УДК 501:530.1:532

М.Р. Петриченко, Н.С.Харьков, Д.В. Немова

ГИДРАВЛИЧЕСКАЯ ВЕРСИЯ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ ЩЕЛЯХ

M.R. Petritchenko, N.S. Kharkov, D.V. Nemova

HYDRAULIC VERSION OF THE BOUSSINESQ MODEL OF FREE CONVECTIVE MOTION IN VERTICAL SLITS

Гидравлическая версия модели Буссинеска свободно-конвективного движения адаптирована для течения в вертикальной плоской щели. Определяются предельные значения трения и теплопередачи, средней скорости, давления тяги, коррективы скорости. Доказывается, что средняя скорость свободно-конвективного движения пропорциональна высоте щели и перепаду температуры. При ограниченной скорости движения воздуха интенсивность теплообмена максимальна. При ограниченном теплообмене скорость движения воздуха минимальна. Деформация скорости потока по длине щели обеспечивает минимальное изменение давления: движение организовано так, что отклонение от состояния равновесия минимально.

СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ; ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ; УРАВНЕНИЕ КРОККО; УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА.

The article concerns the hydraulic version of Boussinesque free convective motion model adapted to the flow in the vertical plane slit. The author determines the limiting values of friction and heat transfer medium speed, pressure thrust, speed adjustments. It is proved that the average speed of a free-convective motion is proportional to the height of the gap and drop of temperature. Under the limited air velocity, heat exchange rate is maximal. Under the limited heat exchange, air velocity is minimal. The deformation of the flow velocity along the length of the slot provides a minimal pressure change: the movement is organized in such a way that the deviation from the equilibrium state is minimal.

FREE-CONVECTIVE MOTION; BOUNDARY PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL EQUATION; CROCCO DIFFERENTIAL EQUATION; EXTREMAL PROPERTIES.

Свободно-конвективное движение (СКД) вязкой несжимаемой жидкости сопровождает работу многих конструкций, систем энергетики и строительства, в том числе вентилируемых воздушных зазоров в навесных фасадах, в вентиляционных каналах, в некоторых типах отопительных систем, градирен, систем охлаждения силовых машин, в рекуперационных теплообменниках и пр.

Гидродинамические задачи, связанные с расчетом плотностей распределений пассивных примесей (например, температуры, концентрации влаги, теплового потока) на расслоениях, а также интегральных характеристик (трения, теплопередачи) сводятся к решению предельных задач для системы уравнений СКД. Количество решенных задач уже в эпоху, предшествующую массовому применению гидродинамических симуляторов, исчислялось сотнями, а к настоящему времени увеличилось, по-видимому, на порядок. Основным инструментом получения так называемых «точных» решений остаются методы решения предельных задач СКД, существенно зависящие от топологии решения и даже, более того, усиливающие эту топологию (например, при использовании разностных методов на сетках). Ослабление топологии решения достигается применением гидравлических схем расчета движений, формулируемых в терминах распределений (функционалов) на допустимых движениях [1].

Важно, что многие предельные задачи гидродинамики, в том числе предельную задачу

Эккерта для СКД, можно переформулировать в гидравлических терминах [2]. Обратное утверждение неверно, и в этом смысле гидравлические решения «сильнее» точных. Количество известных гидравлических решений ограничено, и большинство из них (расчет тяги, оценка высоты конструкции и пр.) задействовано в различных нормативах. Из результатов последнего времени необходимо указать на работы [3–6], соединяющие «точные» методы с гидравлическим приближением.

В статье на простейшем примере вертикальной открытой сверху и снизу щели демонстрируются возможности реализации модели Буссинеска в гидравлическом приближении для решения двух задач: оценки объемного расхода (средней скорости) и тяги; оценки интенсивности переноса теплоты.

Тяга и средняя скорость свободно-конвективного движения в вертикальном канале

Пусть известны: 1) длина (высота) L канала; 2) его ширина h; 3) температура холодного воздуха T_c; 4) температура обогреваемой плоскости T_h. Схема канала и обозначения показаны на рис. 1. Как вычислить среднюю скорость воздуха при свободно-конвективном движении в вертикальном щелевом канале со свободным входом и выходом?

Ниже приводится решение этой задачи в приближении Буссинеска, а именно при следующих условиях:

воздух — совершенный газ;

распределение статического давления по длине канала удовлетворяет условию равновесия

$$\frac{dp}{\rho} + gdz = 0\,;$$

движение — свободно-конвективное;

равновесие воздуха — баротропное, а именно: равновесие воздуха — адиабатическое, показатель политропы $n = k$; при подводе теплоты движение — политропическое с показателем политропы $n < k$. Последнее допущение позволяет заменить уравнение энергии условием баротропности [2–4]: задание показателя политропы n равносильно заданию интенсивности теплообмена [7, 8].

Ниже приводится решение этой задачи, основанное на схеме Буссинеска. Сформулируем ключевые положения решения:

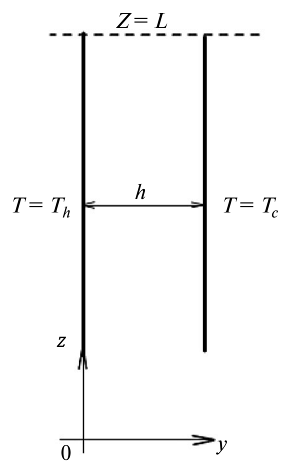


Рис. 1. Схема вентилируемой щели

1. Средняя скорость СКД в вертикальном канале согласно [6] оценивается так:

$$v = \varphi\Lambda\sqrt{RT_c}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{k}}\,, \tag{1}$$

где $\varphi < 1$ — коэффициент скорости, $\Lambda := \dfrac{gL}{RT_c}$.

Действительно, пусть сопоставляются два баротропных процесса расширения (рис. 2): равновесие воздушного столба ($n = k$) и СКД в приближении Буссинеска ($n < k$).

Техническая работа равновесия меньше, чем техническая работа СКД, на величину площади заштрихованного криволинейного треугольника osp, т. е. на величину $\dfrac{v^2}{2\varphi^2}$. Иначе говоря, техническая работа затрачивается на перемещение воздуха по вертикальному каналу со средней скоростью v. Остается найти разность технических

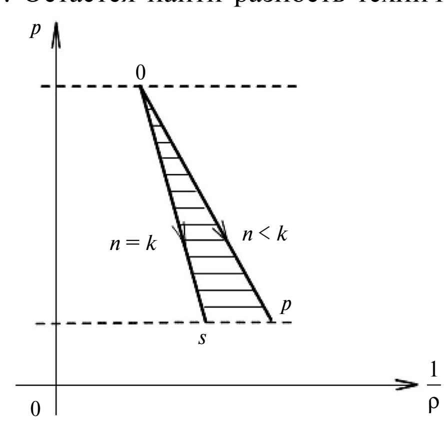


Рис. 2. К определению профицита технической работы при подводе теплоты

работ, т. е. площадь *osp* криволинейного треугольника на рис. 2, что и дает формулу (1). Недостаток формулы (1) — отсутствие простой связи показателя политропы *n* с интенсивностью теплопередачи. Чтобы эту связь найти, практически необходимо решить уравнение энергии.

2. Перепад давления, создающий тягу в вертикальном канале (давление тяги), в первом приближении равен

$$\Delta\pi = \Lambda\frac{1-\vartheta}{1-\Lambda\vartheta}, \qquad (2)$$

где введены обозначения $\Delta\pi := \frac{p_c - p_h}{p_c}$; $\vartheta := \frac{T_c}{T_h}$; $\Lambda := \frac{gL}{RT_c}$. Схема расчета ясна из рис. 3: давление тяги равно разности длин горизонтальных катетов гидростатических треугольников в холодном и в горячем воздухе.

