doi: 10.5862/MCE.53.9

Метод начальных функций в модели упругого многослойного основания под действием нормальной локальной нагрузки

К.т.н., старший научный сотрудник Г.Н. Ширунов,
ООО «ТЕКТОН»

Аннотация. Методом начальных функций (МНФ) решена пространственная задача теории упругости сжатия изотропного слоя нормальной нагрузкой, равномерно распределенной на ограниченной области границы. Данный слой, разделенный на отдельные подслои, имеющие разные упругие характеристики, служит моделью многослойного основания. Выделенный из бесконечного слоя параллелепипед, размеры которого много больше размера области локальной нагрузки, рассматривается как упругое полупространство.

С помощью специально разработанной программы на основе комплекса символьных вычислений Maple получено численно-аналитическое решение, в котором искомые функции перемещений представлены рядами Фурье. Проблема вычислительной неустойчивости счета, присущая МНФ при высоких номерах гармоник, решается использованием в представлении вещественных чисел мантиссы достаточной длины.

Проведено сравнение полученных результатов с решениями классической теории упругости для упругого полупространства, заложенными в нормативные документы по проектированию оснований фундаментов, а также с решениями, получаемыми с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

Ключевые слова: теория упругости; упругий слой; упругое полупространство; метод начальных функций; численно-аналитическое решение; многослойное основание; метод конечных элементов

Введение

Метод начальных функций, разработанный отечественными учеными А.С. Малиевым [1] и В.З. Власовым [2, 3], применяется для решения различных двумерных и пространственных задач теории упругости [4–8]. Относящийся к классу методов функций общего решения МНФ позволяет получать аналитические решения, в том числе и точные [9, 10], для канонических областей, таких как цилиндр, плоский прямоугольник, параллелепипед. Практическая реализация метода ограничивалась моделями, в которых функция нагрузки, описываемая рядами Фурье, была плавно меняющейся и задавалась на всей границе области. В этом случае для удовлетворительного описания не требуется удерживать в рядах разложения большое количество членов. Такого рода ограничения вызваны проблемой неустойчивости счета, которая увеличивается с ростом номеров гармоник и относительной высотой (толщиной) объекта [11, 12]. Приемы, применявшиеся для преодоления проблемы неустойчивости [13, 14], давали ограниченный эффект.

Современные возможности компьютерного моделирования, такие как комплекс символьных вычислений Maple, позволяют решать указанную проблему неустойчивости счета путем наращивания мантиссы в представлении вещественных чисел до необходимой длины. В связи с этим границы применения МНФ к решению практических задач значительно расширились. Кроме того, полученные в замкнутой форме на основе подхода В.А. Агарёва [15] операторы метода начальных функций существенно снижают время счета, что также расширяет возможности метода.

Ранее в работах [16, 17] методом начальных функций в декартовой системе координат получено решение задачи теории упругости для линейно-деформируемого изотропного слоя, нагруженного нормальным сжимающим давлением на верхней грани, распределенным на локальном участке. Выделенный из бесконечного в плане периодически нагруженного слоя параллелепипед, размеры которого значительно превышают размеры грузовой площади, может трактоваться как упругое полупространство. Такая модель может использоваться в практических расчетах оснований фундаментов, подобно тому, как это делается в механике грунтов, свойства которых могут быть приняты линейно-упругими [18].

Метод начальных функций позволяет удобно строить решения задачи теории упругости для многослойной области, в которой границы слоев параллельны начальной плоскости МНФ [6, 7, 8, 9, 13].

