зависимости от ее объема: а) $(\rho_1 = 0.2, \rho_2 = 0.9)$; б) $(\rho_1 = 1.2, \rho_2 = 0.9)$

Первый важный результат показывает, что уменьшение вероятности потери в зависимости от емкости буфера происходит достаточно медленно. Все системы, кроме системы с чередующимся приоритетом, при $k \to \infty$ приближаются к системе типа Уайта-Кристи-Стефана, характеризуемой $P_{пот}^{(1)} = P_{пот}^{(2)} = 0$.

Вторым интересным результатом является выяснение степени влияния параметра k на вероятности потери. Как видно из рис. 4.5 – 4.7, влияние этого параметра с ростом загруженности системы приоритетными требованиями уменьшается. С уменьшением вероятности выталкивания степень этого влияния также уменьшается, поскольку приоритетные требования будут теряться еще на входе в систему. Поэтому данный параметр существенно влияет на характеристики системы только в случае сильной загруженности приоритетными требованиями.

Наблюдается интересный эффект, касающийся низкоприоритетных требований. Если вероятность выталкивания из накопителя велика, то тогда для низкоприоритетных требований предпочтительнее, чтобы накопитель был меньшего размера. Эта особенность имеет вполне логичное объяснение. Если обычное требование будет долго находится в накопителе, то тогда с большой вероятностью оно будет замещено приоритетным. А если накопитель сравнительно небольшой, то шансы быть обслуженным у неприоритетного требования растут, поэтому вероятность потери будет уменьшаться. Но с ростом загруженности ρ_1 эти шансы вновь начинают уменьшаться, и точка пересечения двух кривых начинает сдвигаться влево, что хорошо видно на рис. 4.7 - 4.8.

4.2. Области запирания системы для неприоритетных требований

Одним из наиболее интересных результатов, которые были получены в п. 4.1, является возможность “запирания” системы для неприоритетных требований. Как видно из рис. 4.1б-4.4б, при изменении параметра вероятностного выталкивающего механизма возможно увеличение вероятности потери неприоритетных требований до величины близкой к единице. Возникает вопрос о том, каковы границы этого области загрузки, где наблюдается этот эффект, то есть при каких значениях интенсивностей входящих потоков вероятность выталкивания становится близкой к единице в области больших значений вероятности выталкивания α.

Для этого введем понятие области запирания, определив ее, как ту область в пространстве коэффициентов загрузки (ρ_1, ρ_2), в которой вероятность потери неприоритетного требования превосходит заданный уровнень при достаточно больших значениях параметра вероятностного выталкивающего механизма α.

В диссертационной работе были построены области запирания для всех рассмотренных в ней приоритетных систем. Вычисления проводились для всех значений интенсивностей входящих потоков ρ_1 и ρ_2 в диапазоне от 0 до 4. Для построения областей запирания были выбраны уровни [0, 0.5, 0.9, 0.95, 0.99, 0.999, 0.9999]. Результаты построенных областей для систем с классическими типами приоритетов приведены на рис. 4.9-4.10, а для системы с чередующимся приоритетом они даются на рис 4.11. Для системы с вероятностным приоритетом были рассмотрены три случая. Первый, отвечающий $æ_1$=1 и $æ_2$=0, соответствовал случаю, когда система функционирует как система с относительным приоритетом. Для этого случая результаты приведены на рис. 4.9. Второй, соответствовал равноценным по важности потокам, когда $æ_1 = æ_2$ =0.5 (рис. 4.13) и, наконец, третий случай отвечал модели противоположных приоритетов, когда требования второго типа имели приоритет по постановке в очередь, но зато требования первого типа имели приоритет по выталкиванию из накопителя системы (рис. 4.12).