3. Величину $\Delta\pi$ можно вычислить из условия равновесия, рассматривая его как дифференциальное уравнение для давления с начальным условием $p(0) - p_c = 0$ [2]. Тогда в произвольном баротропном движении распределение давления по длине вертикального канала описывается так:

$$\pi_s(Z) = \left(1 - \frac{s-1}{s}Z\right)^{\frac{s}{s-1}} = 1 - Z + \frac{Z^2}{2s} - \ldots, \quad s = n, k,$$

где $Z := \frac{gz}{RT_c}$; $0 \le Z \le \Lambda$; $\pi_s = \left(\frac{p}{p_c}\right)_s$.

Тогда ясно, что для сходящихся в точку (0, 1) политроп $n = k$ и $n < k$ (см. рис. 4)

$$\pi_n(\Lambda) - \pi_k(\Lambda) = \frac{\Lambda^2}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right).$$

Но в вертикальном канале давление на выходе должно совпадать с давлением в неподвижной атмосфере, т. е. должно быть $\pi_n(\Lambda) - \pi_k(\Lambda) = 0$. Поэтому линию давления для баротропного движения с $n<k$ необходимо сдвинуть влево на величину давления тяги $\pi_n(\Lambda) - \pi_k(\Lambda) = \Delta\pi$ (рис. 5).

Получается

$$\Delta\pi = \frac{\Lambda^2}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right). \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{k} = \frac{2}{\Lambda}\frac{1-\vartheta}{1-\Lambda\vartheta}. \qquad (4)$$

Формула (4) выражает простые факты. Во-первых, $n<k$, т. е. снижение давления и уменьшение плотности воздуха по длине воздушного столба обусловлены подводом теплоты. Во-вторых, интенсивность теплопередачи пропорциональна разности $\frac{1}{n} - \frac{1}{k}$ обратных степеней показателей политропы. Значит, *увеличение интенсивности теплопередачи приводит к уменьшению температурного фактора* ϑ, *т. е. к разогреву газа*. Обратное утверждение можно сформулировать так: *при заданном значении температурного*

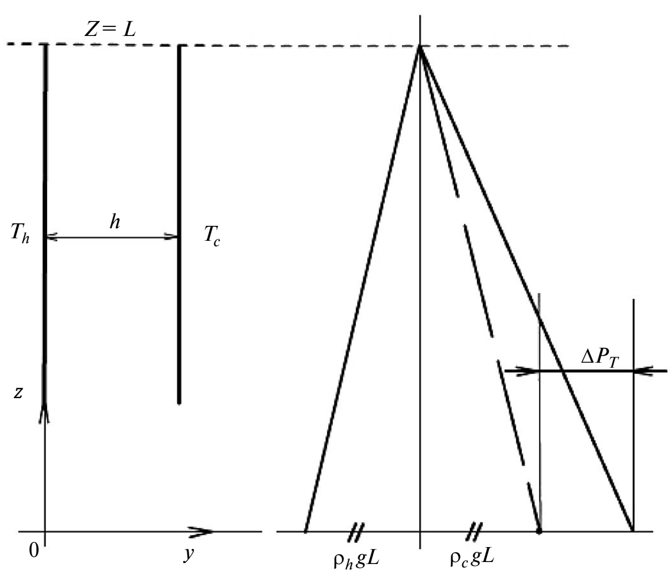


Рис. 3. Определение давления тяги

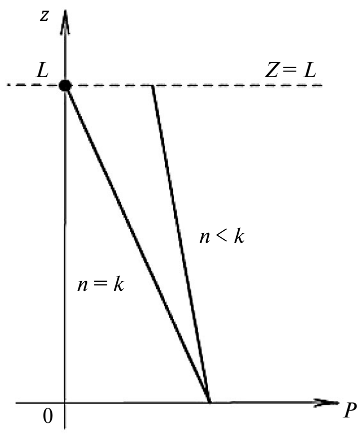


Рис. 4. Адиабатное и политропное распределение давления по высоте столба

Рис. 5. Длина $p - s = \Delta P_T$.

фактора ϑ *интенсивность теплопередачи возрастает при уменьшении* Λ (*длины канала*), или: *для создания одной и той же гидростатической подъемной* (*архимедовой*) *силы в длинном канале требуется меньшая интенсивность теплопередачи, нежели в коротком канале*. Поэтому, скажем, дымовая труба должна быть длинной (увеличение Λ увеличивает тягу; при такой же интенсивности теплопередачи в коротком канале тяга будет меньше и пропускная способность трубы упадет). Аналогично, тяга печки лучше и печка легче растапливается при холодной погоде (тяга возрастает с уменьшением $\vartheta = T_c/T_h$). Наконец, если $\vartheta = 1$, то тяги нет.

С учетом (4) равенство (1) принимает вид

$$v = \varphi\sqrt{RT_c}\sqrt{2\Lambda\frac{1-\vartheta}{1-\Lambda\vartheta}} = \varphi\sqrt{\frac{1-\vartheta}{1-\Lambda\vartheta}}\sqrt{2gL}\,. \quad (5)$$

В окончательной редакции равенство (5) может быть записано так:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_r}}\sqrt{\frac{1-\vartheta}{1-\Lambda\vartheta}}\sqrt{2gL}\,, \quad (6)$$

где ζ_r — коэффициент потерь.

Очевидно, что при $\Lambda \ll 1$ в силу (4) будет

$$n = \frac{k}{1+\frac{2}{\Lambda}k(1-\vartheta)}\,, \quad (7)$$

где $k = 7/5$. Или, если $\Lambda = O(1 - \vartheta)$ и $1 - \vartheta \ll 1$, то приближенно можно считать

$$\frac{n}{k} \doteq \frac{\Lambda}{2k(1-\vartheta)}\,. \quad (8)$$

График зависимости $n = n(\vartheta)$ при фиксированном значении Λ, построенный по (8), приведен на рис. 6.

Безразмерная скорость $\mathfrak{F} := \frac{v}{\sqrt{2gL}}$ традиционно трактуется как число Фруда. Тогда в силу (5) будет

$$\mathfrak{F} = \sqrt{\frac{1-\vartheta}{1+\zeta_r}} = \varphi\sqrt{1-\vartheta}\,, \quad (9)$$

(см. также рис. 7).

С учетом сказанного выражение для скорости (5) можно записать так:

$$v = \varphi\sqrt{1-\vartheta}\sqrt{2gL}\,, \quad (10)$$

где $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_r}}$ — коэффициент скорости.

Например, пусть $\varphi = 0{,}2;\ T_c = 270\ K, T_h = 280\ K$, $L = 50$ м. Тогда $v = 1{,}2$ м/с.