В данной работе в рамках развития МНФ впервые решена пространственная задача теории упругости для изотропной области в виде параллелепипеда, где внешняя нагрузка, в отличие от известных решений МНФ для толстых плит [6, 10, 23], приложена не на всей грани, а на малом квадратном участке. При этом рассматриваемая область разделена на горизонтальные слои с различными упругими характеристиками. Предлагаемая модель может использоваться для расчета на действие локальной нагрузки упругого многослойного основания с неограниченным количеством слоев. Впервые для решения задачи многослойного основания применяются операторы МНФ в замкнутой форме, полученные на основе подхода В.А. Агарёва. Как аналитический метод МНФ является альтернативным по отношению к численным методам, например к МКЭ, и результаты расчета могут служить в качестве сравнительного эталона при конечно-элементном моделировании. В отличие от численного расчета решение задачи в аналитическом виде позволяет исследовать экстремальные значения и другие особенности компонентов НДС.

В качестве примера рассмотрена постановочная задача о нагружении трехслойного параллелепипеда, нагруженного в центре верхней грани на квадратном участке равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1). Выполнено сравнение полученных числовых результатов с расчетами по нормативной методике СНиП по определению осадок фундаментов, а также с решением МКЭ, реализованным с помощью комплекса SCAD.

Постановка задачи

Примем, что на границе слоев выполняются условия полного контакта, т. е. компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС), существующие на плоскостях, перпендикулярных оси *z*, непрерывны.

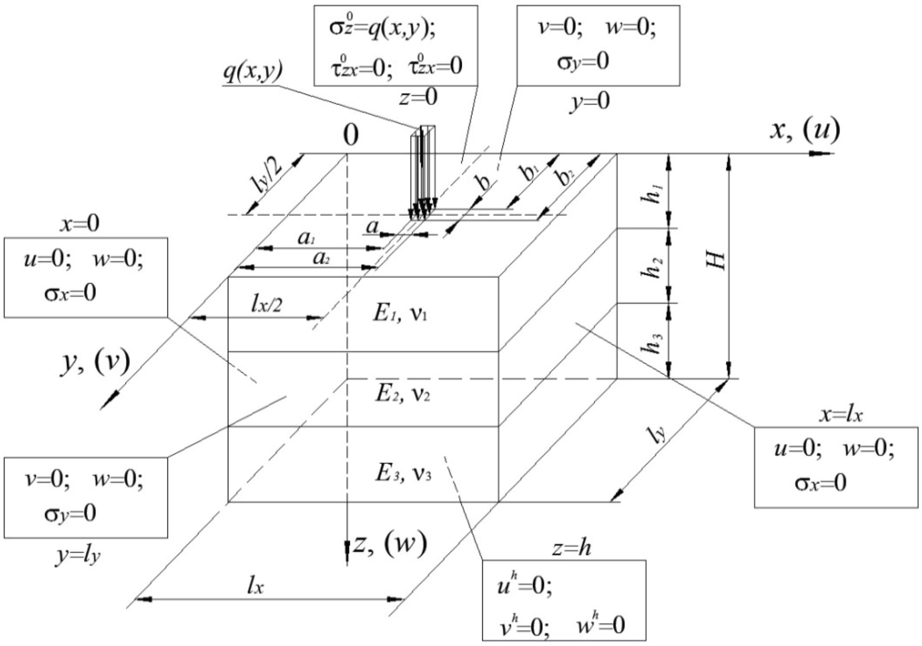

Рисунок 1. Расчетная схема параллелепипеда. Граничные условия

В соответствии с алгоритмом МНФ основное соотношение метода записывается в виде:

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{U}^0, \tag{1}$$

где $\mathbf{U}$ – вектор компонентов напряженно–деформированного состояния $\mathbf{U} = \{u, v, w, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$; $\mathbf{U}^0$ – вектор начальных функций, определенных на начальной плоскости при *z* = 0, $\mathbf{U}^0 = \{u^0, v^0, w^0, \sigma_z^0, \tau_{yz}^0, \tau_{xz}^0\}$; $\mathbf{L}$ – матрица операторов МНФ, представляющих комбинации гиперболических функций синусов и косинусов.

