На правах рукописи

Катермина Татьяна Сергеевна

Модели осцилляторов в вычислительных системах с контролем и коррекцией

05.13.18 — «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ

к диссертации на соискание
ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор **Игнатьев М.Б.**

Санкт-Петербург, 2015

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Нижневартовский государственный университет»

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники РФ **Игнатьев Михаил Борисович**

Официальные оппоненты:
доктор технических наук, профессор, **Копыльцов Александр Васильевич**

доктор технических наук, профессор, **Чуканов Сергей Николаевич**

Ведущая организация: **Федеральное государственное бюджетное учреждение науки « Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук»**

Защита состоится «24» сентября 2015 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.10 в ФГАОУ ВО «СПбПУ», расположенном по адресу: 195251 Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29, 9 корпус, аудитория 121.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» и на сайте www.spbstu.ru.

Автореферат разослан «____»_____________2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.229.10,
кандидат технических наук Н.В.Богач

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Моделирование осцилляторов играет важную роль во многих отраслях современной науки и техники. Модели осцилляторов могут быть использованы в таких отраслях как программное управление оборудованием, навигационные системы, теория электромагнитного излучения, акустика, теория тяготения, теория твердого тела, теория колебательных спектров молекул и т.п.

Изучение вопроса контроля динамических систем получило широкое распространение в начале 20-го века. В нашей стране А.М. Ляпунов и Н.Г. Четаев вплотную подошли к данной проблеме. В связи с развитием вычислительной техники вопросы контроля вычислительных процессов приобрели особую остроту, так как для многих задач требовалось получать решение на длительных интервалах времени и при исследовании очень сложных систем уравнений, и так как вычислительные машины стали использоваться для целей управления.

Также задача обеспечения надежности динамических систем впоследствии развивалась в работах таких ученых, как Л.Г. Евланов, С.В. Яблонский, Ф.Е. Темников, Н.Н. Пономарев, К.Б. Карандеев, Г. Найквист, Р. Калман и др.

В классических работах по осцилляторам в различных областях не рассматривались вопросы их моделирования на вычислительных машинах. Современные методы моделирования осцилляторов открывают новые возможности их исследования с помощью вычислительного эксперимента, но при этом возникают и дополнительные проблемы, которые исследуются в диссертации.

При решении любых задач на ЭВМ неизбежно возникновение ошибок, являющихся результатом помех, сбоев, применением численных методов решения со слишком большим шагом дискретизации. Большинство методов обнаружения и исправления этих ошибок базируются на использовании аппаратной или временной избыточности. Возможности использования избыточности для борьбы с помехами были впервые осознаны в технике связи еще в 30-е годы, с появлением и развитием теории информации получило дальнейшее развитие понятие избыточности. Термин "избыточность" был введен в русскую техническую литературу при переводе классической работы К. Шеннона в 1953 году Н.А. Железновым, с именем которого тесно связана разработка проблемы избыточности в информационных системах.

В диссертации развивается метод избыточных переменных, в свое время предложенный М.Б. Игнатьевым и В.В. Михайловым, при помощи которого в данной работе решаются задачи диагностики, контроля и коррекции при моделировании сложных систем. Этот метод может быть отнесен к методам аналитической избыточности, хотя был предложен и описан задолго до того, как термин "аналитическая избыточность" получил в нашей стране широкую известность. Рассматривались в основном аналоговые вычислительные структуры, в данной работе исследуются дискретные системы методом вычислительного эксперимента. А также в данной работе рассматриваются математические компьютерные модели сложных систем, такие как движение континентальных плит на поверхности земного шара, что важно для исследования литосферной погоды и, в частности, землетрясений.

Метод избыточных переменных позволяет вводить избыточность на уровне исходной задачи, что открывает возможность наложить дополнительные ограничения на переменные расширенной системы, которые можно использовать в качестве контрольных условий. Например, если требуется решить дифференциальные уравнения:

$$\frac{dX}{dt} = F_1(X,Y), \frac{dY}{dt} = F_2(X,Y),$$

то можно ввести новую, третью переменную в эту задачу

$$X = \sum a_i * x_i\ ,\ Y = \sum b_i * x_i\ ,\ i = 1,2,3,$$

и на расширенную систему наложить дополнительное ограничение, например такое:

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

которое можно использовать в качестве контрольного условия — если оно нарушается, то сигнал ошибки можно использовать для коррекции системы. Схема вычислительного процесса с контролем и коррекцией по методу избыточных переменных изображена на рис 1. В контрольном органе (КО) проверяется выполнение контрольного условия. Сигнал ошибки, полученный на выходе контрольного органа, может быть использован для коррекции вычислительного процесса с помощью обратной связи (пунктирная линия I на рис. 1) или с помощью коррекции вперед (пунктирная линия II на рис. 1). В блоке УС — устройство сжатия — осуществляется преобразование от избыточных переменных обратно к исходным. Блок ВУ — вычислительное устройство.

