

doi: 10.5862/MCE.55.1

Дискретная модель свайного фундамента

*Д.ф.-м.н., профессор М.Н. Кирсанов,
Национальный исследовательский университет «МЭИ»*

Аннотация. Сплошное свайное поле фундамента моделируется упругими вертикальными стержнями, распределенными по площади основания конструкции равномерной сеткой. Тело конструкции предполагается абсолютно жестким, его вес смещен относительно геометрического центра. Решение статически неопределимой системы получено методом сил с использованием формулы Максвелла – Мора.

Метод индукции позволил найти решение для произвольного числа свай. В качестве параметров в решение входят размеры фундамента, вес конструкции, упругие характеристики свай (обобщенные коэффициенты жесткости), число узлов сетки свай по обеим ее сторонам, координаты центра тяжести конструкции. В системе компьютерной математики Maple получено аналитическое выражение для осадки и углов поворота фундамента.

Найденные зависимости обнаруживают предельные (по числу свай) свойства, позволяющие оценить деформативные характеристики фундамента и оптимизировать его конструкцию.

Ключевые слова: фундамент; сваи; осадка; точное решение; Maple

Введение

В связи с широким применением в строительстве свайных фундаментов возникает вопрос об оценке прочностных и деформативных свойств таких конструкций. Для расчета фундаментов применяются, как правило, численные методы, метод конечных элементов, метод сеток и специальные компьютерные комплексы, основанные на этих методах. В СНИП имеются приближенные аналитические оценки характеристик свайных фундаментов. Несмотря на уже имеющиеся многочисленные решения задачи, интерес к проблеме не уменьшается. Появляются уточняющие решения, которые включают в себя различные особенности конструкций, грунтов, внешних воздействий, учитывающие динамику и реологию. В данной работе в рамках упрощенной упругой постановки находится точное решение задачи об осадке фундамента при произвольном числе свай. Решение задачи для определенного, наперед заданного числа свай не представляет особой трудности. Основной проблемой в настоящей работе было обобщение решения на произвольное число свай. Использовался метод индукции, ранее разработанный в [1, 2] для стержневых конструкций с применением системы Maple [3].

В [4] приведены теоретические (на основе метода конечных элементов с учетом пластичности грунта) и экспериментальные результаты решения задачи о динамике свайного фундамента из группы девяти свай, расположенных в прямоугольной сетке. Численный анализ выполнен с помощью программы DBLEAVES. В эксперименте в качестве грунта использован песок. Виброплощадка тестового устройства имела размеры 120x160 см. Максимальное ускорение нагрузки 1 g, а максимальное смещение – 5 см. Максимальная нагрузка 16 кН, высшая частота – 10 Гц. Получены данные об осадке фундамента.

В обзорной работе [5] с использованием данных монографии [6] изучено влияние скорости нагружения на работу свайного фундамента. Кроме вертикальной внешней нагрузки, рассматривалась и моментная (опрокидывающая) нагрузка. Эксперименты проводились на песке, строились кривые «смещение – время» для различных скоростей нагружения.

В [7] методом конечных элементов описаны статические и динамические эксперименты с буронабивными сваями диаметром 880 мм и 29 м в длину. Для сравнения использовались пять различных численных методов.

Несущая способность свайного фундамента в зависимости от диаметра свай и параметров грунта методами искусственного интеллекта изучалась в обзоре [8]. Для моделирования использовались генетический алгоритм и нейронные сети. Здесь же приведены некоторые оценочные формулы и сравнение (весьма успешное) с экспериментом.

Экономическая составляющая задачи на примере зданий Cavalry Barracks в Гайд-парке и Hiscocks House в Стоунбридж Парке (Лондон) обсуждается в [9]. Отмечается, что количество необходимых свай фундамента может достигать нескольких сотен или даже тысяч, а стоимость свайного фундамента иногда превышает 20 % затрат на строительство самого здания.

Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента

координатами $x = a, y = 0 - n$, третья с координатами $x = a, y = b - n$ – номер $N = nm$. Обозначим множество номеров свай $R = \{1, \dots, nm\}$, множество номеров опор основной системы $R_0 = \{1, n, N\}$ (угловые точки).