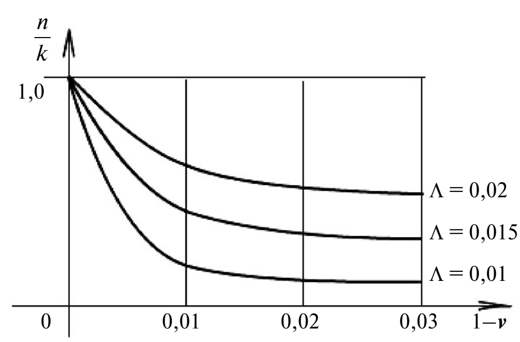


Рис. 6. Влияние температурного напора на показатель политропы

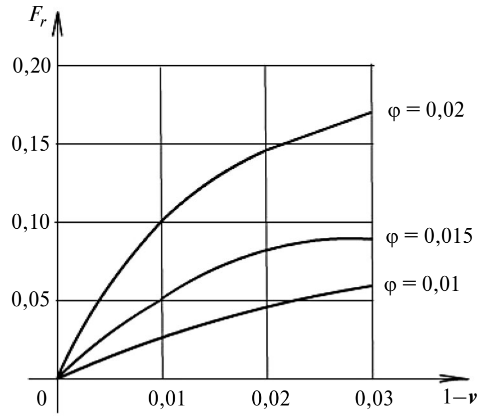


Рис. 7. Влияние перепада температуры на безразмерную скорость

Оценка интенсивности теплообмена в вертикальном канале. Экстремальные свойства теплового потока. Принцип Дюгема для СКД

Содержание этого пункта следует работе [9]. Условие баротропности заменяет предельную задачу для уравнения энергии (перенос теплоты). В условиях СКД и приближения Буссинеска предельная задача ставится так:

$$\left(u_z\frac{\partial}{\partial z}+u_y\frac{\partial}{\partial y}\right)u_z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial y}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{z}}-\mathbf{g}+g\theta,$$

$$\left(u_z\frac{\partial}{\partial z}+u_y\frac{\partial}{\partial y}\right)\theta+\frac{1}{\rho C_p}\frac{\partial\dot{q}}{\partial y}=0; \qquad (11)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0,$$

причем в приближении Буссинеска выделенные жирным (матричным) шрифтом слагаемые обнуляются. Здесь $\theta:=\frac{T-T_c}{T_h-T_c}\in[0,1]$; $\dot{q}=-\lambda\frac{\partial\theta}{\partial y}$; остальные обозначения — общепринятые; ориентация координат показана на рис.1. Система (11) решается в области $\mathfrak{D}$ ($Y\times Z$) = ($0<y<h$; $0<z<L$) с граничными условиями по y: $u_z(0,z)=u_z(h,z)=\theta(0,z)-1=\theta(h,z)=0$. Граничные условия по продольной координате обсуждаются ниже.

Преобразование Эккерта переменных позволяет привести систему уравнений пятого порядка (11) и предельные условия к виду [7]

$$F'''+3FF''-2F'^2+\theta=0;$$

$$\theta''+3\sigma F\theta'=0,\ 0<\varsigma<\infty; \qquad (12)$$

$$F(0)=F'(0)=F'(\infty)=\theta(0)-1=\theta(\infty)=0.$$

Здесь $\zeta:=\frac{y}{\delta(z)}\in[0,\infty)$ — безразмерная поперечная координата; $\delta(z)$ — толщина пограничного слоя подъемной силы на горячей грани канала; $F=F(z)$ — безразмерная функция тока, связанная с функцией тока $\psi(y,z)$ равенством $\psi(y,z):=\frac{g\delta^3}{\nu}$; $\theta:=\frac{T-T_c}{T_h-T_c}\in[0,1]$; σ — число Прандтля (для воздуха σ = 0,72).

Решения предельной задачи (12) известны. Асимптотические разложения решений (12), реализованные как расщепляющие ряды Лагранжа, представляют скорее теоретический интерес. В гидравлических (одномерных) задачах удобнее рассматривать задачу (11) на компактном промежутке $\theta\in[0, 1]$. Преобразование переменных

$$(\zeta,\theta,\varphi)\to(\theta,q,\varphi):-\frac{d\theta}{d\zeta}=q(\theta);\ \zeta=\zeta(\theta);F=F(\theta);$$

$$q(0)=q(1)-q_0=\zeta(1)=F(1)=F(0)-F_\infty=0;$$

$$\zeta(0)=\infty$$

суть диффеоморфизм, причем предполагается, что $\frac{\partial(\theta,q,\varphi)}{\partial(\theta,\zeta,\varphi)}=\frac{\partial q}{\partial\zeta}\neq0$. Пусть $\varphi'(\zeta)=u(\theta)$, $u(0)=$ $=u(1)=0$. Тогда из тождеств

$$dF:=Ud\zeta;\ \ d\theta=-qd\zeta;$$

$$F(\theta)=-\int_1^\theta\frac{U(t)dt}{q(t)}=\int_\theta^1\frac{U(t)dt}{q(t)}$$

и из уравнения энергии получается

$$\frac{dq}{d\theta}=3\sigma\int_\theta^1\frac{U(t)dt}{q(t)}.$$

Отсюда следует, во-первых, что $\left(\frac{dq}{d\theta}\right)_{\theta=1}=0$, и, во-вторых, — такая типичная предельная задача Крокко для $q(\theta)$:

$$q\frac{d^2q}{d\theta^2}+3\sigma U=0;\ \left(\frac{dq}{d\theta}\right)_{\theta=1}=q(0)=0. \qquad (13)$$

Дальше считается: $U=V=$ const.

Предельная задача (13) — нетипичная предельная задача Крокко (в типичной задаче предельные условия ставятся так: $\left(\frac{dq}{d\theta}\right)_{\theta=0}=q(1)=0$).

Для гидравлических задач удобно ослабление топологии переходом от необходимых условий (предельные задачи для дифференциальных уравнений) к распределениям (функционалы) из $W_2^{(1)}(0,1)$ в E_1.

Действительно, получается также, что про уравнение (13) можно утверждать:

1) оно равносильно гамильтоновой системе с гамильтонианом $\mathrm{H}(\theta,q,p)=\frac{p^2}{2}-3\sigma U(\theta)\ln\frac{1}{q}$;

2) это уравнение представляет необходимое условие минимума для функционала

$$s\left(\dot{Q}\right)=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{d\theta}\right)^2+3\sigma U(\theta)\ln\frac{q_0}{q}\right)d\theta, \quad (14)$$

причем в действительном свободно-конвективном течении (СКТ) $ds\le\delta s$, где δ — изотермическая вариация на допустимых движениях, d — изотермическая вариация на действительных движениях. Условие

$$\delta s\left(\dot{Q}\right)=\int_0^1\delta\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\dot{Q}}{d\theta}\right)^2+3\sigma U(\theta)\ln\frac{q_0}{q}\right)d\theta=0 \quad (15)$$

достаточно для разделения СКТ действительных (реализуемые) и виртуальных, или допустимых (совместимые с предельными условиями). Здесь q_0 = Nu, Nu — число Нуссельта, построенное по толщине пограничного слоя — $\mathrm{Nu}:=\frac{\kappa\delta}{k}$; k — коэффициент теплопроводности воздуха; κ — коэффициент теплоотдачи. При этом, если в предельной задаче (13) $q\in C^{(2)}(0,1)$, то для реализации минимума $s(Q)$ достаточно $q\in W_2^{(1)}(0,1)$;

3) оно допускает первый интеграл $H=0$. Действительно, пусть $\theta=1$. Тогда $p=0$, $U=0$, $H=0$. Пусть $\theta=0$. Тогда $p=\infty$, $q=0$, $U=0$, и весьма правдоподобно, что результат предельного перехода дает $H=0$;

4) допускает закон сохранения

$$\int_0^1\left(\frac{dq}{d\theta}\right)^2d\theta=3\sigma\int_0^1 Ud\theta. \quad (16)$$

Можно рассматривать (16) как предельное условие на $q(\theta)$ в вариационной задаче. С учетом тождества (16) в силу (14) можно утверждать, что в действительном СКТ

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{\dot{q}_0}{q}\right)U(\theta)d\theta\to\inf\ge 0. \quad (17)$$

Ослабляем (14) до $\mathcal{L}_2$-норм:

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{\dot{Q}_0}{\dot{Q}}\right)^2d\theta\cdot\int_0^1 U^2d\theta\to\inf\ge 0. \quad (18)$$

В силу неравенства Коши условие (18) достаточно для выполнения условия (17).