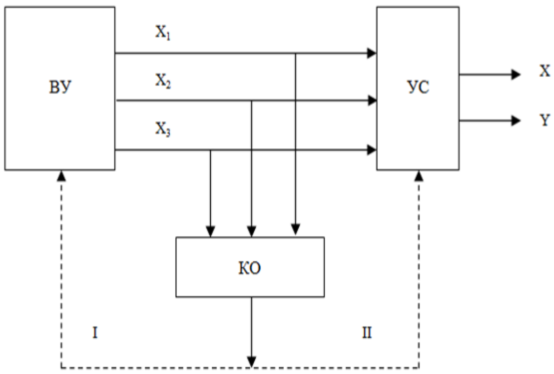


Рис. 1. Схема вычислительного процесса с коррекцией

Аналогичным образом можно вводить избыточность в различные системы, накладывать контрольные условия и строить цепи коррекции. Актуальность темы подтверждается необходимостью реализовывать встроенные вычислительные устройства в различные блоки для программного управления оборудованием высокой ответственности в реальном времени.

Целью работы является исследование математических моделей осцилляторов, заданных уравнениями Пфаффа или конечными уравнениями, в вычислительных системах с контролем и коррекцией на основе метода избыточных переменных в реальном времени. **Для достижения данной цели необходимо решить следующие задачи:**

1. Разработать математические модели и аналитические методы контроля и коррекции вычислительных процессов как на основе использования естественной избыточности, так и на основе искусственной избыточности с обратной связью с проверкой результатов в вычислительных экспериментах.
2. Разработать метод коррекции "вперед" с использованием избыточных переменных с проверкой результатов в вычислительных экспериментах.

3. Разработать пакеты прикладных программ для реализации устойчивых математических моделей осцилляторов и программный комплекс для автоматического генерирования структуры расширенных систем исходных уравнений.

Научная новизна. Впервые разработаны и исследованы устойчивые модели осцилляторов с контролем и коррекцией по воспроизводимой функции, что подтверждается авторскими свидетельствами на пакеты соответствующих программ. Исследованы вопросы контроля решений обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых неизвестен первый интеграл, исследованы предельные возможности систем с линейным контролем и коррекцией как с помощью обратной связи, так и с помощью коррекции вперед при моделировании дискретных математических моделей с использованием численных методов.

Методы исследования. Для решения поставленных задач и подтверждения исследований были использованы методы математического моделирования с применением ЭВМ, теория цифровых аналогов, теории устойчивости динамических систем, вычислительный эксперимент. При исследовании математических моделей использовались численные методы Эйлера, Рунге-Кутты 4-го порядка, Dormand-Prince 5-го и 8-го порядков, Bogacki-Shampine 3-го порядка, Heun, Адамса, Розенброка, метод трапеций с переменным шагом дискретизации.

Теоретическая и практическая значимость. Математическое моделирование осцилляторов, заданных уравнениями Пфаффа, играет большую роль в современной науке и технике, и модели должны отвечать критериям точности, надежности, адекватности и пр. В работе получил значительное развитие метод избыточных переменных, что позволило синтезировать устойчивые модели осцилляторов с контролем и коррекцией по воспроизводимой функции путем использования собственной внутренней избыточности системы или повысить помехоустойчивость добавлением избыточности с незначительными затратами ресурсов, что особенно важно при моделировании осцилляторов, как неустойчивых систем. Разработанные пакеты прикладных программ являются практическим инструментом для синтеза помехоустойчивых вычислительных систем, исходя из конкретных задач и имеющихся ресурсных ограничений по быстродействию, объемам памяти и другим параметрам. Результаты, полученные в работе, позволяют моделировать и строить вычислительные устройства в реальном времени для систем программного управления оборудованием, навигационных систем, движения материковых плит и т.д.

Апробация работы. Результаты работы апробированы на конференциях: «Информационные ресурсы в образовании» (Всероссийская научно-практическая конференция, г.Нижневартовск, 14–16 апреля 2011 г.), «Культура, наука, образование: проблемы и перспективы» (Всероссийская научно-практическая конференция, г.Нижневартовск, 7–8 февраля 2012 г.), «Информационные ресурсы в образовании» (Международная научно-практическая конференция, г.Нижневартовск, 27–29 марта 2012 г.), «Региональная информатика «РИ-2012» (Юбилейная XIII санкт-петербургская международная конференция, г.Санкт-Петербург, 23–24 октября 2012 г.), «Информационные ресурсы в образовании» (Международная научно-практическая конференция, г. Нижневартовск, 17–19 апреля 2013 г.), Международный латиноамериканский форум и выставка инновационных разработок молодых ученых PeRuSat-2013 (г.Лима, Республика Перу, 17–22 сентября 2013 г.), «Информационная безопасность регионов России» (VIII Санкт-Петербургская межрегиональная конференция, г.Санкт-Петербург, 23–25 октября 2013 г.); а также доклад по теме диссертации был представлен на семинаре Дома ученых им. М. Горького РАН в секции кибернетики (г. Санкт-Петербург, 23 марта 2015 г.)

