Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций (ИФНиТ)
Кафедра экспериментальной физики

Беляев В.М., Боборыкина Е.Н., Гаспарян Р.А., Машков Ю.А.

Сборник задач по механике и молекулярной физике

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2015

1. Кинематика

Основные соотношения

• Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором $\vec{r}$ в прямоугольной системе координат:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы направления (орты); $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$ - координаты точки, как функции времени *t*.

• Средняя скорость перемещения:

$$\vec{v}_{cp} = \Delta\vec{r} / \Delta t,$$

где $\Delta\vec{r}$ - перемещение материальной точки за интервал времени Δt.

• Средняя путевая скорость:

$$\langle v \rangle = \Delta s / \Delta t,$$

где Δs - путь, пройденный точкой за интервал времени Δt.

• Мгновенная скорость:

$$\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r} / \mathrm{d}t = \vec{i}\, v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z,$$

где $v_x = \mathrm{d}x / \mathrm{d}t, v_y = \mathrm{d}y / \mathrm{d}t, v_z = \mathrm{d}z / \mathrm{d}t$ - проекции вектора скорости $\vec{v}$ на оси координат.

• Абсолютное значение (модуль) скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

• Ускорение материальной точки:

$$\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v} / \mathrm{d}t = \vec{i}\, a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z,$$

где $a_x = \mathrm{d}v_x / \mathrm{d}t, a_y = \mathrm{d}v_y / \mathrm{d}t, a_z = \mathrm{d}v_z / \mathrm{d}t$ - проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на оси координат.

• Абсолютное значение (модуль) ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

• При криволинейном движении ускорение можно представить как сумму нормальной (центростремительной) $\vec{a}_n$ и касательной (тангенциальной) $\vec{a}_\tau$ составляющих:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau .$$

• Абсолютные значения этих ускорений:

$$a_n = v^2 / R; \; a_\tau = dv/dt; \; a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} ,$$

где R - радиус кривизны в данной точке траектории.

• Кинематическое уравнение равнопеременного движения ($a = \mathrm{const}$) вдоль оси x:

$$x = x_0 + v_0 t + at^2/2 ,$$

где x_0, v_0 - начальные координата и скорость.

• Скорость точки при равнопеременном движении:

$$v = v_0 + at .$$

• При равномерном движении $v = v_0, a = 0$. Тогда

$$x = x_0 + vt .$$

• Средняя угловая скорость тела при заданной оси вращения:

$$\langle \omega \rangle = \Delta\varphi / \Delta t ,$$

где $\Delta\varphi$ - изменение угла поворота тела за интервал времени Δt.

• Мгновенная угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \mathrm{d}\vec{\varphi} / \mathrm{d}t ,$$

где $\vec{\varphi}$ - угловое перемещение за интервал времени Δt, $\varphi = f(t)$.

• Угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \mathrm{d}\vec{\omega} / \mathrm{d}t .$$

• Кинематическое уравнение равнопеременного вращения:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2 ,$$

где φ_0, ω_0 - начальные угловые перемещения и угловая скорость.

- Угловая скорость при равнопеременном вращении:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t .$$

- При равномерном вращении $\varepsilon = 0, \omega = \omega_0$. Тогда

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t .$$

- Частота вращения:

$$n = N / t; n = 1/T ,$$

где N - число оборотов, совершенных телом за время t; T- период вращения.

Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении твердого тела:

- длина пути S, пройденного точкой тела по дуге окружности радиуса R при повороте тела на угол φ:

$$S = \varphi R ;$$

- линейная скорость точки тела определяется формулами:

$$v = \omega R,\ \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} ;$$

- касательное (тангенциальное) ускорение точки:

$$a_\tau = \varepsilon R,\ \vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{R} ;$$

- нормальное (центростремительное) ускорение:

$$a_n = \omega^2 R,\ \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R} .$$

Задание 1 «Кинематика»

1. Определить среднюю путевую скорость материальной точки в указанном интервале времени ($t_н - t_к$), используя рисунок 1 и данные таблицы 1. Для рисунка 1*Б* начальную скорость v_0 взять из таблицы 1.

2. Используя соотношения, определяющие движения тела с начальной скоростью v_0, направленной под углом к горизонту α, найти значения физических

величин, указанных в таблице 1 в заданный момент времени t^*; h_0 - высота тела в начальный момент времени (при t = 0); $v_к$ - скорость в конце движения; S и H - дальность полета и максимальная высота подъема тела; a_n и a_τ - нормальное и касательное ускорения соответственно.

3. Материальная точка движется по плоскости согласно уравнению: $\vec{r}(t) = \vec{i}(A + Bt^2) + \vec{j}Ct$ - для четных номеров вариантов; $\vec{r}(t) = A(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t)$ - для нечетных. Для момента времени t^* определить: а) модуль перемещения точки; б) скорость точки; в) ускорение точки. Начертить траекторию точки.

4. Колесо радиусом R вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти к моменту времени t^* после начала движения: а) линейную и угловую скорости; б) касательное, нормальное и полное ускорения; в) число оборотов, сделанных колесом за это время.

5. Колесо радиусом R вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, от времени дается уравнением $v = At + Bt^2$. Найти угол, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса в момент времени t^* после начала движения.

Таблица 1

№ вар.	Вариант рисунка	$(t_н–t_к)$, с	v_0, м/с	α, град	h_0, м	t^*, с	Искомые величины в задаче 2.	A	B	C	ω, рад/с	R, м
1	*А*	0-3	5	0	10	1	x, y, a_n	0.2	1	0.1	π	0.1
2	*Б*	0-5	3	30	10	1	x, y, a_τ	0.3	2	-0.1		0.2
3	*В*	18-23	5	30	5	2	v_x, v_y, a_n	0.4	3	-0.2	π/2	0.3
4	*Б*	5-10	5	45	7	2	v_x, v_y, a_τ	1	4	-1		0.4
5	*А*	0-6	8	45	0	1	x, y, H	2	1	-2	π/2	0.2
6	*В*	20-25	10	30	0	1.5	x, y, S	3	2	-0.3		0.15
7	*А*	0-8	10	60	0	2	x, y, v_k	0.5	3	2	π/3	0.1
8	*Б*	0-10	6	60	5	2	y, v_y, H	0.4	-2	3		0.25
9	*В*	15-20	10	30	8	3	x, v_x, a_n	0.2	-1	1	π/4	0.35
10	*Б*	10-15	15	30	0	2	v_x, v_y, H	0.1	4	0.5		0.3
11	*А*	3-8	15	45	10	3	y, v_x, S	0.3	5	0.4	π/3	0.4

