УДК 533.5

И.А. Халидов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА С ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С ПОЗИЦИЙ ПОЛИГАУССОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

На базе полигауссовской модели исследованы свойства случайной шероховатой поверхности в потоке разреженного газа; указанные свойства непосредственно связаны с аэродинамическими характеристиками поверхности. В работе предлагается представлять распределение вероятностей аппликат шероховатости в виде смеси нормальных распределений. Благодаря этому удалось вывести аналитические выражения факториальных моментов числа выходов имитирующего шероховатость случайного поля за определенный уровень траектории частицы газа. Эти аналитические выражения играют ключевую роль при нахождении функции рассеяния атомов газа на поверхности и коэффициентов обмена импульсом и энергией. Рассмотрен также важный частный случай полигауссовских процессов – сферически симметричные случайные процессы, для которых условия удается записать в более простом виде. Для характеристик выбросов за высокий уровень найдены асимптотические оценки, отвечающие случаю слабошероховатой поверхности. Полученные результаты позволяют оценить влияние шероховатости поверхности на характер течения вблизи нее газа; проведено сопоставление с гауссовской моделью шероховатости.

ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА, ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАЗА С ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПОЛИГАУССОВСКАЯ МОДЕЛЬ ШЕРОХОВАТОСТИ.

Введение

Любая реальная поверхность для падающей на нее частицы газа является неровной, шероховатой, и это ее свойство – один из важнейших факторов, определяющих закон взаимодействия потока разреженного газа с твердой поверхностью. Математическое моделирование шероховатости поверхности широко применяется в связи с разнообразными приложениями, например, в задачах трения, разрушения, обработки материалов и т. п. Этой теме посвящены целые монографии, например, теоретико-вероятностные модели шероховатости описаны в книге [1]. Однако описание шероховатости при ее взаимодействии с течениями разреженного газа отличается специфическими особенностями, отмеченными наиболее полно в монографии [2]. Наиболее существенное отличие состоит в изменении ключевого параметра шероховатости: вместо дисперсии отклонений шероховатости от среднего уровня берется дисперсия тангенса угла наклона относительно этого уровня [3]. В первом случае дисперсия характеризует амплитуду, т. е. размах моделирующего шероховатость случайного поля $z(x, y)$, а во втором – наклон шероховатости относительно среднего уровня, определяемый производной $\partial z / \partial x$ или $\partial z / \partial y$.

Впервые построением моделей взаимодействия частиц газа с поверхностью, которые учитывали ее шероховатость, занимались исследователи в лаборатории аэродинамики Санкт-Петербургского государственного университета. В дальнейшем их результаты были многократно уточнены, модернизированы и обобщены в работах Р.Н. Мирошина и его учеников [2 – 9].

Форма шероховатой поверхности во всех этих (и связанных с ними) исследованиях моделируется однородным изотропным гауссовским случайным полем [2].

Среди множества достоинств данной модели следует выделить три наиболее кардинальных преимущества:

дифференцируемость реализаций гауссовского поля обеспечивает существование локальной нормали к элементарной площадке; этого свойства лишены многие другие применяемые модели, описанные в литературе, типа набора плоских элементов [10] или же конусообразных углублений [11];

полная свобода выбора корреляционной функции процесса позволяет моделировать широкие классы реальных поверхностей, получаемых при любых способах обработки;

возможность аналитического представления вероятностных характеристик числа пересечений наклонного уровня с помощью реализаций случайного поля – таких, как вероятность отсутствия пересечений и факториальные моменты их числа.

Но все же гауссовская модель применима не всегда. Например, в работе [12] на базе экспериментальных данных приводится обоснование для предпочтения более общей полигауссовской модели шероховатости. В частности, авторы приводят свидетельства негауссовости рельефов из различных источников в литературе и подчеркивают [12]: «Негауссовской статистикой обладают шероховатости со смешанной структурой, образующиеся в результате нескольких последовательных стадий обработки поверхности (при прессовании, притирке, хонинговании) для поверхностей деталей, подвергшихся износу и приработке в процессе эксплуатации и т. д. Другой причиной негауссовости рельефов является наличие в структуре поверхности детерминированной, часто периодической составляющей, что характерно, в частности, для обработки точением, фрезерованием, обкатыванием, электрополированием».

Постановка задачи

В настоящей работе некоторые результаты, полученные для гауссовских процессов и полей и относящиеся к свойствам процессов и их выходов за некоторый уровень, распространяются на более общий случай полигауссовских процессов с возможностью приложений к задаче о рассеянии атомов разреженного газа на шероховатой поверхности. Без ограничения общности рассматривается не вся трехмерная поверхность, т. е. не полная реализация случайного поля, а лишь ее профиль – реализация только случайного процесса, представляющего собой проекцию поля на плоскость, проходящую через траекторию движения частицы газа и локальную нормаль к поверхности. Тем самым достигается возможность моделировать не случайное поле, а более простой случайный процесс. Такое предположение допустимо, если учесть, что в аэродинамические характеристики в первую очередь входит вероятность отсутствия выбросов случайного поля за наклонный уровень – за траекторию падающей на поверхность частицы газа.

