

**Министерство образования и науки Российской Федерации**

---

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

---

*Рымкевич П.П.      Горшков А.С.*

**ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА**

**Санкт-Петербург  
2015**

Р е ц е н з е н т ы:

Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор ФГБУН «Институт проблем машиноведения Российской академии наук» (ИПМаш РАН) Индейцев Д.А.

Доктор технических наук, профессор ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» Петриченко М.Р.

*Рымкевич П.П. Теория переноса* / П.П. Рымкевич, А.С. Горшков. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2015. – 120 с.

В монографии рассматривается перенос произвольной аддитивной величины в пространстве и времени. Вводится понятие структуры аддитивного свойства. Показано, что основополагающие законы физики представляют собой запись уравнения баланса аддитивных величин. На основании рассматриваемой в работе модели переноса представлена альтернативная трактовка квантовой механики. Основные результаты работы могут быть применены для описания самого широкого круга явлений Природы как физического, так и нефизического характера. Материал может быть использован в качестве базового математического аппарата при описании любых эволюционных процессов: физических, механических, биологических, экономических и т.д.

Книга рассчитана на студентов старших курсов, магистров, аспирантов и научных сотрудников.

Печатается по решению Совета по издательской деятельности Ученого совета Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

© Рымкевич П.П., Горшков А.С., 2015

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
1. Элементы классической физики.....	7
1.1 Обобщенные координаты. Принцип стационарного действия.....	7
1.2 Уравнения Лагранжа второго рода. Канонические уравнения Гамильтона.....	9
1.3 Главная функция Гамильтона. Уравнение Гамильтона-Якоби.....	11
1.4 Скобки Пуассона.....	12
2. Математический аппарат квантовой теории переноса.....	15
2.1 Кольцо $R_{\otimes}$ и его свойства.....	15
2.2 Некоторые свойства оператора дифференцирования.....	20
2.3 Некоторые свойства некоммутативного умножения.....	24
2.4 Кольцо $R_{\circ}$ . Свойства кольца $R_{\circ}$ .....	26
3. Распространение аддитивных свойств.....	30
3.1 Основные положения.....	30
3.2 Распространение простого одноканального свойства в одномерном случае.....	33
3.3 Квазиэнергия. Уравнение одномерного распространения.....	46
3.4 Распространение некоторых физических свойств.....	49
3.5 Распространение простого комплексного свойства.....	52
3.6 Уравнение Максвелла для поля свойств.....	56
3.7 Распространение квантовых объектов.....	60
3.8 Введение в многоканальную теорию распространения.....	64
4. Уравнения переноса аддитивных свойств.....	73
4.1 Уравнения переноса.....	73
4.2 Уравнение эволюции простых свойств.....	75
4.3 Квантовые и классические траектории.....	80
4.4 Связь квантовой теории с классической квантовой физикой.....	84
4.5 Основные принципы квантовой физики.....	88
5. Описание квантовых систем.....	91
5.1 Назначенные квантовые траектории.....	91
5.2 Гармонический осциллятор.....	94
5.3 Инвариантность коммутационных соотношений. Замена	

переменных в кольце $R_0$ .....	99
5.4 Кинетическое уравнение.....	107
5.5 Следствия из кинетического уравнения.....	108
Заключение.....	114
Список литературы.....	117

## ВВЕДЕНИЕ

Описание законов Природы – одна из актуальных задач современной физики. Несмотря на большое количество учебников и монографий, на взгляд авторов, не существует единой концептуальной линии, позволяющей плавно переходить от классического описания к квантовому, от дискретного к непрерывному. В настоящей работе в краткой форме изложена позиция авторов, согласно которой все основополагающие законы физики (и не только физики) могут быть представлены в форме уравнений баланса «аддитивных свойств». С этой целью разработан оригинальный математический аппарат, позволяющий дать альтернативную трактовку квантовой механике.

С физической точки зрения проблемой современной квантовой механики является то обстоятельство, что квантово-механический объект рассматривается как некая материальная точка, обладающая некоторыми особыми свойствами, что является достаточно серьезным допущением. Авторы предлагают вариант интерпретации квантово-механических результатов, придав некий физический смысл волновой функции  $\psi$ . Волновая функция в работе рассматривается классическое распределенное аддитивное свойство. Данную работу следует рассматривать как развитие идей Луи де Бройля и его сторонников. Подобного рода идеи рассматривались ранее М.А.Марковым. Значительное развитие данная идеология получила в работах В.К. Игнатовича.

Поскольку работа имеет концептуальный характер и рассчитана на широкую аудиторию ученых, то в первой главе очень кратко изложены основные принципы классической механики.

Вторая глава посвящена описанию математического аппарата квантовой теории переноса, основанной на построении некоммутативного кольца. Из соображений простоты и доступности, авторы, там, где это было возможно, ограничивались лишь краткими доказательствами математических утверждений, поскольку излишняя математическая строгость затруднит восприятие материала.

В третьей главе рассмотрено распространение простого аддитивного свойства. Показано, что уравнения Максвелла, Шредингера и Дирака имеют значительно более глубокий смысл и могут быть перенесены, в том числе на разделы науки, которые физика чаще всего не рассматривает.

В четвертой главе получено общее уравнение переноса аддитивных величин и показана связь с классическим квантовым описанием.

Пятая глава посвящена описанию квантовых систем. Показано, что основные уравнения квантовой физики, т.е. уравнения Дирака и Шредингера представляют собой диффузионное приближение соответствующего кинетического уравнения.

В заключение авторы выражают глубокую признательность члену-корреспонденту РАН Д.А.Индееву, академику РАН Н.Ф.Морозову и сотрудникам Института проблем машиноведения РАН за конструктивные критические замечания по отдельным главам монографии и другие ценные советы.

## 1. Элементы классической физики

### 1.1 Обобщенные координаты. Принцип стационарного действия

Начнем рассмотрение с основ классической физики. Предметом физики является открытие и изучение универсальных свойств материи. Но как "физика" это делает?

1. Каждое свойство помещается на шкалу этих свойств. Любая шкала свойств в физике называется пространством. Например, пространство температур, пространство скоростей, пространство координат и т.д.

2. Метод материальных точек состоит в том, что тело заменяется совокупностью материальных точек, имеющих место на шкале своих свойств, но не имеющих протяженности. Иными словами, материальной точкой называется такой воображаемый объект, который на шкале данных свойств имеет только место, но не имеет протяженности. Можно говорить о пространственной материальной точке, скоростной материальной точке и т.д. Материальная точка без причастия означает пространственную материальную точку (материальную точку в узком смысле слова), т.е. тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Функциональная зависимость между временем и другими свойствами изучаемых объектов называется движением. Зависимость пространственного положения тела от времени называется пространственным или механическим движением, а влияние на это движение других универсальных свойств называется механикой.

Для определения состояния системы из  $N$  материальных точек нужно задать  $I$  величин. Наименьшее число независимых величин, необходимых для описания положения системы в пространстве, называется числом степеней свободы  $I$ . Сами задаваемые величины  $q_1, \dots, q_I$  называют обобщенными координатами, а их производные по времени  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_I$  – обобщенными скоростями. Отметим, что задание  $2I$  величин в любой момент времени должно полностью описывать состояние механической системы, т. е. однозначно предсказывать будущее и объяснять прошлое. Если данного числа величин недостаточно (не полностью описывают систему), то следует вводить дополнительные (иногда скрытые степени свободы), пока их окажется необходимо и достаточно.

Наиболее общая формулировка закона движения – зависимости обобщённых координат от времени дается так называемым принципом наименьшего действия (или принципом Гамильтона). Согласно этому принципу каждая механическая система характеризуется определенной функцией

$$L(q_1 \dots q_I, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_I, t)$$

или в краткой записи  $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ , называемой функцией Лагранжа. Интеграл от функции Лагранжа  $S$  называется действием:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt. \quad (1.1)$$

Изучение движения механической системы можно свести к изучению движения точки в расширенном координатном  $(I+1)$ -мерном пространстве. Вместо  $(I+1)$ -мерного пространства  $A_{I+1}(t, \vec{q})$  можно рассматривать  $I$ -мерное пространство  $\Omega_I(\vec{q})$ , положение точки в котором определяется заданием  $I$  обобщённых координат  $(q_n)$ . Пространство  $\Omega_I(\vec{q})$  называется пространством конфигураций, а пространство  $A_{I+1}(t, \vec{q})$  – пространством событий.

Каждому моменту времени  $t$ , а, следовательно, и каждой конфигурации  $(\vec{q})$  системы будем приводить в соответствие точку  $M(t, \vec{q})$ , которая носит название изображающей точки. Так как при движении системы различным моментам времени  $t$  соответствуют различные конфигурации  $q_n(t)$ , а, следовательно, различные положения изображающей точки  $M(t, \vec{q})$  в пространстве  $\Omega_{I+1}(\vec{q})$ . Линия, которую описывает изображающая точка  $M$  в пространстве  $\Omega_I(\vec{q})$ , называется траекторией системы. Рассмотрим моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , в которые конфигурации системы определяются обобщёнными координатами  $q_n^{(1)}$  и  $q_n^{(2)}$  ( $n=1, 2, \dots, I$ ). Указанным моментам времени в пространстве  $\Omega_{I+1}(\vec{q})$  соответствуют различные положения изображающей точки  $M$ , которые обозначим через  $M_1$  и  $M_2$ . При движении изображающая точка опишет некоторую траекторию, которую будем называть прямым путем. Все остальные возможные траектории называются окольными путями. Согласно принципу Гамильтона действительное движение системы при её переходе из положения  $M_1$  в положение  $M_2$  происходит таким образом, что действие  $S$  по Гамильтону, вычисленное по прямому пути, имеет стационарное значение по сравнению со



значением, которое действие  $S$  принимает при движении системы по окольным путям, близким к прямому и проходящим через те же точки  $M_1$  и  $M_2$ . В большинстве известных случаев действие  $S$  имеет минимум, откуда и получил данный принцип своё название (принцип наименьшего действия). Данный принцип лежит в основе не только механики, но и других разделов науки, и рассматривается в вариационных задачах [1, 2].

## 1.2. Уравнения Лагранжа второго рода. Канонические уравнения Гамильтона

В вариационном исчислении, рассматривающем формальную задачу об отыскании экстремума функционала (1.1) приходим к  $I$  уравнениям Эйлера второго порядка [1, 2]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_n} \right) = 0 \quad n = 1, 2, \dots, I \quad (1.2)$$

Эти искомые дифференциальные уравнения второго порядка называются в механике уравнениями Лагранжа второго рода. Если функция Лагранжа данной системы известна, то уравнения (1.2) устанавливают связь между ускорением, скоростью и координатами, т. е. представляют собой уравнения движения системы. С математической точки зрения уравнения (1.2) составляют систему  $I$  уравнений второго порядка для  $I$  неизвестных функций. Общее решение такой системы содержит  $2I$  произвольных постоянных. Для их определения, т. е. полного описания системы, необходимо знание начальных условий, характеризующих состояние системы в некоторый заданный момент времени. Таким образом, задание обобщённых координат и скоростей в произвольный момент времени однозначно определяет траекторию движения системы.

Необходимо сделать ещё следующее общее замечание.

Рассмотрим две функции Лагранжа  $L'(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$  и  $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ , отличающиеся друг от друга на полную производную по времени от какой-либо функции обобщённых координат и времени, т.е.

$$L'(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) + \frac{d}{dt} f(\bar{q}, t). \quad (1.3)$$

Можно легко показать, что вид уравнений движения (1.2) при этом останется неизменным. Таким образом, функция Лагранжа (Лагранжан)

определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной от произвольной функции координат и времени.

Принцип наименьшего действия является обобщением законов динамики Ньютона. По сути, Ньютон установил, что ускорение является функцией координат, скоростей и времени. При этом часть, отвечающую за внешнее воздействие, он назвал силой, а характеристику самого объекта – массой.

Формулировка законов механики с помощью функции Лагранжа и выводимых из неё уравнений Лагранжа предполагает описание механического состояния путём задания её обобщённых координат и скоростей. Представляет интерес описание механической системы с помощью обобщённых координат и импульсов системы. Переход от одного набора независимых переменных к другому осуществляется с помощью известного преобразования Лежандра.

Полный дифференциал функции Лагранжа равен:

$$dL = \sum_{(n)} \frac{\partial L}{\partial q_n} dq_n + \sum_{(n)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} d\dot{q}_n. \quad (1.4)$$

Так как по определению  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = p_n$  – обобщённые импульсы, то

$$\sum_{(n)} p_n d\dot{q}_n = d \sum_{(n)} p_n q_n - \sum_{(n)} \dot{q}_n dp_n.$$

Отсюда

$$d \left( \sum_{(n)} p_n \dot{q}_n - L \right) = \sum_{(n)} \dot{p}_n dq_n - \sum_{(n)} \dot{q}_n dp_n.$$

Величина, стоящая под знаком дифференциала, представляет собой энергию системы, выраженную через координаты и импульсы, и называемую функцией Гамильтона (Гамильтонианом системы):

$$H(\vec{p}, \vec{q}, t) = \sum_{(n)} p_n \dot{q}_n - L. \quad (1.5)$$

Из дифференциального равенства

$$dH = - \sum_{(n)} \dot{p}_n dq_n - \sum_{(n)} \dot{q}_n dp_n.$$

следуют уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{q}_n &= -\frac{\partial H}{\partial p_n}; \\ \dot{p}_n &= -\frac{\partial H}{\partial q_n}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Это исконные уравнения в переменных  $\vec{q}$  и  $\vec{p}$ , так называемые уравнения Гамильтона. Они составляют систему  $2I$  дифференциальных уравнений первого порядка для  $2I$  неизвестных функций  $\vec{q}(t)$  и  $\vec{p}(t)$ . В виду их формальной простоты и симметрии эти уравнения называют также каноническими.

Полная производная от функции Гамильтона по времени равна:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{(n)} \frac{\partial H}{\partial q_n} \dot{q}_n + \sum_{(n)} \frac{\partial H}{\partial p_n} \dot{p}_n.$$

При подстановке сюда  $\dot{q}_n$  и  $\dot{p}_n$  из системы (1.6) получим:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.\tag{1.7}$$

В частности, если функция Гамильтона не зависит от времени явно, то  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$  (автономные системы), то отсюда вытекает закон сохранения энергии

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = E.\tag{1.8}$$

Вообще под энергией системы в механике будем понимать функцию состояния системы, изменение которой равно работе сил.

В дальнейшем постараемся расширить данное определение и перенести данные понятия и на другие (нефизические) системы.

### 1.3. Главная функция Гамильтона. Уравнение Гамильтона-Якоби

При формулировке принципа наименьшего действия интеграл (1.1) рассматривался как определенный интеграл в заданные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ . Рассмотрим теперь понятие действия в другом аспекте. Будем рассматривать  $S$  как величину, характеризующую движение по прямому пути, и сравним значения, которые она имеет для траекторий, имеющих общее начало  $\vec{q}(t_1) = \vec{q}^{(1)}$ , но проходящих в момент времени  $t_2$  через различные положения, т. е. действие  $S = S'(t_1, \vec{q}^{(1)} | t_2, \vec{q})$ . Действие  $S(t_0, \vec{q}_0 | t, \vec{q})$ , рассматриваемое как функция времени  $t$  и обобщённых координат  $\vec{q}$  и некоторых постоянных параметров, носит название главной функции Гамильтона. Эта функция играет фундаментальную роль в

теории интегрирования дифференциальных уравнений динамики, когда задача сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения в частных производных (так называемое уравнение Гамильтона-Якоби). Указанная теория разработана, главным образом, Гамильтоном, Остроградским и Якоби.