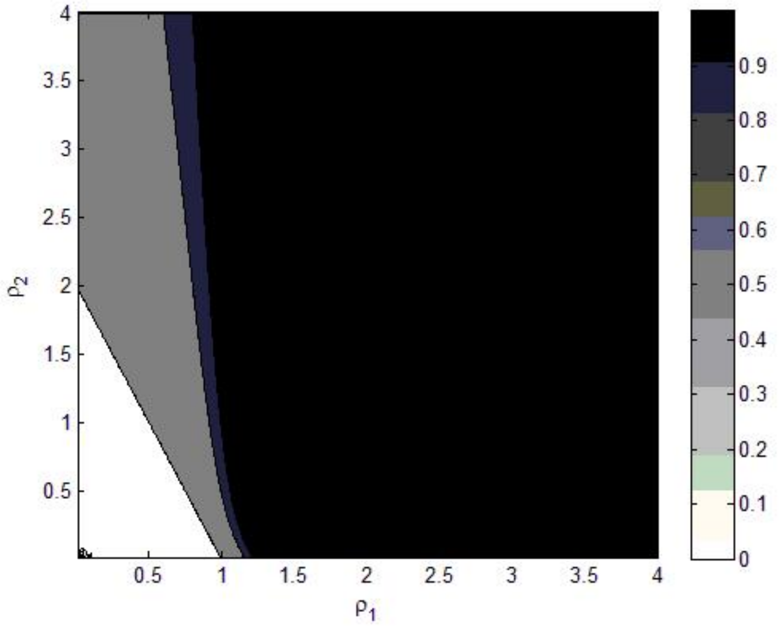

Рисунок 4.9 - Области запирания системы с относительным приоритетом

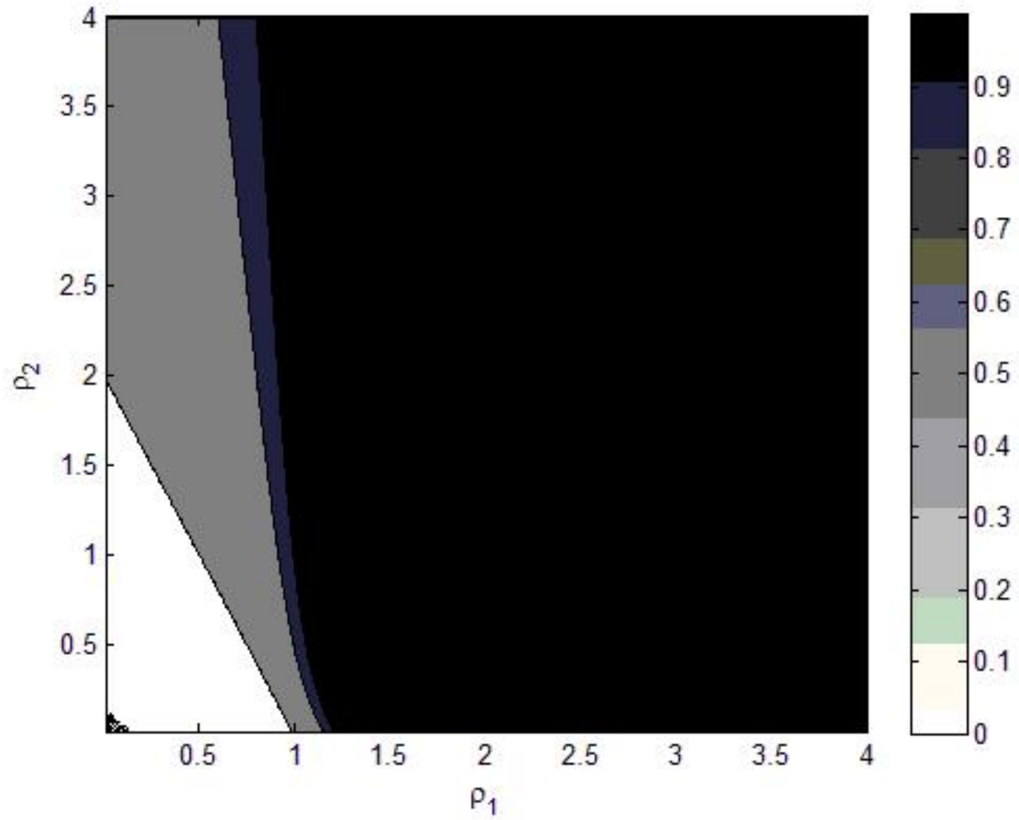

Рисунок 4.10 - Области запирания системы с абсолютным приоритетом

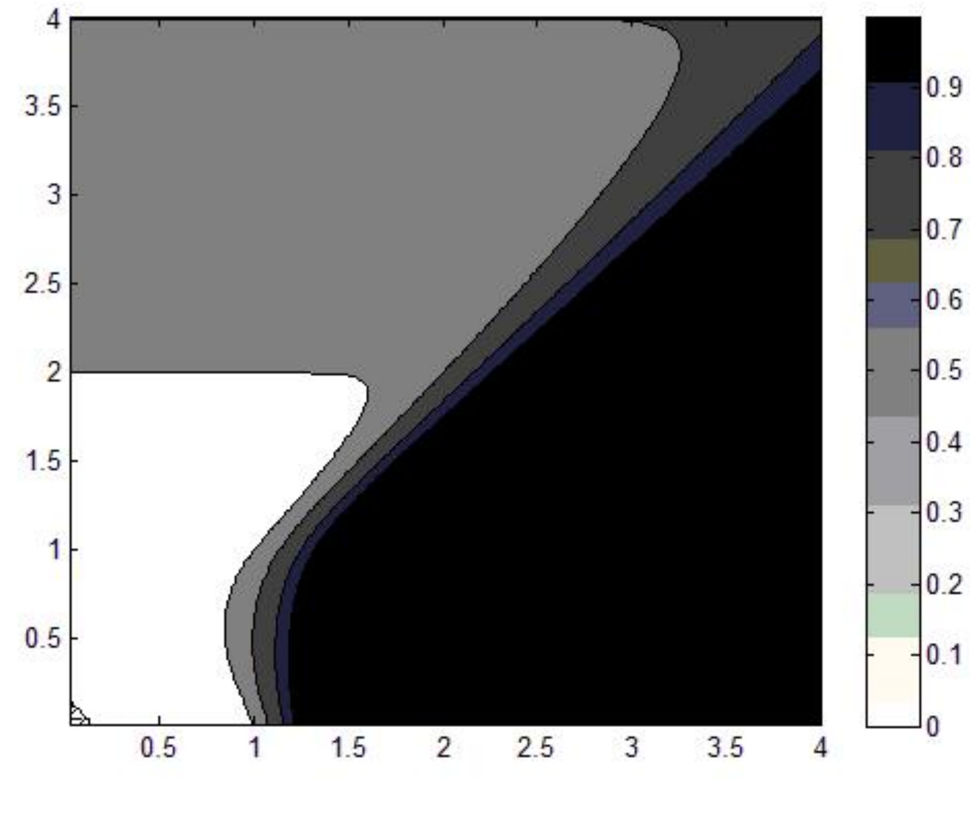

Рисунок 4.11 - Области запирания системы с чередующимся приоритетом

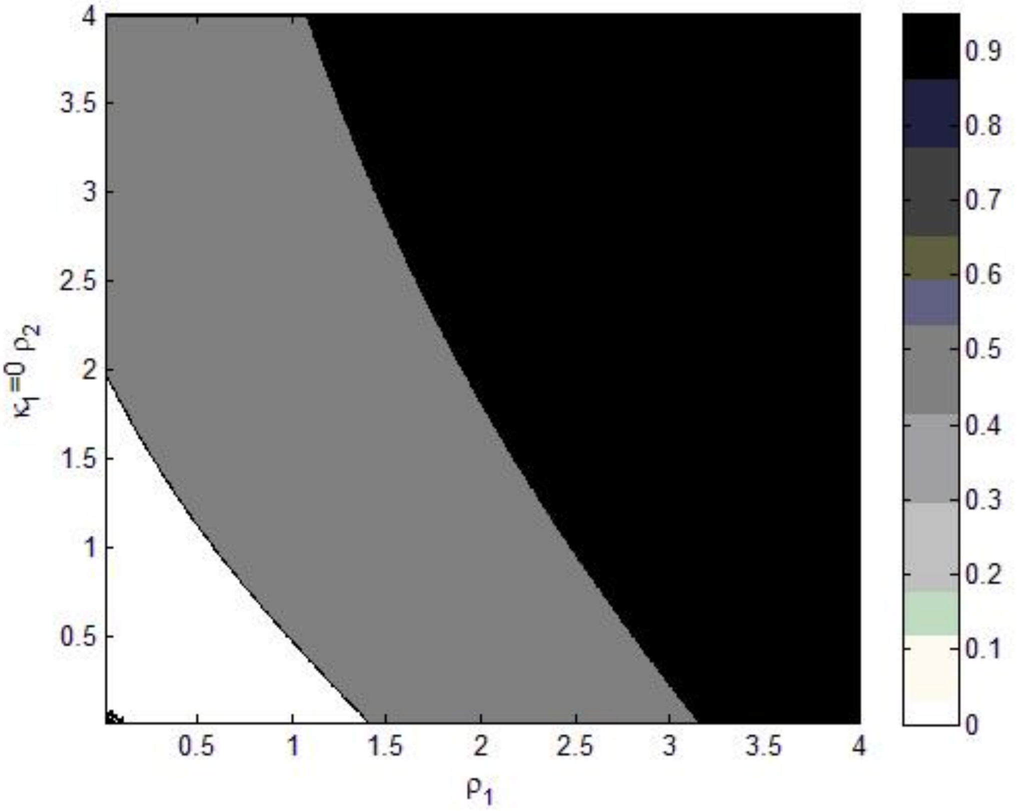

Рисунок 4.12 - Области запирания системы с противоположным приоритетом

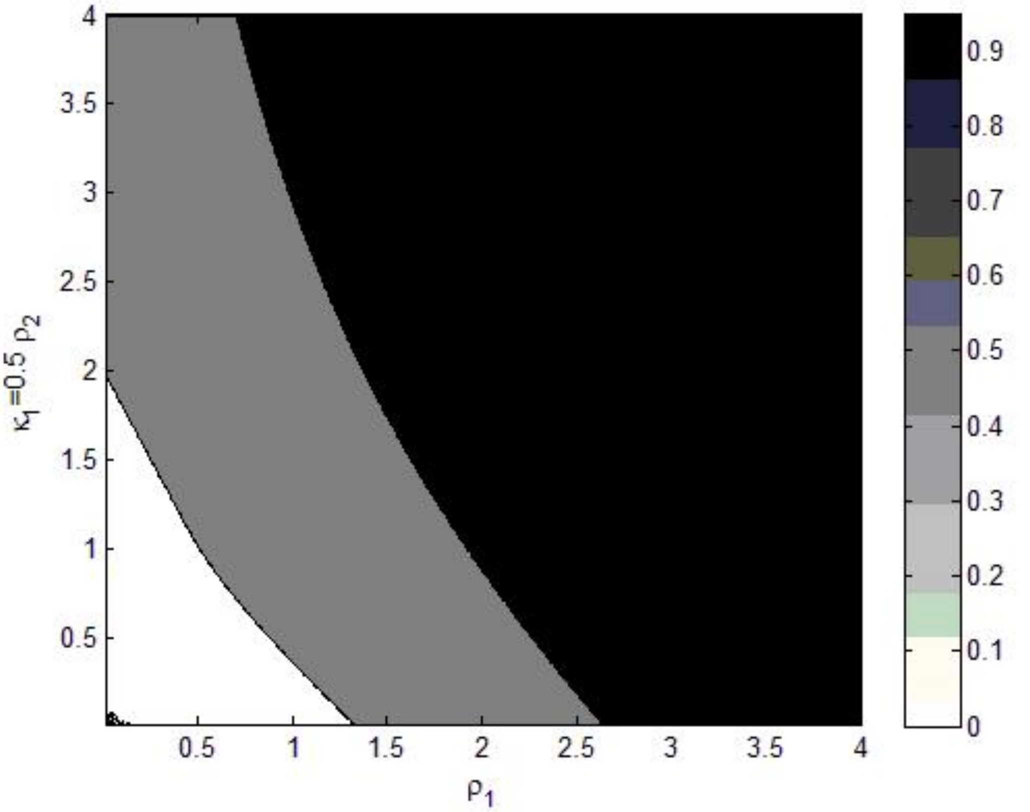

Рисунок 4.13 Области запирания модели вероятностного приоритета($æ_1 = æ_2 = 0.5$)

4.3. Области действия линейного закона потерь

Еще одним важным результатом, полученным в п. 4.1, является получение тех областей в пространстве аргументов (ρ_1, ρ_2), при которых зависимость вероятности потери от параметра вероятностного выталкивающего механизма α имеет линейный вид или по крайней мере близка к нему. Существование таких областей бросается в глаза при анализе данных на рис. 4.1-4.4. Возникает вопрос о том, каковы границы этого эффекта, то есть при каких значениях интенсивностей входящих потоков вероятности потери будут зависеть от параметра выталкивающего механизма линейно или будут иметь относительное отклонение от него не больше заданного фиксированного уровня.