В этих условиях, чтобы сохранить возможность успешного применения модели в прикладных задачах, необходимо наложить два важнейших ограничения на модель случайного процесса:

параметры модели должны быть связаны достаточно простыми аналитическими выражениями с основными статистическими характеристиками процесса, например, с его первыми и вторыми моментами. Данное ограничение необходимо для выработки эффективных методов численного подбора параметров модели с целью аппроксимации характеристик шероховатости, которые получают путем обработки измерений профилограмм. В частности, выполнение этого требования необходимо при сопоставлении результатов численных расчетов с экспериментальными данными;

самой модели должен отвечать простой и эффективный алгоритм численной имитации реализаций процессов и полей, позволяющий использовать модель для расчета средних значений функционалов случайной поверхности при помощи усреднения (методом Монте-Карло) по большому количеству имитированных реализаций.

С этой точки зрения наиболее удобным способом аппроксимации случайных процессов представляется использование смесей вероятностных распределений. Такой путь приводит нас к полигауссовской модели, которая позволяет сколь угодно точно приближать почти любой случайный процесс [13]. Плотность распределения таких процессов в n точках x_1, ..., x_n, отвечающих моментам времени t_1, ..., t_n, определяется формулой

$$p_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{|R_n(v)|}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \sigma(v)) R_n^{-1}(v)(\mathbf{x} - \sigma(v))^T\right\} dF(v), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ – набор заданных точек; $\sigma(v)$ и $R_n(v)$ – векторное математическое ожидание и корреляционная матрица значений процесса в заданных точках; $|R_n(v)|$ – определитель корреляционной матрицы.

От неубывающей на промежутке $[0; \infty)$ весовой функции $F(v)$ в формуле (1) требуется лишь сходимость интеграла – независимо от того, непрерывная это функция (имеет плотность) или же дискретная (ступенчатая).

Алгоритм численного моделирования реализаций полигауссовских процессов, базирующийся на преобразовании гауссовских распределений, описан в работе [12], ориентированной на приложения в таких областях, как рассеяние света на шероховатой поверхности, выращивание тонких пленок в микроэлектронике, диагностика поверхности методами электронной спектроскопии и контактные явления, включая трение и износ изделий в машиностроении. В упомянутой работе показана возможность достаточно точной аппроксимации реальных микрорельефов, полученных в ряде технологических процессов. В частности, моделируются распределения высот шероховатости, которые образуются как при ионной бомбардировке образца стали марки СТ20 атомами азота и аргона, так и при химическом травлении стали спиртовым раствором азотной кислоты по специальной методике. Последняя применяется при стандартном металлографическом исследовании структуры сталей, а также при различных методах их обработки. Учитывая, что аналогичные технологии применяются и при обработке поверхностей летательных аппаратов, движущихся в верхних слоях атмосферы, уделим основное внимание свойствам полигауссовских процессов, влияющим на моделирование рассеяния атомов разреженного газа на шероховатой поверхности. Наибольший интерес в этом плане представляют так называемые сферически симметричные процессы, представляющие собой важный частный случай полигауссовских [14].

С одной стороны, эти процессы составляют достаточно общий класс, дающий возможность аппроксимировать разнообразные реальные профили шероховатости. С другой стороны, многие характеристики сферически симметричных процессов (требуются, прежде всего, в рассматриваемых нами задачах) могут вычисляться через соответствующие величины для гауссовских процессов, которые можно считать в достаточной мере изученными [2, 9].

Свойства полигауссовских и сферически симметричных процессов

Случайный процесс называют сферически симметричным порядка n, если характеристические функции размерности n зависят только от нормы вектора ξ аргумента (норма задается корреляционной матрицей R_n процесса):

$$\mathbf{E}e^{\xi \mathbf{x}} = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \varphi_1(\xi R_n \xi^T), \quad (2)$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – вектор аргумента n-мерной характеристической функции, которая отвечает значениям x_1, ..., x_n процесса в точках t_1, ..., t_n; ξ^T – транспонированный вектор; $\mathbf{E}$ – символ математического ожидания.

Корреляционная матрица R_n положительно определена, поэтому квадратичную форму $\xi R_n \xi^T$ в аргументе в правой части равенства (2) можно интерпретировать как квадрат r^2 нормы вектора ξ.