Начальные функции вектора $\mathbf{U}^0$ раскладываются в двойные тригонометрические ряды Фурье по планарным координатам *x* и *y*. С помощью вектора начальных функций, представленного в виде:

$$\mathbf{U^0} = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u^0_{mn} \cos\alpha_m x \sin\beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} v^0_{mn} \sin\alpha_m x \cos\beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w^0_{mn} \sin\alpha_m x \sin\beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^0_{zmn} \sin\alpha_m x \sin\beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \tau^0_{yzmn} \sin\alpha_m x \cos\beta_n y \\ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \tau^0_{xzmn} \cos\alpha_m x \sin\beta_n y \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $\alpha_m = \dfrac{m\pi}{l_x}, \beta_n = \dfrac{n\pi}{l_y}$, строится решение «в синусах». Значения операторов матрицы $\mathbf{L}$ на функциях вектора $\mathbf{U}^0$ обозначаем $\overline{L}_{ij}$ *i*=1…9, *j*=1…6, они получены ранее в работах [21, 22].

На начальной плоскости – верхней грани параллелепипеда при *z* = 0 – приняты следующие граничные условия: $\tau^0_{yz} = 0, \tau^0_{xz} = 0, \sigma^0_z = q(x, y)$. Точки нижней грани параллелепипеда при *z* = *H* неподвижны: *u*(*x*,*y*,*h*)=0, *v*(*x*,*y*,*h*)=0, *w*(*x*,*y*,*h*)=0.

Система разрешающих уравнений, удовлетворяющая граничным условиям на грани *z* = *H* и позволяющая определить неизвестные начальные функции, строится следующим образом. Воздействием операторов матрицы $\mathbf{L}$, в которой задано $z_1 = h_1$, модуль упругости *E* равен значению модуля упругости первого слоя E_1, коэффициент Пуассона $\nu = \nu_1$, на начальные функции $\mathbf{U}^0$ определяются на границе первого и второго слоев функции компонентов НДС. Шесть из них, $\{u\ v\ w\ \sigma_z\ \tau_{yz}\ \tau_{xz}\}$, составляют вектор $\mathbf{U}^1$ и являются начальными функциями для нижележащего второго слоя. Приняв начало координат на границе между первым и вторым слоями, воздействуем $\mathbf{L}$ при $z_2 = h_2$, $E = E_2$, $\nu = \nu_2$ на $\mathbf{U}^1$ и получим вектор начальных функций $\mathbf{U}^2$ для третьего слоя. Таким образом, последовательно по слоям удовлетворим заданным граничным условиям на нижней грани последнего слоя при $z_3 = h_3$. Используем основное соотношение МНФ (1) в матричном виде и запишем разрешающую систему уравнений:

$$\mathbf{U} = \overline{\mathbf{L}}(h_3, E_3, \nu_3)\overline{\mathbf{L}}(h_2, E_2, \nu_2)\overline{\mathbf{L}}(h_1, E_1, \nu_1)\mathbf{U}^0, \tag{3}$$

где $\overline{\mathbf{L}}$ – матрица значений операторов МНФ.

Далее для каждого члена разложения двойного тригонометрического ряда Фурье функции нагрузки:

$$\sigma^0_z = P(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y), \tag{4}$$

решается неоднородная система алгебраических уравнений вида (3) относительно неизвестных коэффициентов разложения начальных функций u^0_{mn}, v^0_{mn} и w^0_{mn}. Все компоненты НДС также находятся из соотношения (3).

Нагрузка

Коэффициенты разложения двойного тригонометрического ряда Фурье для равномерно распределенной нагрузки, действующей на прямоугольном участке, имеют вид:

$$q_{mn} = \frac{4q}{\pi^2 nm}\left(\left(\cos\left(\frac{a_1 m\pi}{l_x}\right) - \cos\left(\frac{a_2 m\pi}{l_x}\right)\right)\times\left(\cos\left(\frac{b_1 n\pi}{l_y}\right) - \cos\left(\frac{b_2 n\pi}{l_y}\right)\right)\right). \quad (5)$$