Решение

Для определения усилий в опорах основной системы потребуются три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} s_{1,p} + s_{n,p} + s_{N,p} - P &= 0, \\ s_{N,p}b - Py_p &= 0, \\ s_{N,p}a + s_{n,p}a - Px_p &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Первый индекс усилий означает номер сваи, второй (p) означает, что усилие найдено от действия внешней нагрузки. Аналогичная система уравнений равновесия необходима для определения усилий в опорах основной системы от действия единичной безразмерной силы в i -й опоре:

$$\begin{aligned} s_{1,i} + s_{n,i} + s_{N,i} + 1 &= 0, \\ s_{N,i}b + 1 \cdot y_i &= 0, \\ s_{N,i}a + s_{n,i}a + 1 \cdot x_i &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $i \in R_1 = R \setminus R_0$, $|R_1| = k - 3$. При этом усилия $s_{j,i}$, $i \in R_1, j \in R_0$ определяются из системы (2), остальные усилия равны нулю, кроме $s_{i,i} = 1$, $i \in R_1$. Система $N - 3$ канонических уравнений метода сил имеет вид

$$\sum_{m \in R_1} X_m \delta_{im} + \Delta_i = 0, \quad i \in R_1. \quad (3)$$

Коэффициенты вычисляем по формуле Максвелла – Мора (суммирование ведется по всем сваям конструкции, жесткости EF предполагаются одинаковыми):

$$\Delta_i = \sum_{m \in R} \frac{s_{m,p} s_{m,i} l}{EF}, \quad i \in R_1, \quad \delta_{ij} = \sum_{m \in R} \frac{s_{m,i} s_{m,j} l}{EF}, \quad i, j \in R_1.$$

Решение системы (3) дает значения $N - 3$ неизвестных X_m , $m \in R_1$. Усилия на все N свай фундамента статически неопределимой системы вычисляем по формуле

$$\tilde{S}_{i,p} = \sum_{m \in R_1} s_{i,m} X_m + s_{i,p}, \quad i \in R. \quad (4)$$

Для вычисления осадки фундамента в опоре с номером T от действия силы P , приложенной в точке K , воспользуемся формулой

$$\Delta_{K,T} = \sum_{i \in R} \frac{\tilde{S}_{i,K} \tilde{S}_{i,T} l}{EF}, \quad (5)$$

где $\tilde{S}_{i,T}, i \in R$ – усилие на сваю i от действия единичной силы, приложенной к точке T ; $\tilde{S}_{i,K}, i \in R$ – усилие на эту же сваю в статически неопределенной системе от действия силы P , приложенной к точке K , вычисленное по формуле (4). Методом индукции по числу рядов n и m получим осадку в угловой точке (начало координат O):

$$\Delta_O = \frac{Pl}{nmEF} \left(\frac{7nm + n + m - 5}{(n+1)(m+1)} - \frac{6(n-1)x_p}{a(n+1)} - \frac{6(m-1)y_p}{b(m+1)} \right). \quad (6)$$

Схема индукции в данной задаче близка к решениям для стержневых систем, но она сложнее в том, что здесь присутствуют два параметра n и m , по которым надо ее проводить, и хорошо разработанные методы на основе операторов **rgf_findrecur** и **rsolve** не работают в полную силу. Так, сначала была решена задача для $n = m = 2$ и получено выражение

$$\Delta_o = \frac{Pl(3ab - 2bx_p - 2ay_p)}{4abEF}$$

Затем, выполняя индукцию по параметру n и фиксированному параметру m , получаем формулу

$$\Delta_o = \frac{Pl(7ab - 4bx_p - 6ay_p)}{12abEF}$$

при $n = 3, m = 2$ и т. д. С использованием операторов Maple удалось получить общий член последовательности по n при $m = 2$:

$$\Delta_o = \frac{Pl}{abEF} \left(\frac{5n-1}{2n(n+1)} ab - \frac{3(n-1)}{n(n+1)} bx_p - \frac{1}{n} ay_p \right). \quad (7)$$

Аналогично был получен общий член последовательности при $m = 3$:

$$\Delta_o = \frac{Pl}{abEF} \left(\frac{11n-1}{6n(n+1)} ab - \frac{2(n-1)}{n(n+1)} bx_p - \frac{1}{n} ay_p \right). \quad (8)$$

Индукцией по m (как обобщение выражений (7), (8) и др.) и была найдена окончательная формула (6) для осадки фундамента. Для решения задачи оказалось достаточным получения результатов при $n, m = 2, \dots, 7$. Для больших значений этих чисел время решения системы канонических уравнений в символьном виде и преобразования результатов заметно увеличивалось. В численном же виде решение занимает доли секунды, поэтому правильность выведенной формулы можно было проверить, выполнив расчет при значительно большем числе свай. Аналогично вычисляется осадка в углах A, B . Таким образом, можно определить углы наклона фундамента (рис. 3).

