

УДК 536.24:519.63

*С.С. Макаров, К.Э. Чекмышев, Е.В. Макарова*

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОХЛАЖДЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗАГОТОВКИ ОДНОМЕРНЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ ВОДЫ**

*S.S. Makarov, K.E. Chekmyshev, E.V. Makarova*

## **MATHEMATICAL MODEL OF CYLINDRICAL BLANK COOLING BY ONE-DIMENSIONAL NON-STATIONARY WATER STREAM**

В работе приведена математическая модель процесса охлаждения сплошной цилиндрической металлической заготовки из конструкционной стали нестационарным потоком воды. Проведены параметрические исследования процесса охлаждения. Основой математической модели является система дифференциальных уравнений неразрывности, движения, энергии для жидкости и теплопроводности для заготовки, при этом пренебрегается возможным парообразованием, а поток считается однофазным. Уравнение двумерной нестационарной задачи теплопроводности решается методом прогонки при граничных условиях третьего рода. На примере для заготовки из стали 30ХГСА определены относительное значение коэффициента теплоотдачи при времени процесса охлаждения, приведенная скорость, давление и температура потока воды по длине охлаждаемой поверхности заготовки. Показана возможность оценки фазовых переходов в материале в зависимости от скорости охлаждения по всему объему заготовки. Математическая модель процесса охлаждения и полученные результаты могут быть применены для решения задач машиностроения и металлургии.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ; ОХЛАЖДЕНИЕ; ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ЗАГОТОВКА; ПАРАМЕТРЫ ТЕПЛООБМЕНА; ПОТОК ВОДЫ; ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ.

The paper represents the mathematical model of cooling a cylindrical solid metal blank made of construction steel by the non-stationary water stream. Parametric study of cooling process is carried out. The basis of mathematical model is a system of differential equations such as: equation of continuity, equation of momentum, equation of energy for water steam and heat equation for blank. The model neglects the possibility of vaporization. The water steam is single-phase medium. The equation of two-dimensional non-stationary task of thermal conductivity is solved by double-sweep method. Boundary conditions are those of the third kind. In terms of blank of 30HGSA steel we have determined: reduced heat-transfer coefficient during the time of cooling process, reduced velocity, reduced pressure and temperature of water stream throughout of cooled blank surface. The article shows the evaluation possibility of phase change in the metal according to cooling rate over the entire blank volume. The mathematical model of cooling process and results obtained can be applied for solving engineering and metallurgic problems.

MATHEMATICAL MODEL; COOLING; CYLINDRICAL METAL BLANK; HEAT TRANSFER PARAMETERS; WATER STREAM; NUMERICAL CALCULATION.

В работах [1, 2] приведено численное решение задачи охлаждения потоками воды и воздуха высокотемпературного сплошного металлического цилиндра. При этом, охлаждающий поток жидкости считается квазистационарным. Проведенные тестовые расчеты подтвердили правильность

построения модели и достоверность результатов исследований. В [3] приведены результаты математического моделирования охлаждения при закалке осесимметричных металлических заготовок из стали 30ХГСА квазистационарными потоками охлаждающей среды.

Настоящая статья является продолжением более ранних публикаций и посвящена построению математической модели процесса охлаждения высокотемпературных заготовок нестационарным потоком воды и проведению параметрического исследования рассматриваемого процесса.

Рассмотрим случай, когда поверхность высокотемпературного цилиндрического тела обтекает нестационарный одномерный поток воды в направлении оси по продольной координате  $x$ .

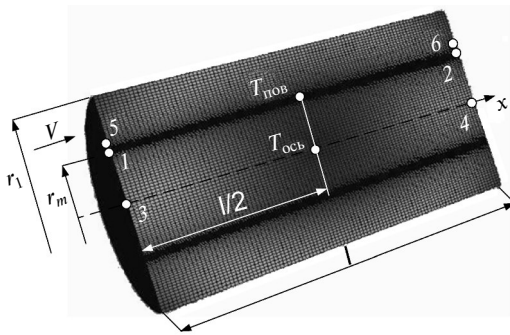


Рис. 1. Расчетная схема охлаждаемого цилиндра, первая и последняя расчетные точки:  
1, 2 — по поверхности заготовки; 3, 4 — на оси заготовки; 5, 6 — точки жидкости по длине заготовки

На рис. 1 приведена расчетная схема сплошного металлического цилиндра с внешним радиусом  $r_m$  и длиной  $L$ , охлаждаемого продольно движущимся между радиусами  $r_m$  и  $r_l$  в направлении оси  $x$  потоком среды.