Воспользуемся тем, что для каждой из рассмотренных систем возможно получение численного решения для произвольного значения параметра α, а для частных случаев α =0 и α =1 возможно получение аналитического решения, которое не потребует дополнительных вычислений в процессе функционирования системы. Эти результаты можно эффективно использовать, при мониторинге СМО в режиме реального времени, чтобы в процессе функционирования системы не производить полномасштабное решение задачи с вычислением всех коэффициентов матрицы системы линейных уравнений и последующим ее решением, а воспользоваться, например, линейной аппроксимацией, которая может быть построена по двум крайним точкам с известным заранее решением.

Введем понятие области линейности, как той области в пространстве аргументов (ρ_1, ρ_2), в которой относительное отклонение вероятности потери требования заданного типа от линейной аппроксимации, построенной по двум крайним точкам $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ будет меньше заданного малого уровня. Вычисление относительного отклонения предлагается осуществлять в виде

$$\delta P_{loss}^{(i)} = \max_{0 \le \alpha \le 1} \{ \left| P_{loss}^{(i)}(\alpha) - (P_{loss}^{(i)}(0)(1-\alpha) + \alpha P_{loss}^{(i)}(1)) \right| \}, \qquad (4.4)$$

где $P_{loss}^{(i)}(\alpha)$ - вероятности потери требований *i*-го типа, полученные численно, а $P_{loss}^{(i)}(0)$ и $P_{loss}^{(i)}(1)$ - точные значения, задаваемые аналитической теорией.