Принцип переменного действия является расширением принципа стационарного действия Гамильтона. В принципе Гамильтона сравнивается движение системы между двумя заданными положениями для двух различных моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ . Однако принцип Гамильтона ничего не говорит о том, каково будет изменение функции действия  $S$ , если от рассматриваемого действительного движения между точками  $M_1$  и  $M_2$  перейти к другому, тоже действительному движению между точками  $M_1$  и  $M(t, \vec{q})$ .

Функция  $S(\vec{q}, t)$  удовлетворяет определенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\vec{p}, \vec{q}, t) = 0. \quad (1.9)$$

Это уравнение в частных производных первого порядка называется уравнением Гамильтона-Якоби.

Здесь следует учесть, что

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\partial S}{\partial q_n}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -H(\vec{q}, \vec{p}, t). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Заметим, что общие принципы аналитической механики позволяют описать детерминированную систему, т.е. такую систему, в которой прошлое однозначно определяет будущее.

#### 1.4. Скобки Пуассона

Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  суть некоторые функции, зависящие от переменных, определяющих состояние механической системы, а именно, от обобщённых координат  $q_n$ , обобщённых импульсов  $p_n$  и времени  $t$ :  $\varphi = \varphi(\vec{q}, \vec{p}, t)$  и  $\psi = \psi(\vec{q}, \vec{p}, t)$ .

Скобками Пуассона для функций  $\varphi$  и  $\psi$  называется выражение вида:

$$\{\varphi; \psi\} = \sum_{n=1}^l \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} \frac{\partial \psi}{\partial p_n} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial \psi}{\partial q_n} \right). \quad (1.11)$$

Из определения скобок Пуассона вытекают следующие их свойства:

1) свойство антикоммутативности

$$\{\varphi; \psi\} = -\{\psi; \varphi\};$$

2) свойство распределённости

$$\{\varphi_1; \varphi_2 + \varphi_3\} = \{\varphi_1; \varphi_2\} + \{\varphi_1; \varphi_3\};$$

3) имеет место следующее замечательное равенство (тождество Якоби-Пуассона):

$$\{\varphi_1; \{\varphi_2; \varphi_3\}\} = \{\varphi_2\{\varphi_3; \varphi_1\}\} + \{\varphi_3\{\varphi_1; \varphi_2\}\} = 0.$$

Рассмотрим теперь связь между скобками Пуассона и уравнениями движения. Для этого составим скобки Пуассона от функции Гамильтона  $H(t, \vec{q}, \vec{p})$  и некоторой функции  $f(t, \vec{q}, \vec{p})$ . Имеем:

$$\{H; f\} = \sum_{n=1}^l \left( \frac{\partial H}{\partial q_n} \frac{\partial f}{\partial p_n} - \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial f}{\partial q_n} \right). \quad (1.12)$$

Если теперь воспользоваться уравнениями Гамильтона (1.6), то окончательно получим:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f; H\}. \quad (1.13)$$

Если функция  $f = f(t, \vec{q}, \vec{p})$  является интегралом движения,  $f(t, \vec{q}, \vec{p}) = const$ , то

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f; H\} = 0. \quad (1.14)$$

Выражение (1.13) можно рассматривать как уравнение первого порядка в частных производных относительно функции  $f$ , а именно, для автономных систем имеем:

$$\left\{ D + \sum_{n=1}^l \left( \frac{\partial H}{\partial q_n} D_{p,n} - \frac{\partial H}{\partial p_n} D_{q,n} \right) \right\} f(\vec{p}, \vec{q}, t) = 0. \quad (1.15)$$

$$\text{Здесь } D \frac{\partial}{\partial t}; \quad D_{p,n} = \frac{\partial}{\partial p_n}; \quad D_{q,n} = \frac{\partial}{\partial q_n}.$$

В силу инвариантности формы первого дифференциала, если в момент времени  $t = t_0$  известен вид функции  $f(\vec{q}_0, \vec{p}_0, t_0)$ , то в момент времени  $t$  вид функции не изменится. Так, например, если кинетическая энергия частицы в начальный момент времени равна  $W_K = \frac{p_0^2}{2m}$ , и в последующие моменты времени

$W_K(t) = \frac{p^2}{2m}$ . В квантовой физике это утверждение уже не будет выполняться.

## 2. Математический аппарат квантовой теории переноса

### 2.1 Кольцо $R_{\otimes}$ и его свойства

Рассмотрим множество функций  $C_{t,\tau}$  двух действительных переменных  $t$  и  $\tau$ , определенных и кусочно-непрерывных для  $\tau \geq 0$  и аналитических по переменной  $t \in (-\infty; +\infty)$ . Пусть  $a(t, \tau), b(t, \tau), c(t, \tau) \in C_{t,\tau}$ . Определим произведение функций следующим образом:

$$c(t, \tau) = a(t, \tau) \overline{\otimes} b(t, \tau) \stackrel{Def}{=} \int_0^{\tau} a(t, \tau_1) b(t + \tau_1, \tau - \tau_1) d\tau_1 \quad (2.1)$$

Обозначим через  $R_{\otimes}$  – кольцо функций  $C_{t,\tau}$  с естественным определенным сложением и умножением в смысле (2.1).

Рассмотрим некоторую упорядоченную последовательность функций  $a, b, c, \dots \in R_{\otimes}$ . В большинстве задач такую последовательность будем называть процессом, а сами функции, например,  $a(t, \tau)$  можно интерпретировать как функцию распределения некоторого события  $A$ , начавшегося в момент времени  $t$  и распределенного по длительности события  $\tau \geq 0$ . Таким образом, указанную выше последовательность функций будем называть процессом, состоящим из последовательного выполнения событий  $A, B, C, \dots$ , и записывать в мультипликативном виде  $A \circ B \circ C, \dots$ . В дальнейшем элементы кольца  $R_{\otimes}$  будем называть функциями соответствующих событий. Учитывая тот факт, что большинство окружающих нас явлений Природы есть некоторые упорядоченные цепи тех или иных событий, необходимость использования кольца  $R_{\otimes}$  очевидна.

Проиллюстрируем это на примере. Пусть процесс  $E$ , описываемый функцией  $e(t, \tau)$ , заключается в осуществлении двух упорядоченных событий  $A$  и  $B$  или  $C$  и  $D$ , описываемых функциями  $a, b, c, d$  соответственно. Тогда

$$e(t, \tau) = a(t, \tau) \overline{\otimes} b(t, \tau) + c(t, \tau) \overline{\otimes} d(t, \tau)$$

Заметим, что по такому же принципу складываются амплитуды вероятностей в квантовой механике. В простейшем случае, если  $a, b, c, \dots$  не зависят явно от переменной  $t$  (например, времени начала события), то интеграл (2.1) представляет обычную свертку функций (умножение в смысле Микусинского [3]), т.е.  $c(\tau) = a(\tau) * b(\tau)$ . Таким образом,  $R_* \subset R_{\otimes}$ . Отметим, что в

отличие от кольца Микусинского  $R_*$ , кольцо  $R_{\otimes}$  имеет делители нуля, т.е. не может быть расширено элементарным способом до поля отношений; кольцо  $R_{\otimes}$ , как и кольцо  $R_*$ , есть кольцо с единицей, причем роль единичного элемента играет  $\delta(\tau)$  – дельта функция Дирака. Как принято в операционном исчислении [4-6], элементы кольца  $R_{\otimes}$  будем называть операторами (распределениями). При этом в класс функций  $C_{t,\tau}$  включаются и обобщенные функции. В дальнейшем более удобно использовать не само кольцо  $R_{\otimes}$ , а кольцо  $R_{\otimes}$ . Изоморфизм между кольцами  $R_{\otimes}$  и  $R_{\otimes}$  устанавливается с помощью преобразования Лапласа.

$$A(t, s) = \int_0^{\infty} a(t, \tau) \exp(-\tau s) d\tau$$

где  $A(t, s)$  – аналитическая функция по обоим переменным (действительной  $t$  и комплексной  $s$ ).

Определим произведение функций  $A(t, s) \otimes B(t, s) = C(t, s)$ ;  $A, B, C \in R_{\otimes}$ , описывающих мультипликативную полугруппу кольца  $R_{\otimes}$  следующим образом:

$$C(t, s) \stackrel{Def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n A(t, s)}{\partial s^n} \cdot \frac{\partial^n B(t, s)}{\partial t^n} = A(t, s) \otimes B(t, s) \quad (2.2)$$

Действительно, пусть  $A(t, s)$  и  $B(t, s)$  – Лаплас-образы распределений  $a(t, \tau)$  и  $b(t, \tau)$ , а  $C(t, s)$  – Лаплас-образ  $c(t, \tau) = a(t, \tau) \otimes b(t, \tau)$ , тогда

$$\begin{aligned} C(t, s) &= \hat{L} \left\{ \int_0^{\tau} a(t, \tau_1) b(t + \tau_1, \tau - \tau_1) d\tau_1 \right\} = \hat{L} \left\{ \int_0^{\tau} a(t, \tau_1) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b_t^{(n)}(t, \tau - \tau_1) \tau_1^n \right] d\tau_1 \right\} = \\ &= \hat{L} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\tau} [a(t, \tau_1) \tau_1^n] \cdot b_t^{(n)}(t, \tau - \tau_1) d\tau_1 \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \hat{L} [a(t, \tau) \tau^n] \right\} \cdot \left\{ \hat{L} b_t^{(n)}(t, \tau) \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} A_s^{(n)}(t, s) \cdot B_t^{(n)}(t, s) \end{aligned}$$

Выражение (2.2) не единственное представление Лаплас-образа произведения  $a(t, \tau) \otimes b(t, \tau)$ . При выводе представления (2.2) считалось, что ряды являются абсолютно сходящимися.

Ассоциативность кольца  $R_{\otimes}$  следует из ассоциативности кольца  $R_{\otimes}$ . Умножение в смысле (2.2) связано со сложением законами дистрибутивности.



$R_{\otimes}$  – кольцо с единицей, причем единицей кольца  $R_{\otimes}$  является функция  $E(t, s) \equiv 1$ .

Рассмотрим некоторые простейшие свойства кольца  $R_{\otimes}$ .

$$1. \left[ \begin{matrix} t \circ s \\ , \end{matrix} \right] = t \otimes s - s \otimes t = 1$$

$$2. \left[ \begin{matrix} s \circ A(t, s) \\ , \end{matrix} \right] = -A_t'(t, s)$$

$$\left[ \begin{matrix} t \circ A(t, s) \\ , \end{matrix} \right] = A_s'(t, s)$$

Доказательство свойств 1 и 2 следует из непосредственного применения соотношения (2.2). Таким образом, операция дифференцирования аналитической функции  $A(t, s)$  по одной из переменных сводится к взятию соответствующего коммутатора. Следует отметить, что в отличие от аппарата классической квантовой механики  $t$  и  $s$  не операторы, а числовые переменные, и  $A(t, s)$  – аналитическая функция числовых переменных.

Правила дифференцирования умножения в смысле (2.2) такие же, как и для обычного коммутативного умножения, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial s} [A(t, s) \otimes B(t, s)] = \left[ \begin{matrix} t \circ (A \otimes B) \\ , \end{matrix} \right] = t \otimes A \otimes B - A \otimes B \otimes t =$$

$$3. = t \otimes A \otimes B - A \otimes t \otimes B + A \otimes t \otimes B - A \otimes B \otimes t =$$

$$= A_s'(t, s) \otimes B(t, s) + A(t, s) \otimes B_s'(t, s)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [A(t, s) \otimes B(t, s)] = A_t'(t, s) \otimes B(t, s) + A(t, s) \otimes B_t'(t, s).$$

В некоторых задачах целесообразно ввести лиево кольцо дифференцирований  $R$ .

$$A(t, s) \bullet B(t, s) \stackrel{Def}{=} \left[ \begin{matrix} A(t, s) \circ B(t, s) \\ , \end{matrix} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} [A_s^{(n)}(t, s) B_t^{(n)}(t, s) - A_t^{(n)}(t, s) B_s^{(n)}(t, s)]. \quad (2.3)$$

Умножение в смысле (2.2) тесно связано с оператором дифференцирования, действительно

$$4. A(t, s) \otimes B(t, s) = A \overset{2}{(t, s - D_t)} \cdot B \overset{1}{(t, s)} = B(t - \overset{1}{D_s}, \overset{2}{s}) \cdot A(t, s),$$

где  $D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $D_s \equiv \frac{\partial}{\partial s}$ .

Номера над некоммутирующими величинами обозначают порядок их следования справа налево. Это обозначение было предложено Масловым в [7]. Впервые, по-видимому, Фейман [8] начал систематически использовать функции от упорядоченных операторов [9-12], а также исчисления вейлевских функций [13, 14]. Умножение в смысле (2.2) тесно связано с алгеброй Гейзенберга [15, 16]. Основное отличие рассматриваемого аппарата заключается в том, что все элементы колец  $R_{\otimes}$  и  $R_{\circledast}$  являются обычными функциями числовых переменных, а, следовательно, возможно придание им различного физического смысла.

Имеется значительное число работ, посвященных получению различных коммутационных соотношений и правил действия от некоммутирующих операторов [7, 10-12]. Сводка формул некоммутативного анализа приведена в [9].

Отметим, что лиево кольцо дифференцирования (2.3) приводит к следующим очевидным соотношениям:

$$\begin{aligned} A(t, s) \bullet t &= -A_s' (t, s) = -D_s A(t, s) = -t \bullet A(t, s) \\ A(t, s) \bullet s &= A_t' (t, s) = D_t A(t, s) = -s \bullet A(t, s) \end{aligned}$$

Таким образом, лиево кольцо  $R_{\bullet}$  для умножения в смысле (2.2) есть непосредственно оператор соответствующего дифференцирования, т.е.

$$A(t, s) \bullet B(t, s) = A \left( D_s \cdot - D_t \right) \cdot B(t, s) = -B \left( D_s \cdot D_t \right) \cdot A(t, s). \quad (2.4)$$

Аналитические функции от оператора дифференцирования будут пониматься в смысле В.П. Маслова [7].