12	*В*	10-15	20	45	0	3	v_x, v_y, S	0.4	6	0.6		0.25
13	*Б*	15-20	15	60	0	2	v_x, v_y, a_τ	1	3	-0.2	π/6	0.10
14	*А*	3-11	20	30	0	2	v_x, v_y, a_n	2	1	-0.4		0.13
15	*В*	8-12	20	60	0	1	x, v_x, v_k	3	4	-0.3	π/3	0.14
16	*А*	8-14	30	0	20	0.5	y, v_y, v_k	0.2	5	-0.1		0.15
17	*В*	3-8	10	0	25	1	x, a_n, a_τ	0.4	3	0.5	π/6	0.23
18	*Б*	20-25	10	0	40	2	x, y, H	0.6	1	0.1		0.18
19	*А*	11-16	50	30	0	3	v_x, y, H	0.8	2	-0.01	π/2	0.15
20	*В*	5-10	50	45	0	2.5	x, H, S	4	3	-0.02		0.13
21	*Б*	12-20	40	0	10	1	x, y, v_k	9	4	0.4	π/6	0.24
22	*В*	7-10	40	30	10	3	v_x, y, v_k	3	5	0.8		0.36
23	*Б*	6-12	40	45	5	2	v_x, y, H	1	6	0.7	π	0.28
24	*А*	16-23	60	60	20	4	x, y, H	2	1	0.3		0.21
25	*Б*	12-17	60	45	15	4	v_x, H, S	5	7	0.01	π/4	0.16
26	*А*	23-25	45	30	0	2	v_x, H, a_n	6	3	0.05		0.31
27	*В*	0-7	80	60	0	1	v_x, H, a_τ	7	4	0.9	π/6	0.23
28	*А*	19-23	18	45	40	3	y, H, S	3	-2	-0.01		0.14
29	*Б*	18-22	35	60	30	2	x, H, a_n	4	-1	-0.05	π/2	0.15
30	*В*	0-5	42	60	15	3	y, H, a_τ	2	3	0.02		0.38

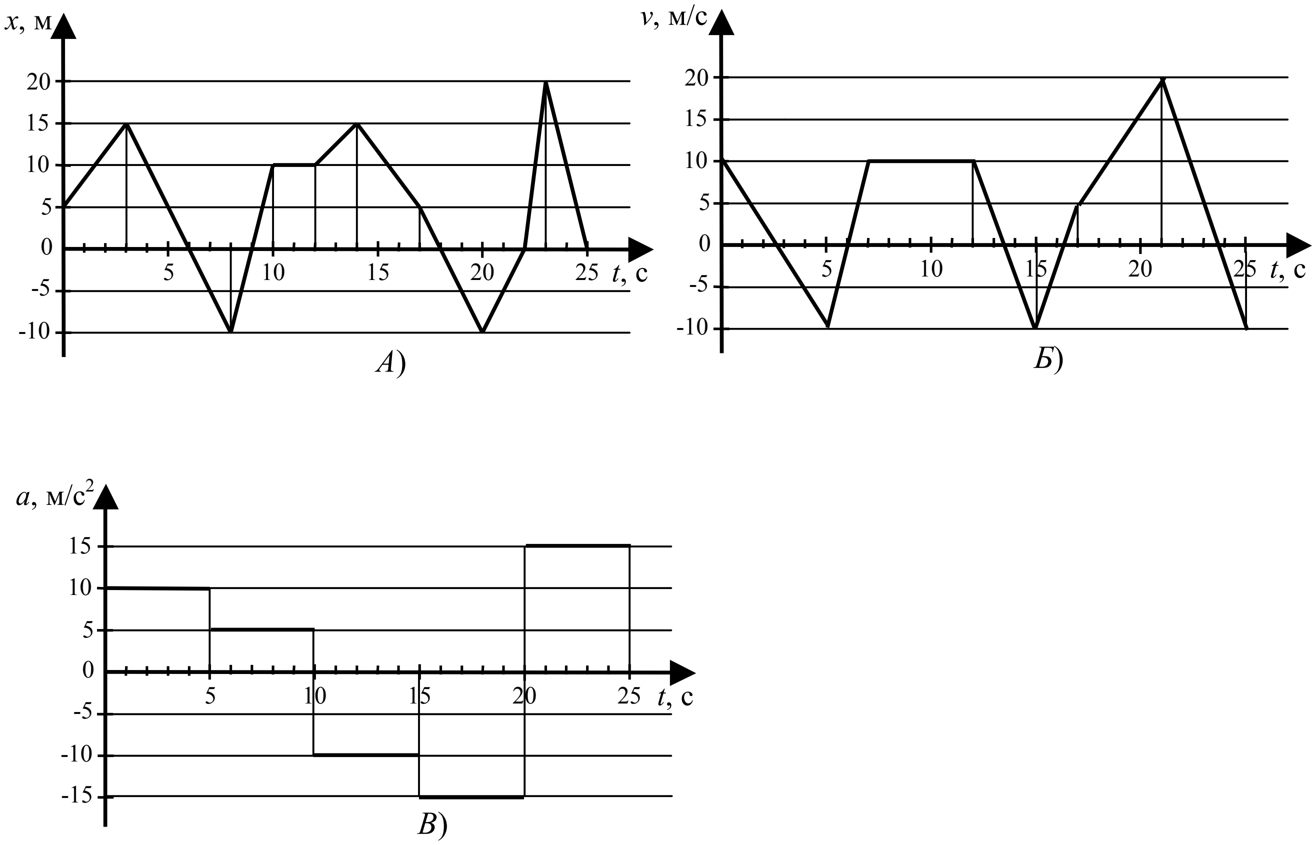


Рис.1. Зависимости координаты x, скорости v и ускорения a материальной точки от времени

2. Динамика материальной точки и тела, движущегося поступательно.

Основные соотношения

• Уравнение движения материальной точки (второй закон Ньютона):

$$\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \text{ или } m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i ,$$

где $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ - геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку (результирующая сила); m - масса; $\vec{a}$ - ускорение; $\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс; n - число сил, действующих на точку.

В координатной (скалярной форме) уравнение можно записать так:

$$ma_x = \sum F_{xi}, ma_y = \sum F_{yi}, ma_z = \sum F_{zi} ,$$

где под знаком суммы стоят проекции сил $\vec{F}_i$ на соответствующие оси координат.