Итак, выполняется следующий парафраз термодинамического принципа Гиббса-Дюгема:

1. При заданной средней скорости (точнее, норме скорости) в термогравитационном движении (ТГД) распределение теплового потока доставляет неотрицательный минимум $\ln(Q_0/Q)$. Значит, при заданной средней скорости в ТГД величина Q/Q_0 наименее отклоняется от единицы, а потому при заданной средней скорости в ТГД распределение температуры в пограничном слое подъемной силы наименее отклоняется от линейного распределения по координате y.

2. Или, иначе, при заданном распределении теплового потока устанавливается распределение скорости, доставляющее минимум среднеквадратичной норме скорости $\|U\|_2^2=\int_0^1 U^2d\theta$.

Содержание этого пункта следует работе [9].

Распределение скорости в вентилируемой вертикальной щели

Система (11) позволяет качественно оценить распределения скорости поперек и вдоль щели. Дело в том, что предельная задача (12) описывает движение в полуограниченном пространстве. При переходе к конечной ширине необходимо продолжить решение из области пограничного слоя подъемной силы во «внешний» поток. Предполагается следующее:

такое продолжение существует;

средняя скорость потока в щели может быть оценена точно (см. формулы (5), (6)).

Первое утверждение, вообще говоря, требует доказательства. Обычно достаточно простых физических соображений, принятых в теории пограничного слоя: если существует решение предельной задачи (12) с ненулевым условием на $F'(\infty)=\beta$, то это значение скорости и есть скорость вне пограничного слоя подъемной силы.

В уравнениях (11) масштабирование такое:

$$\psi(y,z)=\frac{g\delta^3}{\nu}F\left(\frac{y}{\delta(z)}\right);$$

$$u_z=\frac{g\delta^2}{\nu}F'(\zeta)=2\sqrt{gz}f'(\zeta);\quad \zeta:=\frac{y}{\delta(z)}.$$

Для продолжения решения за пределы пограничного слоя подъемной силы необходимо предельные условия на f поставить так:

$$F(0)=F'(0)=F'(\infty)-\beta=0,$$

где β — числовой параметр, пропорциональный скорости попутного потока вне пограничного слоя подъемной силы. Из условия неразрывности следует

$$hv=(h-\delta)u_\infty+v_\delta\delta;$$

$$v_\delta=2\sqrt{gz}f(\infty)=2a\sqrt{gz};$$

$$u_\infty=2\beta\sqrt{gz};\quad v=\varphi\sqrt{1-\vartheta}\sqrt{2gL}.$$

Очевидно: если $a=\beta$ (т. е. $v_\delta=u_\infty$), то $v=u_\infty$, т. е. средняя скорость совпадает со скоростью попутного потока.

Тогда

$$h\varphi\sqrt{1-\vartheta}\sqrt{2gL}=2(h-\delta)\beta\sqrt{gz}+2a\delta\sqrt{gz};$$

$$\beta=\frac{h}{h-\delta}\sqrt{\frac{1-\vartheta}{1+\zeta_r}}\sqrt{\frac{L}{2z}}-\frac{a\delta}{h-\delta}\le$$

$$\le\sqrt{\frac{1-\vartheta}{1+\zeta_r}}\sqrt{\frac{L}{2z}}\le\frac{1}{2}\sqrt{(1-\vartheta)\frac{L}{z}};$$

$$\beta_m\le\sqrt{1-\vartheta},$$

где β_m — арифметическое среднее значение параметра β.

Для скорости и температурного напора внутри слоя подъемной силы справедливы распределения (первый член расщепляющего ряда)

$$F'(\zeta)=\frac{\zeta\exp(-3a\zeta)}{3a}+\beta\big(1-\exp(-3a\zeta)\big),$$

$$\theta=\exp(-3a\zeta),\ 3a=\sqrt[4]{3}. \qquad (19)$$

Следовательно, справедливо утверждение: существует ограниченное решение предельной задачи (12) с ненулевой скоростью на ∞; вне слоя подъемной силы $F'(z)=\beta$.

Распределение (19) задает автомодельные (самоподобные) профили скорости; при $\beta=0$ получается профиль скорости на неограниченной пластине в полупространстве. Наоборот, при $\beta\gg 1$ распределение скорости имеет вид

$$F'(z)\approx\beta\big(1-\exp(-3a\zeta)\big). \qquad (20)$$

Далее, в силу (19)

$$F''(\zeta)=\exp(-3a\zeta)\left(\frac{1}{3a}-\zeta+3a\beta\right),$$

т. е. максимум скорости достигается при значении поперечной координаты $\zeta=\zeta_0$, $\zeta_0=3a\left(\beta+\frac{1}{9a^2}\right)=$ $=3a\beta+\frac{1}{3a}=\sqrt[4]{3}\left(\beta+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. При $\zeta<\zeta_0$ распределение скорости — монотонно возрастающее от 0 до β; при $\zeta_0<\zeta$ — не монотонное и убывающее до асимптотического значения β. Максимальное значение скорости составит

$$F_0'=\left(\beta+\frac{1}{9a^2}\right)\exp\left(-\left(1+9a^2\beta\right)\right)+$$

$$+\beta\left(1-\exp\left(-\left(1+9a^2\beta\right)\right)\right).$$

И дальше будет рассматриваться приведенная скорость, нормированная на единицу:

$$\Phi=\frac{F'}{F_0'}=$$

$$=3a\frac{\zeta\exp(-3a\zeta)+3a\beta\big(1-\exp(-3a\zeta)\big)}{\left(9a^2\beta+1\right)\exp\left(-\left(1+9a^2\beta\right)\right)+9a^2\beta\left(1-\exp\left(-\left(1+9a^2\beta\right)\right)\right)}\in(0,1). \qquad (21)$$

Рис. 8 показывает распределения (21) при $\beta=\mathrm{var}$.

На рис. 9 приведены распределения скорости по ширине щели в разных по высоте сечениях щели, полученные с привлечением ANSYS Fluent 14.5. Для простоты сопоставления с рис. 8 эти распределения также нормированы по величине максимальной скорости.