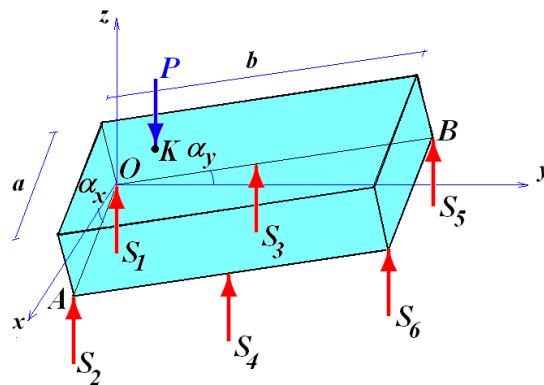


Рисунок 3. Нагрузка и реакции свай, $n = 2, m = 3$

Имеем следующие выражения для тангенсов углов наклона:

$$\operatorname{tg} \alpha_x = (\Delta_A - \Delta_o) / a, \quad \operatorname{tg} \alpha_y = (\Delta_B - \Delta_o) / b.$$

Опуская все преобразования индукции, выпишем окончательные формулы углов наклона для произвольного числа свай:

$$\operatorname{tg} \alpha_x = -\frac{6(n-1)(a-2x_p)Pl}{n(n+1)ma^2EF}, \quad \operatorname{tg} \alpha_y = -\frac{6(m-1)(b-2y_p)Pl}{n(m+1)mb^2EF}. \quad (9)$$

Заметим, что усилия в сваях рассматриваемой статически неопределимой системы можно найти методом перемещений, и этот метод будет проще метода сил. Для любого числа свай в методе перемещений будут только три неизвестные величины – коэффициенты в уравнении плоскости ростверка $Ax_i + By_i + Cz_i + D = 0$. Для определения коэффициентов A , B и C используются три уравнения статики: уравнения моментов относительно осей x и y и сумма проекций на ось z . Усилие в свае в силу линейной упругости пропорционально координате z_i . Неопределенный коэффициент D за счет однородности уравнений сократится. Однако метод сил был выбран с прицелом на дальнейшее усовершенствование предложенной модели фундамента, учитывающей деформацию здания, где метод перемещений работает значительно хуже. Кроме того, в методе сил индукция по двум параметрам проводится проще.

Анализ

Из (6) и (9) следует легко предсказуемый результат: с увеличением числа свай осадка и углы наклона ростверка уменьшаются. Введем естественное ограничение на общую условную жесткость всех свай: $EF = EF_{sum} / N$, где $N = nm$ – общее число свай, EF_{sum} – суммарная жесткость, EF – жесткость отдельной сваи. Таким образом, чем больше свай под фундаментом, тем они менее жесткие. Если приведенный модуль упругости оставить постоянным, то уменьшения жесткости можно добиться уменьшением площади поперечного сечения свай. Введем обозначение для безразмерного прогиба угловой точки $\tilde{\Delta} = \Delta_O EF_{sum} / (Pl)$ и тангенсов углов наклона: $\text{tg}\tilde{\alpha}_x = (EF_{sum} / P)\text{tg}\alpha_x$, $\text{tg}\tilde{\alpha}_y = (EF_{sum} / P)\text{tg}\alpha_y$. Из (6) и (9) следует:

$$\tilde{\Delta} = \frac{7nm + n + m - 5}{(n+1)(m+1)} - \frac{6(n-1)x_p}{a(n+1)} - \frac{6(m-1)y_p}{b(m+1)}, \quad (10)$$

$$\text{tg}\tilde{\alpha}_x = -\frac{6(n-1)(a-2x_p)l}{(n+1)a^2}, \quad \text{tg}\tilde{\alpha}_y = -\frac{6(m-1)(b-2y_p)l}{(m+1)b^2}. \quad (11)$$