Принимая во внимание условие согласованности Колмогорова, которое для характеристических функций при $m < n$ записывается в виде

$$\varphi(\xi_1, ..., \xi_n) = \varphi(\xi_1, ..., \xi_m, 0, ..., 0)$$

(здесь число нулей равно $m - n$), видим, что соотношение (2) справедливо и для всех характеристических функций меньших размерностей $m < n$, причем функция $\varphi_1(r)$ остается той же самой. Из соотношения (2) нетрудно вывести, что сферически симметричные процессы – частный случай полигауссовских. Связь между функцией одной переменной $\varphi_1(r)$, задающей n-мерное распределение, и весовой функцией $F(v)$, определяющей полигауссовское распределение (1), записывается в форме

$$\varphi_1(r) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^\infty \left(\frac{2}{rv}\right)^{\frac{n}{2}-1} J_{\frac{n}{2}-1}(rv)\, dF(v), \quad (3)$$

где $J_k(rv)$ – функция Бесселя первого рода.

Произвольность весовой функции $F(v)$ в выражении (3) делает класс сферически симметричных процессов почти настолько же общим при моделировании реальных профилей, что и множество полигауссовских процессов.

Однако ряд свойств сферически симметричных процессов показывает их большое сходство с гауссовскими. В числе этих свойств необходимо отметить следующие.

1. Сферически симметричные процессы имеют линейную регрессию [14].

2. Эргодический сферически симметричный процесс непременно имеет нормальное распределение, т. е. весовая функция $F(v)$ для этого процесса представляет собой единичную ступеньку.

3. Понятия широкой и узкой стационарности эквивалентны для класса сферически симметричных процессов и исключительно лишь для этого класса процессов.

4. Момент любого порядка сферически симметричного процесса $\varsigma(t)$ выражается в виде произведения аналогичного момента гауссовского процесса (с той же корреляционной матрицей) на однократный интеграл с той же весовой функцией:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(\varsigma^{\alpha_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot \varsigma^{\alpha_k}(t_k)) = \\ = \mathbf{E}(\eta^{\alpha_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot \eta^{\alpha_k}(t_k))\int_0^\infty v^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k}\, dF(v).\end{gathered} \quad (4)$$

5. Марковский сферически симметричный процесс – всегда гауссовский.

Данное утверждение вытекает из определения марковского процесса в терминах условных плотностей. Действительно, подставляя в это определение выражения для плотностей (1) и представляя условные плотности через безусловные, приходим путем логарифмирования и дифференцирования по первой компоненте x_1 к равенству вида

$$\begin{gathered}\int_0^\infty v^{-5} \exp\left\{-\frac{y}{2v^2}\right\} dF(v) = \\ = K\int_0^\infty v^{-3} \exp\left\{-\frac{y}{2v^2}\right\} dF(v),\end{gathered} \quad (5)$$

где K – постоянная величина.

Равенство (5) с помощью замены $w = v^{-2}$ можно привести к соотношению, которое допускает трактовку в виде обращения в нуль преобразования Лапласа от функции

$$(w - K)F'(w^{-1/2}).$$

Данное соотношение может быть реализовано только в том случае, если весовая функция – ступенька, т. е. если процесс гауссовский.

Хотя приведенные пять свойств и не могут быть распространены на весь класс полигауссовских процессов, но все же важные для исследования взаимодействия частиц газа с поверхностью (в частности, для построения локальной нормали к малой площадке на поверхности) свойства гладкости остаются верными и для любых полигауссовских процессов. При этом их доказательство аналогично доказательству для гауссовских процессов.

Эти свойства гладкости можно сформулировать следующим образом.

6. Существует процесс, эквивалентный полигауссовскому процессу $\varsigma(t)$, выборочные функции которого имеют непрерывные производные с вероятностью единица, при условии, что асимптотическое поведе-

ние корреляционной функции $r(h)$ процесса $\varsigma(t)$ в окрестности нуля (т. е. при $h \to 0$) задано соотношением

$$r(h) = 1 - \frac{\lambda_2 h^2}{2} + O(|\,h\,|^{2+a}), \qquad (6)$$

где константа a лежит в промежутке $(0;2]$, а λ_2 – конечный второй спектральный момент.