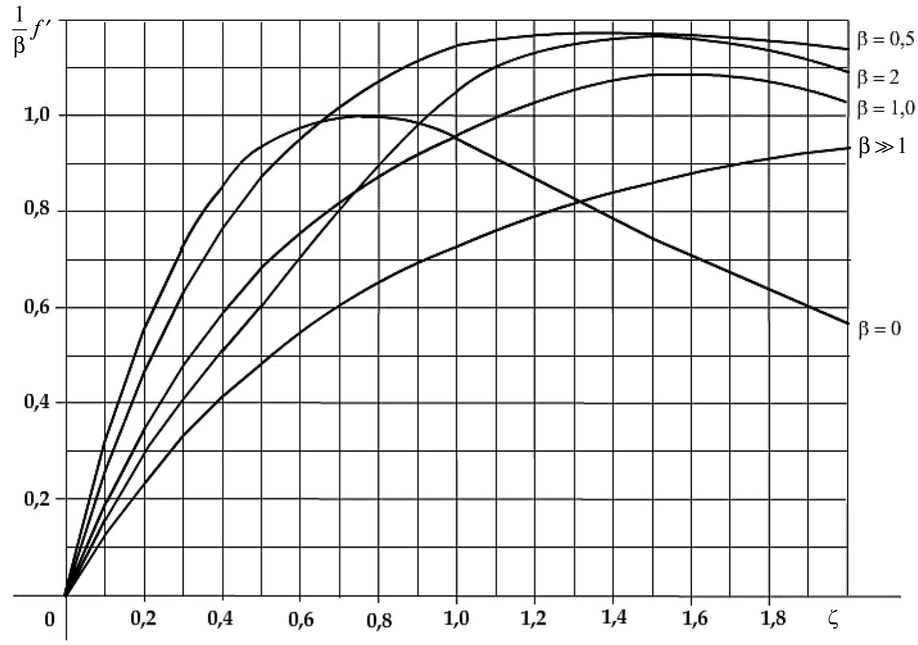


Рис. 8. Распределения скорости при различных значениях параметра спутности β

Обсуждение результатов

Для СКД вдоль пластины в неограниченном пространстве спутное течение отсутствует, $\beta = 0$. Поступление холодной жидкости в пограничный слой обеспечивается через внешнюю границу слоя. Тогда

$$F'(\zeta) = \frac{\zeta \exp(-3a\zeta)}{3a}; \quad \zeta_0 = \frac{1}{3a};$$

$$F_0' = \frac{1}{9a^2 e}; \quad \Phi = 3a\zeta \exp(1 - 3a\zeta). \qquad (22)$$

При больших величинах ширины щели (см. поз. *д*, *е*, *ж* рис. 9) распределение скорости практически воспроизводит (22). В «узких» щелях (см. поз. *а*, *б*, *в*, *г* рис. 9) распределение скорости описывается распределением (19). Правая часть графиков, соответствующая области, примыкающей к холодной грани, естественно, не может быть воспроизведена в решении (19). Можно предложить такой эвристический прием. В каждом сечении z = const известна величина $\frac{h}{\delta(z)} = h\sqrt[4]{\frac{g}{4\nu^2 z}} := \zeta_h(z)$, тем самым известны $F_h'(\zeta)$ и $\Phi(\zeta_h)$. На этом значении поперечной координаты расчетный профиль скорости (19) обрезается. При этом чем меньше отношение $\frac{h}{\sqrt[4]{z}}$, тем сильнее максимальное значение скорости

$$\Phi(\zeta_h) =$$

$$= 3a \frac{\zeta_h \exp(-3a\zeta_h) + 3a\beta(1 - \exp(-3a\zeta_h))}{(9a^2\beta + 1)\exp(-(1 + 9a^2\beta)) + 9a^2\beta(1 - \exp(-(1 + 9a^2\beta)))}$$

отличается от своего предельного значения, равного

$$\Phi(\infty) =$$

$$= \frac{9a^2\beta}{(9a^2\beta + 1)\exp(-(1 + 9a^2\beta)) + 9a^2\beta(1 - \exp(-(1 + 9a^2\beta)))}.$$

В расчетах было принято: высота щели — $L = 20$ м, ширина щели варьировалась в пределах h = 0,1; ... 4 м; температура нагретой грани −10 °C, окружающего воздуха и холодной грани −20 °C. В отличие от «точного» распределения скорости (19), в численном эксперименте учитывалось предельное условие на холодной грани $u_z(z, h) = 0$. Наблюдаются как монотонные (при «больших» положительных значениях β), так и немонотонные распределения скорости, отвечающие малым положительным значениям β. Кроме того, вблизи бокового входа в щель распределение продольной скорости по ширине щели меняет знак: возникает рециркуляция или образование крупномасштабного вихря. Такое распределение отвечает отрицательному значению β.

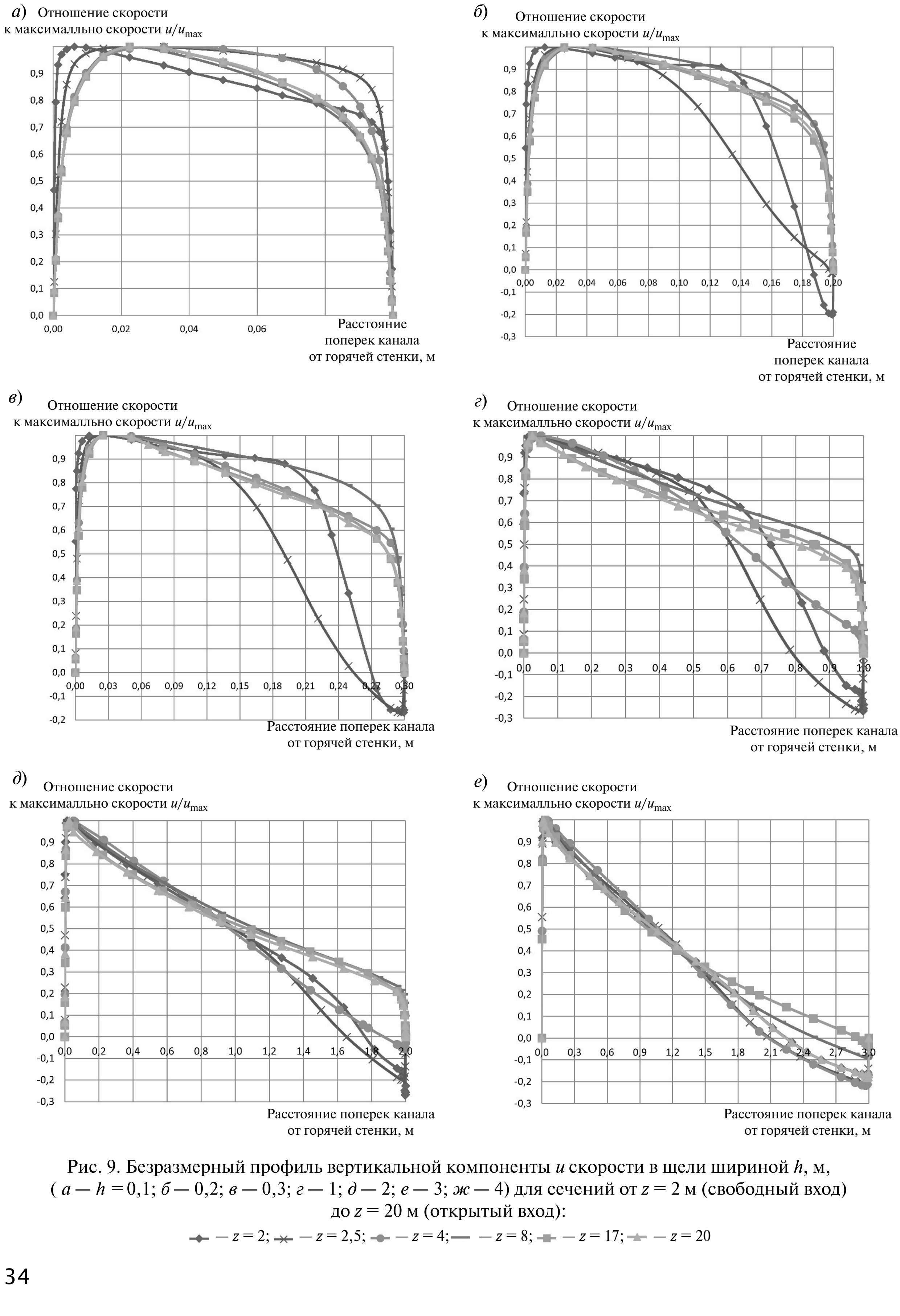
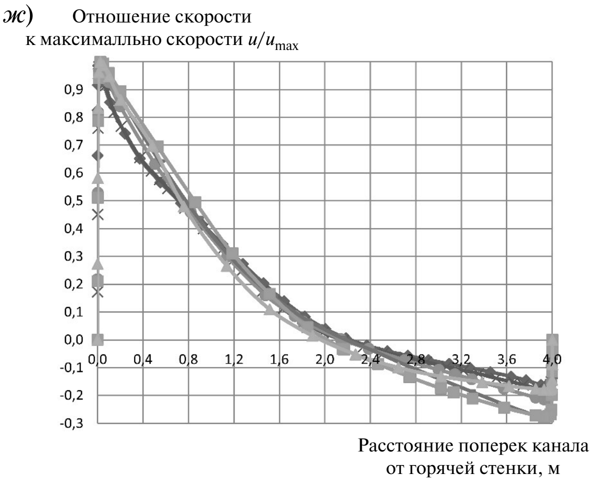