В этом случае с увеличением числа свай выражения (10) и (11) имеют пределы:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \tilde{\Delta} = 7 - 6(x_p/a + y_p/b), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tg}\tilde{\alpha}_x = -6(a-2x_p)l/a^2, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \text{tg}\tilde{\alpha}_y = -6(b-2y_p)l/b^2.$$

График зависимости (11) представлен на рисунке 4. Наблюдается стремление кривой к горизонтальной асимптоте, зависящей от эксцентриситета приложения нагрузки. При центральном расположении точки K , т. е. при $x_p = a/2$, основание фундамента не наклоняется.

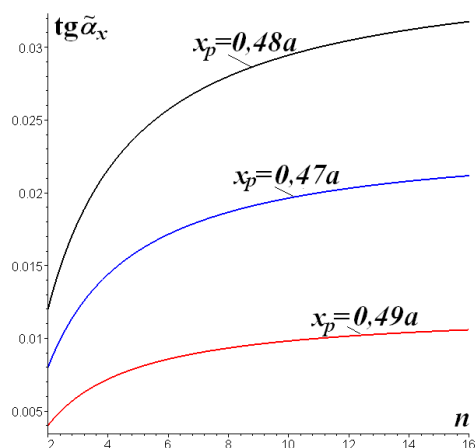


Рисунок 4. Зависимости наклона фундамента от числа свай. $a = 20\text{ м}$, $l = 1\text{ м}$

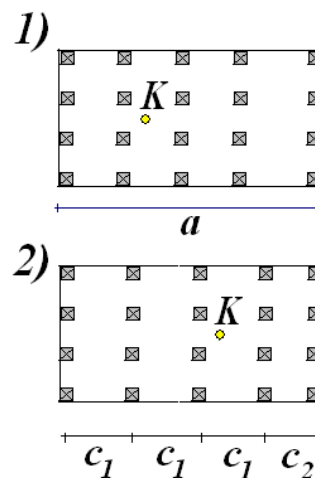


Рисунок 5. Выравнивание наклона фундамента: 1) $\varepsilon < 0$, 2) $\varepsilon > 0$

Выравнивание наклона

Рассмотренный алгоритм аналитического расчета свайного фундамента можно применить и для более сложной конфигурации свай. Если нагрузка находится не в центре тяжести основания, то наклона ростверка, который обязательно произойдет при равномерном распределении свай, можно избежать, например, уплотнив их расположение в одной из частей фундамента. Рассмотрим, в частности, следующее распределение их координат:

$$x_{i+n(j-1)} = (a - \varepsilon)(i - 1) / (n - 1), i = 1, \dots, n - 1, j = 1, \dots, m, x_{nj} = a.$$

На рисунке 5 даны схемы распределения свай при различных ε при $n = 5$. В первом случае первые ряды смещены влево, во втором – вправо. Для n рядов свай первые $n - 2$ интервала по оси x равны $c_1 = (a + \varepsilon) / (n - 1)$, последний интервал $c_2 = (a - \varepsilon(n - 2)) / (n - 1)$. Суммарная длина интервалов, очевидно, равна длине стороны фундамента $(n - 2)c_1 + c_2 = a$. Случай $\varepsilon = 0$ соответствует равномерному распределению свай.

Повторяя процедуру индукции по числу n , получаем выражение для $\operatorname{tg} \alpha_x$, зависящее от параметра неравномерности ε . Из условия равенства угла наклона нулю, опуская громоздкие выкладки, выпишем ответ – значение параметра ε , при котором при эксцентрично приложенной нагрузке не возникает наклона ростверка:

$$\varepsilon = (2x_p - a)n / (n - 2).$$

Решение справедливо при $n > 2$. Аналогичное соотношение получается и при смещении нагрузки по оси y .