**Уравнение неразрывности.** Запишем его в виде

$$\frac{\partial(F\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(F\rho V)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $t$  — время;  $F$  — площадь поперечного сечения потока;  $\rho$  — плотность жидкости;  $V$  — скорость потока. Примем, что плотность жидкости  $\rho = \text{const}$ ; тогда при любом заданном линейном размере элемента среды  $\Delta x$  уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\rho \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\Delta G}{\Delta x}, \quad (2)$$

где  $\Delta G = \Delta(F\rho V)$  — разность массовых расходов на входе и выходе участка потока с линейным размером  $\Delta x$ .

**Уравнение движения** запишем так:

$$a_k \frac{\partial}{\partial t}(F\rho V) + a_k \frac{\partial}{\partial x}(F\rho V^2) + F\rho g_x +$$

$$+ F \frac{\partial p}{\partial x} + \Pi \tau = 0. \quad (3)$$

Здесь  $a_k$  — коэффициент Кориолиса (примем для простоты изложения  $a_k \approx 1$ );  $\tau$  — напряжение трения;  $p$  — давление;  $\Pi = \pi d$  — смоченный периметр поверхности тела;  $d$  — внешний диаметр цилиндрического тела.

Вторым слагаемым  $\frac{\partial}{\partial x}(F\rho V^2)$  в уравнении (3) можно пренебречь ввиду его малости по сравнению с первым слагаемым. Примем проекцию массовых сил на ось продольной координаты  $x$  равной нулю ( $F\rho g_x = 0$ ) в силу горизонтального течения потока жидкости. Тогда уравнение (3) запишем в виде

$$\rho F \frac{\partial V}{\partial t} + F \frac{\partial p}{\partial x} = -\Pi \tau. \quad (4)$$

В результате для участка протяженностью  $\Delta x$  уравнение (4) можем записать так:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\Delta p}{\Delta x} - \frac{\Pi \tau}{F\rho}, \quad (5)$$

где  $\Delta p$  — разность давлений на входе и выходе участка потока линейным размером  $\Delta x$ .

**Уравнение энергии.** В общем случае уравнение энергии для потока жидкости, обменивающейся теплотой с высокотемпературной поверхностью, имеет вид

$$F\rho \frac{\partial E}{\partial t} + F\rho V \frac{\partial}{\partial x} \left( E + \frac{p}{\rho} \right) = \alpha \Pi \Delta T. \quad (6)$$

Здесь  $E = \left( \frac{V^2}{2} + c_l T_l \right)$  — удельная энергия жидкости;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи;  $c_l$  — удельная теплоемкость воды;  $\Delta T = (T_m - T_l)$  — разность температуры поверхности и температуры потока жидкости.

Преобразуем (6) с учетом (1) к следующему виду:

$$F\rho c_l \frac{\partial T}{\partial t} + F\rho V \left( c_l \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \alpha \Pi \Delta T.$$

При условии  $\frac{dp}{dx} = -\frac{\Pi \tau}{F}$  уравнение (6) запишем так:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha f \Delta T + \Delta(Gc_l T) + \tau f V}{F\rho c_l \Delta x}. \quad (7)$$

Здесь  $\Delta(Gc_l T)$  — разность входящей и исходящей из конечного объема тепловой энергии, переносимой потоком;  $\alpha f \Delta T$  — тепловая энергия, подведенная к элементу потока от нагретого тела;  $\tau f V$  — энергия, получаемая за счет превращения механической энергии в тепловую в процессе движения жидкости;  $Frc_l \Delta x$  — тепловая емкость жидкости;  $f = \Pi \Delta x$  — площадь контакта жидкости и поверхности;  $T$  — температура.

**Уравнение для решения задачи теплопроводности цилиндрической заготовки.** Распределение температуры в цилиндрической заготовке при условии соблюдения симметрии относительно продольной оси  $x$  описывается дифференциальным уравнением теплопроводности Био — Фурье:

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho T) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (8)$$

Здесь  $r, x$  — пространственные координаты, вдоль которых рассматривается процесс теплопроводности; теплофизические характеристики материала цилиндра:  $c$  — теплоемкость;  $\rho$  — плотность;  $\lambda$  — теплопроводность.

Начальные условия для заготовки:  $T(x, r) = T_{m0}$  при  $x \in [0, l], r \in [0, r_m]$ .