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах, в их числе 4 статьи в ведущих российских рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК. Список работ приведен в конце автореферата. В совместных с научным руководителем работах научному руководителю принадлежит постановка задачи, в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором. Из остальных работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию включены только те результаты, которые были получены лично Катерминой Т.С. и не затрагивают интересов других соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 160 страниц, работа содержит 52 рисунка и 17 таблиц. Список литературы состоит из 98 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность, теоретическая и практическая значимость проводимого исследования, описываются методы исследования, ставится цель исследования и приводится постановка задачи, которая заключается в следующем. Рассматриваются реальные вычислительные процессы в цифровых вычислительных машинах и устройствах с учетом действия помех – случайных проходящих сбоев, ошибок от дискретизации, ошибок от применения приближенных численных методов, выхода из строя целых вычислительных блоков и др. Ставится задача синтезировать и исследовать математические модели осцилляторов в условиях действия помех, при этом используются вычислительные процессы с избыточностью (рис. 1). Синтезированные устойчивые модели осцилляторов модифицируются в зависимости от принятой гипотезы о помехах.

В первой главе рассматриваются математические модели осцилляторов, описываемые уравнениями Пфаффа. Если системы описываются конечными уравнениями, то после дифференцирования они опять-таки описываются уравнениями Пфаффа. Далее в главе 1 показано, что от систем уравнений Пфаффа можно перейти к системам эквивалентных уравнений с неопределенными коэффициентами, которые позволяют управлять вычислительным процессом, оставаясь на заданных многообразиях, в том числе и улучшить адаптационные возможности системы. Получено авторское свидетельство на пакет прикладных программ, позволяющий генерировать структуры эквивалентных уравнений для любого числа переменных n с любым числом ограничений m, $n > m$.

Во второй главе рассматриваются математические модели осцилляторов, синтезированные на основе метода избыточных переменных для контроля и коррекции вычислительных процессов в условиях помех. В п. 2.1. исследуется вопрос о влиянии помех различного вида на вычислительный процесс и показано, как можно внести избыточность для того, чтобы, использовав ее, повысить помехоустойчивость модели. Применение метода избыточных переменных рассматривается на примере систем дифференциальных уравнений.

При решении дифференциальных уравнений на вычислительных машинах возможны нарушения, во-первых, в начальных условиях, во-вторых, в правых частях уравнений, в-третьих, в самом операторе дифференцирования. И если в идеальной системе должна решаться система уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, ..., y_n, t), \; y_i(0) = y_{i0},$$

то на реальной ЦВМ будет решаться система

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, ..., \tilde{y}_n, t) + A_i(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, t),$$
$$\tilde{y}_i(0) = \tilde{y}_{i0}, \; i = 1,2,...,n.$$

где $A_i(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, t)$ — помехи, действующие на систему дифференциальных уравнений.

Нарушения в операторе дифференцирования также сводятся к аддитивной добавке аналогичного вида в правых частях реально решаемых систем уравнений.

Суть метода избыточных переменных заключается в том, чтобы решать в вычислительном устройстве не исходную систему уравнений, а эквивалентную ей расширенную систему с неопределенными коэффициентами. Если имеется исходная задача в виде конечных, дифференциальных, разностных или интегральных уравнений, в которых участвуют y_i, $i = 1,2,...,n$ исходных переменных, то для повышения качества решения предлагается, во-первых, вместо исходных переменных ввести новые переменные x_j, $j = 1,2,...,l$, $l > n$. Переменные y_i и x_j могут быть связаны между собой произвольным образом, но обязательно так, чтобы можно было вычислить исходные переменные в функции от новых переменных. Наиболее разработанный вариант — когда y_i являются линейными функциями от x_j.

Во-вторых, на новые переменные накладываются дополнительные условия, и вместо исходной задачи с n переменными решается преобразованная исходная задача, тесно перемешанная с дополнительной задачей, причем в расширенном вычислительном процессе участвуют n_1 переменных. По правильности решения заранее известной дополнительной задачи можно судить о правильности протекания всего вычислительного процесса в целом и принимать меры по его исправлению в случае обнаружения нарушений. Дополнительные задачи обычно называются контрольными условиями.

Введение избыточности позволяет не только организовать контроль, но также управлять вычислительным процессом как на основании априорных данных о помехах, так и на основании текущего контроля процесса в реальном времени.

Далее в п. 2.2 дается общее описание метода избыточных переменных, и рассматриваются различные способы осуществления коррекции ошибок при помощи избыточных переменных.

Как известно из теоремы об оценке отклонения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, эти отклонения зависят от величины возмущений начальных условий и величины постоянно действующих возмущений. И если в системе без избыточности главное средство для уменьшения отклонений — это ослабление самих источников помех, то в избыточных структурах появляется новое средство для борьбы с помехами, которые действуют на расширенные системы, в них можно использовать для этой цели операцию сжатия, операцию перехода от новых переменных к исходным (рис. 1). С ее помощью при соответствующем подборе коэффициентов оказывается возможным уменьшить величину возмущений, действующих на систему после сжатия, чем и достигается уменьшение отклонения решений. Этому вопросу посвящен пункт 2.2.1.данной работы.

В п. 2.2.2 описывается метод коррекции "вперед" (пунктирная линия II на рис. 1). Если имеем избыточную систему с $(n+1)$ переменными и одним линейным контрольным условием:

$$\sum_{j=1}^{n_1} m_j^1 x_j = 0,\; m_j^1 = const,$$

то, повторив решение этой системы $(n+1)$ раз каждый раз с новыми коэффициентами контрольной плоскости, можно получить информацию обо всех первичных ошибках, действующих на конкретную задачу, решаемую на конкретной аппаратуре каким-то конкретным методом. При этом предполагается, что ошибки не изменяются при изменении коэффициентов m_j, при повороте контрольной плоскости.