• Работа, совершаемая постоянной силой

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} \text{ или } \Delta A = F\Delta r \cos\alpha ,$$

где α - угол между направлениями векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\Delta\vec{r}$.

• Работа, совершаемая переменной силой,

$$A = \int_L F(r)\cos\alpha \, \mathrm{d}r ,$$

где интегрирование ведется вдоль траектории, обозначенной L.

• Средняя мощность за интервал времени Δt

$$\langle N \rangle = \Delta A/\Delta t .$$

• Мгновенная мощность

$$N = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t \text{ или } N = Fv\cos\alpha ,$$

где $\mathrm{d}A$ - работа, совершаемая за промежуток времени $\mathrm{d}t$.

• Кинетическая энергия поступательно движущегося тела:

$$T = mv^2/2 \text{ или } T = p^2/2m .$$

• Потенциальная энергия тела и сила, действующая на тело в данной точке стационарного потенциального поля, связаны соотношением:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,\Pi \text{, или } \vec{F} = -[(\partial\Pi/\partial x)\vec{i} + (\partial\Pi/\partial y)\vec{j} + (\partial\Pi/\partial z)\vec{k}],$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты прямоугольной системы координат.

• Потенциальная энергия упруго деформированного тела (сжатой или растянутой пружины)

$$\Pi = kx^2/2.$$

• Потенциальная энергия тела, находящегося в однородном поле силы тяжести

$$\Pi = mgh,$$

где h - высота тела над уровнем, принятым за нулевой.
Эта формула справедлива при $h << R$, где R - радиус Земли.

• Закон сохранения энергии в механике выполняется в замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы:

$$T + \Pi = \mathrm{const}.$$

• Закон сохранения импульса:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \mathrm{const} \text{ или } \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \mathrm{const},$$

где n - число материальных точек (тел), входящих в данную замкнутую систему.

• Скорость абсолютно неупругих шаров после удара:

$$U = (m_1v_1 + m_2v_2)/(m_1 + m_2)$$

и абсолютно упругих:

$$U_1 = [v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2]/(m_1 + m_2),$$

$$U_2 = [v_2(m_2 - m_1) + 2m_1v_1]/(m_1 + m_2),$$

где m_1, m_2 - массы, v_1, v_2 - скорости шаров до удара.

Задание 2 «Динамика. Работа, мощность, энергия, импульс»

1. Тело массой m движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением $S = A\sin\omega t$ - для четных номеров вариантов $(\omega = \pi/9), S = A + Bt + Ct^3$ - для нечетных номеров. Для

момента времени $t = t^*$ найти: а) силу, действующую на тело; б) импульс тела; в) кинетическую энергию тела. Значения величин A, B, C, t^* взять из таблицы 1 (задание 1).

2. Определить кинетическую и потенциальную энергии тела массой m в условиях задачи №2 (задание 1) в момент времени $t = t^*$.

3. Найти значения физических величин, указанных в таблице 2, используя схемы рисунка 2; a - ускорение тел; T - сила натяжения нити; S - путь, пройденный телами; t - время движения тел; F - сила, растягивающая пружину. Массой блоков и трением пренебречь.

4. Тело массой m скользит вниз по наклонной плоскости – для четных номеров вариантов, вверх – для нечетных. Используя данные таблицы 2, определить величины, указанные в этой таблице; α - угол наклона плоскости к горизонту; k - коэффициент трения; l - длина наклонной плоскости; v - скорость в конце пути; a - ускорение движения; A, N - работа и мощность в конце пути; F - дополнительная сила, действующая на тело; E_k - кинетическая энергия тела в конце пути.

5. Шар массой m налетает на покоящийся шар массой m со скоростью v: для четных номеров вариантов – удар упругий, для нечетных – неупругий центральный. При упругом ударе первоначально движущийся шар меняет свое направление на угол α (из таблицы 2). Определить величины, указанные в таблице 2: β- угол между вектором скорости второго шара и первоначальным направлением движения первого шара; u_1 и u_2 - скорости шаров после удара; p_1 и p_2 - импульсы шаров после удара; Δp_1 и Δp_2 - изменения импульсов;T_1, T_2- энергии шаров после удара; ΔT_1 и ΔT_2 - изменение энергии; ΔU- изменение внутренней энергии шаров.

Таблица 2

№ вар.	m, кг	Вариант рисунка	S, м	t, с	Искомые величины в задаче 3	α, град	k	l, м	a, м/с^2	Искомые величины в задаче 4	v, м/с	Искомые величины в задаче 5
1	0,5	а			a, T	30	0,1	2	0,1	F, v	2	U_1, Δp_2
2	1	б			F	30	0,1	3	0,2	F, A	3	β, Δv
3	1,2	в	2		t, a	45	0,01	2	0,3	F, N	4	Δp_1, p_2
4	2	г		3	S, a	45	0,01	3	0,4	F, E_k	5	U_1, ΔT_2
5	2,5	д			a, T	60	0,15	4	0	F, A	2	U_1, Δv
6	3	е			a	60	0,15	5	0,6	F, N	3	Δp_1, Δp_2
7	3,5	ж			F	40	0,02	4	0,7	F, E_k	4	U_1, T_1
8	4	з	3		t, T	40	0,02	5	0,8	F, v	5	ΔT_1, ΔT_2
9	1	б	4		F, t	35	0,05	2	0	F, N	10	β, Δv
10	1,5	в			a, T	35	0,05	3	1	F, A	11	p_1, p_2
11	2	а	1,5		t, T	50	0,03	2	1,1	F, v	15	Δp_1, T_1
12	1,8	г			a, T	50	0,03	3	1,2	F, E_k	14	T_1, T_2
13	2,5	е			T_1, T_2	65	0,04	6	1,3	F, A	13	Δp_1, T_2
14	3	д	1,5		t, a	65	0,04	5	1,4	F, N	8	β, T_1
15	4	з			a, T	25	0,1	6	1,5	F, v	7	Δp_1, Δp_2
16	5	ж			a, F	25	0,1	5	1,2	F, E_k	6	β, T_2
17	1,5	а		5	S, T	30	0,05	1	1,3	F, A	5	ΔT_1, ΔT_2
18	4,5	б	3,5		t, F	30	0,05	8	1,4	F, N	4	β, p_1
19	8	г	2		t, a	45	0,07	7	1,5	F, E_k	10	p_1, T_2
20	10	ж	1,7		S, F	45	0,07	10	1,6	F, v	12	β, p_2
21	11	з		3,5	S, T	60	0,08	8	1,7	F, A	14	p_1, Δv
22	12	а		2	S, a	60	0,08	7	1,8	F, N	15	U_2, T_1
23	16	б		1,6	S, F	65	0,2	4	1	F, E_k	13	β, Δp_1
24	2	в		1,8	S, T	65	0,2	5	1,5	F, v	7	U_1, T_2
25	2,7	д		2	S, a	40	0,16	6	1,6	F, A	6	Δp_1, ΔT_1
26	18	г		1,5	S, T	40	0,16	7	0,8	F, N	5	T_1, Δv
27	20	а	3		t, a	25	0,17	5	0,7	F, E_k	4	Δp_2, ΔT_2
28	0,7	в		2,7	S, a	45	0,17	10	0	F, v	10	Δp_1, Δp_2
29	1,7	г	3,5		t,T	45	0,12	15	0	F, A	12	T_2, Δv
30	13	ж		4	t, F	25	0,12	12	0	F, N	4	U_1, U_2