В некоторых случаях иногда удобно пользоваться коммутативным иордановым кольцом:

$$A(t, s) \circ B(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[ A_s^{(n)}(t, s) B_t^{(n)}(t, s) + A_t^{(n)}(t, s) B_s^{(n)}(t, s) \right]. \quad (2.5)$$

Кольцо  $R_{\circledast}$  с использованием преобразования Лапласа удобно для ряда практических задач с заданными начальными условиями. Однако, для решения общих физических проблем вместо преобразования Лапласа предпочтительней

использовать экспоненциальное преобразование Фурье. При этом, если положить  $s = i\omega$ , то все вышеприведенные соотношения останутся в силе, а выражение (2.2) переписется так:

$$C(t, \omega) = A(t, \omega) \otimes B(t, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} A_{\omega}^{(n)}(t, \omega) B_t^{(n)}(t, \omega) \quad (2.6)$$

$$c(t, \tau) = a(t, \tau) \overline{\otimes} b(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, \tau_1) b(t + \tau_1, \tau - \tau_1) d\tau_1 \quad (2.7)$$

$$A(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, \tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau.$$

В теории переноса под переменной  $t$  обычно подразумевается время, а под  $\omega$  - частоты событий. Для удобства вместо величины  $\omega$  часто будет использоваться  $\varepsilon = \hbar\omega$ , где  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – размерная квантовая постоянная. Переменную  $\varepsilon$  будем называть квазиэнергией. В переменных  $t$  и  $\varepsilon$  выражение (2.3) примет вид:

$$c(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon) \otimes B(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\hbar)^n}{n!} A_{\varepsilon}^{(n)}(t, \varepsilon) B_t^{(n)}(t, \varepsilon) \quad (2.8)$$

При этом

$$[\varepsilon \circ t] = i\hbar \quad (2.9)$$

Если в соотношении (2.8) осуществить формальный переход  $\hbar \rightarrow 0$ , то умножение в смысле (2.8) превращается в обычное коммутативное умножение, т.е.

$$c(t, \varepsilon) \underset{\hbar \rightarrow 0}{=} A(t, \varepsilon) \cdot B(t, \varepsilon)$$

В пространстве оригиналов этот предельный переход означает, что

$$c(t, \varepsilon) \underset{\hbar \rightarrow 0}{=} \int_0^{\tau} a(t, \tau_1) \cdot b(t, \tau - \tau_1) d\tau_1 = a(t, \tau) * b(t, \tau).$$

Последнее означает, что пренебрегается изменением изучаемых свойств за время длительности события. Для квантово-механического описания этот переход означает переход к классическому описанию.

Все вышесказанное указывает на то, что большинство встречающихся в природе явлений естественным образом квантованы, т.к. для их описания

необходимо использовать некоммутативное кольцо  $R_{\otimes}$ . В философском плане данное утверждение означает, что часть квантовомеханических утверждений справедлива не только для микрообъектов (квантовомеханических объектов), но и для макромира.

## 2.2 Некоторые свойства оператора дифференцирования

Использование кольца  $R_{\otimes}$  тесно связано со свойствами оператора дифференцирования. Операторное исчисление, происхождение которого может быть прослежено до трудов О. Хевисайда [17]. Несмотря на то, что многие ученые (Лейбниц, Лагранж, Коши, Лаплас, Буль, Риман и др.) были предшественниками Хевисайда в части введения операционных методов в анализ, только его работы положили начало систематическому применению этих методов к решению физических и технических задач. Тем не менее, первоначальная операторная точка зрения Хевисайда и связанные с ней представления постепенно оттеснялись на второй план. Выявилась даже тенденция современного операционного исчисления отказаться совсем от операторной точки зрения и ограничиться непосредственным применением преобразования Лапласа [5, 6]. Дальнейшее развитие операторных методов и перевод их на современный язык предложен в работах [7, 9]. Тем не менее, для успешного использования кольца  $R_{\otimes}$  полезно использовать простые операторные правила и коммутационные соотношения, построенные на развитии идей О. Хевисайда.

Обозначим через  $C^{\infty}$  множество бесконечно дифференцируемых функций. На  $C^{\infty}$  определим оператор дифференцирования  $\frac{d}{dt} = D$ . Как и в [7], под функцией от оператора  $f(D)$  будем понимать формальные степенные ряды по степени  $D$ . Так как оператор  $D$  не коммутируем с  $t$ . То цифрами над операторами будем указывать порядок их следования. Рассмотрим некоторые основные правила операторного исчисления.

Пусть  $f(t), \varphi(t), u(t), v(t) \in C^{\infty}$ , тогда

$$1. \exp(-\varphi(t)) f(D) \exp(\varphi(t)) \bullet = f[D + \varphi'(t)] \quad (2.10)$$

$$2. f(D) \cdot u(t) \cdot v(t) = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow t \\ t_2 \rightarrow t}} f(D_1 + D_2) u(t_1) v(t_2) \quad (2.11)$$

Т.к. ядро оператора  $D$  – множество констант, то оператор  $D^{-1} D \neq 1$ , если под  $D^{-1}$  понимать неопределенный интеграл. Поэтому центральной задачей операционного исчисления является корректное построение функций от оператора дифференцирования (см., например, [6, 7]). Один из возможных методов построения функций от оператора дифференцирования для их использования в решении физических задач – это использование кольца  $R_{\otimes}$ . Этот вопрос более подробно рассмотрен в главе 5.

Среди различных дифференциальных операторов важную роль в физических приложениях играет роль оператор  $L = \exp [p D^2]$ , который определим как степенной ряд на множестве  $C^{\infty}$ . Действие этого оператора на функцию имеет следующее интегральное представление:

$$\exp [p D^2] u(t) = \frac{1}{\sqrt{4 \pi p}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \exp \left[ -\frac{(t-x)^2}{4 p} \right] d x \quad p > 0 \quad (2.12)$$

Соотношение (2.12) имеет следующий смысл. Если случайная величина  $x$  подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием  $t$  и дисперсией  $p/2$ , то среднее значение некоторой функции  $u(x)$  –  $\langle u(x) \rangle$  определяется с помощью соотношения (2.12). Учитывая, что

$$\exp [p D^2] \exp [\alpha t^2] = \frac{1}{\sqrt{1-4 p \alpha}} \exp \left( \frac{\alpha t^2}{1-4 p \alpha} \right), \quad (2.13)$$

где  $p$  и  $\alpha$  в общем случае комплексные числа и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp (-\alpha x^2 \pm q x) d x = \exp \left( \frac{q^2}{4 \alpha} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (2.14)$$

Если положить  $q = t$  и  $\alpha = 1/4 \alpha$  соотношение (2.13) непосредственно следует из (2.14). Существует достаточно много других способов получения соотношения (2.13).

Обосновать выражение (2.12) возможно следующими эвристическими рассуждениями:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{4\pi p}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \exp\left(-\frac{(t-x)^2}{4p}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi p}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t+z) \exp\left(-\frac{z^2}{4p}\right) dz = \\
& = \frac{1}{\sqrt{4\pi p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(t)}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} z^n \exp\left(-\frac{z^2}{4p}\right) dz = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(2k)}(t)}{(2k)!} \left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha z^2) dz = \\
& = \sqrt{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(2k)}(t)}{(2k)!} \left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^k \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{2k}}{(4\alpha)^k k!} u(t) = \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} D^{2k} \cdot u(t) \stackrel{Def}{=} \exp(p D^2) u(t)
\end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $\alpha = 1/4 p$  и  $n = 2k$ .

Выражение (2.12) можно рассматривать как интегральное преобразование.

Используя правило (2.11). из (2.12) можно получить следующее полезное правило:

$$\begin{aligned}
& \exp(p D^2) \cdot u(t) \cdot v(t) = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow t \\ t_2 \rightarrow t}} \exp(2p D_1 D_2) \exp(p D_1^2) u(t_1) \cdot \exp(p D_2^2) v(t_2) = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2p)^n}{n!} \tilde{u}^{(n)}(t) \tilde{v}^{(n)}(t),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где  $\tilde{u}(t) = \exp(p D^2) u(t)$ ,  $\tilde{v}(t) = \exp(p D^2) v(t)$ .

Ниже приведем краткую сводку формул для некоторых функций от оператора дифференцирования. Заметим, что оператор  $\exp(M)$  эквивалентен соответствующему степенному ряду:

1.  $f(t) \bullet \exp(t D^2 + \alpha D) \bullet = \exp(t D^2 + \alpha D) \bullet f[t(D-1)^2 + \alpha(D-1)] \bullet$
2.  $f(D) \bullet \exp(t D^2 + \varphi(D)) \bullet = \exp(t D^2 + \varphi(D)) \bullet f\left(\frac{D}{1-D}\right) \bullet$
3.  $\exp(t D^2 + \alpha D) \bullet f(t) \bullet = f[t(D+1) + \alpha(D+1)] \bullet \exp(t D^2 + \alpha D) \bullet$
4.  $\exp(t D^2 + \varphi(D)) \bullet f(D) \bullet = f\left(\frac{D}{D+1}\right) \bullet \exp(t D^2 + \varphi(D)) \bullet$
5.  $\exp(\beta[t D^2 + \alpha D]) \bullet \exp(\lambda t) = |1 - \lambda \beta|^{-\alpha} \exp\left(\frac{\lambda t}{1 - \lambda \beta}\right)$
6.  $t \bullet \exp(t[D^2 + \alpha]) \bullet = \exp(t[D^2 + \alpha]) \bullet t \left[ \frac{\sin \sqrt{\alpha}}{\alpha} \cdot D - \cos \sqrt{\alpha} \right]^2 \bullet$

Здесь и далее  $\alpha, \beta, s, p$  – рациональные числа.

$$7. \exp(\alpha t D) \bullet f(t, D) \bullet = f[\exp(\alpha)t, \exp(-\alpha)D] \bullet \exp(\alpha t D) \bullet$$

$$8. \exp(s D^2) \exp(p t^2 + \alpha t) f(t, D) = \frac{1}{\sqrt{1-4 s p}} \exp\left(\frac{p}{1-4 s p} t^2\right) \exp(s(1-4 s p) D^2) \times \\ \times f\left[\frac{t}{1-4 s p}, (1-4 s p) D\right] \bullet$$

$$9. \exp(s D^2) \exp(p t^2 + \alpha t) f(x, D) = \frac{\exp\left(\frac{\alpha^2 s}{1-4 s p}\right)}{\sqrt{1-4 s p}} \exp\left(\frac{p t^2 + \alpha t}{1-4 s p}\right) \exp(s(1-4 s p) D^2) \times \\ \times f\left[\frac{(t+2\alpha s)}{1-4 s p}, (1-4 s p) D\right] \bullet$$

Если  $t_1 \dots t_N$  – действительные переменные,  $D_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} \dots D_N = \frac{\partial}{\partial t_N}$  – операторы дифференцирования и  $s, p$  – квадратные неособенные матрицы, составленные из действительных чисел, то

$$10. \exp(s_{ij} D_i D_j) \exp(p_{kn} t_k t_n) = C \exp(k_{mn} t_m t_n)$$

$$11. \exp(s_{ij} D_i D_j) \exp(p_{kn} t_k t_n) f(t, D) \bullet = C \exp(k_{mn} t_m t_n) \bullet \exp(s - 4 s p s)_{ij} D_i D_j \bullet \\ \bullet f\left[(I - 4 s p)_{kn}^{-1} t_n, (I - 4 p s)_{mn} D_n\right] \bullet$$

Здесь  $I$  – единичная матрица;

$$C = \frac{1}{\text{Det}\|I - 4 s p\|};$$

$$k = [p^{-1} - 4 s]^{-1} = p \cdot [I - 4 s p]^{-1}.$$

$$12. \exp(s_{kn} D_k D_n) f(t_1 \dots t_N) = \frac{1}{(4\pi)^{N/2} \text{Det}\|s\|} \bullet \\ \bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 \dots x_N) \exp\left(-\frac{1}{4} (s^{-1})_{kn} (t_k - x_k)(t_n - x_n)\right) d x_1 \dots d x_N$$

если интеграл в данной формуле существует.

Примечания.

1. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

2. Знак  $\bullet$  справа от выражения означает, что данное выражение следует рассматривать как оператор.

Выражения (1-9) представленной выше сводки формул удобны, когда требуется произвести необходимые операции над аргументом (например, преобразование Лоренца) или преобразовать дифференциальное уравнение.

### 2.3 Некоторые свойства некоммутативного умножения

Рассмотрим кольцо  $R_{\otimes}$ , т.е. множество аналитических функций двух действительных переменных  $t$  и  $\omega$ , для которые умножение определено согласно (2.6). Выражение (2.6) можно представить с помощью оператора дифференцирования в виде:

$$\begin{aligned} C(t, \omega) &= A(t, \omega) \otimes B(t, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} A_{\omega}^{(n)}(t, \omega) B_t^{(n)}(t, \omega) = \\ &= A\left(t, \omega + i D_t^1\right) \bullet B(t, \omega) = B\left(t + i D_{\omega}^1, \omega\right) \bullet A(t, \omega) = \\ &= \exp(i \omega t) A\left(t, i D_t^1\right) \bullet \exp(-i \omega t) B(t, \omega) = \exp(i \omega t) B\left(\omega, i D_{\omega}^1\right) \bullet \exp(-i \omega t) A(t, \omega) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Соотношение (2.16) позволяет определить действие функций от псевдодифференциального оператора  $i D_t$ , а именно

$$\begin{aligned} F\left(t, i D_t^1\right) \bullet \Psi(t) &\stackrel{Def}{=} \exp(-i \omega t) [F(t, \omega) \otimes \exp(i \omega t) \Psi(t)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} F_{\omega}^{(n)}(t, \omega) \bullet (D_t + i \omega)^n \Psi(t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Определение (2.17) отличается от определения, данного В.П. Масловым в работе [7, стр. 47], хотя и приводит к аналогичным коммутационным соотношениям.

Введем комплексно сопряженное кольцо  $R_{\otimes}^*$ , для которого умножение определим следующим образом:

$$\begin{aligned} C(t, \omega) &= A(t, \omega) \tilde{\otimes} B(t, \omega) \stackrel{Def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} A_{\omega}^{(n)}(t, \omega) B_t^{(n)}(t, \omega) = \\ &= A\left(t, \omega - i D_t^1\right) \bullet B(t, \omega) = B\left(t - i D_{\omega}^1, \omega\right) \bullet A(t, \omega) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Пусть  $C(t, \omega)$  определяется соотношением (2.16). Обозначим через  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  выражения вида:



$$\begin{aligned}\tilde{A}(t, \omega) &= \exp(-i D_t D_\omega) A(t, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n D_t^n D_\omega^n}{n!} \tilde{A}(t, \omega); \\ \tilde{B}(t, \omega) &= \exp(-i D_t D_\omega) B(t, \omega); \\ \tilde{C}(t, \omega) &= \exp(-i D_t D_\omega) C(t, \omega).\end{aligned}\tag{2.19}$$

Преобразованию (2.19) можно придать некоторый физический смысл.

Рассмотрим два последовательных события:  $A$  и  $B$ . Пусть событие  $A$  начинается в момент времени  $t$  и длится  $\tau$ . Тогда  $a(t, \tau)$  – функция распределения случайной величины  $\tau$ , т.е. времени осуществления события  $A$ . Событие  $B$ , описываемое функцией распределения  $b(t, \tau)$ , начинается после окончания  $A$  (если событие  $A$  произошло). Тогда процесс  $C = A \bullet B$  описывается распределением  $c(t, \tau)$  и определяется соотношением (2.1). Вместо случайной величины  $\tau$  можно ввести случайную величину  $T = t + \tau$  – время окончания события. Определим  $\tilde{C}(t, \omega)$ , имеем

$$\begin{aligned}\tilde{C}(t, \omega) &= \exp(-i D_t D_\omega) C(t, \omega) = \exp(-i D_t D_\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} c(t, \tau) \exp(-i \omega t) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} D_t^n c(t, \tau) (-i \tau)^n \exp(-i \omega \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} c(t - \tau, \tau) \exp(-i \omega \tau) d\tau.\end{aligned}$$

Введя распределение  $\tilde{c}(t, \tau) = c(t - \tau, \tau)$  по переменной  $t$ , т.е. функция распределения по моменту начала события. Применим оператор  $\exp[-i D_t D_\omega]$  к равенству (2.16). Имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{C}(t, \omega) &= \exp(-i D_t D_\omega) A(t, \omega) \otimes B(t, \omega) = \lim_{\substack{\theta \rightarrow t \\ v \rightarrow t}} \exp[-i(D_t + D_\theta)(D_\omega + D_v)] \\ &\exp(i D_t D_\omega) A(\theta, \omega) B(t, v) = \tilde{B}(t, \omega) \tilde{\otimes} \tilde{A}(t, \omega).\end{aligned}\tag{2.20}$$

Таким образом, при переходе к сопряженному кольцу, порядок следования элементов меняется. Для кольца  $R_\otimes$  справедливо следующее очень удобное соотношение. Пусть  $M(t, \omega), L(t, \omega) \in R_\otimes$  и аналитическая функция  $f(z)$  может быть представлена рядом  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n M^{\otimes n}$ . Определим  $f_\otimes(M)$ :

$$f_\otimes(M) = c_0 + c_1 M + c_2 M \bullet M + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n M^{\otimes n}.\tag{2.21}$$

Воспользуемся левым кольцом дифференцирования  $R$ , (2.3) и будем называть дифференцированием  $L$  по  $M$  выражение:

$$\begin{aligned} M \bullet L &= \left[ M \otimes L \right] = M \otimes L - L \otimes M = {}^{(1)}L \\ {}^{(k-1)}L &= \left[ M \otimes {}^{(k)}L \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$L \otimes f_{\otimes}(M) \otimes = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} f_{\otimes}^{(n)}(M) \otimes {}^{(n)}L. \quad (2.23)$$

Соотношение (2.23) легко доказывается по индукции:

$$\begin{aligned} L \otimes M_{\otimes}^2 &= L \otimes M \otimes M = M \otimes L \otimes M - {}^{(1)}L \otimes M = \\ &= M_{\otimes}^2 \otimes L - M \otimes {}^{(1)}L - M \otimes {}^{(1)}L = M_{\otimes}^2 \otimes L - 2M \otimes {}^{(1)}L + {}^{(2)}L \end{aligned}$$

и т.д.