Для ускорения сходимости ряда (4), сглаживания колебаний функции *P*(*x*,*y*) и уменьшения явления Гиббса в точках разрыва использованы σ-множители Ланцоша [23, 24]. Их применение заменяет частичную сумму ряда (4) тригонометрическим полиномом, в котором каждый член домножается на поправочный множитель $\frac{\sin\frac{\pi m}{M}}{\frac{\pi m}{M}}$ (где *M* – количество удерживаемых членов). Полученная таким образом функция заменяет собой раскладываемую в ряд Фурье функцию и представляет значения локальной средней арифметической величины исходной функции. Это существенно уменьшает осцилляции частичной суммы ряда (4) и снижает эффект Гиббса на концах участка при $x = a_1, a_2$; $y = b_1, b_2$.

В описании нагрузки удерживается 201 член ряда (4), а для преодоления вычислительной неустойчивости длина мантиссы назначена в 400 значащих цифр. Такая длина определена по результатам серии вычислительных экспериментов, где критерием достаточной точности является удовлетворение заданным граничным условиям на грани $z = H$. Если абсолютные значения заданных нулевыми нормальных и касательных напряжений на нижней грани не превосходили 10^{-6}, то длина мантиссы принималась достаточной.

Результаты расчетов

В числовом примере рассмотрено трехслойное грунтовое основание с упругими характеристиками слоев:

модули упругости – $E_1 = 20$ МПа, $E_2 = 10$ МПа, $E_3 = 25$ МПа, коэффициенты Пуассона – $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}35$, $\nu_3 = 0{,}42$. Размеры выделяемого параллелепипеда: полная высота $H = 12$ м при толщине слоев $h_1 = h_2 = h_3 = 4$ м, размеры в плане – $l_x = l_y = 12$ м. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки q^0 принята равной 0,1 МПа, размеры грузовой площадки 1,2×1,2 м, что составляет 1/10 длин граней параллелепипеда.

Функция вертикальных перемещений *w* (МНФ) по глубине толщи под центральной точкой грузовой площадки имеет характерные изломы на границе слоев (рис. 2).

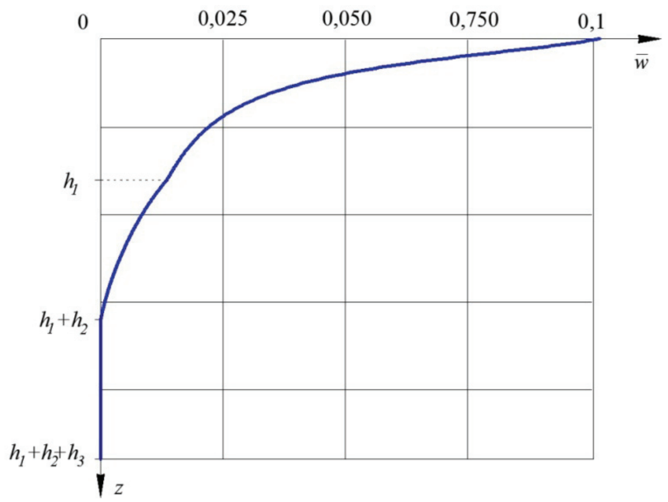

Рисунок 2. Эпюра относительных перемещений $\overline{w} = w\frac{E_1}{|q|H}$ **по глубине сжимаемой толщи**

Расчетная схема конечно-элементной модели построена в комплексе SCAD с использованием объемных 8-узловых конечных элементов с тремя степенями свободы в узле. Граничные условия модели приняты аналогичными тем, что реализуются МНФ. Минимальный размер объемных конечных элементов принят равным 0,2×0,2×0,2 м, что составляет 1/6 стороны грузовой площадки *a*(*b*).

Вертикальные перемещения поверхности при $z = 0$ (осадка) определены по формулам СНиП послойным суммированием с использованием приема угловых точек (принципа суперпозиции). Глубина сжимаемой толщи разделена на 48 участков (по 0,25 м). На рисунке 3 показаны эпюры вертикальных перемещений верхней грани параллелепипеда w ($z = 0$, $y = l_y/2$, x), полученные на основе МНФ, МКЭ и по формулам СНиП.