Рис. 9. Безразмерный профиль вертикальной компоненты u скорости в щели шириной h, м, (*а* — h = 0,1; *б* — 0,2; *в* — 0,3; *г* — 1; *д* — 2; *е* — 3; *ж* — 4) для сечений от z = 2 м (свободный вход) до z = 20 м (открытый вход):

— z = 2; — z = 2,5; — z = 4; — z = 8; — z = 17; — z = 20 *ж*)



Окончание рис. 9

В качестве рабочей гипотезы влияние поперечного (ударного) входа на распределение скорости поперек щели можно оценить по схеме отрывного течения. Пусть в предельной задаче (11) граничные условия для функции тока Fставятся так:

$$F'(0) = F''(0) = F'(\infty) - \beta = 0.$$

Тогда решение системы уравнений (11) для функции тока $F(z)$ имеет вид

$$F''(\zeta) = -\zeta \exp(-3a\zeta);$$

$$F'(\zeta) = \frac{\zeta \exp(-3a\zeta)}{3a} - \frac{1}{9a^2}\left(1 - \exp(-3a\zeta)\right);$$

$$F(\zeta) = -\frac{\zeta \exp(-3a\zeta)}{9a^2} + \frac{1}{27a^3}\left(1 - \exp(-3a\zeta)\right) - \frac{1}{9a^2}\zeta;$$

$$F(0) + \frac{1}{9a^2} = 0\,.$$

Следовательно, расход воздуха, всасываемого в щель из отверстия в холодной ($y = h$) грани щели, составит

$$Q := \frac{g\delta^3}{\nu}\left|F(0)\right| = \frac{1}{9a^2}\frac{g\delta^3}{\nu}.$$

Но расход воздуха сквозь щель известен, например его можно оценить по формуле

$$Q = h\varphi\sqrt{(1-\vartheta)2gL}.$$

Значит,

$$a = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{g\delta^3}{\nu Q}};$$

$$\beta = -\frac{1}{9a^2} = -\frac{\nu Q}{g\delta^3}; \quad \delta = \sqrt[4]{\frac{4\nu^2 z}{g}}.$$

Таким образом, величина рециркуляции вполне вычислима.

Примечание. В качестве аргумента при численном моделировании использовалась безразмерная поперечная координата $\eta := \frac{y}{h},\ 0 < \eta < 1$, а в решении системы Эккерта (12) — $\zeta := y/\delta(z)$. Иначе говоря, решение предельной задачи Эккерта самоподобно, а численные результаты допускают изменение распределений скорости по длине потока. Но $\zeta = \eta\frac{h}{\delta(z)} = \eta\sqrt[4]{\frac{h}{z}}\sqrt{\frac{\mathcal{F}}{2}};\ \mathcal{F} := \frac{\sqrt{gh^3}}{\nu} = \sqrt{G_h}$, и тогда получается, что:

при фиксированном расстоянии η от «горячей» стенки координата ζ тем больше, чем меньше координата z — высотная отметка. Иначе выражаяь, «полнота» профиля скорости уменьшается вдоль щели;

при фиксированных η и z координата ζ возрастает при увеличении h.

Итак, вытесняющее действие пограничного слоя подъемной силы существенно в узкой щели и несущественно в широкой щели.

Например, пусть h = 0,15 м, $\nu = 10^{-5}$ м²/с и $\zeta = 17{,}04\eta\sqrt[4]{\frac{h}{z}}$. Рассмотрим профиль скорости с большой спутностью — $\beta \gg 1$. Тогда $\Phi = 1 - \exp\left(-2{,}25\eta\sqrt[4]{\frac{h}{z}}\right)$.

На рис. 10, *а* представлены распределения безразмерной скорости $\Phi(\eta)$ для пяти различных значений отметок z. При η = 1 распределение скорости «срезается» на 0, т. к. решение Эккерта, строго говоря, простирается по ζ на бесконечность и не учитывает влияния холодной стенки явно. На рис. 10, *б* представлены распределения скорости для нулевой спутности ($\beta = 0$) потока. Формально этот случай относится к щели с бесконечной шириной.

Результаты численного моделирования, как видно, ограничены этими предельными случаями.

Интегральные характеристики профиля скорости при СКД в вертикальной щели

Для гидравлической модели СКД полезны интегральные оценки профиля скорости. При больших значениях β неоднородность профиля вертикальной компоненты скорости u_z локализована у горячей грани. Традиционное определение