Краевые условия:

$$\frac{\partial T_m}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, x = l;$$

$$\alpha(T_m - T_l) = -\lambda \frac{\partial T_m}{\partial r} \text{ при } r = r_m;$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0.$$

Начальные условия для потока:  $T(x) = T_{l0}, V(x) = V_0$  при  $x \in [0, l], r \in [r_m, r_l]$ . Краевые условия:

$$T_l = T_{l0} \text{ при } x = 0;$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial x} = 0 \text{ при } x = l;$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_l.$$

**Замыкающие зависимости.** В уравнения входят величины  $\tau, \alpha$ , значения которых в практических работах и большинстве теоретических

работ принято задавать, опираясь на результаты обработки натуральных экспериментов. Для рассматриваемой модели эти величины будем определять, основываясь на результатах, приведенных в работе [4]. Как и в работе [2], будем пренебрегать возможным парообразованием и считать поток однофазным при выполнении условий изложенных в работе [3]. Так в случае течения полуограниченной струи вдоль пространственной координаты  $x$  цилиндра уравнение по расчету локального значения коэффициента теплоотдачи имеет вид

$$\alpha = 0,0268 \frac{\lambda_l}{b_0} \text{Re}_0^{\frac{13}{15}} \bar{x}^{-\frac{1}{2}} \text{ при } \text{Re}_0 \leq 6 \cdot 10^4. \quad (9)$$

Здесь  $\lambda_l$  — теплопроводность жидкости;  $b_0 = r_l - r_m$  — поперечный размер потока;  $\text{Re}_0 = Vb_0/\nu$  — приведенный критерий Рейнольдса;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\bar{x} = x/b_0$  — относительная текущая координата.

При высоких температурах, особенно на начальных стадиях процесса охлаждения высокотемпературных тел, существенный вклад в интенсивность теплосъема вносит излучение. Процесс переноса теплоты между потоком жидкости и стенкой является результатом совокупного действия конвективного теплообмена и теплового излучения. Этот процесс получил название «сложный теплообмен» [5]. В этом случае, как предложено в [5, с.194], коэффициент теплоотдачи  $\alpha_\Sigma$  рассчитывается как сумма  $\alpha_\Sigma = \alpha + \alpha'$  конвективного коэффициента  $\alpha$ , рассчитываемого по уравнениям (9), и коэффициента  $\alpha'$  теплоотдачи излучением, который определяется так:

$$\alpha' = \frac{\sigma_0 \varepsilon (T_{mx}^4 - T_{(m+0)x}^4)}{(T_{mx} - T_{(m+0)x)}}, \quad (10)$$

где  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  — постоянная Стефана — Больцмана;  $\varepsilon$  — степень черноты заготовки;  $T_{mx}$  и  $T_{(m+0)x}$  — температура (по шкале Кельвина) участка поверхности цилиндра и сопряженного участка среды в расчетных точках по длине цилиндра. Подобная практика построения математических моделей была применена при описании процесса охлаждения горячего листа на отводящем рольганге стана [6, с. 127], где коэффициент  $\alpha'$  теплоотдачи излучением для верхней и нижней поверхности листа определялся выражением (10).

Величину  $\tau$  касательного напряжения трения определим так:

$$\tau = \rho_l V^2 0,09 \text{Re}_0^{\frac{2}{15}} \bar{x}^{\frac{12}{13}} \left( 1 + 0,0088 \bar{x}^{\frac{14}{13}} \right)^{\frac{2}{15}}$$

при  $\text{Re}_0 \leq 6 \cdot 10^4$ . (11)

### Последовательность решения

При начальном условии для заготовки решаются уравнения двумерной нестационарной задачи теплопроводности (8) методом прогонки. Разностные уравнения записаны по пространственным координатам  $x$  и  $r$  в виде локально-одномерной неявной схемы, как это показано в [2]. В качестве граничных условий принят коэффициент теплоотдачи, значение которого задается для каждого шага интегрирования по времени и продольной координате  $x$  решением (9) с учетом (10). Температура воды вдоль поверхности охлаждения  $T_l$  находится решением уравнений (7) с учетом (2), (5) и (11). Дифференциальные уравнения (2), (5), (7) решаются методом Рунге — Кутты четвертого порядка.