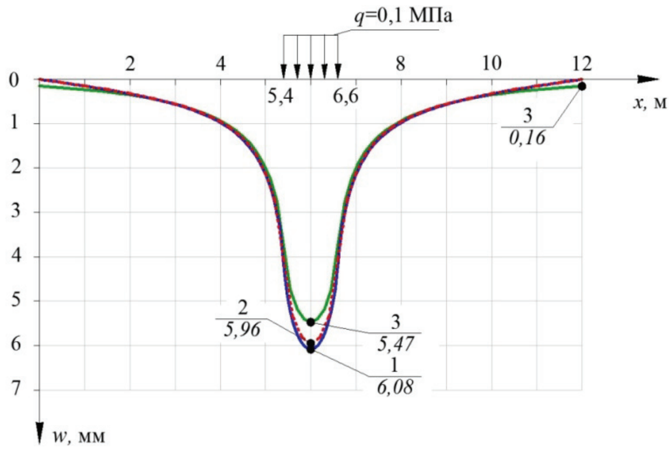

Рисунок 3. Эпюры вертикальных перемещений (осадка) *w* по центральной линии грузовой площадки: 1 – МНФ, 2 – МКЭ, 3 – СНиП

Распределения по глубине толщи напряжений σ_z, получаемые из трех решений, очень близки. Отличия в эпюрах нормальных напряжений σ_x и σ_y по глубине, полученных на основе МНФ и МКЭ, существенны на границе слоев и составляют 20 %. Отметим, что в аналитическом решении МНФ функция $\sigma_x(z)$ претерпевает разрывы на границах слоев, а в численном, полученном МКЭ, остается непрерывной (рис. 4).

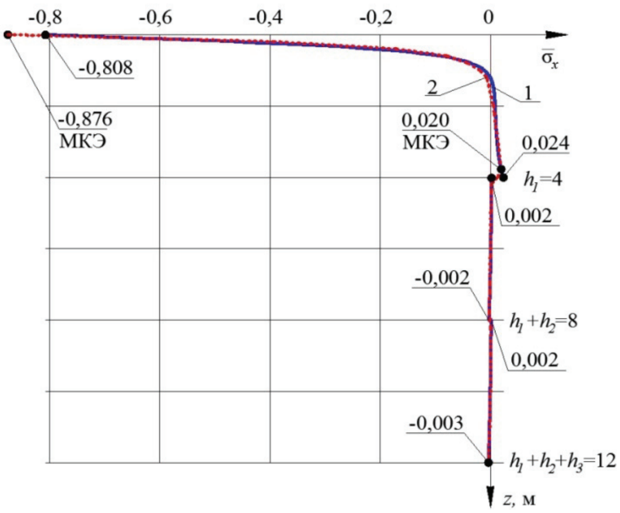

Рисунок 4. Эпюры относительных нормальных напряжений $\bar{\sigma}_x = \dfrac{\sigma_x}{|q|}$ по глубине толщи в центре грузовой площадки: 1 – МНФ , 2 – МКЭ

Заключение

Полученное численно-аналитическое решение дает близкие значения для вертикальных перемещений w (осадки) и нормальных напряжений σ_z как в сравнении с расчетами по СНиП, так и с МКЭ. Отличия в распределении других компонентов НДС с решением МКЭ связаны, по-видимому, с недостаточно мелкой сеткой разбиения расчетной схемы. Это определенным образом подчеркивает преимущества численно-аналитического решения по сравнению с численным расчетом, в котором изначально неизвестно, какую сетку следует принять. Предложенное решение может служить дополнительным сравнительным ориентиром при разработке моделей численных методов.