В диссертационной работе были построены области линейности для всех рассмотренных нами систем. Вычисления проводились для всех базовых загрузочных коэффициентов ρ_1 и ρ_2 в диапазоне от 0 до 4. Для построения областей линейности были выбраны уровни [0,0.01,0.05,0.1,0.25]. Результаты построения областей для систем с классическими типами приоритетов приведены на рис. 4.14-4.15, а для системы с чередующимся приоритетом - на рис 4.16. Следует отметить, что система с чередующимся приоритетом имеет области симметричные относительно аргументов (ρ_1, ρ_2), то есть при замене их местами получаются области симметричные относительно прямой, точки которой удовлетворяют условию $\rho_1 = \rho_2$. Для системы с вероятностным приоритетом были рассмотрены три случая. Первый, когда система функционирует как система с относительным приоритетом. Для этого случая результаты приведены на рис. 4.14. Второй отвечал $æ_1 = æ_2 = 0.5$ (рис. 4.17), а третий случай означал наличие противоположных приоритетов, когда требования второго типа имели приоритет по постановке в очередь, а требования первого типа имели приоритет по выталкиванию из накопителя системы (рис. 4.18). Из рис. 4.14 – 4.18 видно, что для множества систем данные области занимают достаточно большую часть пространства аргументов (ρ_1, ρ_2).

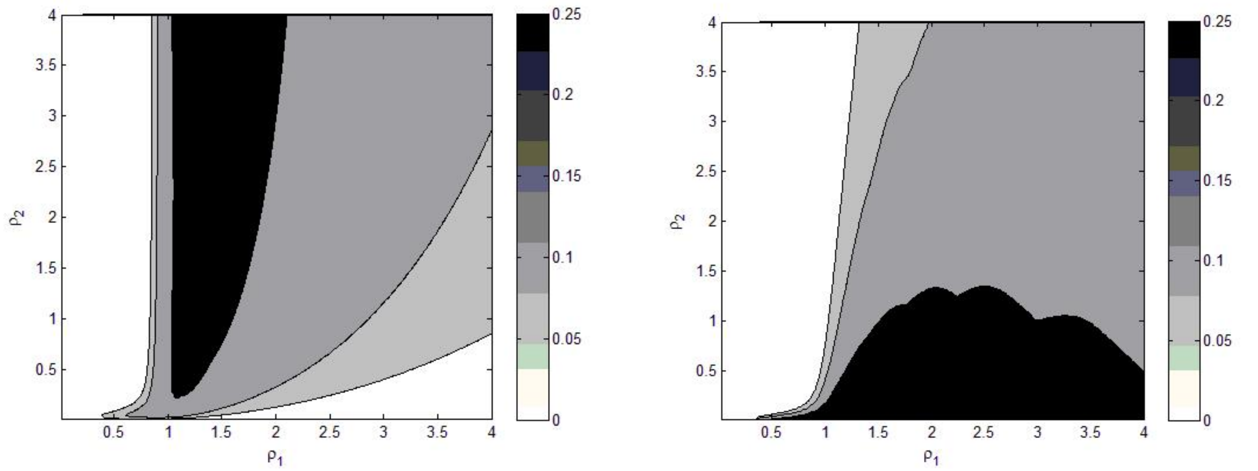

Рисунок 4.14 - Области линейности для системы с относительным приоритетом: а) приоритетные; б) неприоритетные требования

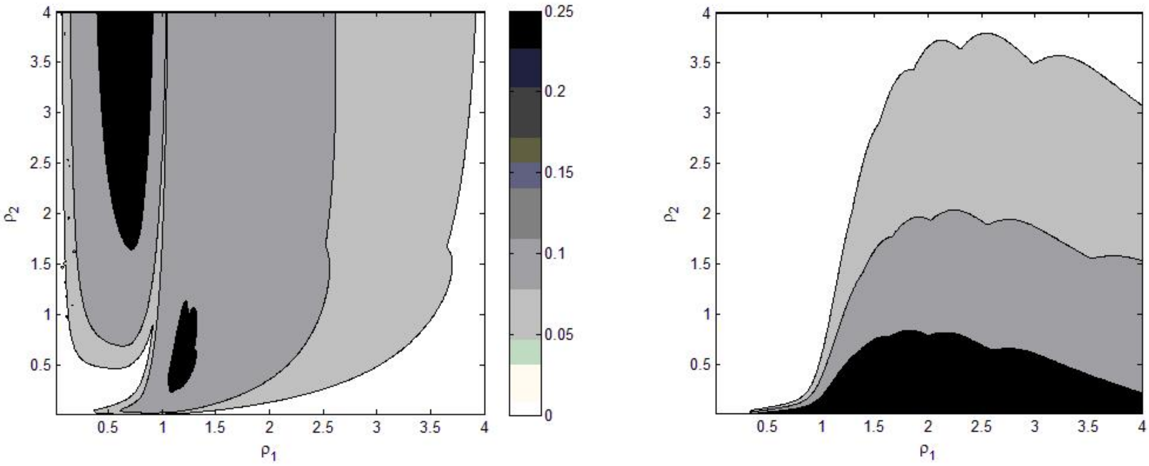

Рисунок 4.15 - Области линейности для системы с абсолютным приоритетом: а) приоритетные; б) неприоритетные требования