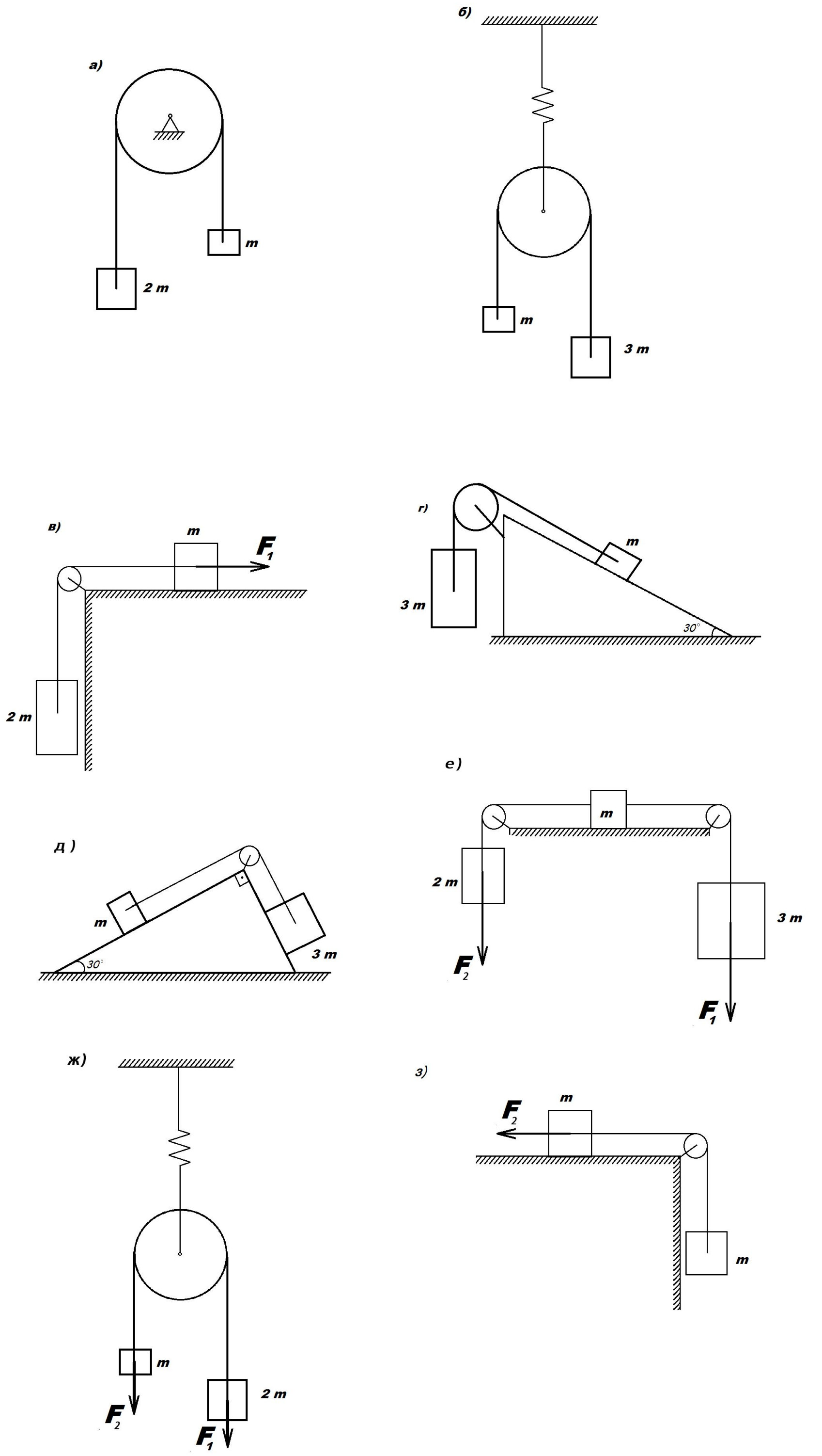


Рис.2. Система тел, соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями, движущихся без трения. F_1=10 Н; F_2=20 Н.

3. Динамика вращательного движения

Основные соотношения

• Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$M\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(I\omega),$$

где M - момент силы, действующий на тело в течение времени dt; I - момент инерции тела; ω- угловая скорость; $I\omega$- момент импульса.

Если момент силы и момент инерции постоянны, то уравнение записывается в виде:

$$M\Delta t = I\Delta\omega.$$

В случае постоянного момента инерции

$$M = I\varepsilon,$$

где ε - угловое ускорение.

• Момент силы $\vec{F}$, действующей на тело относительно оси вращения

$$M = F_{\perp} l,$$

где $F_{\perp}$ - проекция силы $\vec{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения; l- плечо силы $\vec{F}$ (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).

• Момент инерции материальной точки

$$I = mr^2,$$

где m - масса точки, r - ее расстояние от оси вращения.

• Момент инерции твердого тела

$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m \text{ или } I = \int \rho r^2\,\mathrm{d}V,$$

где ρ, V - плотность и объем тела; m- его масса.