При этом дополнительно требуется, чтобы для некоторого положительного $\delta > 0$ был конечен интеграл

$$\int_0^\infty v^{\frac{2}{a}+\delta} dF(v) < \infty. \qquad (7)$$

7. Если асимптотическое поведение корреляционной функции $r(h)$ полигауссовского процесса $\varsigma(t)$ в окрестности нуля $(h \to 0)$ задано соотношением

$$r(h) = 1 - O(|\,h\,|^{2\alpha+a}) \qquad (8)$$

(где $a \in (0;2]$ и $\alpha > 0$ – константы), причем для некоторого положительного $\delta > 0$ конечен интеграл (7), то существует процесс, эквивалентный процессу $\varsigma(t)$, выборочные функции которого с вероятностью единица удовлетворяют условию Липшица порядка α:

$$|\,\varsigma(t+h) - \varsigma(t)\,| < C\,|\,h\,|^{\alpha}.$$

Из формулировок утверждений 6 и 7 можно убрать ограничения на корреляционную функцию $r(h)$ полигауссовского процесса, поскольку они не являются необходимыми для доказательства. Однако расширение класса корреляционных функций одновременно весьма существенно усложнит ограничение на весовую функцию $F(v)$. Это условие примет вид

$$\int_0^\infty \frac{v\sigma(x^{-1})}{\mu(x^{-1})} \exp\left(-\frac{\mu^2(x^{-1})}{4v^2\sigma^2(x^{-1})}\right) dF(v) < \infty, \quad (9)$$

где $\mu(h) = |\,h\,|^{\beta}$ для некоторого $\beta > 0$ при $a \in (0;2]$; $\mu(h) = \left|\ln|\,h\,|\right|^{-\alpha}$ для некоторого $\alpha > 1$ при $a = 2$; вид функции $\sigma(h)$ зависит от того, какое из свойств (6 или 7) рассматривается.

Для свойства дифференцируемости указанная функция имеет вид

$$\sigma^2(h) = 6 + 2r(2h) - 8r(h),$$

а для условия Липшица –

$$\sigma^2(h) = (1 - r(h))\,|\,h\,|^{-2\alpha}.$$

Таким образом, упростить ограничение (9) можно лишь в том случае, если есть возможность вычислить асимптотику подынтегральной функции в условии (9) при $v \to \infty$.

Число пересечений уровня

При решении проблемы рассеяния атомов газа на поверхности основной интерес представляет число $A_u[0;\ T]$ – количество выходов реализаций случайного процесса или поля за некоторый уровень u на отрезке $[0;\ T]$. Атомами мы называем здесь все частицы газа, независимо от наличия у них внутренней структуры, так как структура учитывается локальной функцией рассеяния, которая считается заданной. Другими словами, рассмотрение структуры молекул не входит в наш круг задач.

Вообще говоря, высота уровня u должна зависеть от положения точки вдоль оси абсцисс, поскольку уровень по сути задает форму траектории движения атома газа (см. рисунок).

Хотя в режиме, близком к свободномолекулярному потоку, эту траекторию можно считать состоящей из прямолинейных отрезков, но она везде остается наклонной по отношению к плоскости среднего уровня шероховатости. Для упрощения расчетов угол наклона нередко предполагается малым, поэтому начнем с модельной задачи постоянного уровня, которая наиболее полно изучена для гауссовских процессов и полей.

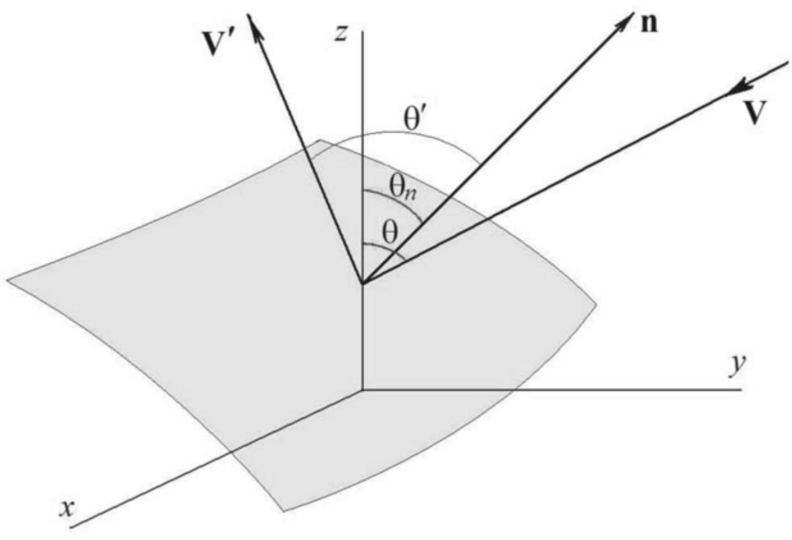
Аэродинамические свойства шероховатой поверхности, обтекаемой разреженным газом, определяются через вероятность отсутствия выбросов за уровень

$$P(A_u[0;\ T] = 0),$$

или же через факториальные моменты числа выходов

$$N_k(T) = \mathbf{E}(A_u(A_u - 1)\cdot\ldots\cdot(A_u - k + 1)).$$

При этом вероятностные характеристики (в частности, факториальные моменты) случайной величины $A_u[0;\ T]$ выражаются в виде многократных интегралов от совмест-



Рассеяние атомов газа на малой площадке шероховатой поверхности с локальной нормалью **n**; **V**, **V′** – векторы скорости падающих и вылетающих атомов

ной плотности распределения случайного процесса и его производных в нескольких точках

$$p_{t_1,\ldots,t_k}(u_1,\ldots,u_k,y_1,\ldots,y_k),$$

где $u_1,\ldots,u_k$ – значения случайного процесса; $y_1,\ldots,y_k$ – значения его производных в несовпадающих точках $t_1,\ldots,t_k$.