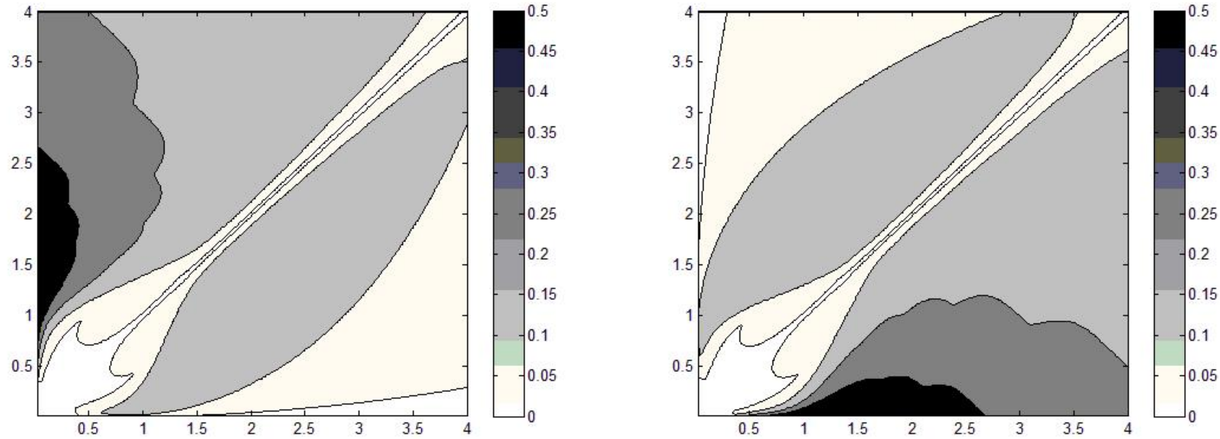

Рисунок 4.16 - Области линейности для системы с чередующимся приоритетом: а) приоритетные; б) неприоритетные требования

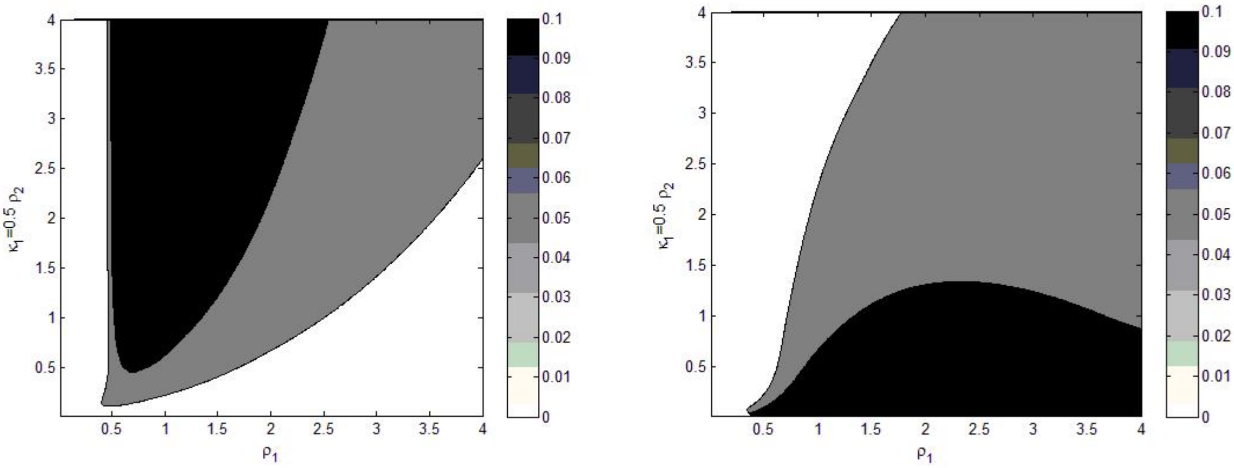

Рисунок 4.17 - Области линейности для системы с вероятностным приоритетом: а) приоритетные; б) неприоритетные требования

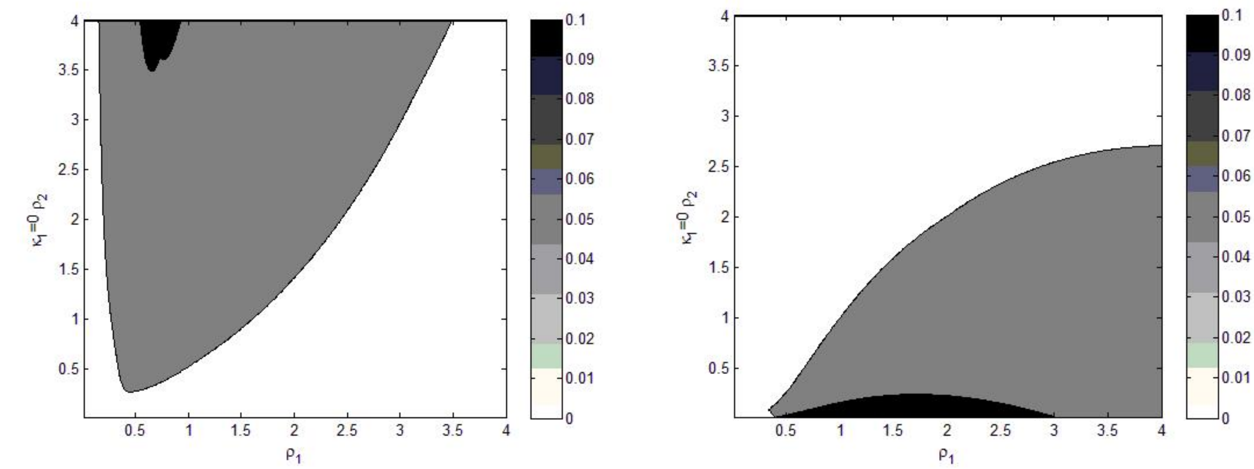

Рисунок 4.18 - Области линейности для системы с противоположными приоритетами: а) приоритетные; б) неприоритетные требования

Заключение

В диссертационной работе проведенно исследование двухпотоковых марковских СМО с конечным накопителем, вероятностным выталкивающим механизмом и различными приоритетными дисциплинами. В работе предложены новые приоритетные модели систем массового обслуживания, которые ранее не были рассмотрены в литературе. Также, для рассматриваемых систем предлагается раширение системы обозначений приоритетных систем Г.П. Башарина на случай систем, рассмотренных в третьей главе диссертации. Для исследования введенных систем был разработан метод, описанный во второй главе диссертации, который позволяет уменьшить порядок системы линейных уравнений равновесия с величины пропорциональной k^2 до порядка k. Применение этого метода было продемонстрировано на случаях классичеких приоритетных дисциплин: относительного и абсолютного приоритетов. Также, было показано, как этот метод применяется для моделей с неклассическими приоритетными дисциплинами: чередующимся и вероятностным приоритетами. Для этих дисциплин были подробно описаны все особенности применения разработанного метода. Последняя глава диссертации была посвящена изучению вероятности потерь требований в рассматриваемых моделях СМО. Для подобных систем были впервые введены понятия областей «линейности» и «запирания». Также, для всех моделей определены и построены границы этих областей и описана их практическая значимость при реализации реальных технических систем.