Из выражения (2.23) следует важное коммутационное соотношение:

$$L \otimes \exp({}_{\otimes}M) = \exp(M) \otimes \tilde{L} = \exp\left(\begin{matrix} M \\ \otimes \end{matrix}\right) \otimes \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} {}^{(n)}L. \quad (2.24)$$

Таким же образом доказывается, что

$$f_{\otimes}(M) \otimes L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} {}^{(n)}L \otimes f_{\otimes}^{(n)}(M). \quad (2.25)$$

$$\exp({}_{\otimes}M) \otimes L = L' \otimes \exp({}_{\otimes}M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} {}^{(n)}L \otimes \exp({}_{\otimes}M). \quad (2.26)$$

В частности, соотношения (2.23) – (2.26) позволяют вывести коммутационные равенства (1-11) из п. 2.2, а также получить другие тождества. Обратим внимание, что соотношения (2.21) – (2.26) справедливы для любых типов некоммутативного умножения.

## 2.4 Кольцо $R_{\circ}$ . Свойства кольца $R_{\circ}$ .

Кольцо, аналогичное  $R_{\otimes}$ , можно построить для любой пары действительных переменных, определенных на всей числовой оси. Пусть  $a(x, r_x), b(x, r_x), c(x, r_x) \in R$  – множество функций, аналитических по переменной  $x$  и кусочно-непрерывных по переменной  $r_x$  с естественным сложением и умножением в смысле (2.27):

$$c(x, r_x) = a(x, r_x) \bar{\circ} b(x, r_x) \stackrel{Def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} a(x, \theta) b(x + \theta, r_x - \theta) d\theta. \quad (2.27)$$

В некоторых случаях выражение (2.27) можно интерпретировать как два последовательных события, объединенных в одно и заключающихся в переходе какого-либо объекта с координатой  $x$  в точку с координатой  $x + r_x$  ( $r_x$  играет роль случайной переменной). При этом первое событие – это перемещение из точки  $x$  на расстояние  $\theta$ , а второе – перемещение из точки с координатой  $x + \theta$  на расстояние  $r_x - \theta$ . При вероятностной трактовке, выражение (2.27) представляет собой известное уравнение Смолуховского-Колмогорова-Чепмена.

Воспользуемся обратным преобразованием Фурье в виде:

$$A(x, k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x, r_x) \exp(i k_x r_x) dr_x. \quad (2.28)$$

Определим произведение  $C(x, k_x) = A(x, k_x) \circ B(x, k_x)$ ,  $A, B, C \in R_{\circ}$  так:

$$\begin{aligned} C(x, k) &= \hat{F} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} a(x, \theta) b(x + \theta, r_x - \theta) d\theta \right] = F \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} a(x, \theta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} b_x^{(n)}(x, r_x - \theta) d\theta \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [a(x, \theta) \theta^n] \cdot b_t^{(n)}(x, r_x - \theta) d\theta \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} A_{k_x}^{(n)}(x, k_x) B_x^{(n)}(x, k_x) = \\ &= A(x, k_x) \circ B(x, k_x) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Свойства кольца  $R_{\circ}$  полностью эквивалентны свойствам кольца  $R_{\otimes}$ .

Отметим лишь, что

$$\left[ k_x \circ x \right] = k_x \circ x - x \circ k_x = -i.$$

Все вышесказанное легко обобщается на любое конечное число действительных переменных. В частности, в пространстве  $R^3$  определим умножение в кольце  $R_{\Delta}$  аналогичным образом, а именно:

$$\begin{aligned} c(\vec{R}, \vec{r}) &= a(\vec{R}, \vec{r}) \bar{\Delta} b(\vec{R}, \vec{r}) \stackrel{Def}{=} \\ &= \iiint_{(\infty)} a(x, y, z | \theta_x, \theta_y, \theta_z) b(x + \theta_x, y + \theta_y, z + \theta_z | r_x - \theta_x, r_y - \theta_y, r_z - \theta_z) d\theta_x d\theta_y d\theta_z. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Тогда для соответствующих Фурье-образов имеем:

$$C(\vec{R}, \vec{k}) = A(\vec{R}, \vec{k}) \Delta B(\vec{R}, \vec{k}) = \sum_{\substack{n_x=0 \\ n_y=0 \\ n_z=0}}^{\infty} \frac{(-i)^{n_x+n_y+n_z} \partial^{n_x+n_y+n_z} A(\vec{R}, \vec{k}) \partial^{n_x+n_y+n_z} B(\vec{R}, \vec{k})}{n_x! n_y! n_z! \partial x^{n_x} \partial y^{n_y} \partial z^{n_z} \partial k_x^{n_x} \partial k_y^{n_y} \partial k_z^{n_z}}. \quad (2.31)$$

$\vec{R} = \{x, y, z\}, \vec{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$  – векторы линейного векторного пространства (над полем  $C$ -комплексных чисел).

Введем вектор  $\vec{P} = \hbar \vec{k}$ , который по аналогии будем называть квазиимпульсом (не путать с понятием квазиимпульса в физике твердого тела). В переменных  $\vec{R}$  и  $\vec{P}$  выражение (2.31) примет вид:

$$C(\vec{R}, \vec{P}) = A(\vec{R}, \vec{P}) \Delta B(\vec{R}, \vec{P}) = \sum_{\substack{n_x=0 \\ n_y=0 \\ n_z=0}}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^{n_x+n_y+n_z} \partial^{n_x+n_y+n_z} A(\vec{R}, \vec{P}) \partial^{n_x+n_y+n_z} B(\vec{R}, \vec{P})}{n_x! n_y! n_z! \partial P_x^{n_x} \partial P_y^{n_y} \partial P_z^{n_z} \partial x^{n_x} \partial y^{n_y} \partial z^{n_z}}. \quad (2.32)$$

Выбор обратного преобразования Фурье (2.28) обусловлен тем, что, как и для квантовомеханического импульса, так и для квазиимпульса, выполняются перестановочные соотношения Гейзенберга, а именно:

$$\begin{aligned} \left[ P_x, \Delta x \right] &= -i\hbar \\ \left[ P_y, \Delta y \right] &= -i\hbar \\ \left[ P_z, \Delta z \right] &= -i\hbar. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Отметим, что приведенные коммутационные соотношения никак не связаны с «физикой» каких-либо процессов, а являются лишь способами описания.

Далее в некоторых случаях будет использоваться кольцо  $R_{\circ}$ , в котором умножение определяется так:

$$\begin{aligned} C(t, \vec{R} | \vec{P}, \varepsilon) &= A(t, \vec{R} | \vec{P}, \varepsilon) \circ B(t, \vec{R} | \vec{P}, \varepsilon) = \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n_x=0 \\ n_y=0 \\ n_z=0}}^{\infty} \frac{(i\hbar)^n (-i)^{n+n_x+n_y+n_z}}{n! n_x! n_y! n_z!} \cdot \frac{\partial^{n+n_x+n_y+n_z} A(t, \vec{R} | \vec{P}, \varepsilon) \partial^{n+n_x+n_y+n_z} B(t, \vec{R} | \vec{P}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^n \partial P_x^{n_x} \partial P_y^{n_y} \partial P_z^{n_z} \partial t^n \partial x^{n_x} \partial y^{n_y} \partial z^{n_z}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

В пространстве оригиналов это умножение примет вид:

$$\begin{aligned}
c(t, \vec{R} | \tau, \vec{r}) &= a(t, \vec{R} | \tau, \vec{r}) \circ b(t, \vec{R} | \tau, \vec{r}) \stackrel{Def}{=} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \int a(t, \vec{R} | T, \vec{\theta}) b(t+T, \vec{R} + \vec{\theta} | \tau-T, \vec{r} - \vec{\theta}) dT d\theta_x d\theta_y d\theta_z,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

которое можно интерпретировать как переход из одной точки четырехмерного пространства «мир» в другую.

В общем случае при описании систем с  $N$  степенями свободы при помощи обобщенных координат  $q_1 \dots q_N$  будем использовать кольцо  $R_{\circ}$ . Определим операцию умножения в  $R_{\otimes}$  следующим образом:

$$c(q_k | \theta_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int a(q_k | r_n) b(q_k + r_k | \theta_n - r_n) d\Omega_r \stackrel{Def}{=} a(q_k | \theta_n) \circ b(q_k | \theta_n), \tag{2.36}$$

где  $d\Omega_r = dr_1 dr_2 \dots dr_N$  – элементы объема соответствующего конфигурационного пространства. Физическая трактовка оператора (2.36) такая же, что и для кольца  $R_{\Delta}$ . Воспользуемся обратным преобразованием Фурье, а именно:

$$A(q_k | p_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int a(q_k | \theta_n) \exp\left(i \sum_{(m)} \theta_m p_m\right) d\Omega_{\theta}. \tag{2.37}$$

Тогда для Фурье-образов выражения (2.36) получим:

$$\begin{aligned}
C(q_k | p_n) &= A(q_k | p_n) \circ B(q_k | p_n) \stackrel{Def}{=} \\
&= \sum_{\substack{n_1=0 \\ \dots \\ n_N=0}}^{\infty} \frac{(-i)^{n_1+n_2+\dots+n_N}}{n_1! n_2! \dots n_N!} \cdot \frac{\partial^{n_1+n_2+\dots+n_N} A(q_k | p_n)}{\partial p_1^{n_1} \dots \partial p_N^{n_N}} \cdot \frac{\partial^{n_1+n_2+\dots+n_N} B(q_k | p_n)}{\partial q_1^{n_1} \dots \partial q_N^{n_N}}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Свойства кольца  $R_{\circ}$  полностью эквивалентны свойствам кольца  $R_{\Delta}$  ( $N=3$ ).

При этом

$$\left[ p_n \circ q_k \right] = -i \delta_{nk}. \tag{2.39}$$

Все элементы  $A, B, C \in R_{\circ}$  образуют алгебру (в общем случае над полем комплексных чисел) с единицей. Чаще всего элементы  $A, B, C \dots$  представляют собой квадратные матрицы. Единичным элементом алгебры  $R$  в этом случае будет единичная матрица.

### **3. Распространение аддитивных свойств**

#### **3.1 Основные положения**

Описание поведения материальных объектов во всем их многообразии – одна из основных задач естествознания. Для того, чтобы понять законы Природы, прежде всего, необходимо найти удобный и достаточно простой способ ее описания. Изучение того или иного объекта сводится к изучению его свойств. Все наше представление об изучаемом объекте – это набор его свойств или характеристик. Среди всего многообразия свойств материального мира выделим аддитивные свойства, образующие абелеву группу по сложению. Центральной задачей теории переноса (далее – ТП) свойств является описание распределения аддитивных свойств в некотором пространстве-времени. Данная теория является частью более общей, в которой, наряду с аддитивными свойствами, рассматриваются и мультипликативные. При этом не ставится вопрос о природе того или иного материального объекта, а рассматриваются только его аддитивные свойства. Правильно описав свойства тех или иных объектов, можно уже ставить вопрос и об их «физической сущности» (если это понятие не является бессодержательным!), т.е. строить «физическую картину мира».

Для описания распределения свойств введем пространство-время как линейное векторное пространство, в общем случае над полем комплексных чисел.

Изучение аддитивных свойств будет производиться в некотором базисе этого пространства (система отсчета). Это краеугольное понятие в физике характеризуется Трудделлом [18, стр. 33] как «чистый холст, на котором можно рисовать картины Природы. Этот холст должен быть выбран художником прежде, чем он примется за работу. Холст накладывает некоторые ограничения на искусство художника, но никоим образом не определяет те картины, которые художник будет рисовать». Сложный вопрос о системах отсчета достаточно подробно обсужден в работах П.А.Жилина [19-21]. На первом этапе исследований нет необходимости вводить понятие расстояния, т.е. рассматривать пространство как метрическое. В подавляющем большинстве физических задач пространство считается трехмерным, а время одномерным (В общем случае пространственные координаты и время могут быть как непрерывными, так и дискретными). Только изучив, как происходит

распространение свойств материальных объектов, можно ставить вопрос о «сущности» пространства-времени.

Итак, теорию распространения свойств следует рассматривать как способ описания эволюции аддитивных свойств материальных объектов, не интересуясь их природой.

Целесообразность такого подхода иллюстрируется многими примерами:

- электромеханическая аналогия;
- явления переноса; Несмотря на многообразие механизмов диффузии, теплопроводности, вязкого трения, электрического тока и др., все эти явления описываются (на наш взгляд, не совсем точно!) законами Фика, Фурье, Ньютона, Ома. Природа явлений разная – математическая форма законов одинаковая.
- распространение механических волн и распространение электромагнитных волн и т.д.

Таких примеров в Природе (включая и биообъекты) набирается достаточно много.

Центральным понятием теории переноса является свойство, дать строгое определение которому невозможно.

В данной работе под свойством будем понимать следующее.

Свойство – это некоторый физический (либо математический) объект, при помощи которого конкретный физический процесс полностью описывается.

Весь аппарат теории переноса построен для абстрактных свойств, т.е. пригоден для описания любых процессов и не зависит от их природы.

В простейшем случае (простое свойство) описание объекта будем производить, введя понятие плотность свойства  $n(\vec{r}, t)$  – количество данного свойства в единице объема (если пространство непрерывно) в данный фиксированный момент времени. В общем случае  $n(\vec{r}, t)$  будем считать комплексным числом.

Введем понятие «структуры» (или формы) свойства. Пусть  $\mu$  – линейное векторное пространство (пространство свойств), тогда свойство со структурой (сложное свойство) определим как вектор в пространстве свойств, т.е.  $n(\vec{r}, t, \vec{\xi})$   $\vec{\xi} = (\xi_1 \dots \xi_N)$ . Если  $\mu$  – конечномерное пространство, то конкретные значения  $\xi_i$  будем называть «цветом» свойства. В общем случае значения параметра  $\xi_i$  могут быть как дискретными, так и непрерывными. Процесс

эволюции свойства, т.е. явную зависимость  $n = n(\vec{r}, t, \vec{\xi})$  – будем называть процессом распространения.