Для сферически симметричного процесса совместную плотность распределения процесса и его производных

$$p_{t_1,\ldots,t_k}(u_1,\ldots,u_k,y_1,\ldots,y_k)$$

удается выразить через аналогичную совместную плотность распределения гауссовского процесса и его производных:

$$p_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n,y_1,\ldots,y_n) = \\ = \int_0^\infty g^{v^2 r}_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n,y_1,\ldots,y_n)dF(v), \qquad (10)$$

где $g^{v^2 r}_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n,y_1,\ldots,y_n)$ – плотность распределения гауссовского процесса с корреляционной функцией $v^2 r(h)$ и его производных в несовпадающих точках $t_1,\ldots,t_k$.

На корреляционную функцию $r(h)$ при выводе формулы (10) налагается требование: спектр процесса должен содержать непрерывную компоненту.

Доказательство формулы (10) довольно громоздко, поэтому полностью приводить его не будем, ограничимся лишь кратким изложением его сути. Плотность распределения процесса и его производных в k точках представляется в виде предела плотности распределения процесса в $2k$ точках при стремлении к нулю k приращений по времени значений $t_1,\ldots,t_k$. Последняя плотность для любого полигауссовского процесса выражается в виде смеси (1) гауссовских распределений. Основную трудность составляет обоснование предельного перехода при стремлении к нулю k приращений по времени. При наличии непрерывной компоненты в спектре для сферически симметричного процесса обоснование предельного перехода базируется на теореме Лебега и может быть проведено для любой весовой функции $F(v)$. Заметим, что доказательство может быть обобщено и на случай произвольных полигауссовских процессов, однако требуются ограничения как на корреляционную функцию $r(t)$, так и на весовую функцию $F(v)$.

Представление (10) плотности распределения процесса и его производных дает возможность получить выражение для факториальных моментов $N_k(T,u)$ числа $A_u[0;\ T]$ выходов реализаций случайного процесса за уровень u на отрезке $[0;\ T]$.

Для этого необходимо подставить формулу (10) в выражения факториальных моментов $N_k(T,u)$ в виде многократных интегралов от совместной плотности распределения случайного процесса и его производных [2], после чего поменять порядок интегрирования. Оценки, обосновывающие законность изменения порядка интегрирования, также достаточно громоздки, поэтому приводить их здесь нецелесообразно. Отметим, что при этом не возникает ограничений в дополнение к тем, которые требовались при выводе соотношения (10).

В результате получаем:

$$N_k(u) = \int_0^\infty N_k^r\left(T, \frac{u}{v}\right) dF(v), \qquad (11)$$

где $N_k^r(T, u/v)$ – факториальные моменты числа выходов реализаций гауссовского случайного процесса с корреляционной функцией $r(t)$ за уровень u/v на отрезке $[0;\ T]$.

Представления характеристик полигауссовских и сферически симметричных процессов через соответствующие величины для гауссовских процессов, аналогичные представлению (11), имеют место и для обычных степенных (не факториальных) моментов числа выходов за уровень, так как обычные моменты можно выразить в виде линейной комбинации факториальных моментов.

Кроме того, из выражения (11) вытекает, что распределение числа нулей полигауссовских и сферически симметричных процессов в точности совпадает с распределением числа нулей гауссовских процессов, так как при $u = 0$ факториальные моменты $N_k^r(T, u/v)$ перестают зависеть от переменной v и могут быть вынесены из-под знака интеграла в формуле (11).

Еще одно следствие формулы (11) – выражение для среднего числа $\mathbf{E}(A_u[0;\ T])$ выбросов рассматриваемых процессов за определенный уровень:

$$\mu = \mathbf{E}(A_u[0;\ T]) = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2v^2}}\, dF(v), \qquad (12)$$

которое получается из формулы для среднего числа выбросов гауссовского процесса.

Асимптотика для пересечений высокого уровня

Распределение числа выбросов за высокий уровень важно для практических приложений, в частности, для решения задачи о рассеянии на шероховатой поверхности, поскольку в силу свойств подобия повышение уровня равносильно пропорциональному снижению среднего квадратического отклонения случайного процесса, моделирующего шероховатость. Иными словами, асимптотика выбросов за высокий уровень отвечает асимптотике на слабо шероховатой поверхности.