Литература

1. Малиев А.С. О выборе функций в общих решениях задачи равновесия изотропного упругого тела // Сб. науч. тр. / Ленингр. электротехн. ин-т инж. жел.-дор. транспорта. 1952. Вып. 4. С. 180–244.
2. Власов В.З. Метод начальных функций в задачах теории упругости // Изв. АН СССР. Серия ОТН. 1955. №7. С. 49–69.
3. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматлит, 1960. 491 с.
4. Матросов А.В. Численно-аналитическое решение граничной задачи деформирования линейно-упругого анизотропного прямоугольника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2007. №2. С. 55–65.
5. Матросов А.В. Численно-аналитический алгоритм решения задач плоской деформации линейно-упругих тел сложной конфигурации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2008. №3. С. 70.
6. Galileev S.M., Matrosov A.V. Method of initial functions: stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures // Composite Structures. 1997. Vol. 39. No. 3–4. Pp. 255–262.
7. Galileev S.M., Matrosov A.V., Verizhenko V.E. Method of initial functions for layered and continuously inhomogeneous plates and shells // Mechanics of Composite Materials. 1995. Vol. 30. No.4. Pp. 386–392.
8. Patel R., Dubey S.K., Pathak K.K. Analysis of Composite Beams using Method of Initial Functions // International Journal of Advanced Structures and Geotechnical Engineering. 2012. Vol. 1. No. 2. Pp. 83–86.
9. Galileev S. M., Matrosov A. V. Exact solutions for layered plates and shells // 3RD EUROMECH Solid Mechanics Conference, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 18-22 August. 1997. P. 259.
10. Ширунов Г.Н. Точные решения задачи теории упругости для проверки практической сходимости конечно-элементных моделей // Вестник гражданских инженеров. 2013. №6(41). С. 53–57.
11. Матросов А.В. Вычислительная неустойчивость алгоритма метода начальных функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. №4. С. 30–39.
12. Galileev S.M., Matrosov A.V. Method of initial functions: stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures // Composite Structures. 1997. Vol. 39. No. 3–4. Pp. 255–262.
13. Ширунов Г.Н., Якушев Б.Э. Изгиб несимметричных по высоте сечения многослойных анизотропных балок / ЛИСИ. Л., 1988. 19 с. Деп. Во ВНИИС 6.01.88, № 8461.
14. Матросов А.В. Устойчивый алгоритм метода начальных функций для расчета слоистых плит // Сборник научных трудов. СПб.: СПбГУВК, 1996. С. 260–267.
15. Агарёв В.А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд-во Акад. наук УССР, 1963. 203 с.
16. Shirunov G.N. A method of initial functions in analyzing a stress of an elastic layer // 2014 International conference on computer technologies in physical and engineering applications (ICCTPEA). St.-Petersburg State University of Architecture & Civil Engineering, St. Petersburg, Russia; IEEE (IEEE Catalog number CFP14BDA–USB). 2014. С. 166–167.
17. Ширунов Г.Н. Анализ напряженно–деформированного состояния упругого слоя под действием локальной нагрузки методом начальных функций // Вестник гражданских инженеров. 2014. №5(46). С. 58–67.
18. Цытович Н.А. Механика грунтов. М.: Госстройиздат, 1963. 636 с.
19. Матросов А.В., Ширунов Г.Н. Замкнутая форма операторов метода начальных функций для пространственной задачи теории упругости // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. С. 256–262.
20. Матросов А.В., Ширунов Г.Н. Алгоритмы получения замкнутых форм операторов метода начальных функций для пространственных задач теории упругости // Вестник гражданских инженеров. 2014. №1(42). С. 136–144.
21. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. Перевод с англ. Кайнера М.З. М.: Физматгиз., 1961. 524 с.
22. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. СПб.: Питер, 2004. 538 с.
23. Усаров М.К. Задача изгиба для толстой ортотропной пластины в трехмерной постановке // Инженерно-строительный журнал. 2011. №4. С. 40–47.