Дальнейшие исследования планируется продолжить в направлении адаптации разработанного в диссертации метода к полумарковским системам с вероятностным выталкивающим механизмом и динамическому размеру

Результаты диссертационной работы получены при поддержке Правительства Санкт-Петербурга (конкурсы 2012 и 2013 годов для студентов и аспирантов) и стипендии Президента Российской Федерации на 2013-2015

молодым ученым и аспирантам, осуществляющим перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники.

Список литературы

1. White H., Christie L.S. Queueing with preemptive priorities or with breakdown // Operations research, 1958, vol. 6, no. 1, p. 79-95.
2. Stephan F.F. Two queues under preemptive priority with Poisson arrival and service rates // Operations research, 1958, vol. 6, no. 3, p. 399-418.
3. Heathcote C.R. The time-dependent problem for queue with preemptive priorities // Operations research, 1959, vol. 7, no. 5, p. 670-680.
4. Heathcote C.R. A single queue with several preemptive priority classes // Operations research, 1960, vol. 8, no. 5, p. 630-638.
5. Heathcote C.R. Preemptive priority queueing // Biometrika, 1961, vol. 48, no. 1, p.57-63.
6. Miller L.W. Priority queues // Annals of mathematical statistics, 1960, vol.31, no. 1, p.86-103
7. Jaiswal N.K. Preemptive resume priority queue // Operations research, 1961, vol. 9, no. 5, p. 732-742.
8. Welch P.D. On preemptive resume priority queues // Annals of mathematical statistics, 1964, vol. 35, no. 2, p. 600-612.
9. Gaver D.P. A waiting line with interrupted service, including priorities // Journal of Royal statistical society, ser. B, 1962, vol. 24, no. 1, p. 73-90.
10. Chang W. Preemptive priority queues // Operations research, 1965, vol.13, no. 5, p. 820-827.
11. Avi-Itzhak B., Naor P. On a problem of preemptive priority queueing // Operations research, 1961, vol. 9, no. 5, p. 664-672.
12. Thiruvengadam K. Studies in wating line problems. Ph.D. thesis. Delhi: University of Delhi, 1965.
13. Thiruvengadam K. A priority assignment in machine interference problem // OPSEARCH, 1964, vol. 1, no. 1, p. 197-216.

14. Jaiswal N.K., Thiruvengadam K. Finite-source priority queues // SIAM journal of applied mathematics, 1967, vol. 15, no. 5, p. 1278-1293.
15. Cobham A. Priority assignment in waiting line problems // Journal of the Operations research society of America, 1954, vol. 2, no. 1, p. 70-76.
16. Holley J.L. Waiting line subject to priorities // Journal of the Operations research society of America, 1954, vol. 2, no. 3, p. 341-343.
17. Dressin S.A., Reich E. Priority assignment on a waiting line // Quarterly of applied mathematics, 1957, vol. 15, no. 2, p. 208-211.
18. Kesten H., Runneubury J.T. Priority in waiting line problems // Proceedings Koninklijke Nederlandse Academie van Watenschappen, ser. A, 1957, vol. 60, no.3, p. 312-336.
19. Morse P.M. Queues, inventories and maintenance. N.Y.: Wiley, 1985.
20. Jaiswal N.K. Time-dependent solution of the head-of-the-line priority queue // Journal pf Royal statistical society, series B, vol. 24, no. 1, p. 53-70.
21. Welch P.D. Some contribution to the theory of priority queues. Ph.D. thesis. N.Y.: Columbia university, 1963.
22. Takacz L. Priority queues // Operations research, 1964, vol. 12, no. 1, p. 63-74.
23. Avi-Itzhak B., Brosh I., Naor P. on discretionary priority queening // Zeitschrift fuer angewandte Mathematik und Mechanik, 1964, Band 44, Heft 6, S. 235-242.
24. Etschmaier M. discretionary priority processes. M.S. thesis. Cleveland: Case institute of technology, 1966.
25. Avi-Itzhak B., Maxwell W.L., Miller L.W. Queueing with alternating priorities // Operations research, 1965, vol. 13, no. 2, p. 306-318.
26. Maxwell W.L. An investigation of multi-product, single-machine scheduling and inventory problems. Ph.D. thesis. Ithace: Cornell university, 1961.
27. Miller L.W. Alternating priorities in multi-class queues. Ph.D. thesis. Ithaka: Cornell university, 1964.
28. Mevert P. A priority system with setup times // Operations research, 1968, vol. 16, no. 3, p. 602-613.

29. Jackson J.R. Some problems in queueing with dynamic priorities // Naval research logistics quarterly, 1960, vol. 7, no. 3, p. 235-249.
30. Jackson J.R. Queues with dynamic priority discipline //Management science, 1961, vol. 8, no. 1, p. 18-34.
31. Jackson J.R. Waiting-time distributions for queues with dynamic priorities // Naval research logistics quarterly, 1962, vol. 9, no. 1, p. 31-36.
32. Avi-Itzhak B. Preemptive repeat priority queues as a special case of multipurpose server problem I, II // Operations research, 1963, vol. 11, no. 4, p. 597-609, 610-619.
33. Keelson J. Queues subject to service interruption // Annals of mathematical statistics, 1962, vol. 33, no. 4, p. 1314-1322.
34. Jaiswal N.K. Priority ques. N.Y.: Academic Press, 1968.
35. Башарин Г.П. О пуассоновсих обслуживающих системах с абсолютным приоритетом и обратной связью // массовое обслуживание в системах передачи информации. М.: Наука, 1969, с. 3-20.
36. Башарин Г.П., Харкевич А.Д., Шрепс М.А. Массовое обслуживание в телефонии. М.: Наука, 1968.
37. Башарин Г.П. Об обслуживании двух потоков с относительным приоритетом на полнодоступной системе с ограниченным числом мест для ожидания // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1967, № 2, с. 72-86.
38. Кокотушкин В.А., Михалев Д.Г. Обслуживание полнодоступным пучком нескольких потоков с относительным приоритетом // Проблемы передачи информации, 1969, т. 5, № 2, с. 53-60.
39. Бочаров П.П., Лысенкова В.Т. Об однолинейной системе с относительным приоритетом и ограниченным числом мест для ожидания // Вероятностные задачи в структурно-сложных системах коммутации. М.: Наука, 1969, с. 59-65.
40. Бочаров П.П., Лысенкова В.Т. Об однолинейной системе с относительным приоритетом и ограниченной очередью // I Всесоюзное научно-техническое

совещание по автоматизации и коммутации. Тезисы докладов. Рига: 1968, с. 118-120.