Моменты инерции некоторых однородных тел относительно центральных осей:

• тонкий стержень массой m и длиной l, ось перпендикулярна стержню:

$$I = ml^2/12;$$

- если перпендикулярная ось проходит через конец стержня:

$$I = ml^2/3;$$

- тонкое кольцо (труба) массой m и радиусом R, обруч, маховик, масса которого сосредоточена в ободе, ось перпендикулярна плоскости основания:

$$I = mR^2;$$

- круглый однородный диск (цилиндр) массой m и радиусом R, ось перпендикулярна плоскости основания:

$$I = mR^2/2;$$

- шар массой m и радиусом R:

$$I = 2mR^2/5;$$

- прямоугольный параллелепипед массой m и размерами a, b, c вдоль осей x, y, z соответственно, оси перпендикулярны граням:

$$I_x = m(b^2 + c^2)/12;\ I_y = m(a^2 + c^2)/12;\ I_z = m(a^2 + b^2)/12;$$

- прямой круговой конус массой m и радиусом основания R, ось перпендикулярна плоскости основания:

$$I = 3mR^2/10.$$

- Теорема Штейнера. Момент инерции тела относительно произвольной оси равен:

$$I = I_0 + ma^2,$$

где I_0 - момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно заданной оси; a- расстояние между осями; m- масса тела.

- Закон сохранения момента импульса:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i \omega_i = \mathrm{const},$$

где n - число тел, входящих в данную замкнутую систему.

- Работа постоянного момента силы M, действующего на вращающееся тело:

$$A = M\varphi,$$

где φ - угол поворота тела.

- Мгновенная мощность, развиваемая при вращении тела:

$$N = M\omega.$$

- Кинетическая энергия вращающегося тела:

$$T = I\omega^2 / 2.$$

Задание 3 «Динамика вращательного движения»

1. Автомобиль массой m движется по выпуклому (для четных номеров вариантов) или вогнутому (для нечетных) мосту, имеющему форму дуги окружностью радиуса R со скоростью v. Положение автомобиля на мосту задано центральным углом α (α- угол между вертикальным радиусом кривизны и радиусом, соответствующим местоположению автомобиля). Определить силу давления автомобиля на мост и силу трения, если коэффициент трения равен 0,2. Величины m, v, R, α взять из таблицы 3.

2. Вычислить моменты инерции системы тел относительно осей 1-5, указанных в таблице 3.

3. Решить задачу №3 (Задание 2) с учетом массы блока $m_{бл}$=1 кг; радиус блока принять равным 0,1 метра, блок считать сплошным однородным диском.

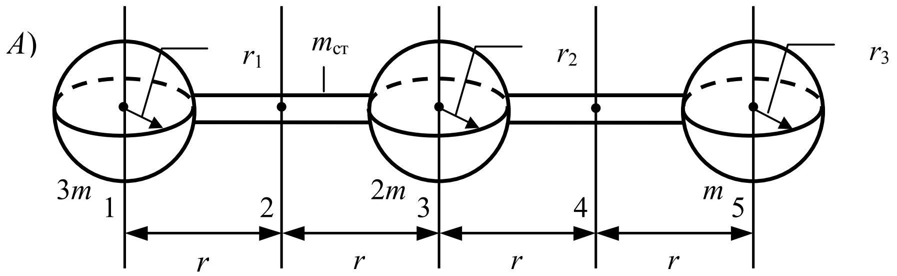
4. По данным задачи №4 (задание 1) для момента времени t^* определить: а) вращающий момент; б) кинетическую энергию колеса; в) мощность; г) работу, совершенную с начала вращения до момента времени $t = t^*$. Массу колеса принять равной 70 кг.

5. Пластилиновый шарик массой $m_ш$, летящий со скоростью $v_ш$, попадает в стержень (для четных номеров вариантов) или диск (для нечетных) и прилипает к нему. Используя рисунок 4 и данные таблицы 3, определить указанные в ней величины. M - масса диска (стержня); ω - угловая скорость в начальный момент

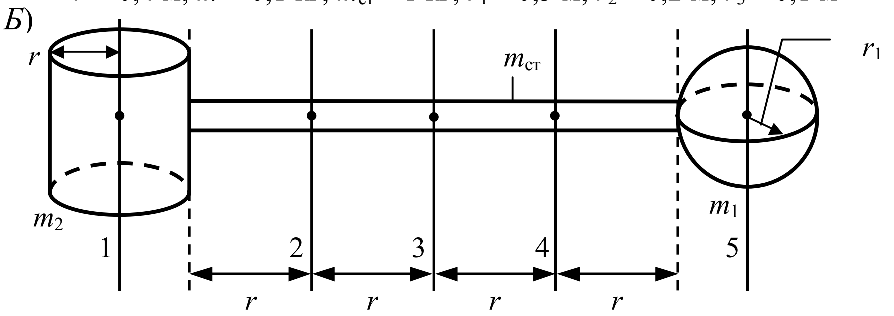
времени (сразу после удара); v_A - линейная скорость точки A сразу после удара; $E_к$- энергия стержня (диска) в начальный момент времени; h- максимальная высота подъема центра масс стержня (диска); φ - максимальный угол отклонения оси стержня (диска) от вертикального положения.