Обоснование предельного перехода при стремлении уровня u к бесконечности требует громоздких оценок при установлении равномерной сходимости. Поэтому приведем лишь итоговые результаты.

Пусть для весовой функции конечен интеграл (7), а корреляционная функция $r(t)$ удовлетворяет асимптотическим условиям в нуле и на бесконечности:

$$r(t) = 1 - \frac{\lambda_2 t^2}{2} + O(|\,t\,|^{2+a}),\quad t \to 0, \qquad (13)$$

$$r(t) = o\ (\ln^{-1}(t)),\ t \to \infty. \qquad (14)$$

Пусть высота уровня возрастает, т. е. $u \to \infty$ при согласованном увеличении длины отрезка:

$$T = \frac{2\pi\mu}{\sqrt{\lambda_2} f_1(u^2)}, \qquad (15)$$

где функция f_1 определена в формуле (15) соотношением

$$f_1(u^2) = \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2v^2}} dF(v). \qquad (16)$$

Тогда для факториальных моментов числа $A_u[0;\ T]$ выходов реализаций случайного процесса за высокий уровень $(u \to \infty)$ на отрезке $[0;\ T]$ при согласованном увеличении длины отрезка имеет место следующая альтернатива:

либо полигауссовский процесс имеет в смеси гауссовскую компоненту с максимальным значением v, иными словами, весовая функция $F(v)$ имеет скачок на правом конце. Это означает, что функция тождественно равна единице, начиная с некоторого значения аргумента, а предел слева – меньше единицы. В формульном выражении это имеет вид

$$\begin{cases} F(v)=1 \text{ при } v>v_0; \\ \lim\limits_{v\to v_0-0} F(v) = 1-c_1,\ c_1>0. \end{cases} \qquad (17)$$

При этом все моменты сходятся к конечным значениям (постоянная μ здесь определяется формулой (12)), т. е.

$$\lim_{u\to\infty} N_k(T,u) = \frac{\mu^k}{c_1^{k-1}},\quad k=1,2,\ ...; \qquad (18)$$

либо все факториальные моменты, начиная со второго, стремятся к бесконечности в соответствии с выражением (11), т. е. каждый следующий момент стремится к бесконечности быстрее предыдущего.

Таким образом, асимптотика моментов числа выбросов за высокий уровень напоминает соответствующую асимптотику для гауссовского процесса только при наличии в смеси $F(v)$ гауссовской компоненты с максимальным значением v_0. Во всех остальных случаях асимптотика моментов существенно другая, т. е. и все характеристики числа выбросов полигауссовских процессов должны заметно отличаться от гауссовских.

Решение проблемы рассеяния атомов газа на шероховатой поверхности

Полученные выше результаты имеют два аспекта, которые позволяют учесть влияние шероховатости на аэродинамические характеристики поверхности в потоке разреженного газа.

С одной стороны (первый аспект), появляется возможность вывести асимптотические формулы, которые бы описывали данное влияние на слабошероховатой поверхности. Однако здесь следует иметь в виду, что уже для гауссовских процессов такие асимптотические формулы достаточно громоздки и содержат континуальные интегралы. Последние представляют собой интегралы по множеству реализаций случайного процесса (или случайного поля) и при своем вычислении требуют аппроксимации интегралами очень высокой кратности. Кроме того, реальные поверхности всегда обладают микрошероховатостью (даже при самой лучшей обработке), которую уже нельзя считать слабой. Поэтому асимптотические исследования не получили широкого распространения.

Главный практический вывод, который можно сделать из полученной альтернативы (см. формулы (17), (18)), состоит в том, что влияние шероховатости для полигауссовской модели оказывается сильнее, чем для чисто гауссовской (так как каждый следующий момент стремится к бесконечности быстрее предыдущего).

С другой стороны (второй аспект), полигауссовская модель может применяться в численных расчетах методами статистического моделирования [9, 15], которые наиболее употребительны в аэродинамике разреженного газа. В этом случае успех во многом зависит от вида функции рассеяния на поверхности и от конкретных свойств газа и поверхности [9]. Полученные результаты позволяют еще на предварительном этапе расчетов подобрать класс процессов так, чтобы он не только аппроксимировал реально наблюдаемые профили шероховатости, но и обладал необходимым набором свойств, чтобы подобрать наилучшим образом численные процедуры моделирования взаимодействия атома газа с неровностями шероховатости.

Заключение

Таким образом, рассмотренные в работе классы полигауссовских и сферически симметричных случайных процессов позволяют значительно расширить и обогатить возможности асимптотических и численных исследований, связанных с моделированием шероховатых поверхностей.