Гурий Николаевич Ширунов, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(921)6429807; эл. почта: guriyn@mail.ru

doi: 10.5862/MCE.53.9

Method of initial functions in model of compression linearly deformable layered foundation under normal local load

G.N. Shirunov,
TEKTON Co.Ltd, Saint-Petersburg, Russia
+79216429807; e-mail: guriyn@mail.ru

Key words

theory of elasticity; elastic layer; elastic half-space; method of initial functions; numerical–analytical solution; finite element method; multilayer foundation

Abstract

The three-dimensional problem of the theory of elasticity related to isotropic layer compression by normal load, distributed on a limited area, is solved by the method of initial functions (MIF). The layer divided into separate sub layers with different elastic characteristics serves as a model of the multilayer foundation. A parallelepiped cut out from the infinite layer with dimensions much larger than those of the load area may be considered as an elastic half-space.

A numerical-analytic solution was obtained by a specially designed program based on the symbolic computation system called Maple, in which the desired functions of the displacements are represented by a Fourier series. The problem of computational instability calculations inherent in MIF at high numbers of harmonics was solved by using representation of real numbers with sufficient length mantissa.

The results were compared both with solutions of the classical theory of elasticity for elastic half-space, stipulated in the guidelines for designing foundations, and with the finite element method solutions.

References

1. Maliyev A.S. O vybore funktsiy v obshchikh resheniyakh zadachi ravnovesiya izotropnogo uprugogo tela [On the choice of functions in the General solution of the equilibrium isotropic elastic body]. *Sb. nauch. tr*. [Collection of scientific papers]. Leningr. elektrotekhn. in-t inzh. zhel.-dor. transporta. 1952. Vol. 4. Pp. 180–244. (rus)
2. Vlasov V.Z. Metod nachalnykh funktsiy v zadachakh teorii uprugosti [Method of initial functions in elasticity theory problems]. *Izv. AS USSR. Seriya OTN*. 1955. No. 7. Pp. 49–69. (rus)
3. Vlasov V.Z., Leontyev N.N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on elastic Foundation]. Moscow: Fizmatlit, 1960. 491 p. (rus)
4. Matrosov A.V. Chislenno-analiticheskoye resheniye granichnoy zadachi deformirovaniya lineyno-uprugogo anizotropnogo pryamougolnika [Numerical-analytical solution for a boundary problem of deformation of linearly-elastic anisotropic rectangle]. *Vestnik of Saint Petersburg university. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2007. Issue 2. Pp. 55–65. (rus)
5. Matrosov A.V. Chislenno-analiticheskiy algoritm resheniya zadach ploskoy deformatsii lineyno-uprugikh tel slozhnoy konfiguratsii [Numerical-analytical algorithm for solving problems of plane deformation of linearly-elastic solids with irregular shapes]. *Vestnik of Saint Petersburg university. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2008. No. 3. P. 70. (rus)
6. Galileev S.M., Matrosov A.V. Method of initial functions: stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures. *Composite Structures*. 1997. Vol. 39. No, 3–4. Pp. 255–262.
7. Galileev S.M., Matrosov A.V., Verizhenko V.E. Method of initial functions for layered and continuously inhomogeneous plates and shells. *Mechanics of Composite Materials*. 1995. Vol. 30. No.4. Pp. 386–392.
8. Patel Rakesh, Dubey S. K., Pathak K.K. Analysis of Composite Beams using Method of Initial Functions. *International Journal of Advanced Structures and Geotechnical Engineering*. 2012. Vol. 1. No. 2. Pp. 83–86.
9. Galileev S. M., Matrosov A. V. Exact solutions for layered plates and shells. *3rd EUROMECH Solid Mechanics Conference, Royal Institute of Technology*, Stockholm, Sweden, 18–22 August. 1997. Pp. 259.
10. Shirunov G.N. Tochnyye resheniya zadachi teorii uprugosti dlya proverki prakticheskoy skhodimosti konechno-elementnykh modeley [Exact solutions of the problem of theory of elasticity to check the practical convergence of the finite-element models]. *Bulletin of Civil Engeneers*. 2013. No. 6(41). Pp. 53–57. (rus)