Таблица 3

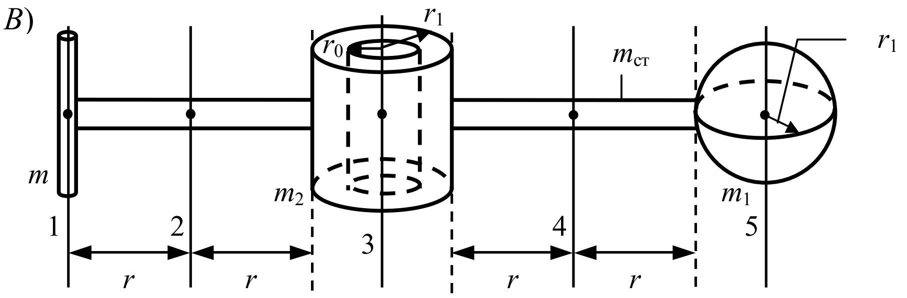
№ вар.	m, т	R, м	v, м/с	α, град	Вариант рисунка	№ оси	l, м	r, м	$m_ш$, кг	M, кг	$v_ш$, м/с	a, м	b, м	Искомые величины в задаче 5
1	1	100	12	60	А	1		0,5	0,3	0,8	12	0,3	0,2	ω, E_k
2	1,5	100	15	50	Б	2	1,1		0,2	0,3	10	0,2	0,8	ω, φ
3	2	100	13	40	В	3		0,6	0,4	0,9	14	0,4	0,2	ω, h
4	2,5	150	18	30	Г	1	1,2		0,3	0,4	9	0,4	0,8	v_A, E_k
5	3	200	20	25	Д	5		0,7	0,4	1	16	0,5	0,3	v_A, φ
6	2	100	10	35	Б	5	1		0,25	0,5	8	0,3	0,7	v_A, h
7	2,5	300	21	45	В	2		0,8	0,35	1,1	17	0,4	0,3	ω, E_k
8	3	400	25	55	Г	4	0,8		0,5	0,2	6	0,25	0,5	ω, φ
9	3,5	500	9	0	А	3		0,5	0,45	1,2	10	0,25	0,35	ω, h
10	1	180	14	30	Д	1	1,1		0,3	0,6	9	0,4	0,6	v_A, E_k
11	2	200	7	40	В	4		0,6	0,5	1	13	0,3	0,4	v_A, φ
12	2,4	200	16	50	Г	3	1,2		0,4	0,7	10	0,45	0,7	v_A, h
13	2,8	300	17	0	А	5		0,7	0,3	1,4	14	0,35	0,4	ω, E_k
14	1,6	130	12	25	Б	1	1		0,35	0,6	11	0,25	0,6	ω, φ
15	1,7	190	21	30	Д	2		0,8	0,3	1,2	15	0,2	0,5	ω, h
16	1,8	250	10	40	Г	5	0,8		0,2	0,3	12	0,2	0,5	ω, E_k
17	2	210	18	45	А	4		0,4	0,5	0,8	10	0,3	0,25	ω, φ
18	2,3	230	13	0	Б	4	1,4		0,25	0,8	10	0,5	0,8	ω, h
19	2,4	270	19	60	Д	4		0,6	0,3	0,9	17	0,4	0,35	v_A, E_k
20	2,8	500	8	55	В	1	1,6		0,4	0,9	12	0,6	0,9	v_A, φ
21	3,2	450	10	40	А	4		0,7	0,25	1,3	18	0,4	0,5	v_A, h
22	3,4	520	11	30	Б	2	1		0,5	0,4	8	0,25	0,6	v_A, E_k
23	1,2	140	8	0	В	5		0,8	0,25	1,5	19	0,3	0,3	v_A, φ
24	1,3	120	16	60	Г	1	1,2		0,2	0,6	12	0,3	0,7	v_A, h
25	2,6	170	14	50	Д	1		0,5	0,4	0,7	15	0,2	0,4	ω, E_k
26	2,4	320	19	25	В	4	1,1		0,35	0,5	8	0,35	0,6	ω, φ
27	1,4	200	13	45	Б	3		0,6	0,6	0,8	9	0,35	0,5	ω, h
28	2,6	280	17	0	А	2	0,8		0,5	0,3	7	0,25	0,4	ω, E_k
29	1,1	170	21	40	Г	5		0,7	0,4	1,2	20	0,2	0,25	ω, φ
30	3,1	440	15	50	Д	5	1		0,2	0,4	10	0,2	0,5	ω, h



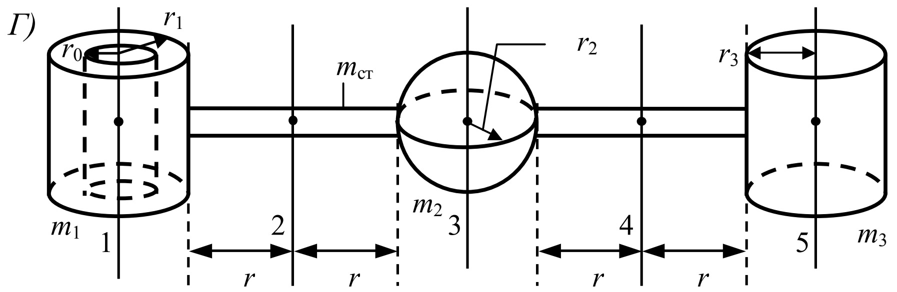
$r = 0,4$ м; $m = 0,1$ кг; $m_{ст} = 1$ кг; $r_1 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $r_3 = 0,1$ м



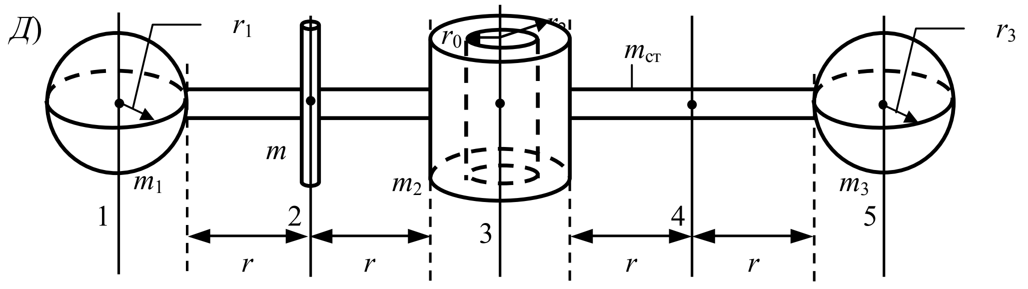
$r_1 = 0,1$ м; $m_1 = 0,2$ кг; $r_2 = 0,2$ м; $m_2 = 0,3$ кг; $r = 0,21$ м; $m_{ст} = 0,4$ кг



$r_1 = 0,1$ м; $m_1 = 0,2$ кг; $m_2 = 0,5$ кг; $r_2 = 0,1$ м; $m = m_{ст} = 0,25$ кг; $r = 0,1$ м; $r_0 = 0,05$ м



$r_1 = 0,15$ м; $r_0 = 0,07$ м; $m_1 = 0,2$ кг; $r_2 = 0,1$ м; $m_2 = 0,25$ кг; $m_3 = 0,3$ кг; $r_3 = 0,08$ м; $m_{ст} = 0,7$ кг; $r = 0,12$ м



$m_1 = 0,1$ кг; $m_2 = 0,2$ кг; $m_3 = 0,3$ кг; $m = m_{ст} = 0,5$ кг; $r_1 = 0,1$ м; $r_2 = 0,2$ м; $r_0 = 0,1$ м; $r_3 = 0,3$ м; $r = 0,25$ м