В некоторых случаях удобно ввести понятие структуры пространства. Пусть  $Ox$  одна из пространственных осей (или ось времени) в данной системе отсчета (для нас она «чистый холст») и  $v_x$  – линейное векторное пространство. Тогда распространение простого свойства  $C$  с плотностью  $n$  будет определяться и свойствами пространства, т.е.  $n = n(x, t, \vec{\eta}_x)$ . Вектор  $\vec{\eta}_x$  определяет влияние пространства на распространение свойства в данном направлении. В этом случае будем говорить о наличии каналов распространения. Т.е. одно и то же свойство может распространяться по разному в зависимости от некоторой характеристики канала, которую будем приписывать пространству.

Сформулируем *основные аксиомы ТП*.

#### ***Аксиома существования***

*A1: Для любого физического процесса можно найти такое аддитивное свойство, что данный процесс будет полностью описываться распространением данного свойства.*

#### ***Аксиома двойственности***

*A2: Никакими физическими экспериментами невозможно определить, является ли данное свойство свойством со структурой, распространяющимся в простом пространстве (пространстве без структуры), или же это простое свойство, распространяющееся в пространстве со структурой.*

Сама постановка такого вопроса в ТП является бессодержательной. Введение структуры пространства или структуры свойства является способом описания и зависит от субъективных факторов. Поясним вышесказанное на примере. Распространение электрона определяется его спином ( $\xi = \pm \frac{1}{2}$ ). В этом случае конкретное значение спина приписывается электрону (объекту) и рассматривается как его характеристика (цвет). Однако можно построить математический аппарат, в котором для данной частицы можно ввести два канала распространения, т.е. приписать пространству структуру. В процессе распространения изучаемые свойства могут менять свою структуру (переходить с канала на канал), превращаться в другие свойства, а также менять пространственное направление распространения (этот процесс будем называть рассеянием свойств). Вышесказанное образует третью аксиому:



### ***Аксиома распространения***

*А3: В процессе распространения аддитивные свойства изучаемых объектов могут лишь менять свою структуру (форму), переходить с канала на канал, превращаться в другие аддитивные свойства и рассеиваться.*

Под понятием поля в ТП будем понимать следующее.

Поле – аддитивное свойство, имеющее источники и стоки.

Рассмотрим, как будет пониматься в ТП взаимодействие различных материальных объектов. Прежде всего, в ТП рассматриваются не сами объекты, а их свойства, поэтому, под взаимодействием объектов будем понимать взаимодействие их свойств. Описание взаимодействия свойств может вестись двойко (дуализм взаимодействия).

Рассмотрим два взаимодействующих свойства  $A$  и  $B$  ( $A \leftrightarrow B$ ). С одной стороны, можно принять, что свойство  $A$  является источником свойства  $I$  (создает поле  $I$ ). Поле  $I$  меняет свойства среды (показатели рассеяния, структуры, поглощения и т.д.), т.е. свойства пространства-времени для свойства  $B$ . В этом случае будем говорить, что свойство  $A$  действует на свойство  $B$  посредством поля  $I$ . С другой стороны, можно рассмотреть единое распространяющееся свойство со структурой (формой)  $AB$ . При этом структуры отдельных свойств  $B$  и  $A$  взаимосвязаны взаимными превращениями. Обмен структурами можно описать, введя дополнительное свойство  $I'$ , осуществляющее этот обмен. В ТП используются оба этих подхода. Следует отметить, что свойства  $I'$  и поле  $I$  являются лишь способами нашего описания. В современной физике широко используются оба этих приема – метод полей и метод квазичастиц (конформоны, магноны, экситоны, поляроны и другие воображаемые объекты). С позиций ТП классическая механика описывает распространение реальных тел, обменивающихся аддитивными свойствами количества движения (импульсом) и моментом импульса (спинорное движение).

### **3.2 Распространение простого одноканального свойства в одномерном случае**

Начнем рассмотрение с простейшего случая. Рассмотрим скалярное свойство  $M$  без источников, распространяющихся вдоль некоторой оси  $Ox$ . Введем понятие плотности свойства  $M - n(x,t)$ , как количество аддитивного свойства  $M$  на единице длины  $\Delta x$  (локальная характеристика свойства;  $t$  и  $x$  –

непрерывные действительные переменные,  $n(x, t)$  – в общем случае комплексное число). Обозначим через  $C_{\rightarrow\leftarrow}(x, t)$  скорость свойства  $M$  в заданном базисе по и против оси  $Ox$  соответственно. Отметим, что  $C_{\rightarrow\leftarrow}(x, t) \geq 0$  – локальная характеристика свойства по отношению к заданному базису. Само понятие «скорости свойства» требует уточнения и более строго будет введено ниже. Поскольку свойство  $M$  распространяется как по, так и против оси  $Ox$ , то в качестве локальной характеристики простого свойства  $M$  в данном базисе введем плотности  $\{n_{\rightarrow}(x, t); n_{\leftarrow}(x, t)\}$ , которые можно рассматривать, как вектор в двумерном пространстве. Очевидно, что

$$n(x, t) = n_{\rightarrow}(x, t) + n_{\leftarrow}(x, t). \quad (3.1)$$

Введем понятие тока свойства, связанного с плотностью свойства следующим образом

$$\Phi_{\rightarrow\leftarrow}(x, t) \stackrel{Def}{=} n_{\rightarrow}(x, t)c_{\rightarrow\leftarrow}(x, t). \quad (3.2)$$

Распространение свойства  $M$  определяется не только самим свойством  $M$ , но и свойствами в данном случае одномерного пространства, которое будем называть средой. Характеристики среды могут определяться как распределениями других свойств, так и могут зависеть, в общем случае нелинейно, и от распределения самого свойства  $M$ .

Рассмотрим отрезок оси  $Ox$  –  $[x_1; x_2]$ , который будем называть слоем среды (для одномерных задач трехмерного пространства слой среды имеет наглядное представление). Положим, что на слой  $[x_1; x_2]$  «падает» ток свойства  $M$  –  $\Phi_{\rightarrow}(x_1 - 0, t)$ . Рассмотрим вначале случай, когда  $\Phi_{\rightarrow}(x_y, t') = \delta(t' - t)$ , где  $t'$  – текущее время,  $t$  – фиксированный момент времени. Введем следующие характеристики слоя среды:

■ *коэффициент прохождения* –  $\Lambda(t, x_1 | x_2, \tau) = \Phi_{\rightarrow}(x_2 - 0, t + \tau)$  – ток свойства  $M$ , прошедший слой  $(x_1; x_2)$  за время  $\tau$ ; при этом считается, что за границами слоя  $[x_1; x_2]$  стоят полностью поглощающие свойство  $M$  экраны;

■ коэффициент отражения –  $P(t, x_1 | x_2, \tau) = \Phi_{\leftarrow}(x_1 + 0, t + \tau)$  – ток свойства  $M$ , отразившийся от слоя  $(x_1; x_2)$  за время  $\tau$ ; т.е. первое отражение без пересечения границ  $x = x_1$  и  $x = x_2$  ранее;

■ коэффициент поглощения –  $R(t, x_1 | x_2, \tau) = \Phi_r(t + \tau)$  – ток свойства  $M$ , поглощающийся (рождающийся) в слое  $(x_1; x_2)$  в момент  $(t + \tau)$ .

Отметим, что введенные коэффициенты и сами токи  $\Phi_{\rightarrow}$  будем считать комплексными числами (в многоканальной теории коэффициенты  $\Lambda, P, R$  будут представлять собой квадратные матрицы). Введенный выше коэффициент поглощения  $R$  не означает, что в среде имеются постоянно действующие источники (стоки) свойства  $M$ . Под источником некоторого свойства  $L$  в промежутке  $(x_1; x_2)$  (а свойство с источником в дальнейшем будет именоваться полем) будем подразумевать образование аддитивного свойства  $L$  в момент  $t > t_0$ , если в момент времени  $t = t_0$  свойство  $L$  отсутствовало ( $n_{\rightarrow}(x, t_0) = 0$ ), а промежуток ограничен полностью поглощающими экранами для данного свойства. Введенные свойства поглощающего, отражающего, полупрозрачного экранов имеют простой смысл и служат лишь способом наглядного описания.

Все сказанное выше будем изображать диаграммой вида (рис. 3.1):

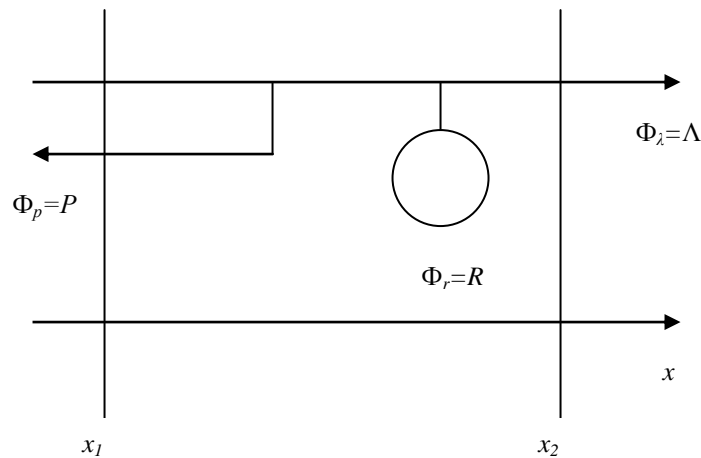


Рисунок 3.1. Диаграмма коэффициентов распределения свойства  $M$

Все коэффициенты (распределения)  $\Lambda, P, R$  полагаются равными нулю для  $\tau < 0$  (принцип причинности). В общем случае все коэффициенты  $\Lambda, P, R$  могут зависеть также от плотностей свойства. Ограничимся линейным случаем, т.е. примем, что распределения  $\Lambda, P, R$  не зависят от величин плотностей свойства

явно. В этом случае для распределений  $\Lambda, P, R$  можно составить рекуррентные соотношения (аналог уравнений Колмогорова-Смолуховского-Чепмена).

На языке кольца  $R_{\otimes}$  эти соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \Lambda(x_1|x_3) &= \Lambda(x_1|x_2) \otimes [\bar{b} - P(x_2|x_3) \otimes P(x_2|x_1)]^{\otimes -1} \otimes \Lambda(x_2|x_3), \\ P(x_1|x_3) &= P(x_1|x_2) + \Lambda(x_1|x_2) \otimes [\bar{b} - P(x_2|x_3) \otimes P(x_2|x_1)]^{\otimes -1} \otimes P(x_2|x_3) \otimes \Lambda(x_2|x_1), \\ R(x_1|x_3) &= R(x_1|x_2) + \Lambda(x_1|x_2) \otimes [\bar{b} - P(x_2|x_3) \otimes P(x_2|x_1)]^{\otimes -1} \otimes \\ &\otimes [P(x_2|x_3) \otimes R(x_2|x_1) + R(x_2|x_3)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

**П р и м е ч а н и е.** Далее по тексту, везде, где это не будет вызывать недоразумения, переменные  $t$  и  $\tau$  ( $s$  и  $t$ ) будут опущены.

Все эти соотношения представлены на диаграммах рисунка 3.2:

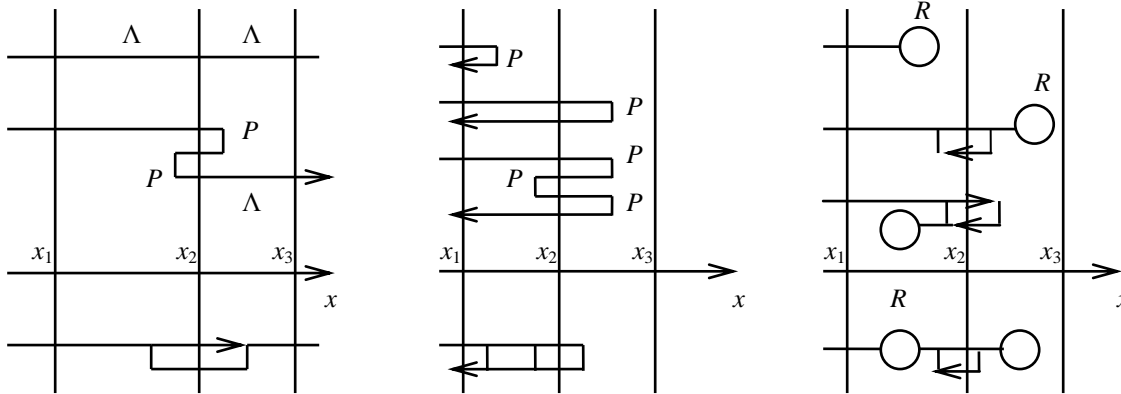


Рисунок 3.2. Графическое представление соотношений (3.3)

Символ  $\overleftarrow{\sqcup}$  на рисунке 3.2 означает многократное пересечение мысленной границы  $x=x_2$  и учитывается в (3.3) множителем  $[\bar{b} - P(x_2|x_3) \otimes P(x_2|x_1)]^{\otimes -1}$  определяемым соответствующим рядом.

В дальнейшем вместо распределений  $\Lambda, P, R$  будут использоваться их Лаплас-образы (Фурье-образы), а именно  $\bar{\Lambda}, \bar{P}, \bar{R}$ . При этом вместо символа  $\overleftarrow{\sqcup}$  необходимо использовать умножение в смысле  $\otimes$ . Переход от одних колец к другим в теории распространения формулируется в виде «нестационарного принципа». Суть его сводится к следующему. Пусть в одноканальной ТП данное свойство  $M$  описывается коэффициентами  $\bar{\Lambda}, \bar{P}, \bar{R}$  и аналогичными элементами  $\tilde{\Lambda}, \tilde{P}, \tilde{R}$ , при этом  $\tilde{\Lambda}, \tilde{P}, \tilde{R}$  принадлежат более сложному кольцу  $R_{\otimes}$ . Тогда переход от описания распространения свойства  $M$  к описанию распространения свойства  $\tilde{M}$  сводится к замене операции  $\otimes$  на

операцию умножения  $\otimes$  и замены 1 на единицу кольца  $R_\otimes$  без изменения основных уравнений. Иными словами, и для многоканального случая справедлива система (3.3) с соответствующей заменой символов.

Соотношения (3.3) позволяют последовательно определить свойства системы слоев, зная свойства каждого слоя, т.е. дают конструктивный путь решения одномерных задач теории распространения. Проиллюстрируем это утверждение на примере.

Рассмотрим одномерную задачу на прямой  $x \in (+\infty; -\infty)$  с нулевыми начальными условиями ( $n_{\rightarrow}(x,0) = n_{\leftarrow}(x,0) \equiv 0$ ). Пусть в точке  $x = x_0$  задан ток свойства  $M : \Phi_0(t), t \geq 0$ . Для наглядности метода поместим в точку  $x = x_0$  полупрозрачный экран с прозрачностью  $\lambda^*$  и коэффициентом отражения  $p^*$  (рис. 3.3). Поставим задачу определить плотность свойств  $n(x,t)$  и результирующий ток свойства  $\Phi(x,t) = \Phi_{\rightarrow}(x,t) - \Phi_{\leftarrow}(x,t)$  для всех  $x$ , например, в промежутке  $(x_0; x_3)$  и выразить решение через известные распределения  $\bar{\Lambda}, \bar{P}, \bar{R}$  для каждого слоя.