11. Matrosov A.V. Vychislitelnaya neustoychivost algoritma met oda nachalnykh funktsiy [Computational instability of an algorithm of a method of initial functions]. *Vestnik of Saint Petersburg university. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2010. No. 4. Pp. 30–39. (rus)
12. Galileev S.M., Matrosov A.V. Method of initial functions: stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures. *Composite Structures*. 1997. Vol. 39. No. 3–4. Pp. 255–262.
13. Shirunov G.N., Yakushev B.E. *Izgib nesimmetrichnykh po vysote secheniya mnogosloynykh anizotropnykh balok* [The bending of the multilayer anisotropic beams with asymmetric cross section]. LISI, Leningrad, 1988. 19 p. Dep. Vo VNIIS 6.01.88, № 8461. (rus)
14. Matrosov A. V. Ustoychivyy algoritm metoda nachalnykh funktsiy dlya rascheta sloistykh plit [A stable algorithm of the method of initial functions for analysis of layered plates]. *Collection of scientific papers*. Saint-Petersburg: SPbGUVK, 1996. Pp. 260–267. (rus)
15. Agarev V.A. *Metod nachalnykh funktsiy dlya dvumernykh krayevykh zadach teorii uprugosti* [Method of initial functions for two-dimensional boundary value problems of elasticity theory]. Kiyev: Izd-vo Akad. nauk USSR, 1963. 203 p. (rus)
16. Shirunov G.N. A method of initial functions in analizing a stress of an elastic layer. *2014 International conference on computer technologies in physical and engineering applications (ICCTPEA). St.-Petersburg State University of Architecture & Civil Engineering, St. Petersburg, Russia; IEEE (IEEE Catalog number CFP14BDA–USB).* 2014. Pp. 166–167.
17. Shirunov G.N. Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uprugogo sloya pod deystviyem lokalnoy nagruzki metodom nachalnykh funktsiy [Analyzing the stress-strain state of elastic layer loaded locally by the method of initial functions]. *Bulletin of Civil Engeneers*. 2014. No. 5(46). Pp. 58–67.(rus)
18. Tsytovich N.A. *Mekhanika gruntov* [Soil mechanics]. Moscow: Gosstroyizdat, 1963. 636 p. (rus)
19. Matrosov A.V., Shirunov G.N. Zamknutaya forma operatorov metoda nachalnykh funktsiy dlya prostranstvennoy zadachi teorii uprugosti [Closed form of operators method of initial functions for spatial problem of elasticity]. *Protsessy upravleniya i ustoychivost: Trudy 44-y mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii aspirantov i studentov* [Management processes and sustainability: Proceedings of the 44th international conference postgraduates and students]. Saint-Petersburg: Izdat. Dom Saint-Petersburg: gos. un-ta, 2013. Pp. 256–262. (rus)
20. Matrosov A.V., Shirunov G. N. Algoritmy polucheniya zamknutykh form operatorov metoda nachalnykh funktsiy dlya prostranstvennykh zadach teorii uprugosti [Algorithms for obtaining closed forms of the operators of the method of initial functions for three-dimensional problems of the theory of elasticity]. *Bulletin of Civil Engineers*. 2014. No. 1(42). Pp. 136–144.(rus)
21. Lantsosh K., Kaynera M.Z. *Prakticheskiye metody prikladnogo analiza. Spravochnoye rukovodstvo* [Practical methods of applied analysis. Reference Guide]. Translated from English. Moscow: Fizmatgiz., 1961. 524 p.(rus)
22. Goloskokov D.P. *Uravneniya matematicheskoy fiziki. Resheniye zadach v sisteme Maple* [Equations of mathematical physics. The solution of tasks in the system Maple]. Saint-Petersburg: Piter, 2004. 538 p. (rus)
23. Usarov M.K. Zadacha izgiba dlya tolstoy ortotropnoy plastiny v trekhmernoy postanovke [The problem of bending the thick orthotropic plate of three-dimensional formulation]. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 4. Pp. 40–57.(rus)

Full text of this article in Russian: pp. 91–96