Например, если имеем систему с $j = 1,2,3$

$$\frac{d\tilde{x}_j}{dt} = f_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, t) + A_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, t), \tag{1}$$

то на выходе контрольного органа получим

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n_1} m_j h_j\,. \tag{2}$$

Для того чтобы определить h_j, необходимо в данном случае иметь три уравнения вида (2). Их можно получить, используя различные значения коэффициентов m_j на заданном интервале времени. Таким образом, для каждого момента времени будем иметь систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= m_1' h_1 + m_2' h_2 + m_3' h_3 \\ \Delta_2 &= m_1'' h_1 + m_2'' h_2 + m_3'' h_3\,, \\ \Delta_3 &= m_1''' h_1 + m_2''' h_2 + m_3''' h_3 \end{aligned} \tag{3}$$

откуда можно определить h_j при условии

$$\begin{vmatrix} m_1' & m_2' & m_3' \\ m_1'' & m_2'' & m_3'' \\ m_1''' & m_2''' & m_3''' \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Полученные в результате экспериментов и расчетов по формулам (3) величины h_j для нужных моментов времени могут быть использованы для коррекции решения, соответствующего этим моментам времени

$$x_j^*(t_1) = \tilde{x}_j(t_1) - h_j(t_1),$$

где t_1 — любое в интервале $(t - t_0)$.

Если число контрольных плоскостей k, то число необходимых поворотов $(n+k)/k$, и минимальное число поворотов будет при $k \approx n$, оно равно двум при $k \approx 3/2$. Таким образом, здесь возможен обмен между затратами аппаратуры и затратами времени для определения вектора помех. Чем больше контрольных плоскостей, то есть чем больше избыточность аппаратуры, тем меньше раз требуется повернуть пучок плоскостей, тем меньше затраты времени, и наоборот. Конкретная рекомендация по числу контрольных плоскостей зависит от размерности и сложности задачи и от вида используемой вычислительной машины, ее параметров по быстродействию, памяти и т.п.

В п. 2.2.3 рассматриваются вопросы о контроле и коррекции в избыточных структурах с непрерывной обратной связью. Если известна воспроизводимая функция, то по ней можно производить коррекцию расширенной системы.

Если функция, которую требуется воспроизвести, задается пересечением дифференцируемых многообразий

$$F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$
$$\ldots$$
$$F_m(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$
$$m \le n,$$

то, введя новые дополнительные переменные $y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}$, получим

$$F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_{n+1},$$
$$\ldots$$
$$F_m(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_{n+m}.$$

Продифференцировав эти уравнения, получим

$$\begin{gathered} \sum \frac{\partial F_1}{\partial y_i} dy_i - dy_{n+1} = 0, \\ \ldots \\ \sum \frac{\partial F_m}{\partial y_i} dy_i - dy_{n+m} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Можем построить эквивалентную для (4) систему дифференциальных уравнений, которая будет содержать $S = C_{n+m}^{m+1}$ неопределенных коэффициентов, часть из которых, проанализировав их структуру, можно использовать для построения цепи коррекции I (рис. 1).

Сформулируем *алгоритм построения устойчивых моделей для генерации плоских кривых*, при условии, что известен первый интеграл, т.е. воспроизводимая функция, дифференцируемая в заданной области изменения переменных, задающая кривую, например:

$$F(y_1, y_2) = 0.$$

1. Ввести в качестве сигнала ошибки новую переменную y_3:

$$F(y_1, y_2) = y_3. \tag{5}$$

2. Путем дифференцирования получить из (5) уравнение Пфаффа:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} dy_2 - dy_3 = 0. \tag{6}$$

3. Получить из (6) расширенную систему дифференциальных уравнений с неопределенными коэффициентами.

4. Назначить неопределенные коэффициенты таким образом, чтобы $y_3 \to 0$ по Ляпунову.

В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений, моделирующую движение осциллятора, имеющего широкое практическое применение.

Воспроизводимая функция в данном случае:

$$y_1^2 + y_2^2 = R^2,$$

Эквивалентная данному уравнению система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1. \end{cases}$$

Введем в качестве сигнала ошибки новую переменную y_3

$$y_1^2 + y_2^2 - R^2 = y_3. \tag{7}$$

После дифференцирования будем иметь

$$2y_1 dy_1 + 2y_2 dy_2 - dy_3 = 0.$$

Эквивалентная система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = u_1 2y_2 - u_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -u_1 2y_1 - u_3, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = -u_2 2y_1 - u_3 2y_2. \end{cases} \tag{8}$$

Величина y_3 подсчитывается в контрольном органе КО (рис. 1) по формуле (7), она известна, и ее можно использовать для коррекции, назначив неопределенные коэффициенты u_2 и u_3 таким образом, чтобы $y_3 \to 0$. по Ляпунову. Это осуществимо, если положить

$$u_2 = y_3 2y_1\alpha,\ u_3 = y_3 2y_2\alpha, \tag{9}$$

где $\alpha > 0$.