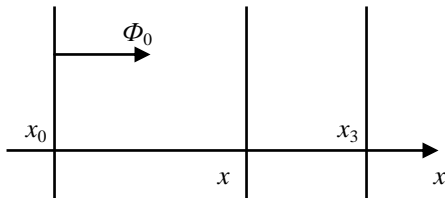


Рисунок 3.3

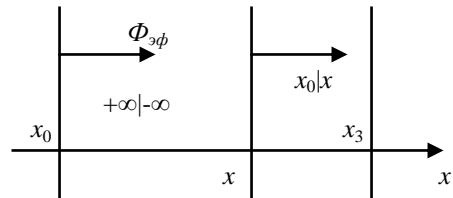


Рисунок 3.4

Определим изображение токов  $\bar{\Phi}_{\leftarrow}(x,s)$   $x \in (x_0; x_3)$ . Воспользуемся последовательно диаграммным методом [22].

1. Отбросим левую часть диаграммы (см. рис. 3.3) и заменим  $\bar{\Phi}_0(s)$  на эффективный ток  $\bar{\Phi}_{\rightarrow\text{эфф}}(s)$  (см. рис. 3.4). При этом левая часть диаграммы учитывается за счет учета многократных пересечений свойством  $M$  точки с координатой  $x = x_0$ , т.е.

$$\bar{\Phi}_{\rightarrow\text{эфф}} = \bar{\Phi}_0(s) \otimes [1 - \bar{P}(x_0|+\infty) \otimes \bar{P}(x_0|-\infty)]^{\otimes -1}. \quad (3.4)$$

2. В выражении (3.4) неизвестна  $\bar{P}(x_0 | +\infty)$ , т.к. имеется экран. Определим коэффициент  $\bar{P}(x_0 | +\infty)$  с учетом (3.3), имеем:

$$\bar{P}(x_0 | +\infty) = \bar{P}(x_0 | x_s) + \bar{\Lambda}(x_0 | x_s) \otimes [1 - \bar{P}_{\text{эф}}(x_s | +\infty) \otimes \bar{P}(x_s | x_0)]^{\otimes -1} \quad (3.5)$$

здесь  $\bar{P}_{\text{эф}}(x_s | +\infty)$  – изображение коэффициента отражения  $P(x_s | +\infty)$  с учетом экрана

3. Определим  $\bar{P}_{\text{эф}}(x_s | +\infty)$ . Согласно (3.3) имеем:

$$\bar{P}_{\text{эф}}(x_s | +\infty) = p^* + (\lambda^*)^2 \bar{P}(x_s | +\infty) \otimes [1 - p^* \bar{P}(x_s | +\infty)]^{\otimes -1}, \quad (3.6)$$

Подставив выражение (3.6) в (3.5) и (3.5) в (3.4), можно определить изображение эффективного потока через заданные координаты.

4. Отбросим правую часть диаграммы (рис. 4) и введем вместо нее ток  $\bar{\Phi}_{\text{эф}}(s)$ . С учетом многократных пересечений границы  $x = x_s - 0$  будем иметь:

$$\bar{\Phi}_{\text{эф}} = \bar{\Phi}_0(s) \otimes \bar{\Lambda}(x_0 | x) \otimes [1 - \bar{P}(x | x_s) \otimes \bar{P}(x | x_0)]^{\otimes -1}. \quad (3.7)$$

Таким образом, вся задача свелась к нахождению токов свойства  $M$  в слое  $(x_0; x_s)$  без экранов с заданными граничными эффективными токами. Изменение тех или иных свойств среды вне промежутка  $(x_0; x_s)$  учитывается в данном методе введением соответствующих эффективных токов.

5. Определим искомые соображения токов, используя аддитивность свойства  $M$  (принцип суперпозиции). Имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{\rightarrow}(x, s) &= \bar{\Phi}_{\text{эф}}(s) \otimes \bar{\Lambda}(x_0 | x) \otimes [1 - \bar{P}(x | x_s) \otimes \bar{P}(x | x_0)]^{\otimes -1} + \\ &+ \bar{\Phi}_{\text{эф}}(s) \otimes \bar{\Lambda}(x_s | x) \otimes [1 - \bar{P}(x | x_0) \bar{P}(x | x_s)]^{\otimes -1} \otimes \bar{P}(x | x_0), \\ \bar{\Phi}_{\leftarrow}(x, s) &= \bar{\Phi}_{\text{эф}}(s) \otimes \bar{\Lambda}(x_0 | x) \otimes [1 - \bar{P}(x | x_s) \otimes \bar{P}(x | x_0)]^{\otimes -1} \otimes \bar{P}(x | x_s) + \\ &+ \bar{\Phi}_{\text{эф}}(s) \otimes \bar{\Lambda}(x_s | x) \otimes [1 - \bar{P}(x | x_0) \otimes \bar{P}(x | x_s)]^{\otimes -1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Перейдя обратно к оригиналам, для плотности свойства и тока свойства получим, соответственно, выражения:

$$n(x, t) = \frac{\Phi_{\rightarrow}(x, t)}{c_{\rightarrow}(x, t)} + \frac{\Phi_{\leftarrow}(x, t)}{c_{\leftarrow}(x, t)}, \quad \Phi(x, t) = \Phi_{\rightarrow}(x, t) + \Phi_{\leftarrow}(x, t). \quad (3.9)$$

Обратим внимание, что соотношения (3.4) – (3.8) справедливы и для многоканального случая с учетом «нестационарного принципа». Более того,

выражение (3.8) справедливо и для нелинейного случая (коэффициенты  $\Lambda, P, R$  зависят от плотностей свойства). Однако, в этом случае выражение (3.8) представляет собой уравнение. Во многих случаях метод диаграмм бывает предпочтительней метода уравнений, поскольку не требует для получения результата решения соответствующих дифференциальных (чаще всего) уравнений, особенно при наличии нескольких границ, на которых требуется сращивать решения. Кроме того, использование коэффициентов  $\bar{\Lambda}, \bar{P}, \bar{R}$  позволяют непосредственно учитывать вклад того или иного слоя и сразу получить результат в случае изменения каких-либо параметров в системе (например, изменение прозрачности экрана  $\lambda^*$  и т.д.). В некоторых случаях при решении уравнений распространения возникает проблема с граничными условиями. Например, в случае обычной диффузии в некоторой среде  $x \in [0, \bar{x}]$  необходимо задать граничные условия  $n(\bar{x} + 0, t)$  и  $n(\bar{x} - 0, t)$ , но именно их как раз и нельзя задать, т.к. концентрация является искомой величиной (скачок на границе раздела сред). С другой стороны, на границе вполне корректно нельзя задать даже поток частиц диффузанта из-за наличия отражения [23]. Диаграммный метод удобно применять, например, в задачах «диффузии» в энергетическом пространстве, где роль оси  $Ox$  играет шкала энергий, а  $n(E, t)$  представляет собой плотность числа частиц в данном энергетическом состоянии и т.д.

Диаграммный метод позволяет установить корреляции между плотностями и токами свойства  $M$  в различных точках пространства. Действительно, рассмотрим двухточечное тождество для свойства  $M$ , заданного на всей числовой оси. Пусть в точке  $x = x_1$  заданы токи свойства  $M : \bar{\Phi}_{\rightarrow}(s)$ . Определим токи свойства  $M$  в произвольной точке  $x_2$  (для определенности положим  $x_2 > x_1$ , – см. рис. 3.5)

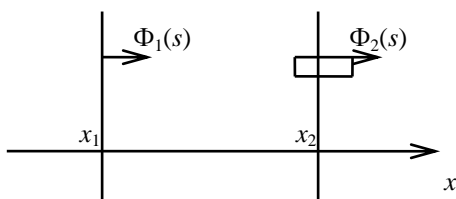


Рисунок 3.5

Используя метод диаграмм, сразу получим:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{\rightarrow}(x_2|s) &= [\bar{\Phi}_{\rightarrow} + \bar{\Phi}_{\leftarrow} \cdot \bar{P}(x_1|-\infty)] \otimes [1 - \bar{P}(x_1|+\infty) \otimes \bar{P}(x_1|-\infty)]^{\otimes -1} \otimes \\ &\otimes \bar{\Lambda}(x_1|x_2) \otimes [1 - \bar{P}(x_2|+\infty) \otimes \bar{P}(x_2|x_1)]^{\otimes -1}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\bar{\Phi}_{\leftarrow}(x_2|s) = \bar{\Phi}_{\rightarrow}(x_2|s) \otimes \bar{P}(x_2|+\infty).$$

Аналогично несложно выразить токи  $\Phi_1(s)$  через  $\Phi_2(s)$ . В частности, при  $x_2 = x_1 = x$  получим верное тождество, связывающее  $\bar{\Lambda}$  и  $\bar{P}$  между собой. В общем случае, разбивая некоторый слой различными способами, можно получить полезные результаты, иногда значительно упрощающие решения конкретных задач ТП.

Таким образом, токи свойства в одной точке одномерного пространства полностью определяют токи свойства и для всех остальных точек. Метод учета многократного пересечения границ можно обобщить и на трехмерный случай [24, 25].

Для непрерывного пространства целесообразно рассмотреть бесконечно тонкий слой  $dx$ . Поскольку  $\bar{\Lambda}(\cdot|x) \equiv 1$ ,  $\bar{P}(x|x) = \bar{R}(x|x) \equiv 0$ , если нет сингулярностей.

**П р и м е ч а н и е.** Имеющиеся сингулярности будем называть экранами. Выше показано, как можно учесть тот или иной экран.

Разлагая  $\bar{P}(x|x \pm dx)$  и  $\bar{R}(x|x \pm dx)$  в ряд и, оставляя первые члены разложения, будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{P}(x|x \pm dx) &= a_{\rightarrow\leftarrow}(x, t) dx + 0(dx) \\ \bar{R}(x|x \pm dx) &= \chi_{\rightarrow\leftarrow}(x, t) dx + 0(dx) \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $a_{\rightarrow\leftarrow}(x, t)$  и  $\chi_{\rightarrow\leftarrow}(x, t)$  будем называть показателями отражения и поглощения, соответственно.

Таким образом,  $a$  и  $\chi$  суть локальные характеристики среды по отношению к данному свойству  $M$ . В одномерной одноканальной теории  $a$  и  $\chi$  – скаляры (в общем случае – комплексные числа). Характеристики среды  $a$  и  $\chi$  в общем случае могут зависеть как от распределения изучаемого свойства  $M$ , так и от распределения других свойств (полевой подход). С самого начала предполагается, что может иметь место асимметрия среды по отношению к



направлению оси  $Ox$ , т.е.  $a_{\rightarrow} \neq a_{\leftarrow}$  и  $\chi_{\rightarrow} \neq \chi_{\leftarrow}$  в общем случае. Наличие асимметрии всегда будет предполагать и наличие «полей», т.е. свойств, вызывающих эту асимметрию по отношению к данному свойству  $M$  (обратное в общем случае неверно). Обратим внимание, что  $\text{Re } \chi$  может быть как меньше, так и больше нуля (например, для фотонов  $\text{Re } \chi$  означает присутствие активной среды).

Рассмотрим слой толщиной  $\Delta x$ . Введем соответствующие интегральные коэффициенты прозрачности, отражения и поглощения, соответственно.

**П р и м е ч а н и е.** Заметим, что для интегральных коэффициентов всегда справедливо условие  $\lambda(\Delta x) + P(\Delta x) + r(\Delta x) = 1$ .

$$\begin{aligned} \lambda(t, x|x + \Delta x) &= \int_0^{\text{Def } \infty} \Lambda(t, x|x + \Delta x, \tau) d\tau = \bar{\Lambda}(x|x + \Delta x)|_{s=0}, \\ p(t, x|x + \Delta x) &= \bar{P}(x|x + \Delta x)|_{s=0}, \\ r(t, x|x + \Delta x) &= \bar{R}(x|x + \Delta x)|_{s=0}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Введем понятие среднего времени прохождения свойством  $M$  слоя  $\Delta x$  так:

$$\begin{aligned} t_{\lambda}(\Delta x) &= \overset{\text{Def}}{\frac{1}{\lambda(t, x|x + \Delta x)} \int_0^{\infty} \tau \Lambda(t, x|x + \Delta x, \tau) d\tau} = \frac{(-1)}{\lambda(t, x|x + \Delta x)} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \bar{\Lambda}(x|x + \Delta x)|_{s=0} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} [\ln \bar{\Lambda}(x|x + \Delta x)]|_{s=0}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Иногда удобно пользоваться и соответствующими средними временами отражения и поглощения, определенными аналогичным образом:

$$\begin{aligned} t_p(\Delta x) &= -\frac{\partial}{\partial s} \ln[\bar{P}(x|x + \Delta x)]|_{s=0}, \\ t_r(\Delta x) &= -\frac{\partial}{\partial s} \ln[\bar{R}(x|x + \Delta x)]|_{s=0}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Введем понятие средней скорости прохождения свойства  $M$  слоя  $\Delta x$ :

$$\langle v_{\rightarrow}(t, \Delta x) \rangle \overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta x}{t_{\lambda}(\Delta x)}. \quad (3.15)$$

Дадим определение понятию скорости свойства  $M$ .

Скоростью свойства  $M$  в точке  $x$  в момент времени  $t$  в направлении оси  $Ox$  будем называть предел средней скорости (если он существует) при толщине слоя  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$c_{\rightarrow}(t, x) \stackrel{Def}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{t_{\lambda}(\Delta x)} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Lambda'_{s=0}(t, x | x + \Delta x, s)}. \quad (3.16)$$

Аналогично определяется скорость в направлении против оси  $Ox$ .

Таким образом, скорость  $c_{\rightarrow}(x, t)$  есть не только характеристика свойства, но и характеристика среды в данном базисе. В силу этого,

$$\bar{\Lambda}(t, x | x + dx, s) = 1 - \left[ \frac{s}{c_{\rightarrow}(x, t)} + a_{\rightarrow}(x, t) + \chi_{\rightarrow}(x, t) \right] dx \quad (3.17)$$

величину  $\theta_{\rightarrow}(x, t) = a_{\rightarrow}(x, t) + \chi_{\rightarrow}(x, t)$  будем называть показателем диссипации свойства  $M$ . В общем случае  $\bar{\Lambda}(t, x | x \pm dx, s)$  будем записывать в виде:

$$\bar{\Lambda}(t, x | x + dx, s) = I - S_{\rightarrow}(x, s, t) dx, \quad (3.18)$$

где  $S_{\rightarrow}(x, s, t) = \frac{s}{c_{\rightarrow}(x, t)} + \theta_{\rightarrow}(x, t)$ .

Этот результат справедлив и для многоканального случая,  $I$  в этом случае – единица соответствующей алгебры.

Остановимся на введенном соотношением (3.16) понятии скорости свойства в данном базисе. Обратим внимание, что для любого свойства в данном направлении существует, по крайней мере, две скорости  $c_{\rightarrow}$  (для сложного свойства –  $2N$  скоростей, где  $N$  – число каналов распространения). Пусть в некотором базисе  $K$  (система отсчета)  $c_{\rightarrow}(x, t) = c_{\leftarrow}(x, t) = c$ . Тогда для базиса  $K'$ , в котором  $x' = x - vt, t' = t$ , для фиксированного слоя возможны два варианта: а) скорость свойства  $c$  может не зависеть от базиса (среднее время прохождения данного слоя является инвариантом) – будем называть этот случай естественным; б) скорость свойства  $c$  зависит от базиса – за счет изменения масштабов.