Выводы

Рассмотрена статическая упругая модель деформации свайного основания с произвольным числом свай под действием вертикальной нагрузки от силы тяжести сооружения. Предложена дискретная модель, позволяющая найти усилия на сваи и вычислить осадку и углы наклона ростверка. Аналитическая форма результата позволяет оптимизировать конструкцию фундамента. В частности, предложен вариант перераспределения расположения свай для выравнивания горизонта фундамента при эксцентричном расположении нагрузки. Предложенный алгоритм позволяет решать аналогичные задачи и для других, не только прямоугольных форм основания сооружения. Представляется также интересной задача об оптимальном (по углам наклона и осадке) распределении заданного числа свай по произвольной сетке с помощью генетического алгоритма [8, 27]. В последнем случае аналитическое решение вида (6), (9) вряд ли возможно, однако для фундаментов нерегулярной формы такое решение имеет практическое значение.

Литература

1. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
2. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
3. Кирсанов М. Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
4. Baoa X., Morikawaa Y., Kondob Y., Nakamura K., Zhanc F. Shaking table test on reinforcement effect of partial ground improvement for group-pile foundation and its numerical simulation // Soils and Foundations. 2012. Vol. 52(6). Pp. 1043–1061.
5. Watanabea K., Kusakabeb O. Reappraisal of load in grate effects on sand behavior in view of seismic design for pile foundation // Soils and Foundations. 2013. Vol. 53(2). Pp. 215–231.
6. Bowles J.E. Foundation Analysis and Design. Singapore: McGraw-Hill, 1997. 624 p.
7. Gabrielaitisa L., Papinigisb V., Zarzojus G. Estimation of Settlements of Bored Piles Foundation // Procedia Engineering. 2013. Vol. 57. Pp. 287–293.

8. Shahin M.A. State-of-the-art review of some artificial intelligence applications in pile foundations // Geoscience Frontiers. 2014. Pp.1–12. [Электронный ресурс]. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.gsf.2014.10.002>
9. Letsios C., Lagaros N. D., Papadrakakis M. Optimum design methodologies for pile foundations in London // Case Studies in Structural Engineering. 2014. Vol. 2, Pp. 24–32.
10. Tschuchnigg F., Schweiger H.F. The embedded pile concept – Verification of an efficient tool for modelling complex deep foundations // Computers and Geotechnics. 2015. Vol. 63. Pp. 244–254.
11. Liam Finn W.D. 1st Ishihara Lecture: An overview of the behavior of pile foundations in liquefiable and non-liquefiable soils during earthquake excitation // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2015. Vol. 68. Pp. 69–77.
12. Zhong R., Huang M. Winkler model for dynamic response of composite caisson–piles foundations: Seismic response Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2014. Vol. 66. Pp. 241–251.
13. Isobe K., Kimura M., Ohtsuka S. Design approach to a method for reinforcing existing caisson foundations using steel pipe sheet piles // Soils and Foundations. 2014. Vol. 54. Issue 2. Pp. 141–154.
14. Wang S., Orense R. P. Modelling of raked pile foundations in liquefiable ground // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2014. Vol. 64. Pp. 11–23.
15. Hokmabadi A.S., Fatahi B., Samali B. Seismic response of mid-rise buildings on shallow and end-bearing pile foundations in soft soil // Soils and Foundations. 2014. Vol. 54. Issue 3. Pp. 345–363.
16. Zhang J., Li J.P., Zhang L.M., Huang H.W. Calibrating cross-site variability for reliability-based design of pile foundations // Computers and Geotechnics. 2014. Vol. 62. Pp. 154–163.
17. Gabrielaitis L., Papinigis V., Zarzojus G. Estimation of Settlements of Bored Piles Foundation // Procedia Engineering. 2013. Vol. 57. Pp. 287–293.
18. Basile F. Effects of tunnelling on pile foundations // Soils and Foundations. 2014. Vol. 54. Issue 3. Pp. 280–295.
19. Улыбин А.В., Зубков С.В., Федотов С.Д., Закревский А.Ю. Обследование свайных фундаментов при надстройке зданий // Инженерно-строительный журнал. 2014. №4(48). С. 17–27.
20. Саргсян А. Е., Геращенко В.С., Шапошников Н.Н. Расчетная модель свайных фундаментов с учетом эффекта их взаимодействия с грунтовой средой // Вестник МГСУ. 2012. №4. С. 69–72.
21. Уткин М.М., Махнатов С.А., Скворцов С.Я. Проблемы расчета свай на совместное действие вертикальной и горизонтальной сил и момента // Приволжский научный журнал. 2012. №2. С. 63–68.
22. Cairo R., Conte E. Settlement analysis of pile groups in layered soils // Canadian Geotechnical Journal. 2006. Vol. 43(8). Pp. 788–801.
23. Conte E., Troncone A., Vena M. Nonlinear three-dimensional analysis of reinforced concrete piles subjected to horizontal loading // Computers and Geotechnics, 2013. Vol. 49. Pp. 123–133.
24. Cairo R., Conte E., Dente G.R. Analysis of pile groups under vertical harmonic vibration // Computers and Geotechnics. 2005. Vol. 32. No. 7. Pp. 545–554.
25. СП 24.13330.2011. Свайные фундаменты. Актуализированная редакция СНиП 2.02.03-85
26. Далматов Б.И. Механика грунтов, основания и фундаменты. Л.: Стройиздат, 1988. 415 с.
27. Кирсанов М.Н. Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. №2. С. 60–63.