В системе с коррекцией по воспроизводимой функции будут решаться уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = u_1 2y_2 - y_3 2y_1\alpha, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -u_1 2y_1 - y_3 2y_2\alpha, \end{cases}$$

с начальными условиями y_{10} и y_{20}, при которых воспроизводимая функция $F(y_{10}, y_{20}) = 0$. Эти уравнения определяют устойчивую модель осциллятора.

Последнее уравнение системы (8) прямо не будет решаться в системе — оно используется для аналитического синтеза. При подстановке в него (9) видно, что $y_3 \to 0$ при $\alpha > 0$. С помощью коэффициента u_1 задается скорость и направление движения по заданной траектории $F(y_1, y_2) = 0$.

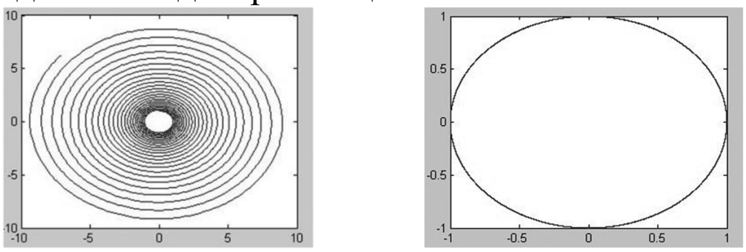
Для моделирования этой и последующих систем была выбрана библиотека моделирования Simulink, являющаяся частью среды MatLab. Далее приводятся результаты решения системы дифференциальных уравнений с применением различных численных методов, с различным шагом дискретизации Δ. Рассматриваются возможности применения коррекции по воспроизводимой функции для каждого метода.

Использованные численные методы:

1. Метод Эйлера;
2. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка;
3. Метод Dormand-Prince 5-го порядка;
4. Метод Bogacki-Shampine 3-го порядка;
5. Метод трапеций с переменным шагом дискретизации.

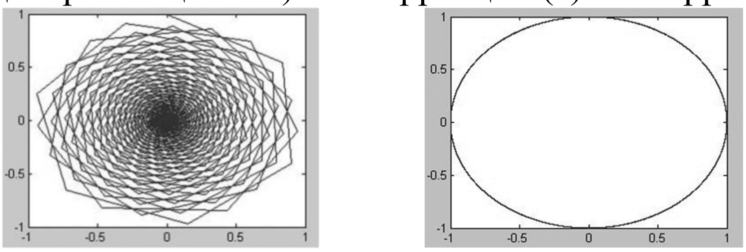
Для каждого отдельного случая были выбраны параметры u_1 и α.

Ниже приведены некоторые наиболее интересные графики зависимости y_2 от y_1 с указанием метода и шага дискретизации.



а) б)

Рис. 2. Графики зависимости y_2 от y_1 (метод Эйлера с шагом дискретизации 0.5) без коррекции (а) и с коррекцией (б)



а) б)

Рис. 3. Графики зависимости y_2 от y_1 (метод Рунге-Кутты с шагом дискретизации 0,5) без коррекции (а) и с коррекцией (б)

Анализируя данные примеры, можно сделать вывод, что метод избыточных переменных позволяет, не уменьшая шага дискретизации, т.е. не увеличивая времени решения системы дифференциальных уравнений, при помощи управления только произвольными коэффициентами значительно снизить величину ошибки, а в некоторых случаях получить решения там, где стандартными методами это сделать невозможно. В качестве другого примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений, моделирующую построение лемнискаты Бернулли, которая имеет другую особую точку.

Воспроизводимая функция в данном случае имеет вид

$$\left(y_1^2 + y_2^2\right) - 2a^2\left(y_1^2 - y_2^2\right) = 0.$$

Эквивалентная данному уравнению система дифференциальных уравнений без коррекции будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = u_1 4 y_2 \left(y_1^2 + y_2^2 + a^2\right), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -u_1 4 y_1 \left(y_1^2 + y_2^2 + a^2\right). \end{cases}$$

Аналогично первому примеру введем в качестве сигнала ошибки новую переменную, продифференцируем полученную функцию.

Эквивалентная система дифференциальных уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = u_1 \dfrac{\partial F}{\partial y_2} - u_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -u_1 \dfrac{\partial F}{\partial y_1} - u_3, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = -u_2 \dfrac{\partial F}{\partial y_1} - u_3 \dfrac{\partial F}{\partial y_2}. \end{cases}$$

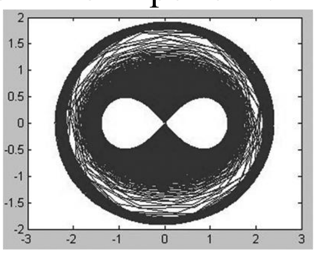
В системе с коррекцией по воспроизводимой функции будут решаться уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = u_1 \dfrac{\partial F}{\partial y_2} - y_3 \dfrac{\partial F}{\partial y_1} \alpha, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -u_1 \dfrac{\partial F}{\partial y_1} - y_3 \dfrac{\partial F}{\partial y_2} \alpha, \end{cases}$$

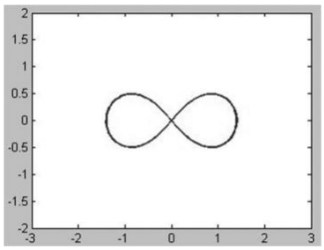
с начальными условиями y_{10} и y_{20}, при которых $F\left(y_{10}, y_{20}\right) = 0$. Эти уравнения определяют устойчивую модель для генерации лемнискаты.