### Результаты численных расчетов

Рассмотрим охлаждение осесимметричной заготовки. Заготовка из стали 30ХГСА диаметром 20 мм длиной 200 мм с начальной температурой под закалку  $T_m = 950^\circ\text{C}$  охлаждается потоком воды с температурой  $T_l = 20^\circ\text{C}$ , площадь поперечного сечения потока —  $F = 2,17 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ , скорость — 12 м/с. Расчетное время —  $t = 10 \text{ с}$ , шаг по времени —  $\Delta t = 10^{-4} \text{ с}$ . Теплофизические свойства воды приняты согласно [7], а стали —

согласно [8]. В расчетах принимается коэффициент теплоотдачи  $\alpha_\Sigma$ . Степень черноты заготовки принимается равной  $\epsilon = 0,8$ , как для окисленной стали согласно [5, с.330], и считается постоянной при  $x \in [0, l]$ . Значения температур для расчетных точек, обозначенных на рис. 1, приведены на рис. 2.

Видно, что значения температур в расчетных точках заготовки изменяются по времени согласно интенсивности, создаваемой потоком воды. Более интенсивно снижается температура верхних слоев 1 заготовки и на левой границе оси 3. Менее интенсивно температура снижается на поверхности заготовки правой границы 2 и во внутренних слоях (граничная точка 4).

Температура воды в зависимости от увеличения конечного расчетного времени имеет меньшую величину. Это вполне объяснимо, так как температура поверхности заготовки также снижается.

Рассмотрим возможность закалки заготовки при заданных условиях движения потока воды и параметрах охлаждения. На рис. 3, а приведено распределение относительного коэффициента теплоотдачи по длине поверхности заготовки при временах процесса охлаждения  $t = 10^{-4} \text{ с}$  и  $t = 1 \text{ с}$ . На рис. 3, б приведены значения скорости охлаждения заготовки в двух контрольных точках при прежних значениях расчетных параметров.

Видно, что скорость охлаждения поверхности заготовки много больше критической скорости охлаждения при закалке данной стали. Следовательно, можно считать, что при заданных условиях охлаждения поверхностные слои заготовки закаливаются на мартенсит. В центре,

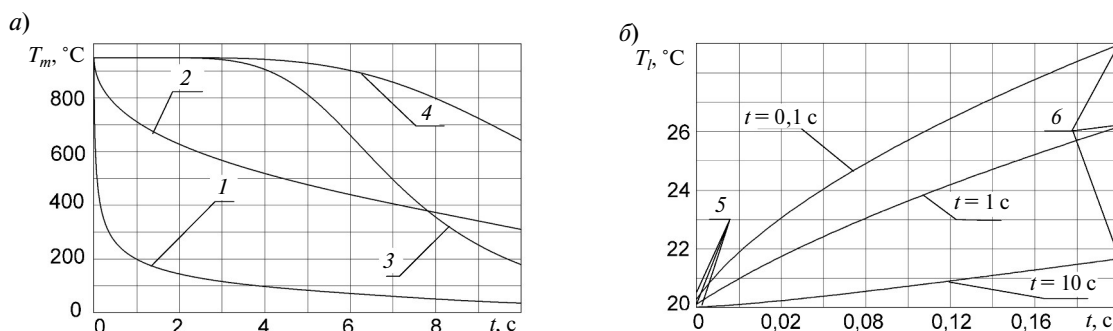


Рис. 2. Температура металлической заготовки и воды:

а — температура в расчетных точках заготовки; б — температура воды при времени охлаждения

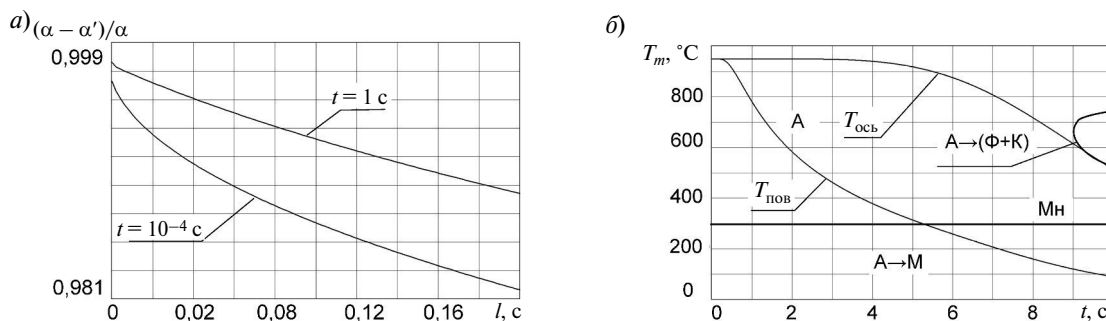


Рис. 3. Температура металлической заготовки, охлаждаемой потоком воды:  
 а — относительное значение коэффициента теплоотдачи; б — температура в центре заготовки  
 $T_{пов}$  — на поверхности и  $T_{ось}$  — на оси

на оси заготовки, значение температуры снижается менее интенсивно, что смещает температурный профиль к границе S-образной кривой диаграммы кинетики изотермического превращения аустенита в рассматриваемой марке стали [9], и существует вероятность, что закалки на мартенсит может не произойти.