41. Бочаров П.П. Об обслуживании на однолинейной пуасонно-эрланговской системе с ограниченным числом мест для ожидания и относительным приоритетом // Проблемы передачи информации, 1969, т. 5, № 4, с. 50-57.
42. Духовный И.М. Некоторые задачи обслуживания двух потоков с приоритетами // Массовое обслуживание в системах передачи информации. М.: Наука, 1969, с. 21-31.
43. Wagner W. On combined delay and loss systems with non-preemptive priority service // Fifth international teletraffic congress. Preprints technical papers. N.Y.: Rockfeller university, 1967, p. 73-84.
44. Башарин Г.П. Некоторые результаты для систем с приоритетом // Массовое обслуживание в системах передачи информации М.: Наука, 1969, с. 39-53.
45. Кокотушкин В.А., Михалев Д.Г. К вопросу расчета накопителей центра коммутации сообщений // Электросвязь, 1969, № 9, с. 45-53.
46. Кокотушкин В.А., Михалев Д.Г. Обслуживание однокомандной системой нескольких потоков с абсолютным приоритетом при принятии в очередь и на обслуживание и с ограниченным числом мест для ожидания // I Всесоюзное научно-техническое совещание по автоматизации и коммутации. Тезисы докладов. Рига: 1968, с. 118-120.
47. Башарин Г.П. Обслуживание двух потоков на однолинейной системе с ограниченным числом мест для ожидания и абсолютным приоритетом // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1967, № 5, с. 106-116.
48. Basharin G.P. Poisson service system with priorities and limiting waiting capacity // Fifth international teletraffic congress. Preprints technical papers. N.Y.: Rockfeller university, 1967, p. 66-72.
49. Бочаров П.П. Исследование однолинейной системы массового обслуживания с несколькими входящими потоками и ограниченной очередью. Кандидатская диссертация. М.: УДН, 1969.

50. Kesten H., Runnenburg J. The priority in waiting line problems. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1956.
51. Avi-Itzhak B., Naor P. Some queueing problems with the service station subject to breakdown // Operations research, 1963, vol. 11, no. 2, p. 303-320.
52. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966.
53. Владимиров В.И., Матвеев В.Ф. Системы обслуживания с преимуществом и «разогревом» // Вычислительные методы и программирование. М.:МГУ, 1967, № 6, с. 259-271.
54. Барковец Е. Обслуживание с преимуществом неординарного потока вызовов // Вычислительные методы и программирования. М.: МГУ, 1967, № 6, с. 279-281.
55. Ахмутов А. К решению одной задачи массового обслуживания // Известия АН СССР Туркменской ССР, серия физико-технических, химических и геологических наук, 1965, № 6, с. 33-41.
56. Гергей И. система обслуживания с переключением // Studia scientiarum mathematica hungarica, 1968, vol. 3, no. 1, p. 167-179.
57. Духовный И.М. Однолинейная система обслуживания с чередованием приоритетов // Проблемы передачи информации, 1969,т. 5,№ 2,с. 61-71.
58. Духовный И.М. Об однолинейной системе обслуживания с чередованием приоритетов и «разогревом» // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1969, № 4, с. 66-74.
59. Духовный И.М. Системы обслуживания с ненадежным прибором и обобщенными приоритетами // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1970, № 1, с. 89-99.
60. Dukhovny I.M., Pankratov V.I. Generalized priority service and its application in analysis of one channel data transmission systems // Sixth international teletraffic congress. Preprints. Munich: 1970, p. 312/1-312/6.
61. Даниелян Э.А. Однолинейные стохастические системы обслуживания с приоритетами // Статистика и стохастические системы. М.: ВЦ МГУ, 1969, № 7, с. 1-169.

62. Димитров Б.Н. Обслуживание с приоритетами // Mathematica Balcanica, 1971, no. 1, p. 66-78.
63. Даниелян Э.А., Димитров Б.Н. Обслуживание с изменяющимися приоритетами и «разогревом» // Ученые записки ЕрГУ, 1971, № 1, с. 3-10.
64. Cohen J.W. The single server queue. Amsterdam: North-Holland, 1969.
65. Даниелян Э.А. Приоритетные задачи в системах обслуживания одним прибором // Статистика и стохастические системы. М.: ВЦ МГУ, 1971, № 13.
66. Neuts M.F., Yadin M. The transient behavior of the queue with alternating priorities, with special reference to the waiting times // Bulletin de Societe matematique Belgique, 1968, vol. 20, no. 4, p. 343-376.
67. Takacs L. Two queues attended by a single server // Operations research, 1968, vol. 16, no. 4, p. 639-650.
68. Sykes J.S. Simplified analysis of an alternating priority queueing model with setup times // Operations research, 1970, vol. 18, no. 6, p. 1182-1192.
69. Eisenberg M. Multiqueues with changeover times. Ph. D. thesis. Boston: MIT, 1967.
70. Nakamura G., Hashida O. Analysis of a non-premptive priority queueing systems with setup times // Sixth international teletraffic congress. Preprints. Munich: 1970, p. 313/1-313/7.
71. Heyman D.P. A priority queueing system with server interference // SIAM journal of applied mathematics, 1969, vol. 17, no. 1, p. 74-82.
72. Даниелян Э.А., Димитров Б.Н. О длине очереди одной двухприоритетной системы обслуживания с ненадежным прибором // Вычислительные методы и программирование. М.: МГУ, 1972, № 18, с. 113-124.
73. Веклеров Е.Б. Вероятности больших ожиданий в системах с приоритетами // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, № 1, с. 57-62.
74. Mazumdar S. On priority queues in heavy traffic // Journal of Royal statistical society, series B, 1970, vol. 32, no. 5, p. 111-114.