Обратим внимание, что понятие скорости в ТП отличается от понятия скорости в классической механике (не скорость перемещения материальной точки, а скорость прохождения между двумя фиксированными точками, т.е.

$\Delta x = \Delta x'$ !). На наш взгляд, имеющаяся путаница со специальной теорией относительности и заключается в том, что  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – скорость света – это скорость в смысле (3.16), которая является инвариантом.

Если скорости  $c_{\rightarrow}(x, t) = c_{\leftarrow}(x, t) = c(x)$ , то для данного (только одноканального) свойства можно подобрать такой базис путем изменения масштаба, что  $c = \text{const}$ .

Аналогично понятию скорости можно ввести и понятие ускорения прохождения слоя  $\Delta x$  свойством  $M$ . Среднее ускорение определим по аналогии со скоростью так:

$$\langle a_{\rightarrow}(t, \Delta x) \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{c_{\rightarrow}(x + \Delta x, t) - c_{\rightarrow}(x, t)}{t_{\lambda}(\Delta x)} = \frac{c_{\rightarrow}(x + \Delta x, t) - c_{\rightarrow}(x, t)}{\Delta x} \cdot \langle v_{\rightarrow}(t, x) \rangle. \quad (3.19)$$

Дадим определение понятию ускорения свойства  $M$ .

Ускорением свойства  $M$  в точке  $x$  в направлении оси  $Ox$  в момент времени  $t$  будем называть предел среднего ускорения, если он существует, при толщине слоя  $\Delta x \rightarrow 0$ .

$$a_{\rightarrow x}(x, t) = c_{\rightarrow}(t, x) \cdot \frac{\partial c_{\rightarrow}(t, x)}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} c_{\rightarrow}^2(t, x). \quad (3.20)$$

Аналогично определяется ускорение и в направлении против оси  $Ox$ . Таким образом, ускорение, как и скорость, характеризует не только само свойство, но и среду в данном базисе.

Для случая непрерывного пространства в уравнениях (3.3) целесообразно перейти к бесконечно тонкому слою, т.е. получить локальные уравнения для коэффициентов  $\bar{\Lambda}, \bar{P}, \bar{R}$ .

Сделав предельный переход с учетом (3.11) и (3.18), получим:

$$\begin{aligned}
\bar{\Lambda}'_{x_1}(x_1 | x_2) &= [s_{\rightarrow}(x_1, t) - \bar{P}(x_1 | x_2) \otimes a_{\leftarrow}(x_1, t)] \otimes \bar{\Lambda}(x_1 | x_2), \\
\bar{\Lambda}'_{x_2}(x_1 | x_2) &= \bar{\Lambda}(x_1 | x_2) \otimes [a_{\rightarrow}(x_2, t) \otimes \bar{P}(x_2 | x_1) - s_{\rightarrow}(x_2, t)], \\
\bar{\Lambda}'_{x_1}(x_2 | x_1) &= \bar{\Lambda}(x_2 | x_1) \otimes [s'_{\leftarrow}(x_1, t) - a_{\leftarrow}(x_1, t) \otimes \bar{P}(x_1 | x_2)], \\
\bar{\Lambda}'_{x_2}(x_2 | x_1) &= [\bar{P}(x_2 | x_1) \otimes a_{\rightarrow}(x_2, t) - s_{\leftarrow}(x_2, t)] \otimes \bar{\Lambda}(x_2 | x_1), \\
\bar{P}'_{x_1}(x_1 | x_2) &= [s_{\rightarrow}(x_1, t) \otimes \bar{P}(x_1 | x_2) + \bar{P}(x_1 | x_2) \otimes s_{\leftarrow}(x_1, t)] - a_{\rightarrow}(x_1, t) - \\
&\quad - P(x_1 | x_2) \otimes a_{\leftarrow}(x_1, t) \otimes \bar{P}(x_1 | x_2), \\
\bar{P}'_{x_2}(x_1 | x_2) &= \bar{\Lambda}(x_1 | x_2) \otimes a_{\rightarrow}(x_2, t) \otimes \bar{\Lambda}(x_2 | x_1),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
\bar{P}'_{x_1}(x_2 | x_1) &= -\bar{\Lambda}(x_2 | x_1) \otimes a_{\leftarrow}(x_1, t) \otimes \bar{\Lambda}(x_1 | x_2), \\
\bar{P}'_{x_2}(x_2 | x_1) &= a_{\leftarrow}(x_2, t) + \bar{P}(x_2 | x_1) \otimes a_{\rightarrow}(x_2, t) \otimes \bar{P}(x_2 | x_1) - \\
&\quad - [\bar{P}(x_1 | x_2) \otimes s_{\rightarrow}(x_2, t) + s_{\leftarrow}(x_2, t) \otimes \bar{P}(x_2 | x_1)], \\
\bar{R}'_{x_1}(x_1 | x_2) &= [s_{\rightarrow}(x_1, t) - \bar{P}(x_1 | x_2) \otimes a_{\rightarrow}(x_1, t)] \otimes \bar{R}(x_1 | x_2) - \\
&\quad - P(x_1 | x_2) \otimes \chi_{\leftarrow}(x_1, t) - \chi(x_1, t), \\
\bar{R}'_{x_2}(x_1 | x_2) &= \bar{\Lambda}(x_1 | x_2) \otimes [a_{\rightarrow}(x_2, t) \otimes \bar{R}(x_2 | x_1) + \chi_{\rightarrow}(x_2, t)], \\
\bar{R}'_{x_1}(x_2 | x_1) &= -\bar{\Lambda}(x_2 | x_1) \otimes [a_{\leftarrow}(x_1, t) \otimes \bar{R}(x_1 | x_2) + \chi_{\leftarrow}(x_1, t)], \\
\bar{R}'_{x_2}(x_2 | x_1) &= \chi_{\leftarrow}(x_2, t) + \bar{P}(x_2 | x_1) \otimes \chi_{\rightarrow}(x_2, t) - \\
&\quad - [s_{\rightarrow}(x_2, t) - \bar{P}(x_2 | x_1) \otimes a_{\rightarrow}(x_2, t)] \otimes \bar{R}(x_2 | x_1), \\
x_2 &\geq x_1.
\end{aligned}$$

С граничными условиями вида:

$$\begin{aligned}
\bar{P}(x_1 | x_1) &= \bar{P}(x_2 | x_2) = 0, \\
\bar{R}(x_1 | x_1) &= \bar{R}(x_2 | x_2) = 0, \\
\bar{\Lambda}(x_1 | x_1) &= \bar{\Lambda}(x_2 | x_2) = I.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Система уравнений (3.21) полностью определяет коэффициенты  $\bar{\Lambda}, \bar{P}, \bar{R}$ , если известны локальные свойства среды. Из системы (3.21) видно, что  $\bar{R}$  и  $\bar{\Lambda}$  легко выражаются через  $\bar{P}$ . Само же  $\bar{P}(x_1 | x_2)$  определяется из пятого и восьмого уравнений соответственно.

Отметим следующее утверждение, вытекающее из пятого и восьмого уравнений системы.

*Утверждение.* Если для некоторого значения  $x_0$  из промежутка  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  справедливо равенство:

$$\bar{P}(x_0, \alpha) \otimes \bar{P}(x_0, \beta) = \bar{P}(x_0, \beta) \otimes \bar{P}(x_0, \alpha) = I, \tag{3.23}$$

где  $I$  – единица соответствующей алгебры, то равенство (3.23) справедливо и для всех  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ .

Для однородной симметричной среды в одноканальном случае  $\bar{\Lambda}, \bar{P}, \bar{R}$  имеют простой вид:

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}(z, s) &= \frac{2\mu(s - \mu)e^{-\mu z}}{a^2 - (s - \mu)^2 e^{-2\mu z}}, \\ \bar{P}(z, s) &= \frac{a(s - \mu)[1 - e^{-2\mu z}]}{a^2 - (s - \mu)^2 e^{-2\mu z}}, \\ \bar{R}(z, s) &= \frac{\sqrt{2}\chi\sqrt{s - \mu}}{\sqrt{s - a}} \cdot \frac{[1 - e^{-\mu z}]}{[a + (s - \mu)e^{-\mu z}]}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Здесь введены обозначения  $z = x_2 - x_1$ ,

Оригиналы выражения (3.24) имеют достаточно сложный вид и выражаются через бесселевы функции мнимого аргумента [26].

Более подробно анализ системы уравнений (3.21) рассмотрен в работе [23].

Заметим, что в некоторых задачах могут встречаться случаи, сводящиеся к одноканальному, например, если вместо времени события  $\tau$  использовать длину пройденного свойством пути, если при этом известно распределение по временам пройденного пути  $\rho(l, \tau) (\int_0^\infty \rho(e, \tau) d\tau \equiv 1)$ , то все коэффициенты  $\bar{\Lambda}, \bar{P}, \bar{R}$  легко определяются так:

$$\Lambda(x_1 | x_2, \tau) = \int_0^\infty \Lambda_0(x_1 | x_2, l) \rho(l, \tau) dl.$$

К таким задачам можно отнести, например, описание случайного блуждания частиц в среде с потерей скорости (диффузия нейтронов), а также некоторые случаи движения частиц с постоянной в пространстве функцией распределения частиц по скоростям [23, 27, 28].

Следует отметить, что к одномерным задачам можно отнести и ряд трехмерных задач при наличии цилиндрической или сферической симметрии [23].

### 3.3 Квазиэнергия. Уравнение одномерного распространения

Рассмотрим распространение свойства  $M$  без источников вдоль оси  $Ox$  (см. рис. 3.5). В стационарном случае, если нет внешних потоков, положим в выражении (3.10)  $x_2 = x_1 = x$ , тогда

$$\bar{\Phi}_{\leftarrow}(x, s) = \bar{\Phi}_{\rightarrow}(x, s) \otimes \bar{P}(x | +\infty), \quad (3.25)$$

$$\bar{\Phi}_{\rightarrow}(x, s) = \bar{\Phi}_{\leftarrow}(x, s) \otimes \bar{P}(x | -\infty).$$

Последнее равенство возможно тогда и только тогда, если выполняется тождество

$$\bar{P}(x | +\infty) \otimes \bar{P}(x | -\infty) = \bar{P}(x | -\infty) \otimes \bar{P}(x | +\infty) \equiv I. \quad (3.26)$$

Если данное выражение выполняется хотя бы для одной точки  $x_0$  на прямой, то в силу утверждения, равенство (3.26) справедливо для всех точек. Для выбранной точки  $x_0$  на прямой (например, точки симметрии, если таковая имеется) выражение (3.26) представляет собой уравнение, справедливое лишь для определенных значений  $s_k$ , образующих спектр значений  $s$ .

При этом, чтобы решение было устойчивым, необходимо, чтобы  $s = i\omega$  было чисто мнимым. Таким образом, устойчивые стационарные решения одномерной задачи распространения приводят к существованию спектра значений квазиэнергии  $E = \hbar\omega$ . В данной работе не рассматривается великое множество спектральных задач.

Отметим, что понятие квазиэнергии можно ввести для распространения свойства любой природы. Например, при распространении информации внутри какой-либо системы можно ввести понятие квазиэнергии информации, обладающей всеми свойствами энергии физической.

Непосредственной проверкой можно убедиться, используя уравнения (3.21), что в одномерном случае потоки  $\Phi_{\rightarrow}(x, t)$  удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений.

Для простого свойства эта система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\Phi_{\rightarrow}(x,t)}{c_{\rightarrow}(x,t)} \right] + \frac{\partial \Phi_{\rightarrow}(x,t)}{\partial x} + \Phi_{\rightarrow}(x,t) \cdot \Theta_{\rightarrow}(x,t) - \Phi_{\leftarrow}(x,t) \cdot a_{\leftarrow}(x,t) = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\Phi_{\leftarrow}(x,t)}{c_{\leftarrow}(x,t)} \right] - \frac{\partial \Phi_{\leftarrow}(x,t)}{\partial x} + \Phi_{\leftarrow}(x,t) \cdot \Theta_{\leftarrow}(x,t) - \Phi_{\rightarrow}(x,t) \cdot a_{\rightarrow}(x,t) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что уравнения (3.27) представляют собой уравнения баланса для одноканальных токов  $\Phi_{\rightarrow}(x,t)$  и аддитивного свойства  $M$ . Иными словами, скорость изменения плотности свойства  $n_{\rightarrow}(x,t)$  определяется токовым слагаемым  $\frac{\partial \Phi_{\rightarrow}}{\partial x}$ , количеством ушедшего свойства  $\Theta_{\rightarrow} \Phi_{\rightarrow}$ , за счет рассеяния и поглощения (переход в другое состояние) и пришедшего свойства – за счет рассеяния тока  $\Phi_{\leftarrow}$ . Аналогично трактуется и второе уравнение. С самого начала следовало ожидать этот результат, т.к. только из аддитивности свойства ничего иного, кроме уравнения баланса не получить. Этот результат легко обобщается и для многоканального свойства. Тем не менее, в несколько иной форме записи уравнения непрерывности оказываются «вдруг» основными уравнениями в различных разделах физики (Шредингера, Дирака, Гамильтона-Якоби, теплопроводности и многие другие).

Складывая и вычитая почленно, систему (3.27) можно переписать в несколько ином виде, а именно:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + n_{\rightarrow} \tilde{\chi}_{\rightarrow} + n_{\leftarrow} \tilde{\chi}_{\leftarrow} = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\Phi_{\rightarrow}}{c_{\rightarrow}} - \frac{\Phi_{\leftarrow}}{c_{\leftarrow}} \right] + \frac{\partial}{\partial x} [n_{\rightarrow} c_{\rightarrow} + n_{\leftarrow} c_{\leftarrow}] + n_{\rightarrow} (2\tilde{a}_{\rightarrow} + \tilde{\chi}_{\rightarrow}) - n_{\leftarrow} (2\tilde{a}_{\leftarrow} + \tilde{\chi}_{\leftarrow}) = 0.$$

Здесь

$$n(x,t) = n_{\rightarrow}(x,t) + n_{\leftarrow}(x,t)$$

$$j_x(x,t) \equiv \Phi(x,t) = \Phi_{\rightarrow}(x,t) - \Phi_{\leftarrow}(x,t) \text{ — ток свойства } M,$$

$$\tilde{a}_{\rightarrow}(x,t) = a_{\rightarrow}(x,t) c_{\rightarrow}(x,t) \quad \tilde{\chi}_{\rightarrow}(x,t) = \chi_{\rightarrow}(x,t) c_{\rightarrow}(x,t)$$

Первое уравнение в системе (3.28) есть уравнение непрерывности, второе будем называть обобщенным уравнением диффузии свойства  $M$ .

Наибольший интерес представляет случай, когда  $c_{\rightarrow}(x,t) = c_{\leftarrow}(x,t) = c = const$ .

Введем обозначения:

$$a(x,t) = \frac{a_{\rightarrow}(x,t) + a_{\leftarrow}(x,t)}{2} \quad \Delta a_x(x,t) = \frac{a_{\rightarrow}(x,t) - a_{\leftarrow}(x,t)}{2}$$

$$\chi(x,t) = \frac{\chi_{\rightarrow}(x,t) + \chi_{\leftarrow}(x,t)}{2} \quad \Delta \chi_x(x,t) = \frac{\chi_{\rightarrow}(x,t) - \chi_{\leftarrow}(x,t)}{2}$$

Уравнения (3.28) в этом случае примут вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \chi cn + \Delta \chi j_x = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial j_x}{\partial x} + c \frac{\partial n}{\partial x} + (2a + \chi) j_x + (2\Delta a + \Delta \chi) cn = 0.$$

Уравнения (3.29) справедливы для любого одноканального свойства в одномерном случае, распространяющегося с постоянной скоростью.