На рис. 4 приведено распределение по длине заготовки текущих значений скорости  $V_1$  и давления  $p_1$  потока от их начальных значений  $V_0$  и  $p_0$ . Расчетные параметры прежние.

Видно, что скорость и давление значительно снижаются на начальном участке охлаждения заготовки. Это объясняется принятым соотношением (11) для случая течения полуграниченной струи вдоль заготовки. Если будет задан иной закон распределения напряжений трения, значения скорости и давления будут соответственно рассчитаны по предлагаемому алгоритму.

В работе приведена математическая модель процесса охлаждения сплошной цилиндриче-

ской металлической заготовки нестационарным потоком воды. Получены значения температур заготовки из конструкционной стали 30ХГСА в расчетных точках по времени, из которых видно, что снижение температуры поверхностных слоев заготовки в 5 раз выше, чем на ее оси. Температура потока воды снижается с увеличением конечного расчетного времени в диапазоне от 0,1 до 0,4 °C/c по длине заготовки. Оценен вклад теплообмена излучением в процесс охлаждения заготовки. Для рассматриваемых условий он составляет менее 2 % от значения коэффициента конвективной теплоотдачи. Показана возможность оценки фазовых переходов в материале в зависимости от скорости охлаждения по всему объему заготовки. Определены приведенные значения скорости и давления потока воды по длине заготовки. Приведенные в статье математическая модель процесса охлаждения и результаты математического моделирования охлаждения высокотемпературной осесимметричной металлической заготовки из стали 30ХГСА потоком воды могут быть применены для решения

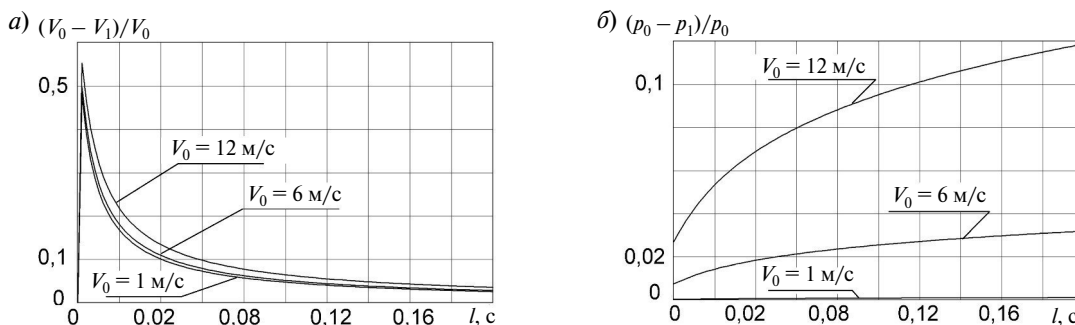


Рис. 4. Приведенная скорость (а) и давление потока воды (б)



задач машиностроения и металлургии. Например, для расчета параметров охлаждения других марок стали в зависимости от геометрии, теплофизических свойств веществ и времени процес-

са при термообработке или иных технологических операций.

Программа научных проектов молодых ученых и аспирантов УрО РАН, проект № 14–1–НП–1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Липанов А.М., Макаров С.С.** Численное решение задачи охлаждения высокотемпературного сплошного металлического цилиндра // *Машиностроение и инженерное образование*. 2012. № 4. С. 33–40.
2. **Липанов А.М., Макаров С.С.** Численное решение задачи охлаждения потоком воды и воздуха высокотемпературного сплошного металлического цилиндра // *Машиностроение и инженерное образование*. 2014. № 1. С. 36–41.
3. **Макаров С.С., Чекмышев К.Э., Храмов С.Н., Макарова Е.В.** Математическое моделирование охлаждения при закалке осесимметричных металлических заготовок // *Вестник ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*. Ижевск: Из-во ИжГТУ, 2014. № 3 (63). С. 38–43.
4. **Юдаев Б.Н., Михайлов М.С., Савин В.К.** Теплообмен при взаимодействии струй с преградами. М.: *Машиностроение*, 1977. 247 с.
5. **Михеев М.А., Михеева И.М.** Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 344 с.
6. **Лабейш В.Г.** Жидкостное охлаждение высокотемпературного металла. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. 172 с.
7. **Вуклович М.П.** Теплофизические свойства воды и водяного пара. М.: *Машиностроение*, 1967. 160 с.
8. *Стали и сплавы. Марочник: справ. изд. / Под ред. В.Г. Сорокина, М.А. Гервасьева.* М.: Интермет Инжиниринг, 2001. 608 с.
9. **Попова Л.Е., Попов А.А.** Диаграммы превращения аустенита в сталях и бета-раствора в сплавах титана: *Справочник термиста. 3-е изд., перераб. и доп.* М.: Металлургия, 1991. 503 с.