Далее приведены некоторые графики зависимости y_2 от y_1 с указанием метода и шага дискретизации.

Анализируя результаты этих вычислительных экспериментов, можно сделать вывод, что метод избыточных переменных позволяет и в случае лемнискаты — а это кривая с особенностями, не уменьшая шага дискретизации, значительно снизить величину ошибки в реальном времени.

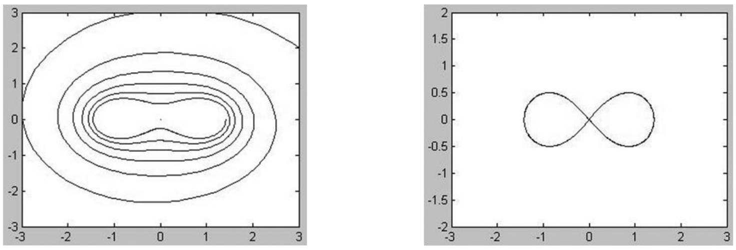


а)



б)

Рис. 4. Графики зависимости y_2 от y_1 (метод Dormand-Prince с шагом дискретизации 0.05, $u_1 = 1$) без коррекции (а) и с коррекцией (б)



а) б)

Рис. 5. Графики зависимости y_2 от y_1 (метод Эйлера с шагом дискретизации 0.5, $u_1 = 0.01$) без коррекции (а) и с коррекцией (б)

Для построения *устойчивой модели осциллятора, генерирующего пространственную кривую* необходимо в качестве контрольных условий использовать уравнения поверхностей, на пересечении которых лежит искомая кривая. Далее следует выполнять действия, аналогичные указанным в приведенном выше алгоритме.

Рассмотрим построение устойчивой модели генерации пространственной кривой на примере модели сферы. Воспроизводимая функция в данном случае:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = R^2.$$

В качестве второго контрольного условия можно выбрать уравнение плоскости

$$Ay_1 + By_2 + Cy_3 + E = 0.$$

Введем в качестве сигналов ошибки новые переменные y_4, y_5

$$\begin{aligned} &y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - R^2 = y_4, \\ &Ay_1 + By_2 + Cy_3 + E = y_5. \end{aligned} \qquad (10)$$

После дифференцирования и устранения перекрестных связей между ошибками получим по методу избыточных переменных расширенную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = u_1 D_{23}^1 - y_4 D_{12}^4 \alpha D_{24}^1 - y_5 D_{12}^5 \beta D_{25}^1 - y_4 D_{13}^4 \alpha D_{34}^1 - y_5 D_{13}^5 \beta D_{35}^1, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -u_1 D_{13}^2 + y_4 D_{12}^4 \alpha D_{14}^2 + y_5 D_{12}^5 \beta D_{15}^2 - y_4 D_{23}^4 \alpha D_{34}^2 - y_5 D_{23}^5 \beta D_{35}^2, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = u_1 D_{12}^3 + y_4 D_{13}^4 \alpha D_{14}^3 + y_5 D_{13}^5 \beta D_{15}^3 + y_4 D_{23}^4 \alpha D_{24}^3 + y_5 D_{23}^5 \beta D_{25}^3, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta > 0$, а буквой D обозначена сумма из произведений частных производных от функции (10) по переменным, индексы которых входят в нижний индекс у буквы D:

$D_{12} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}$ и т.д. Эти уравнения определяют устойчивую модель для генерации плоских сечений сферы.

В п. 2.2.4 показаны возможности применения избыточности в гибких структурах. В рассмотренных выше системах число переменных n_1 в расширенных структурах было равно числу контрольных условий k плюс число исходных переменных n. В гибких структурах $n_1 > n + k$, за счет чего с помощью произвольных коэффициентов оказывается возможным осуществлять перестройку работы системы без нарушения функционирования, обходя неисправные места в схемах и алгоритмах.

Если исходная задача имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t),\ y(0) = y_0,$$

то, введя избыточность и наложив контрольное условие

$$y = \sum_{j=1}^{3} a_j x_j,\ F(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

из эквивалентных уравнений Пфаффа

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3} a_j dx_j - f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_4 = 0, \\ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_j} dx_j = 0, \\ dx_4 = dt, \end{aligned}\right\}$$

получим расширенную систему, содержащую $S = C_4^3 = 4$ произвольных коэффициента

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{\tau} &= u_1 D_{23} + u_2 D_{24} + u_3 D_{34} \\ \frac{dx_2}{\tau} &= -u_1 D_{13} - u_2 D_{14} + u_4 D_{34} \\ \frac{dx_3}{\tau} &= u_1 D_{12} - u_3 D_{14} + u_4 D_{24} \\ \frac{dx_4}{\tau} &= u_2 D_{12} + u_3 D_{13} + u_4 D_{23} \end{aligned}\right\}. \qquad (11)$$

Для решения задачи в натуральном масштабе времени, необходимо иметь

$$u_2 D_{12} + u_3 D_{13} + u_4 D_{23} = 1. \qquad (12)$$

Если вычисление D_{14}, D_{24}, D_{34} реализуется с помощью отдельных блоков — блоков программы или блоков схем — то с помощью коэффициентов u_S оказывается возможным так изменить структуру системы (11), чтобы исключить любой один из этих блоков в случае неисправности без нарушения условия (12). Действительно, если хотим исключить из работы блок D_{14}, то можем положить $u_2 = u_3 = 0$, из (12) $u_4 = \frac{1}{D_{23}}$; если хотим исключить блок D_{24}, то $u_2 = u_4 = 0$, $u_3 = \frac{1}{D_{13}}$; если хотим исключить D_{34}, то $u_3 = u_4 = 0$, $u_2 = \frac{1}{D_{12}}$.