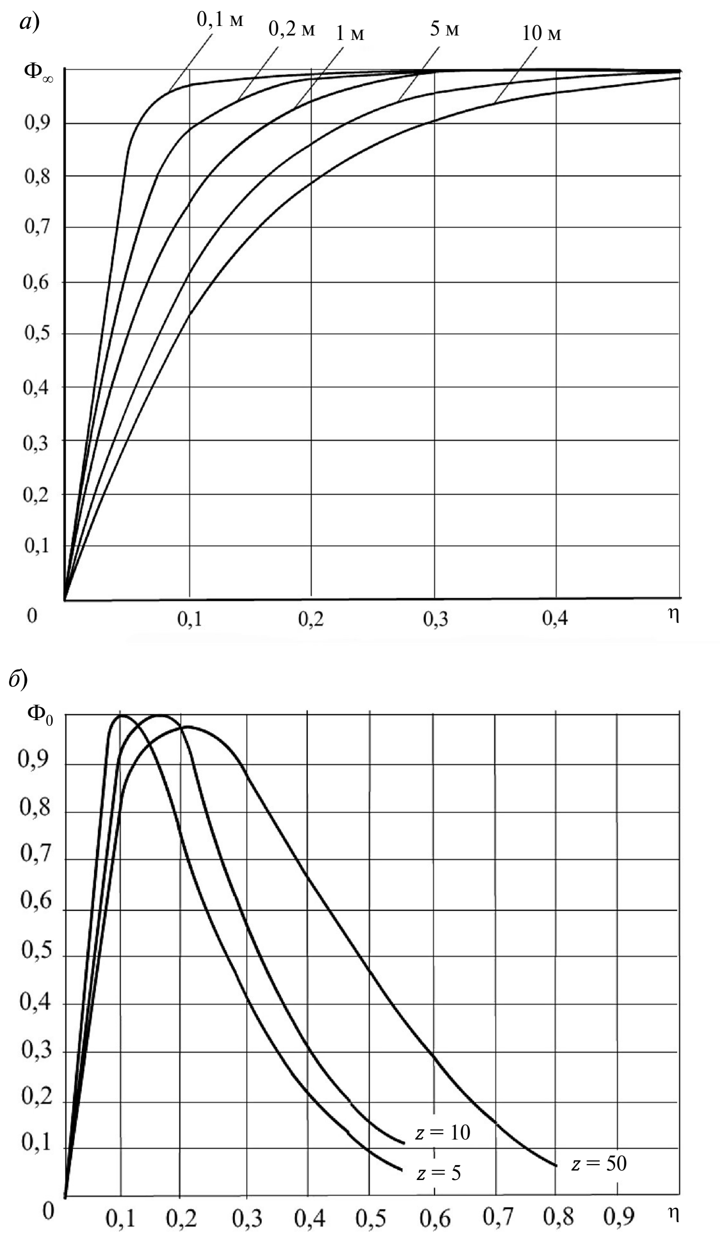


Рис. 10. Распределение скорости в различных сечениях z, м, по высоте щели (a — при $\beta \gg 1$; $б$ — при $\beta = 0$)

коррективов квадрата и куба скорости имеется в [2, 3]. Здесь же предлагается более простой способ, основанный на переменных Крокко и не связанный с вычислением несобственных интегралов. Средняя по температурному напору скорость вычисляется как $v_\theta := \int_0^1 u_z d\theta$. Пусть

$$F' = \frac{\zeta \exp(-3a\zeta)}{3a} = \frac{\theta \ln \frac{1}{\theta}}{9a^2}.$$ Тогда $\frac{u_z}{v_\theta} = 4\theta \ln \frac{1}{\theta}$.

Величина интеграла

$$\alpha_m := \int_0^1 \left(\frac{u_z}{v_\theta}\right)^m d\theta = 4^m \int_0^1 \left(\theta \ln \theta^{-1}\right)^m d\theta = \frac{4^m m!}{(m+1)^2}$$

равна коррективу m-й степени скорости. Значит, корректив куба скорости будет равен $\alpha_3 = \frac{64 \cdot 6}{16} = 24$, корректив квадрата скорости — $\alpha_2 = \frac{16 \cdot 2}{9} = 3{,}5(5)$, корректив первой степени равен 2 и т. д.

Для коррективов количества движения и кинетической энергии выполняется неравенство Коши: $\alpha_3 \ge \alpha_2^2 \ge 1$. При дробных степенях m корректив α_m вычисляется так: $\alpha_m = \frac{4^m \Gamma(m+1)}{(m+1)^2}$, $m > -1$.

В силу первого начала термодинамики будет

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2\varphi^2} d\alpha_3 = 0; \quad \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \pi^{-\frac{1}{n}} d\pi, \qquad (23)$$

причем внешний подвод теплоты учитывается показателем политропы $n < k$. Значит, при СКД

$$\frac{v^2}{2}\int_0^z \frac{d\alpha_3}{\varphi^2} = \frac{p_0}{\rho_0}\frac{n}{n-1}\left(1-\pi^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

В приближении Буссинеска можно записать

$$\left(\frac{dp}{\rho}\right)_n + g dz = 0; \quad gz = \frac{p_0}{\rho_0}\frac{n}{n-1}\left(1-\pi^{\frac{n-1}{n}}\right);$$

$$\pi = \left(1 - \frac{n-1}{n}\frac{gz}{RT_0}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1 - \frac{gz}{RT_0}. \qquad (24)$$

Откуда, считая в первом приближении $\varphi = \mathrm{const}$, получаем, что результат не зависит от интенсивности теплообмена явно, а именно:

$$\frac{v^2}{2\varphi^2}\left(\alpha_3 - \alpha_3'\right) = gz,$$

где со штрихом обозначено начальное значение α_3 (в сечении $z = 0$). Но с учетом (5)

$$L(1-\vartheta)(\alpha_3 - \alpha_3') = z;$$

$$\alpha_3 = \alpha_3' + \frac{z}{L}\frac{1}{1-\vartheta}. \qquad (25)$$

Пусть на входе в канал устанавливается однородное распределение скорости. Тогда

$$\alpha_3 - 1 = (1-\vartheta)^{-1} Z; \quad Z := \frac{z}{L}; \quad 0 < Z < 1;$$

$$\alpha_3 \le 1 + (1-\vartheta)^{-1} = 1 + \frac{T_h}{T_h - T_c}.$$

Например, если $T_h = 273$ K, $T_c = 263$ K, $\alpha_3 = 28{,}3$, т. е. в конечных (верхних) сечениях распределение скорости существенно неоднородно. Увеличение температуры горячей грани на 10 K уменьшает α_3 вдвое. Действительно, чем меньше ϑ (чем больше температура горячей грани), тем при прочих неизменных параметрах больше давление тяги и расход холодного воздуха сквозь щель.

Далее, в силу (23)

$$\frac{d\alpha_3}{d\pi} + 2\varphi^2 \frac{RT_0}{v^2}\pi^{-\frac{1}{n}} = 0,$$

или

$$\frac{d\alpha_3}{d\pi} + \frac{2\pi^{-\frac{1}{n}}}{\Lambda(1-\vartheta)} = 0, \ \alpha_3(0) - \alpha_3' = 0.$$

Значит, в действительном СКД распределение положительного функционала $S(\alpha_3)>0$ (функционал от корректива куба скорости) достигает точной нижней грани:

$$S(\alpha_3) = \int_\pi^1 \left(\frac{d\alpha_3}{d\pi} + \frac{2\pi^{-\frac{1}{n}}}{\Lambda(1-\vartheta)}\right)^2 d\pi \to \inf \ge 0.$$

Поэтому наряду с условием (23) можно использовать в качестве эволюционного уравнения для α_3 такое уравнение:

$$\frac{d\alpha_3}{d\pi} + \frac{2\pi^{-\frac{1}{n}}}{\Lambda(1-\vartheta)} = C_1. \qquad (26)$$

Наличие интеграционной константы C_1 позволяет задать еще и «мягкое» условие на α_3, например такое: $\left(\frac{d\alpha_3}{d\pi}\right)_{\pi=1} = 0$. Значит, в силу (26) будет

$$\frac{d\alpha_3}{d\pi} = -\frac{2}{\Lambda(1-\vartheta)}\left(\pi^{-\frac{1}{n}} - 1\right), \qquad (27)$$

откуда сразу получается

$$\alpha_3 = \alpha_3' + \frac{2n}{\Lambda(n-1)(1-\vartheta)}\left(1-\pi^{\frac{n-1}{n}}\right) - \frac{2(1-\pi)}{\Lambda(1-\vartheta)}.$$

Остается применить (24):

$$\alpha_3 = \alpha_3' + \frac{2n}{\Lambda(n-1)(1-\vartheta)} \times$$

$$\times\left(1 - \left(1 - \frac{gz}{RT_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right) - \frac{2}{\Lambda(1-\vartheta)}\frac{gz}{RT_0} =$$

$$= \alpha_3' + \frac{2}{\Lambda(1-\vartheta)}\frac{gz}{RT_0} + \frac{1}{n\Lambda(1-\vartheta)}\left(\frac{gz}{RT_0}\right)^2 -$$

$$-\frac{2}{\Lambda(1-\vartheta)}\frac{gz}{RT_0}=\alpha_3'+\frac{1}{n\Lambda(1-\vartheta)}\left(\frac{gz}{RT_0}\right)^2.$$

Но в силу (4) $n=\frac{k\Lambda}{\Lambda+2k(1-\vartheta)}$. Поэтому

$$\alpha_3=\alpha_3'+\frac{\Lambda+2k(1-\vartheta)}{k(1-\vartheta)}Z^2. \qquad (28)$$

Пренебрегая $\Lambda \ll 1-\vartheta$, получаем

$$\alpha_3=\alpha_3'+2Z^2\le\alpha_3'+2. \qquad (29)$$

Это означает, что в короткой щели с безударным входом изменение корректива куба скорости минимально.