Рис.3. Комбинированные системы тел для вычисления моментов инерции

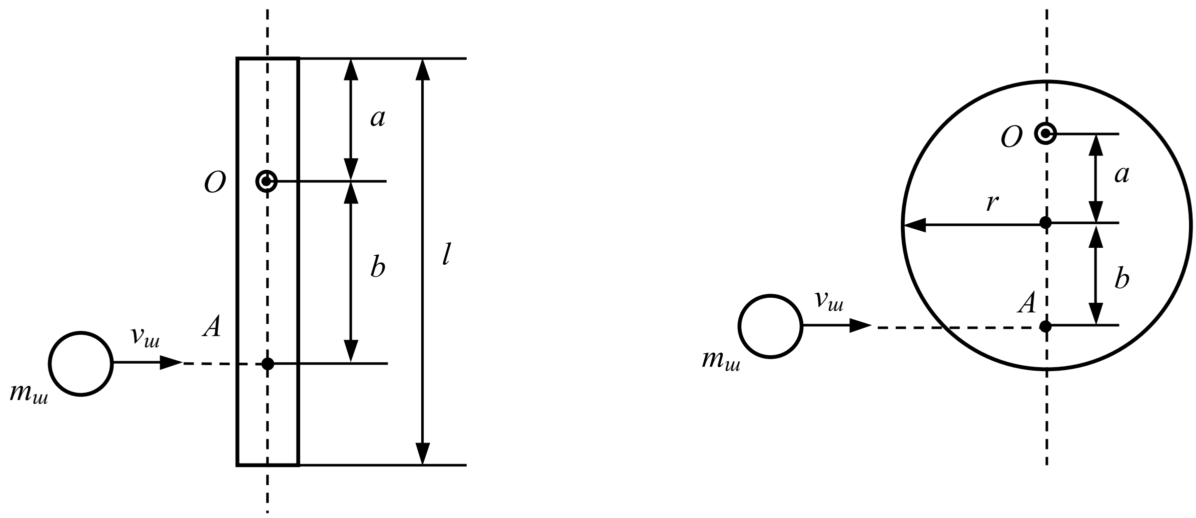


Рис.4. Вид стержня и диска до взаимодействия с шариком. *O* – точка подвеса; $m_ш$, $v_ш$ – масса и скорость шарика; *l* – длина стержня; *r* – радиус диска.

4. Молекулярная физика и термодинамика

Основные соотношения

- Уравнения состояния идеального газа (Менделеева-Клапейрона):

$$pV = (m/\mu)RT \text{, или } pV = \nu RT,$$

где m - масса газа; μ- его молярная масса; R =8.31 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная; $\nu = m/\mu$ - количество вещества; T- термодинамическая температура.

- Закон Дальтона:

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n,$$

где p - давление смеси газов; p_i- парциальное давление i - го компонента смеси; n- число компонентов смеси.

- Молярная масса смеси газов:

$$\mu = (m_1 + m_2 + ... + m_n)/(\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n),$$

где m_i - масса i - го компонента смеси; ν_i - количество вещества i - го компонента смеси.

- Количество вещества:

$$\nu = N / N_A \ ,$$

где N - число структурных элементов системы (молекул, атомов, ионов и т.п.); N_A =6,02·10^{23} 1/моль – число Авогадро.

- Концентрация частиц (молекул, атомов и т.п.) однородной системы:

$$n = N / V = N_A \, \rho / \mu \, ,$$

где V - объем системы; ρ- плотность вещества.

- Основное уравнение кинетической теории газов:

$$p = (2/3) n \langle \varepsilon_n \rangle ,$$

где $\langle \varepsilon_n \rangle = 3kT/2$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

- Полная энергия молекулы:

$$\langle \varepsilon \rangle = (i/2) kT \, ,$$

где i - число степеней свободы молекулы (i =3 – для одноатомных молекул, i=5 – для двухатомных молекул, i=6 – для многоатомных молекул).

- Зависимость давления от концентрации молекул и температуры:

$$p = nkT \, .$$

- Скорость молекул: средняя квадратичная

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{3kT/m_1} = \sqrt{3RT/\mu} \, ;$$

средняя арифметическая

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_1)} = \sqrt{8RT/(\pi\mu)} \, ;$$

наиболее вероятная

$$v_в = \sqrt{2kT/m_1} = \sqrt{2RT/\mu} \, .$$

• Распределение Больцмана (распределение частиц в силовом потенциальном поле):

$$n = n_0 \exp(-U / kT),$$

где n - концентрация частиц с потенциальной энергией U, n_0 - концентрация частиц в точке поля, где $U = 0$.

• Барометрическая формула (распределение давления в однородном поле силы тяжести):

$$p = p_0 \exp(-mgh / kT) = p_0 \exp(-\mu gh / RT),$$

где p - давление в точках с координатой h (высотой) по отношению к уровню, принятому за нулевой; p_0 - давление в точках на нулевом уровне (при h=0); g - ускорение свободного падения.

• Распределение Максвелла (распределение по скоростям):

а) число молекул, скорость которых заключена в пределах от v до $v + \mathrm{d}v$,

$$\mathrm{d}N(v) = 4\pi N (m / 2\pi kT)^{3/2} \exp(-mv^2 / 2kT) v^2 \,\mathrm{d}v,$$

N - общее число молекул, m - масса одной молекулы;

б) число молекул, относительные скорости которых заключены в пределах от u до $u + \mathrm{d}u$,

$$\mathrm{d}N(u) = (4 / \sqrt{\pi}) N \exp(-u^2) u^2 \,\mathrm{d}u,$$

где $u = v / v_B$ - отношение скорости v к наиболее вероятной скорости v_B.

• Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени:

$$\langle Z \rangle \sqrt{2\pi} d^2 n \langle v \rangle,$$

где d - эффективный диаметр молекулы; n - концентрация молекул; $\langle v \rangle$ - средняя арифметическая скорость молекул.

• Средняя длина свободного пробега молекул газа:

$$\langle l \rangle = 1/(\sqrt{2}\pi d^2 n).$$

• Связь между молярной C_m и удельной C теплоемкостями газа:

$$C_m = C\mu,$$

где μ - молярная масса газа.

• Молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны:

$$C_V = iR/2,\ C_p = (i+2)R/2,\ C_p = C_V + R,$$

где i - число степеней свободы молекулы; R - универсальная газовая постоянная.

• Показатель адиабаты:

$$\gamma = C_p/C_V \text{ или } \gamma = (i+2)/i.$$

• Внутренняя энергия идеального газа:

$$U = N\langle\varepsilon\rangle \text{ или } U = \nu C_V T,$$

где N - число молекул газа; $\langle\varepsilon\rangle$ - средняя кинетическая энергия молекул газа; ν- количество вещества.

• Работа газа при изотермическом процессе:

$$A = (m/\mu)RT\ln(V_2/V_1),$$

при изобарическом процессе:

$$A = p(V_2 - V_1),$$

при адиабатическом процессе:

$$A = (m/\mu)C_V(T_1 - T_2), \text{ или } A = RT_1/(-1)m/\mu[1-(V_1/V_2)],$$

где V_1, V_2 - начальный и конечный объемы газа; T_1, T_2 - начальная и конечная температуры газа.