Михаил Николаевич Кирсанов, Москва, Россия

Тел. моб.: +7(916)9055994; эл. почта: mpei2004@yandex.ru

© Кирсанов М.Н., 2015

doi: 10.5862/MCE.55.1

Discrete model of the pile foundation

M.N. Kirsanov*National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia
+79169055994; e-mail: mpei2004@yandex.ru*

Key words

foundation, piles, sediment, exact solution, Maple

Abstract

The solid pile foundation is modeled by elastic vertical bars distributed over the area of the base in a uniform grid. It was assumed that the body of the structure is rigid, its weight is offset from the geometric center. The solution of statically indeterminate systems was obtained by the force method with the help of the Maxwell-Mohr formula.

The method of induction made it possible to find a solution for an arbitrary number of piles. The dimensions of the foundation, the weight of the structure, the elastic characteristics of the piles (generalized stiffness), the number of the nodes in the grid of piles on both sides, the center of gravity coordinates were all the parameters of the solution. The computer algebra system Maple generated an analytical expression for the deformation and rotation angles of the foundation.

The established dependencies exhibited limit (on the number of the piles) properties, allowing to estimate the deformation characteristics of the foundation and to optimize its design.

References

1. Kirsanov M.N. Izgib, krucheniye i asimptoticheskiy analiz prostranstvennoy sterzhnevoy konsoli [Bending, torsion and the asymptotic analysis of the spatial core console]. *Magazine of Civil Engineering*. 2014. No. 5(49). Pp. 37–43. (rus)
2. Kirsanov M.N., Andreyevskaya T.M. Analiz vliyaniya uprugikh deformatsiy machty na pozitsionirovaniye antennogo i radiolokatsionnogo oborudovaniya [Analysis of the effect of elastic deformation of the mast antenna positioning and radar equipment]. *Magazine of Civil Engineering*. 2013. No. 5(40). Pp. 52–58. (rus)
3. Kirsanov M.N. *Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki* [Maple, and Maplet. Solving mechanics problems]. Saint-Petersburg: Izd-vo Lan, 2012. 512 p. (rus)
4. Bao X., Morikawaa Y., Kondob Y., Nakamura K., Zhangc F. Shaking table test on reinforcement effect of partial ground improvement for group-pile foundation and its numerical simulation. *Soils and Foundations*. 2012. Vol. 52(6). Pp. 1043–1061.
5. Watanabea K., Kusakabeb O. Reappraisal of load in grate effects on sand behavior in view of seismic design for pile foundation. *Soils and Foundations*. 2013. Vol. 53(2). Pp. 215–231.
6. Bowles J.E. *Foundation Analysis and Design*. Singapore: McGraw-Hill, 1997. 624 p.
7. Gabrielaitisa L., Papinigisb V., Zarzojus G. Estimation of Settlements of Bored Piles Foundation. *Procedia Engineering*. 2013. Vol. 57. Pp. 287–293.
8. Shahin M.A. State-of-the-art review of some artificial intelligence applications in pile foundations. *Geoscience Frontiers*. 2014. Pp.1–12. [Online resource]. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.gsf.2014.10.002>
9. Letsios C., Lagaros N. D., Papadrakakis M. Optimum design methodologies for pile foundations in London. *Case Studies in Structural Engineering*. 2014. Vol. 2. No.12. Pp. 24–32.
10. Tschuchnigg F., Schweiger H.F. The embedded pile concept – Verification of an efficient tool for modelling complex deep foundations. *Computers and Geotechnics*. 2015. Vol. 63. No. 1. Pp. 244–254.
11. Liam Finn W.D. 1st Ishihara Lecture: An overview of the behavior of pile foundations in liquefiable and non-liquefiable soils during earthquake excitation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2015. Vol. 68. No. 1. Pp. 69–77.
12. Zhong R., Huang M. Winkler model for dynamic response of composite caisson–piles foundations: Seismic response. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2014. Vol. 66. No. 11. Pp. 241–251.
13. Isobe K., Kimura M., Ohtsuka S. Design approach to a method for reinforcing existing caisson foundations using steel pipe sheet piles. *Soils and Foundations*. 2014. Vol. 54. Issue 2. No. 4. Pp. 141–154.