При изменении константы C_1 в сегменте $0\le C_1\le\frac{2\Lambda}{1-\vartheta}$ можно симулировать все возможные условия входа потока в щель — от безударного, ($C_1 = 2\Lambda(1 - \vartheta)^{-1}$) до поперечного входа ($C_1 = 0$). Для «коротких» щелей с $\Lambda \ll 1-\vartheta$, как видно, влияние условий входа на изменение α_3 несущественно по сравнению с «длинной» ($\Lambda = O(1 - \vartheta)$) щелью. Важно, что длина щели — режимный параметр. При изменении $\vartheta = T_c/T_h$ категории длины щели могут измениться.

Для оценки корректива квадрата скорости можно использовать неравенство Коши: $\alpha_2\le\sqrt{\alpha_3}$. Например, для ударного входа в силу (25) $\alpha_2\le\sqrt{\alpha_3+\frac{z}{L}\frac{1}{1-\vartheta}}$.

Таким образом, можно сформулировать следующие выводы:

средняя скорость СКД в вертикальной щели пропорциональна приведенной высоте $\Lambda:=\frac{gL}{RT_c}$ канала и приведенному перепаду $1-\vartheta:=\frac{T_h-T_c}{T_h}$ температуры между воздухом и источником теплоты;

интенсивность теплопередачи между воздухом и источником теплоты, обеспечивающая движение с заданным расходом Q, пропорциональна Λ^{-1} и приведенному перепаду $1-\vartheta:=\frac{T_h-T_c}{T_h}$ температуры между воздухом и источником теплоты;

в действительном СКД распределение температуры поперек свободно-конвективного течения обеспечивает минимальное изменение теплового потока. Поэтому в действительном движении с заданной скоростью тепловой поток максимален и наименее отклоняется от теплового потока на горячей грани щели; при фиксированном значении теплопередачи создается СКД с минимальной скоростью;

изменение коррективов скорости по длине щели существенно зависит от условий входа воздуха в щель. При безударном входе изменение корректива куба скорости минимально и составляет $\frac{\Lambda+2k(1-\vartheta)}{k(1-\vartheta)}$. В условиях ударного входа корректив куба изменяется на $(1-\vartheta)^{-1}$ единиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арнольд В.И** Математические методы классической механики. М.: УРСС, 2009. 408 с.

2. **Петроченко М.В.** Гидравлика навесных вентилируемых фасадов: Автореф. дисс. ... к.т.н. 05.23.16. СПбГПУ. СПб., 2012. 23 с.

3. **Немова Д.В.** Интегральные характеристики термогравитационной конвекции в воздушной прослойке навесных вентилируемых фасадов // Инженерно-строительный журнал. 2013. №3. С. 24–36.

4. **Немова Д.В., Ольшевский В.Я., Цейтин Д.Н.** Гидростатика термогравитационной конвекции в вертикальном канале // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2013, №4(183). С. 295–301.

5. **Исаев С.А., Ватин Н.И., Баранов П.А., Судаков А.Г., Усачов А.Е., Егоров В.В.** Разработка и верификация многоблочных вычислительных технологий для решения нестационарных задач строительной аэродинамики высотных зданий в рамках подхода URANS // Инженерно-строительный журнал. 2013. №1. С. 47–61.

6. **Машенков А.Н., Косолапов Е.А., Чебурканова Е.В.** Математическое моделирование конвективного теплообмена около стены здания в приближении пограничного слоя // Известия вузов. Строительство. 2011. № 5. С. 65–71.

7. **Страхович К.И.** Гидрогазодинамика: Избранные работы. М.: Наука, 1980. 374 с.

8. **Соковишин Ю.А., Мартыненко О.Г.** Свободно-конвективный теплообмен. Минск: Наука и техника, 1984. 400 с.

9. **Немова Д.В., Емельянова В.А., Мифтахова Д.Р.** Экстремальные задачи расчета свободноконвективных движений в НВФ // Инженерно-строительный журнал. 2013. №8. С. 46–53.

REFERENCES

1. **Arnold V.I.** Matematicheskiye metody klassicheskoy mekhaniki. M.: URSS, 2009. 408 s. (rus.)

2. **Petrochenko M.V.** Gidravlika navesnykh ventiliruyemykh fasadov. Avtoreferat dissert. ... k.t.n. 05.23.16. SPbGPU. SPb.: 2012. 23 s. (rus.)

3. **Nemova D.V.** Integralnye kharakteristiki termogravitatsionnoy konvektsii v vozdushnoy prosloyke navesnykh ventiliruemykh fasadov. *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal*. 2013. №3. S. 24–36. (rus.)

4. **Nemova D.V., Olshevskiy V.Ya., Tseytin D.N.** Gidrostatika termogravitatsionnoy konvektsii v vertikalnom kanale. *Nauchno tekhnicheskiye vedomosti SPbGPU*. 2013. №4(183). Vol. 1. S. 295–301. (rus.)

5. **Isayev S.A., Vatin N.I., Baranov P.A., Sudakov A.G., Usachov A.Ye., Yegorov V.V.** Razrabotka i verifikatsiya mnogoblochnykh vychislitelnykh tekhnologiy dlya resheniya nestatsionarnykh zadach stroitelnoy aerodinamiki vysotnykh zdaniy v ramkakh podkhoda urans. *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal*. 2013. №1. S. 47–61. (rus.)

6. **Mashenkov A.N., Kosolapov Ye.A., Cheburkanova Ye.V.** Matematicheskoe modelirovanie konvektivnogo teploobmena okolo steny zdaniya v priblizhenii pogranichnogo sloya. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitelstvo.* 2011. № 5. S. 65–71. (rus.)

7. **Strakhovich K.I.** Gidrogazodinamika: Izbrannyye raboty. M.: Nauka, 1980. 374 s. (rus.)

8. **Sokovishin Yu.A., Martynenko O.G.** Svobodno-konvektivnyy teploobmen. Minsk.: Nauka i tekhnika. 1984. 400 s. (rus.)

9. **Nemova D.V., Yemelyanova V.A., Miftakhova D.R.** Ekstremalnyye zadachi rascheta svobodnokonvektivnykh dvizheniy v NVF. *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal*. 2013. №8. S. 46–53. (rus.)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович — доктор технических наук заведующий кафедрой Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29. E-mail: fonpetrich@mail.ru

ХАРЬКОВ Никита Сергеевич — кандидат технических наук доцент Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29. E-mail: nkharkov@mail.ru

НЕМОВА Дарья Викторовна — ассистент Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29. E-mail: darya.nemova@gmail.com

AUTHORS

PETRITCHENKO Mikhail R. — St. Petersburg State Polytechnical University. 29, Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia. E-mail: fonpetrich@mail.ru

KHARKOV Nikita S. — St. Petersburg State Polytechnical University. 29, Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia. E-mail: nkharkov@mail.ru

NEMOVA Daria V. — St. Petersburg State Polytechnical University. 29, Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia. E-mail: darya.nemova@gmail.com