• Связь между начальным и конечным значениями параметров состояний газа при адиабатическом процессе:

$$p_2/p_1 = (V_1/V_2);\ T_2/T_1 = (V_1/V_2);\ T_2/T_1 = (p_2/p_1)$$

• Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q - количество теплоты, сообщенное газу; ΔU- изменение его внутренней энергии; A - работа, совершенная газом против внешних сил.

При изобарическом процессе:

$$Q = \Delta U + A = (m/\mu)C_V\Delta T + (m/\mu)R\Delta T = (m/\mu)C_p\Delta T.$$

При изохорическом процессе ($A = 0$)

$$Q = \Delta U = (m/\mu)C_V\Delta T.$$

При изотермическом процессе ($\Delta U = 0$)

$$Q = A = (m/\mu)RT\ln(V_2/V_1).$$

При адиабатическом процессе ($Q = 0$)

$$A = -\Delta U = -(m/\mu)C_V\Delta T.$$

- Термический коэффициент полезного действия (к.п.д.) цикла в общем случае:

$$\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1,$$

где Q_1 - количество теплоты, полученное рабочим телом (газом) от нагревателя; Q_2 - количество теплоты, переданное рабочим телом охладителю.

К.П.Д. цикла Карно:

$$\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1, \text{ или } \eta = (T_1 - T_2)/T_1,$$

где T_1, T_2 - температуры нагревателя и охладителя.

- Изменение энтропии:

$$\Delta S = \int_A^B \mathrm{d}Q/T,$$

где A, B - пределы интегрирования, соответствующие начальному и конечному состояниям системы.

Задание №4 «Молекулярная физика и термодинамика»

1. К массе 0,5 кг имеющегося газа при заданных давлении p, объеме V или температуре T добавили 0,2 кг кислорода, взятого при той же температуре, что и заданный газ. Считая объем неизменным, определить давление смеси и ее молярную массу.

2. При заданных значениях давления, объема и температуры, а также массы газа 0,5 кг, определить физические величины, указанные в таблице 4: N, n - общее число и концентрация молекул в системе; $m_1, \langle \varepsilon \rangle, \langle p \rangle$ - масса, средняя энергия и средний импульс одной молекулы; $\langle v_{кв} \rangle, \langle v \rangle, v_в$ - средняя квадратичная, средняя арифметическая и наиболее вероятная скорости молекулы; C_p, C_V - теплоемкости при постоянном давлении и объеме; $\langle l \rangle, \langle Z \rangle$ - средняя длина свободного пробега и среднее число столкновений в единицу времени одной молекулы; U - внутренняя энергия системы, C - удельная теплоемкость, ρ- плотность газа.

3. Определить величину работы A, изменение внутренней энергии системы ΔU, количество теплоты Q, сообщаемое системе при переходе ее из заданного состояния (p, V, T) в состояние, определяемое указанным процессом (табл.4); при изохорическом процессе температура возрастает в 1,5 раза; при изотермическом объем возрастает в 2 раза, при изобарическом – объем убывает в 2 раза, при адиабатическом – объем возрастает в 3 раза.

4. Газ с заданным начальным состоянием (p, V, T) совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, при этом давление и объем увеличиваются в n раз (значение n принимается из таблицы 4). Во сколько раз работа, совершаемая при таком цикле, меньше работы, совершаемой в цикле Карно, изотермы которого соответствуют наибольшей и наименьшей температурам рассматриваемого цикла, если при изотермическом расширении объем увеличился в n раз. Найти к.п.д. обоих циклов.

5. По данным предыдущей задачи вычислить изменение энтропии за первую половину обоих циклов.

Таблица 4

№ вар.	p, МПа	V, м^3	T, К	Газ	Искомые величины в задаче 2	Процесс в задаче №3	n
1	0,1	0,3		He	N, C	Изохорический	1,5
2		1	300	H_2	n, ρ	Изотермический	1,7
3	0,2		350	N_2	m_1, C	Изотермический	1,9
4	0,5	2		CO	$\langle\varepsilon\rangle$, ρ	Изобарический	2,17
5		0,2	500	CO_2	$\langle v_{кв}\rangle$, C	Изотермический	2,5
6	0,15	0,1		SO_2	$\langle v\rangle$, C	Изохорический	2,7
7	0,3		400	Ne	$v_в$, ρ	Изобарический	3
8	0,45	0,2		Ar	C_p, $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$	Изобарический	1,8
9	0,1	0,13		Cl_2	C_v, $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$	Изохорический	1,4
10		0,05	450	N_2O	U	Адиабатический	1,5
11	0,25		500	CO	$\langle\varepsilon\rangle$, C	Изотермический	2,1
12	0,18	0,03		Ne	$\langle Z\rangle$	Адиабатический	2,6
13		0,025	600	Ar	$\langle p\rangle$	Изотермический	2,2
14	0,3	0,02		CO_2	$v_в$, C	Изохорический	2,05
15		0,5	350	He	$\langle l\rangle$	Адиабатический	2,3
16		0,04	500	N_2	n, C	Изохорический	1,6
17	0,4	0,16		H_2	N, ρ	Изохорический	1,8
18		0,01	300	Cl_2	U	Изотермический	2,5
19	0,2		350	SO_2	$\langle\varepsilon\rangle$, C	Адиабатический	2,9
20	0,17	0,015		N_2O	$\langle p\rangle$, ρ	Изохорический	2,1
21		0,12	400	NO	U	Изотермический	1,75
22	0,1	0,18		C_2H_2	C_p, $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$	Адиабатический	1,45
23	0,16		300	H_2	$\langle Z\rangle$	Изобарический	2,25
24	0,5	0,15		Ar	$\langle l\rangle$	Изохорический	2,45
25	0,15	0,4		Ne	m_1, ρ	Изохорический	2,15
26		1	150	He	N, ρ	Изотермический	1,85
27	0,4	0,8		N_2	$\langle l\rangle$	Адиабатический	2,35
28		0,25	550	CO	$v_в$, C	Изохорический	2,65
29	0,01	0,07		C_2H_2	$\langle\varepsilon\rangle$, ρ	Изобарический	2,85
30		0,5	320	Cl_2	$v_{кв}$, C	Адиабатический	1,95

Литература

1. И.В. Савельев. Курс физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. – СПб. Издательство «Лань», 2008.

2. Т.И. Трофимова. Курс физики. М., Академия, 2007.

3. Рогачев Н.М. Курс физики: Учебное пособие. – СПб. Издательство «Лань», 2010.