75. Матвеев В.Ф. Однолинейные системы многоэтапного обслуживание с приоритетами. Кандидатская диссертация. М.: МГУ, 1971.
76. Матвеев В.Ф. Однолинейная система обслуживания с приоритетом // Математические вопросы управления производством. М.: МГУ, 1970, № 2, с. 199-230.
77. Матвеев В.Ф. многоэтапные системы обслуживания // Статистика и стохастические системы. М.: ВЦ МГУ, 1973, № 18.
78. Матвеев В.Ф. Система с «разогревом» после прерывания // Вычислительные методы и программирование. М.: МГУ, 1972, № 18, с. 96-101.
79. Schrage L. A mixed-priority queue with applications to the analysis of real-time systems // Operations research, 1969, vol. 17, no. 4, p. 728-742.
80. Марьянович Т.П. Обслуживание с учетом выхода прибора из строя // VI Всесоюзное совещание по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов. Вильнюс: 1962, с. 363-364.
81. Бочаров П.П. Об однолинейной обслуживающей системе с ограниченным числом мест для ожидания и приоритетом // Проблемы передачи информации, 1970, т. 6, № 3, с. 70-77.
82. Бочаров П.П. О вычислении стационарных вероятностей в системе с относительным приоритетом и ограниченной очередью // Сборник научных трудов аспирантов. М.: УДН, 1970, № 7, с. 3-9.
83. Гнеденко Б.В., Даниелян Э.А., Димитров Б.Н., Климов Г.П., Матвеев В.Ф. Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973.
84. Джейсоул Н. Очереди с приоритетами. М.: Мир, 1973.
85. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.
86. Bondi A. An analysis of finite capacity queues with priority scheduling and common or reserved waiting areas // Computers and operations research, 1989, vol. 16, no. 3, p. 217-233.
87. Hedge N., Avrachenkov K.E. Service differentiation and guarantees for TCP elastic traffic // Lecture notes in computer science, 2002, vol. 2511, p. 159-168.

88. Kapadia A.S., Kazmi M.F., Mitchell A.C. Analysis of a finite capacity non-preemptive priority queue // Computers and operations research. 1984. Vol. 11. No. 3, p. 337-343.
89. Kapadia A.S., Chiang Y.K., Kazmi M.F. Finite capacity priority queues with potential health applications // Computers and operations research. 1985. Vol. 12. No. 4, p. 411-420.
90. Бронштейн О.И., Духовный И.М. Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах. М.: Наука, 1976.
91. Даниэлян Э.А. Приоритетные задачи в системах обслуживания одним прибором. М.:МГУ, 1971.
92. Avrachenkov K.E., Vilchevsky N.O., Shevlyakov G.L. Priority queueing with finite buffer size and randomized push-out mechanism. // Proceedings of the ACM international conference on measurement and modeling of computer. San Diego: ACM, 2003, p. 324-335.
93. Avrachenkov K.E., Vilchevsky N.O., Shevlyakov G.L. Priority queueing with finite buffer and randomized push-out mechanism // Performance Evaluation, 2005, vol. 61, no. 1, p. 1-16.
94. Заяц О.И., Заборовский В.С., Мулюха В.А., Вербенко А.С. Управление пакетными коммутациями в телематических устройствах с ограниченным буфером при использовании абсолютного приоритета и вероятностного выталкивающего механизма. Часть 1 // Программная инженерия, 2012, №2, с. 22-29
95. Заяц О.И., Заборовский В.С., Мулюха В.А., Вербенко А.С. Управление пакетными коммутациями в телематических устройствах с ограниченным буфером при использовании абсолютного приоритета и вероятностного выталкивающего механизма. Часть 2 // Программная инженерия, 2012, №3, с. 21-29
96. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.:Наука, 1974.

97. Новиков О.А., Петухов С.И. Прикладные вопросы теории массового обслуживания. М.: Советское радио, 1969.

98. Zaborovsky V., Zayats O., Mulukha V., Kupreenko S. Transport layer management and security in highly loaded computer networks // Proceedings of the international conference on security and management (SAM 2010). Las Vegas: CSREA Press, 2010, vol. 2, p. 30-35.

99. Zaborovsky V., Zayats O., Mulukha V. Priority queueing with finite buffer size and randomized push-outnmechanism // Proceedings of the ninth international conference in networks (ICN 2010). Menuires: IEEE, 2010, p. 316-320.

100. Zaborovsky V., Zayats O., Mulukha V. Active queueing management for telematics space network robotics systems // Труды XXI международной научно-технической «Экстремальная робототехника». СПб: Политехника-сервис, 2010, с. 340-349.

101. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979.

102. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: РУДН, 1995.

103. Климов Г.П., Мишкой Г.К. Приоритетные системы обслуживания с ориентацией. М.:МГУ, 1979.

104. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.:Наука, 1970

105. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. М.:Наука, 1991.

106. Башарин Г.П., Самуйлов К.Е. Об однофазной системе массового обслуживания с двумя типами заявок и относительным приоритетом // Известия АН СССР, Техническая кибернетика, 1983, № 3, с. 48-56.

107. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. Модели для анализа качества обслуживания в сетях связи следующего поколения (Уч. пособие). М.: Изд-во РУДН, 2008

108. Башарин Г.П., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В., Гудкова И.А. Новый этап развития математической теории телетрафика // Автоматика и

телемеханика, 2009, № 12, с. 16-28.

109. Рыжиков Ю. И., Хомоненко А. Д. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. М.: Наука, Физмалит, 1989.

110. Гиндин С.И., Хомоненко А.Д., Ададуров С.Е. Численный расчет многоканальной системы массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком и «разогревом» // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2013, № 4 (37). – С. 92-101.

111. Гиндин С.И., Хомоненко А.Д., Матвеев С.В. Программный комплекс расчета характеристик многоканальных систем массового обслуживания с «разогревом» и подход к его тестированию // Современные проблемы науки и образования, 2014, №4.