Анализ полученных результатов дает возможность сделать следующие выводы.

1. При задании параметров модели следует учитывать ограничения на корреляционную и весовую функции моделирующего процесса (см. формулы (6) – (9)), с тем, чтобы обеспечить выполнение основных свойств случайных процессов, необходимых при моделировании реальной шероховатости.

2. Выражение характеристик числа выходов за уровень (в частности, за траекторию движущегося атома газа) через соот-

ветствующие характеристики гауссовского процесса позволяет применять достаточно хорошо разработанную теорию [2 – 9], которая базируется на моделировании шероховатости гауссовскими процессами и полями.

3. Вклад шероховатости в аэродинамические величины для полигауссовской модели может существенно вырасти, по сравнению с гауссовской моделью, несмотря на то, что важнейшие свойства полигауссовских процессов близки к аналогичным свойствам гауссовских. Увеличение вклада объясняется тем, что асимптотика числа выбросов за высокий уровень при отсутствии гауссовской компоненты в смеси существенно отличается от гауссовского случая. При этом возрастает влияние на вероятностные характеристики, а они как раз представляют наибольший интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хусу А.П., Витенберг Ю.Р., Пальмов В.А.** Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход) : М.: Наука, 1975. 344 с.

2. **Мирошин Р.Н.** Пересечения кривых гауссовскими процессами. Л.: Изд-во ЛГУ им. А.А. Жданова, 1981. 212 с.

3. **Мирошин Р.Н., Халидов И.А.** Локальные методы в механике сплошных сред : СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2002. 304 с.

4. **Мирошин Р.Н.** Случайные процессы и поля. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. 304 с.

5. **Аксенова О.А., Халидов И.А.** Шероховатость поверхности в аэродинамике разреженного газа: фрактальные и статистические модели. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2004. 120 с.

6. **Мирошин Р.Н.** Метод моментов в аэродинамике : СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2012. 142 с.

7. **Мирошин Р.Н.** О дисперсии числа нулей некоторых стационарных гауссовских процессов: малые отклонения от простых решений // Вестник С.-Петербургского ун-та, 2006. Сер. 1. Вып. 1. С. 50–59.

8. **Мирошин Р.Н.** Об одном классе многократных интегралов // Математические заметки. 2003. Т. 73. Вып. 3. С. 390–401.

9. **Aksenova O.A., Khalidov I.A.** Application of Gaussian random field theory to direct simulation of rarefied gas flow near rough surface // American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. 1501: Melville, New York, 2012, pp. 1160-1167; doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.4769672.

10. **Borisov S., Ukhov A., Porodnov B.** Numerical simulation of gas dynamics conductivity of microchannels with consideration of surface structure // Rarefied Gas Dynamics. AIP Conference Proceedings, Melville, New York, 2009, pp. 712-717.

11. **Gimelshein N.E., Lilly T.C., Gimelshein S.F., Ketsdever A.D., Wysong L.J.** Surface roughness effects in low Reynolds number nozzle flows // Rarefied Gas Dynamics. Proc. of XV Int. Symp. Novosibirsk, 2007, pp. 695-702.

12. **Литвак М.Я., Малюгин М.И.** Полигауссовские модели негауссовской случайно-шероховатой поверхности // Журнал технической физики. 2012. Т. 82. Вып. 4. С. 99–107.

13. **Чабдаров Ш.М., Трофимов А.Т.** Полигауссовы представления произвольных помех и прием дискретных сигналов // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20. № 4. С. 734–745.

14. **Kung Yao.** A representation theorem and its application to spherically-invariant random processes // IEEE Transactions on Information Theory. 1973. Vol. 19, No. 5, pp 600-608.

15. **Аксенова О.А.** О влиянии вида аппроксимации коэффициентов обмена на поверхности на характер неустойчивости течения разреженного газа в канале // Вестник С.-Петербургского ун-та, 2014. Сер. 1. Т. 1. Вып. 3 (№ 59). С. 410–418.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ХАЛИДОВ Искандер Анасович – *доктор физико-математических. наук, профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

iskander.khalidov@yandex.ru

Khalidov I.A. SALIENT FEATURES OF RAREFIED GAS FLOW INTERACTION WITH ROUGH SURFACE IN THE CONTEXT OF THE POLY-GAUSSIAN MATHEMATICAL MODEL.