Для любого числа исходных уравнений и переменных n может быть построена гибкая структура с «k» контрольными условиями, и если в этой структуре $n_1 - (n + k) = n_2$, то число n_2 определяет корректирующие возможности гибкой структуры: если $n_2 = 1$, то может быть отключена одна любая переменная и один вычислительный блок в правых частях без нарушения работы в натуральном масштабе времени; если $n_2 = 2$, то могут быть отключены любые две переменные и два вычислительных блока в правых частях без нарушения работы в натуральном масштабе времени и т.д. Таким образом могут быть синтезированы модели осцилляторов, устойчивые к отказам целых блоков в зависимости от принятой гипотезы о помехах.

В п. 2.3 производится сравнение метода избыточных переменных с другими способами контроля и управления вычислительными процессами, такими как тестовый контроль, резервирование, методы теории кодирования, способы логического или программно-логического контроля, к которым можно отнести и метод избыточных переменных. Анализ показал, что метод избыточных переменных позволяет снизить аппаратную и временную избыточность, характерные для методов резервирования и тестового контроля, имеет более широкую область применения, чем теория кодирования.

В третьей главе рассматриваются вычислительные эксперименты для исследования осцилляторов в различных режимах и практическое развитие метода избыточных переменных для моделирования различных осцилляторов и описываются вычислительные эксперименты, доказывающие работоспособность предложенных алгоритмов.

В п. 3.1. приведены эксперименты с воспроизведением осцилляторов на окружности, на сложных кривых. При воспроизведении плоских кривых оказалось удобным использовать обратную связь и коррекцию по воспроизводимой функции. Этого оказалось достаточно для того, чтобы значительно уменьшить ошибку вычислений, не уменьшая шага дискретизации имеющихся численных методов. Рассматривались численные методы как с постоянным, так и с переменным шагом дискретизации. Было произведено моделирование движения осциллятора и воспроизведение лемнискаты Бернулли и других кривых.

В п. 3.2 был рассмотрен вопрос применения поворачивающейся контрольной плоскости для сбора информации о сигнале ошибки и коррекции "вперед".

Результаты моделирования воспроизведения поверхностей и линий на них приведены в п. 3.3. В результате проведенных экспериментов выяснилось, что одного контрольного условия в виде контроля по воспроизводимой функции в приведенных случаях (моделирование сферы и тора) не достаточно. Для того чтобы удерживать точку на заданной кривой, было добавлено еще одно условие — уравнение плоскости. В результате также было достигнуто значительное уменьшение ошибки без уменьшения шага дискретизации, а значит без значительного увеличения временных затрат, что важно для решения навигационных задач и управления плазменным шнуром в токамаке. Получены авторские свидетельства на соответствующие пакеты прикладных программ.

В п. 3.4 показаны эксперименты с жесткими структурами и возможностью уменьшения влияния ошибки с помощью операции сжатия (рис. 1). Эксперименты показали, что применение жестких структур целесообразно, когда на систему действуют одиночные ошибки, а не ошибки, возникающие вследствие несовершенства численного метода решения.

Эксперименты с гибкими структурами, приведенные в п. 3.5, показали, что при помощи метода избыточных переменных можно интерактивно перестраивать модель, не нарушая ее функционирования, таким образом, чтобы избежать воздействия ошибок на составляющие системы.

В п. 3.6. показана возможность моделирования движения материковых плит на поверхности земного шара для прогнозирования литосферной погоды, а также рассмотрены возможные сферы внедрения данной методики контроля и коррекции в работу таких устройств как станки с числовым программным управлением, промышленные роботы, а также 3d-принтеры.

В заключении представлены выводы по результатам исследований.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Разработан метод аналитического конструирования устойчивых вычислительных систем с контролем и коррекцией, в рамках которого синтезированы устойчивые модели осцилляторов, для которых известен первый интеграл.

2. Разработаны и исследованы методы контроля и коррекции жестких и гибких структур с избыточностью.

3. Разработан и исследован метод коррекции "вперед" с использованием избыточных переменных и поворачивающейся контрольной плоскости.

4. Методом вычислительного эксперимента подтверждена работоспособность предложенных алгоритмов. Предложены следующие рекомендации:

а. для создания устойчивых моделей генерации плоских кривых необходимо рассматривать контроль и коррекцию по воспроизводимой функции, если таковая известна;

б. для создания устойчивых моделей генерации пространственных кривых необходимо рассматривать уравнения пересекающихся поверхностей в качестве контрольных условий.