14. Wang S., Orense R. P. Modelling of raked pile foundations in liquefiable ground. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2014. Vol. 64. No. 9. Pp. 11–23.
15. Hokmabadi A.S., Fatahi B., Samali B. Seismic response of mid-rise buildings on shallow and end-bearing pile foundations in soft soil. *Soils and Foundations*. 2014. Vol. 54. Issue 3. Pp. 345–363.
16. Zhang J., Li J.P., Zhang L.M., Huang H.W. Calibrating cross-site variability for reliability-based design of pile foundations. *Computers and Geotechnics*. 2014. Vol. 62. No. 10. Pp. 154–163.
17. Gabrielaitis L., Papinigis V., Zarzojus G. Estimation of Settlements of Bored Piles Foundation. *Procedia Engineering*. 2013. Vol. 57. Pp. 287–293.
18. Basile F. Effects of tunnelling on pile foundations. *Soils and Foundations*. 2014. Vol. 54. Issue 3. Pp. 280–295.
19. Ulybin A.V., Zubkov S.V., Fedotov S.D., Zakrevskiy A.Yu. Obsledovaniye svaynykh fundamentov pri nadstroyke zdaniy. [Problem of calculation of the piles on the combined effect of vertical and horizontal forces and moment]. *Magazine of Civil Engineering*. 2014. No. 4. Pp. 17–27. (rus)
20. Sargsyan A. Ye., Gerashchenko V.S., Shaposhnikov N.N. Raschetnaya model svaynykh fundamentov s uchetom effekta ikh vzaimodeystviya s gruntovoy sredoy [Calculation model of pile foundations subject to the effect of their interaction with a ground]. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2012. No. 4. Pp. 69–72. (rus)
21. Utkin M.M., Makhnatov S.A., Skvortsov S.Ya. Problemy rascheta svay na sovmestnoye deystviye vertikalnoy i gorizontальной sil i momenta [Problem of calculation of the piles on the combined effect of vertical and horizontal forces and moment]. *Privolzhsky Scientific Journal*. 2012. No. Pp. 63–68. (rus)
22. Cairo R., Conte E. Settlement analysis of pile groups in layered soils. *Canadian Geotechnical Journal*. 2006. Vol. 43(8). Pp. 788–801.
23. Conte E., Troncone A., Vena M. Nonlinear three-dimensional analysis of reinforced concrete piles subjected to horizontal loading. *Computers and Geotechnics*. 2013. Vol. 49. Pp. 123–133.
24. Cairo R., Conte E., Dente G. R. Analysis of pile groups under vertical harmonic vibration. *Computers and Geotechnics*. 2005. Vol. 32. No. 7. Pp. 545–554.
25. SP 24.13330.2011. *Svaynyye fundamenty. Aktualizirovannaya redaktsiya SNIIP 2.02.03-85* [Set of rules 24.13330.2011. Pile foundations. Revised edition building code 2.02.03-85. (rus)]
26. Dalmatov B.I. *Mekhanika gruntov, osnovaniya i fundamenty* [Soil mechanics, bases and foundations]. Leningrad: Stroyizdat, 1988. 415 p. (rus)
27. Kirsanov M.N. Geneticheskiy algoritm optimizatsii sterzhnevyykh sistem [Genetic algorithm optimization of core systems]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2010. No. 2. Pp. 60–63. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 3–9