The properties of randomly rough surface in the rarefied gas flow are investigated on the base of the poly-Gaussian model. These properties have much to do with surface aerodynamic characteristics. This paper puts forward the representation of probability distribution for z-axis of roughness in the form of the mixture of the Gaussian distributions. Owing to this way we succeeded in deriving analytic expressions for factorial moments of the number of outliers upon a specific level of a trajectory of a gas particle. Those analytic expressions play a key role in finding the scattering function of gas atoms on the surface and the momentum exchange coefficients. The important particular case of the poly-Gaussian processes has been considered, namely – spherically-symmetric random processes, permitting to simplify the conditions. The asymptotic evaluations were found for high level crossings characteristics corresponding to the case of weakly-rough surface. The results obtained allowed to evaluate the influence of surface roughness on the type of gas flow near the surface in comparison to the Gaussian model of roughness.

RAREFIED GAS FLOW, GAS-SURFACE INTERACTION, POLY-GAUSSIAN MODEL OF ROUGHNESS.

REFERENCES

1. **Khusu A.P., Vitenberg Yu.R., Palmov V.A.** *Sherokhovatost poverkhnostey (teoretiko-veroyatnostnyy podkhod).* Moscow, Nauka, 1975, 344 p. (rus)

2. **Miroshin R.N.** *Peresecheniya krivykh gaussovskimi protsessami.* Leningrad, Izdatelstvo Leningradskogo gosudarstvennogo universiteta im. A.A. Zhdanova, 1981, 212 p. (rus)

3. **Miroshin R.N., Khalidov I.A.** *Lokalnyye metody v mekhanike sploshnykh sred.* St. Peterburg, Izdatelstvo S.-Peterburgskogo universiteta, 2002, 304 p. (rus)

4. **Miroshin R.N.** *Sluchaynyye protsessy i polya.* St. Peterburg, Izdatelstvo S.-Peterburgskogo universiteta, 2003. 304 p. (rus)

5. **Aksenova O.A., Khalidov I.A.** *Sherokhovatost poverkhnosti v aerodinamike razrezhennogo gaza: fraktalnyye i statisticheskiye modeli.* St. Peterburg, Izdatelstvo S.-Peterburgskogo universiteta, 2004, 120 p. (rus)

6. **Miroshin R.N.** *Metod momentov v aerodinamike.* St. Peterburg, Izdatelstvo S.-Peterburgskogo universiteta, 2012, 142 p. (rus)

7. **Miroshin R.N.** O dispersii chisla nuley nekotorykh statsionarnykh gaussovskikh protsessov: malyye otkloneniya ot prostykh resheniy. *Vestnik S.-Peterburgskogo Universiteta*, 2006, Ser. 1, No. 1, pp. 50–59. (rus)

8. **Miroshin R.N.** Ob odnom klasse mnogokratnykh integralov. *Matematicheskiye zametki*, 2003, Vol. 73, No. 3, pp. 390-401. (rus)

9. **Aksenova O.A., Khalidov I.A.** Application of Gaussian Random Field Theory to Direct Simulation of Rarefied Gas Flow near Rough Surface. *American Institute of Physics. AIP Conf. Proc.* 1501: Melville, New York, 2012, pp. 1160-1167; doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.4769672

10. **Borisov S., Ukhov A., Porodnov B.** Numerical Simulation of Gas Dynamics Conductivity of Microchannels with Consideration of Surface Structure. *Rarefied Gas Dynamics. AIP Conference Proceedings*, Melville, NY, 2009, pp. 712-717.

11. **Gimelshein N.E., Lilly T.C., Gimelshein S.F., Ketsdever A.D., Wysong L.J.** Surface Roughness Effects in Low Reynolds Number Nozzle Flows. *Rarefied Gas Dynamics. Proc. of XV Int. Symp.*, Novosibirsk, 2007. pp. 695-702. (rus)

12. **Litvak M.Ya., Malyugin M.I.** Poligaussovskiye modeli negaussovskoy sluchayno-sherokhovatoy poverkhnosti. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2012, Vol. 82, No. 4, pp. 99-107. (rus)

13. **Chabdarov Sh.M., Trofimov A.T.** Poligaussovy predstavleniya proizvolnykh pomekh i priyem diskretnykh signalov. *Radiotekhnika i elektronika,.* 1975, Vol. 20, No. 4, pp. 734-745. (rus)

14. **Kung Yao.** A Representation Theorem and its Application to Spherically-Invariant Random Processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1973, Vol. 19, No. 5, pp. 600-608.

15. **Aksenova O.A.** O vliyanii vida approksimatsii koeffitsiyentov obmena na poverkhnosti na kharakter neustoychivosti techeniya razrezhennogo gaza v kanale. *Vestnik S.-Peterburgskogo universiteta*, 2014, Ser. 1, Vol. 1, No. 3(59), pp. 410-418. (rus)

THE AUTHOR

KHALIDOV Iskander A.
St. Petersburg Polytechnic University
29 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
iskander.khalidov@yandex.ru