5. Разработаны четыре пакета прикладных программ:

а. программный комплекс, позволяющий автоматически генерировать структуры расширенных систем уравнений; АС №2015611946, зарег. 10.02.2015;

б. программный комплекс, реализующий алгоритм воспроизведения плоских кривых с контролем и коррекцией; АС №2015614349, зарег. 15.04.2015;

в. программный комплекс, реализующий алгоритм воспроизведения пространственных кривых с контролем и коррекцией; АС №2015614142, зарег. 07.04.2015.

г. программный комплекс, реализующий модель движения материковых плит; АС №2015614143, зарег. 07.04.2015.

Перечень основных публикаций

Книги

1. Игнатьев М.Б. Метод избыточных переменных для контроля, диагностики и коррекции вычислительных процессов в реальном времени: учеб. пособие / М. Б. Игнатьев, Т. С. Катермина. — Нижневартовск: Изд-во Нижневарт. гос. ун-та, 2014. — 188 с.

Журналы, рекомендуемые ВАК РФ

1. Игнатьев М.Б. Метод избыточных переменных для контроля и диагностики вычислительных процессов в реальном времени / М. Б. Игнатьев, Т. С. Катермина // Труды СПИИРАН. — СПб.,2013. — Вып. 3(26). — С. 234 – 252.

2. Игнатьев М.Б. Моделирование движения континентальных плит для предсказания землетрясений / М. Б. Игнатьев, Т. С. Катермина, В. А. Ненашев// Известия Юго-Западного государственного университета. — Курск, 2013.— № 6-2 (51). — С. 92–99.

3. Игнатьев М.Б. Контроль и коррекция вычислительных процессов в реальном времени на основе метода избыточных переменных / М. Б. Игнатьев, Т. С. Катермина // Информатизация и связь. — М., Вып. 1. С. 28–37.
4. Игнатьев М.Б. Метод избыточных переменных для контроля и диагностики вычислительных процессов в реальном времени. Часть 2 / М. Б. Игнатьев, Т. С. Катермина // Труды СПИИРАН. — СПб.,2014. — Вып. 2(33). — С. 60 – 78.

Статьи в журналах, сборниках трудов, материалах конференций

1. Катермина Т.С. Методы контроля, диагностики и коррекции вычислительных процессов / Т. С. Катермина // «Информационные ресурсы в образовании»: Материалы всероссийской научно-практической конференции — 2011. — изд-во Нижневарт. гуманит. ун-та, 2011. — 240 с. С. 209–210.
2. Катермина Т.С. Методы и средства контроля цифровых измерительно-вычислительных комплексов / Т. С. Катермина // «Культура, наука, образование: проблемы и перспективы»: Материалы всероссийской научно-практической конференции. Часть IV — 2012. — изд-во Нижневарт. гуманит. ун-та, 2012. — 163 с. С. 87–90.
3. Игнатьев М.Б. Избыточность для контроля, диагностики и коррекции сложных систем / М. Б. Игнатьев, Т. С. Катермина // «Региональная информатика «РИ-2012»: Материалы юбилейной XIII санкт-петербургской международной конференции — 2012. — СПОИСУ — СПб, 2012. – 420 с. С. 39–40.
4. Катермина Т.С. Моделирование тора при помощи метода избыточных переменных / Т. С. Катермина // «Информационные ресурсы в образовании»: Материалы всероссийской научно-практической конференции — 2013. — изд-во Нижневарт. гос. ун-та, 2013. — 272 с. С. 62–68.
5. Игнатьев М.Б. Проблема прогнозирования землетрясений путем моделирования движения континентальных плит / М. Б. Игнатьев, Т. С. Катермина, В.А. Ненашев // «Информационная безопасность регионов России (ИБРР-2013)»: Материалы VIII Санкт-Петербургской межрегиональной конференции — 2013. — СПОИСУ — СПб, 2013. — 293 с. С. 99.
6. Ignatiev M.B. Simulation of the Continental Plates Movement for the Earthquake Investigation / Ignatiev M.B., Katermina T.S., Nenashev V.A. // Journal of Geological Resource and Engineering. — 2013. V. 1 (12) — P. 35–45.
7. Ignatiev M.B. Some aspects of the redundant variables method / Ignatiev M.B., Katermina T.S. // Scientific enquiry in the contemporary world: theoretical basics and innovative approach. — 2013. V. 5. Technical Sciences. USA: B&M Publishing. — P. 108–112.

Авторские свидетельства

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015611946. Программа для генерации структуры уравнений с неопределенными коэффициентами / Т. С. Катермина; заявитель и правообладатель Т.С. Катермина, зарегистрировано 10.02.2014.
2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015614349. Программа, реализующая алгоритм воспроизведения плоских кривых с контролем и коррекцией / Т.С. Катермина; заявитель и правообладатель Т.С. Катермина, зарегистрировано 15.04.2015.

3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015614142. Программа, реализующая алгоритм воспроизведения пространственных кривых с контролем и коррекцией / Т. С. Катермина; заявитель и правообладатель Т.С. Катермина, зарегистрировано 07.04.2015.

4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015614143. Программа, реализующая алгоритм моделирования перемещения континентальных плит на поверхности земного шара / Т. С. Катермина; заявитель и правообладатель Т.С. Катермина, зарегистрировано 07.04.2015.