## REFERENCES

1. **Lipanov A.M., Makarov S.S.** Chislennoye resheniye zadachi okhlazhdeniya vysokotemperaturnogo sploshnogo metallichesкого tsilindra. *Mashinostroyeniye i inzhenernoye obrazovaniye*. 2012. № 4. S. 33–40. (rus.)
2. **Lipanov A.M., Makarov S.S.** Chislennoye resheniye zadachi okhlazhdeniya potokom vody i vozdukha vysokotemperaturnogo sploshnogo metallichesкого tsilindra. *Mashinostroyeniye i inzhenernoye obrazovaniye*. Moskva, 2014. № 1. С. 36–41. (rus.)
3. **Makarov S.S., Chekmyshev K.E., Khramov S.N., Makarova Ye.V.** Matematicheskoye modelirovaniye okhlazhdeniya pri zakalke osesimmetrichnykh metallicheskikh zagotovok. *Vestnik IzhGTU im. M.T. Kalashnikova*. Izhevsk: Izd-vo IzhGTU, 2014. № 3 (63). S. 38–43. (rus.)
4. **Yudayev B.N., Mikhaylov M.S., Savin V.K.** Teploobmen pri vzaimodeystvii struy s pregradami. M.: *Mashinostroyeniye*, 1977. 247 s.
5. **Mikheyev M.A., Mikheyeva I.M.** Osnovy teploperedachi. M.: Energiya, 1977. 344 s. (rus.)
6. **Labeysh V.G.** Zhidkostnoye okhlazhdeniye vysokotemperaturnogo metalla. L.: Izd-vo Leningr. un-ta, 1983. 172 s. (rus.)
7. **Vukalovich M.P.** Teplofizicheskiye svoystva vody i vodyanogo para. M.: *Mashinostroyeniye*, 1967. 160 s. (rus.)
8. *Stali i splavy. Marochnik: sprav. izd. / Pod red. V. G. Sorokina, M. A. Gervasyeva.* M.: Internet Inzhiniring, 2001. 608 s. (rus.)
9. **Popova L.Ye., Popov A.A.** Diagrammy prevrashcheniya austenita v stalyakh i beta-rastvora v splavakh titana: *Spravochnik termista. 3-ye izd., pererab. i dop.* M.: Metallurgiya, 1991. 503 s. (rus.)

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**МАКАРОВ Сергей Сергеевич** — кандидат технических наук заведующий лабораторией термомеханических процессов Института механики Уральского отделения Российской академии наук. 426067, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34. E-mail: ssmak15@mail.ru

**ЧЕКМЫШЕВ Константин Эдуардович** — аспирант Института механики Уральского отделения Российской академии наук. 426067, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34. E-mail: chekk.90@mail.ru

**МАКАРОВА Елена Валерьевна** — кандидат технических наук начальник отдела организации и сопровождения научно-исследовательских работ Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова. 426069, Удмуртская Республика, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7. E-mail: evmak7@yandex.ru

#### **AUTHORS**

**MAKAROV Sergei S.** — Institute of Mechanics Ural Branch of Russian Academy of Sciences. 34 ul. T. Baramzinoy, Izhevsk, Russia 426067. E-mail: ssmak15@mail.ru

**CHEKMYSHEV Konstantin E.** — Institute of Mechanics Ural Branch of Russian Academy of Sciences. 34 ul. T. Baramzinoy, Izhevsk, Russia 426067. E-mail: chekk.90@mail.ru

**MAKAROVA Elena V.** — Kalashnikov Izhevsk State Technical University. 7, ul. Studencheskaya, Udmurt Republic, Izhevsk, Russia, 426069. E-mail: evmak7@yandex.ru