Переход на трехмерный случай можно произвести, рассматривая задачу как многоканальную (3 канала распространения). Более подробно этот путь будет рассмотрен в разделах 3.8 и 5.5. В простейшем случае для изотропной среды уравнения (3.29) примут вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} + \chi cn + \Delta \vec{\chi} \cdot \vec{j} = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + c \operatorname{grad} n + (2a + \chi) \vec{j} + (2\Delta \vec{a} + \Delta \vec{\chi}) cn = 0..$$

Как и ранее, первое уравнение в системе (3.30) представляет собой уравнение непрерывности, а второе выражает обобщенный закон диффузии простого свойства  $M$ . Ниже будет рассмотрено уравнение (3.30) в применении к различным физическим процессам.



### 3.4 Распространение некоторых физических свойств

Самыми очевидными применениями ТП являются классические явления переноса. Рассмотрим процесс диффузии частиц диффузанта, описывающийся концентрацией  $n(\vec{r}, t)$  в однородной и изотропной среде в отсутствии источников и стоков. Уравнения (3.30) в этом случае примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \vec{j} &= 0 \\ \frac{1}{2ac} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \vec{j} &= -\frac{\Delta \vec{a}}{a} cn - \frac{c}{2a} \text{grad} n. \end{aligned} \quad (3.31)$$

В состоянии равновесия распределение частиц в классической системе подчиняется распределению Больцмана, т.е.

$$n_p(\vec{r}) = n_0 \exp \left[ -\frac{U(\vec{r})}{k_B T} \right], \quad (3.32)$$

где  $U(\vec{r})$  – потенциальная энергия частицы диффузанта в заданном силовом поле;

$k_B T$  – термодинамическая температура.

Отсюда

$$\Delta \vec{a} = -\frac{1}{2} \text{grad} \left( \frac{U}{k_B T} \right) = -\frac{\vec{F}}{2 k_B T} \quad (3.33)$$

для изотермических условий.

**П р и м е ч а н и е.** Если в системе имеется распределение температур, то будет наблюдаться известное явление термодиффузии.

Здесь  $\vec{F}(r)$  – внешняя сила;

$D = \frac{c}{2a}$  – коэффициент диффузии;

$\tau_p = \frac{1}{2ac}$  – время релаксации.

В этом случае уравнение (3.31) примет вид:

$$\vec{j} + \tau_p \vec{j}'_t = -D \text{grad} n + \frac{D}{k_B T} \vec{F} \cdot n. \quad (3.34)$$

Это уравнение вынужденной диффузии с учетом запаздывания (обобщенный закон Фика) [22-25].

Используя уравнение непрерывности, выражение (3.34) можно переписать в виде:

$$\tau_p \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \frac{\partial n}{\partial t} = D \left[ \Delta \cdot n - \frac{\vec{F}}{k_B T} \cdot \vec{\nabla} n - \frac{n}{k_B T} \cdot \text{div} \vec{F} \right]. \quad (3.35)$$

В отсутствие внешних сил уравнение (3.35) представляет собой гиперболическое уравнение диффузии (диффузионно-волновое уравнение):

$$\tau_p \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta \cdot n. \quad (3.36)$$

Уравнение подобного типа было, по-видимому, впервые предложено В.А. Фоком [29] для диффузии фотонов. Подробно этот вопрос рассмотрен в [23-25]. Этим самым снимается известный парадокс о «бесконечной скорости броуновских частиц». Только при  $\tau_p \rightarrow 0$  ( $c \rightarrow \infty$ ) уравнение (3.36) переходит в обычное уравнение диффузии. На наш взгляд, все параболические уравнения математической физики являются приближенными и при более строгом подходе должны быть заменены на гиперболические.

Уравнение (3.36) содержит вторую производную по времени. Следовательно, для его решения необходимо кроме начального условия  $n(r, 0)$  еще и дополнительное условие  $n'_{t=0}(r, t)$ . Для выяснения физического смысла этого условия рассмотрим уравнение (3.36) с начальным условием  $n(r, 0) \neq 0$ . На первый взгляд может показаться, что эту задачу можно свести к задаче с нулевым начальным условием с учетом присутствия источников интенсивностью  $n(r, 0) \delta(t)$ . Но при этом автоматически предполагается, что все источники изотропные. Однако, в общем случае, эти источники анизотропные. Таким образом, дополнительное условие  $n'_{t=0}(\vec{r}, t)$  является физически необходимым и указывает, каким образом концентрация диффузанта меняется в начальный момент. Если же нас интересует усредненная концентрация по некоторому объему  $V_0 \gg l_0^3$  (где  $l_0$  – длина единичного скачка частицы диффузанта), то такие источники, действительно, можно считать изотропными и необходимость в дополнительном условии  $n'_{t=0}$  отпадает.

Рассмотрим вынужденную диффузию заряженных частиц с зарядом  $e$  в электрическом поле. Уравнение (3.34) в этом случае примет вид:

$$\vec{j} + \tau_p \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -D \text{grad} n + \mu e n \vec{E},$$

где  $\mu = \frac{De}{k_B T}$  – подвижность носителей;

$\vec{E}$  – напряженность электрического поля.

Используя известное выражение для электропроводности  $\delta = e\mu n$  при  $n(r, t) = const$ , получим выражение закона Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} + \tau_p \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \sigma \vec{E}. \quad (3.37)$$

Обычно, закон Ома в таком виде записывается для электрических цепей с активным сопротивлением  $R$  и содержащим индуктивный элемент  $L$ . При этом  $\tau_p = \frac{L}{R}$ . Заметим, что  $\tau_p$ , входящее в выражение (3.37) имеет релаксационный (немагнитный) характер и целиком определяется характером рассеяния носителей.

Примечание. Строгий учет электромагнитного поля требует присутствия в уравнении (3.30) множителя  $\Delta\chi$ , пропорционального векторному потенциалу поля.

Поэтому, строго говоря, индуктивность любого элемента цепи состоит из двух слагаемых магнитной и релаксационной природы, т.е.

$$L = L_M + L_p.$$

В большинстве случаев  $L_p \ll L_M$ , однако, расчеты показали, что для быстрых релаксационных процессов релаксационная индуктивность оказывается такого же порядка, что и магнитная и даже может превосходить ее.

Отметим, что все вышесказанное относится и к другим явлениям переноса. Так, перенос тепла описывается гиперболическим уравнением теплопроводности, приводящим к известному явлению – волнам тепла. Учет времени релаксации физически означает, что данный процесс распространяется с конечной скоростью. Например, «мгновенная» разность температур на концах стержня не может привести мгновенно к току тепла в середине стержня. Все сказанное относится и к распространению упругих волн в различных средах.

С позиций ТП классическое механическое движение можно рассматривать как обмен количеством движения (импульсом) между отдельными телами системы. При этом каждое материальное тело является одновременно источником и стоком импульса соответствующего цвета (гравитационный,

электромагнитный и т.д.). Результирующий импульс, поглощаемый телом в единицу времени ( $d\vec{P}/dt$ ), и определяет результирующую силу, вызывающую изменение скорости тела. Заметим, что в этом случае «работает» закон обратных квадратов, что характерно для классических полей. Таким образом, роль посредника (гравитационного, электромагнитного) полей играют соответствующие плотности токов.

Предлагаемый подход принципиально дает возможность подойти к описанию механики деформируемого твердого тела на языке плотностей токов импульса.

### 3.5 Распространение простого комплексного свойства

В этой работе ограничимся рассмотрением распространения простого скалярного комплексного свойства. Интерес к распространению комплексного свойства вызван тем, что, во-первых, многие физические величины (амплитуды различных процессов) представляют собой комплексные числа; во-вторых, тем, что устойчивые решения получаются при мнимых значениях показателя отражения и поглощения. В простейшем варианте распространение комплексного свойства подчиняется уравнению (3.30). Рассмотрим случай, когда показатели рассеяния и поглощения чисто мнимые. В этом случае удобно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 A(\vec{r}, t) &= i\hbar a(\vec{r}, t), \quad \Delta\vec{A}(\vec{r}, t) = i\hbar\Delta\vec{a}(\vec{r}, t); \\
 B(\vec{r}, t) &= i\hbar[a(\vec{r}, t) + \chi(\vec{r}, t)] = i\hbar\theta(\vec{r}, t), \quad \Delta\vec{B}(\vec{r}, t) = i\hbar\Delta\vec{\theta}(\vec{r}, t); \\
 X &= B - A, \quad \Delta\vec{X} = \Delta\vec{B} - \Delta\vec{A}; \\
 W &= B + A, \quad \Delta\vec{W} = \Delta\vec{B} + \Delta\vec{A}.
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

Эти величины, имеющие размерность количества движения, будем называть квазипотенциалами,  $A$  и  $\Delta\vec{A}$  – скалярным и векторным квазипотенциалами квазигравитационного поля, а  $B$  и  $\Delta\vec{B}$  – скалярным и векторным квазипотенциалами квазиэлектромагнитного поля. Ниже будет дано пояснение этим названиям.

Уравнения распространения в новых обозначениях примут вид:

$$\begin{aligned}
i\hbar \left[ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right] + X\Psi + \Delta \vec{X} \cdot \vec{j} &= 0, \\
i\hbar \left[ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \operatorname{grad} \Psi \right] + W\vec{j} + \Delta \vec{W} \Psi &= 0,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

здесь и далее плотности свойства будем измерять в единицах плотности тока, т.е.

$$\Psi(r, t) = cn(r, t).$$

Скорость распространения свойства в данной однородной и изотропной среде считаем некоторой постоянной величиной  $c$ . Наличие коэффициентов асимметрии показателей отражения и поглощения вызвано распределением каких-то других свойств. Поскольку скорость распространения свойства в смысле (3.16) является инвариантом, то потребуем, чтобы уравнения (3.39) были инвариантны относительно преобразований типа Лоренца, где вместо скорости света используется скорость свойства  $M$ . Требование инвариантности накладывает на уравнение (3.39) дополнительное условие, а именно:

$$i\hbar \operatorname{rot} \vec{j} + \Delta \vec{W} \times \vec{j} = 0. \tag{3.40}$$

*П р и м е ч а н и е.* Условие инвариантности не является обязательным в теории. Однако, наличие инвариантности делает результаты более показательными.

В дальнейшем удобно записывать систему уравнений (3.39)-(3.40) в ковариантной форме. Для упрощения записи будем придерживаться обычных правил суммирования тензорного анализа с условиями, что латинские индексы  $i, j, k, l \dots$  нумеруют пространственные координаты (компоненты) 1, 2, 3, а греческие  $\mu, \nu, \sigma, \tau$  – пространственно-временные 0, 1, 2, 3.

В этих обозначениях уравнения распространения примут вид:

$$\begin{aligned}
i\hbar \partial_\mu j^\mu + X_\mu j^\mu &= 0 \\
i\hbar (\partial_\mu j_\nu - \partial_\nu j_\mu) + W_\mu j_\nu - W_\nu j_\mu &= 0.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
x^0 = x_0 = ct, x^1 = -x_1 = x, x^2 = -x_2 = y, x^3 = -x_3 = z, j^0 = j_0 = cn = \Psi, j^1 = -j_1 = j_x, \\
j^2 = -j_2 = j_y, j^3 = -j_3 = j_z \quad X_0 = X_1 \quad X_1 = \Delta X_x, \quad X_2 = \Delta X_y, \quad X_3 = \Delta X_z \\
W_0 = W, \quad W_1 = \Delta W_x, \quad W_2 = \Delta W_y, \quad W_3 = \Delta W_z \quad .
\end{aligned}$$

Лоренц-инвариантность уравнений (3.41) очевидна. Таким образом, плотность тока свойства образует контрвариантный  $4^x$ -вектор, а квазипотенциал  $A$  и  $B$  – ковариантные  $4^x$ -вектора. Вектор плотности тока  $j$  будем определять с точностью до фазового множителя, т.е.

$$j_\mu(x^\delta) = \tilde{j}_\mu(x^\delta) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(x^\delta) \right]. \quad (3.42)$$

Подставляя (3.42) в уравнения (3.41), будем иметь

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_\mu \tilde{j}^\mu + \tilde{X}_\mu \tilde{j}^\mu &= 0 \\ i\hbar \left[ \partial_\mu \tilde{j}_\nu - \partial_\nu \tilde{j}_\mu \right] + \tilde{W}_\mu \tilde{j}_\nu - \tilde{W}_\nu \tilde{j}_\mu &= 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где  $\tilde{X}_\mu = X_\mu - \partial_\mu S$ ,  $\tilde{W}_\mu = W_\mu - \partial_\mu S$ ,

т.е. потенциал квазимагнитного (диссипации) поля допускает калибровку, а уравнения (3.41) инвариантны относительно преобразования (3.42). Величину  $S(x^\sigma)$  будем называть квазидействием. Выбирая соответствующую калибровку и снимая неопределенность в выборе  $j$  и  $B$ , потребуем выполнение дополнительного условия, а именно:

$$\tilde{W}_\mu \cdot \tilde{X}^\mu = 0 \quad (3.44)$$

Последнее означает, что возможны решения в виде плоских волн.

Уравнение (3.44) можно переписать в виде:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial t} - B \right)^2 = A_\mu A^\mu + (\vec{\nabla} S - \Delta \vec{B})^2. \quad (3.45)$$

Уравнение (3.45) представляет собой релятивистское уравнение Гамильтона-Якоби. Поэтому данному комплексному свойству можно сопоставить классическую частицу свойства, движение которой подчиняется законам классической механики. Отсюда понятен и смысл названия для показателей рассеяния  $A_\mu = i\hbar a_\mu$  и диссипации  $B_\mu = i\hbar \Theta_\mu$ . В этом случае  $\mu = \sqrt{A_\mu A^\mu}$  играет роль массы частицы данного свойства, а  $B_\mu = -\frac{e}{c} A_\mu$ . Для обычных частиц вещества  $A_\mu$  –  $4^x$ -потенциал электромагнитного поля,  $e$  – электрический заряд,  $c$  – скорость света.

Уравнения (3.39) допускают типичную запись, характерную для квантовой механики:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \hat{H}^{(4)} \vec{j} = \begin{pmatrix} -X & \hat{F}_x - \Delta X_x & \hat{p}_y - \Delta X_y & \hat{p}_z - \Delta X_z \\ \hat{p}_x - \Delta W_x & -W & \bullet & \bullet \\ \hat{p}_y - \Delta W_y & \bullet & -W & \bullet \\ \hat{p}_z - \Delta W_z & \bullet & \bullet & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Здесь  $\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x$ ,  $\hat{p}_y = -i\hbar\partial_y$ ,  $\hat{p}_z = -i\hbar\partial_z$ .

Гамильтонова форма (3.46) позволяет формально сохранить основные соотношения квантовой механики.

Пусть  $\hat{L}$  – линейный дифференциальный оператор, не зависящий от времени явно и коммутирующий с  $\hat{H}$ . Тогда

$$\hat{L} \cdot i\hbar\partial_t^{(4)} \vec{j} = \hat{L}\hat{H}^{(4)} j = \hat{H}\hat{L}^{(4)} j = i\hbar\partial_t \hat{L}^{(4)} \vec{j}$$

Таким образом, оператор  $\hat{L}$  превращает  $4^x$ -вектор тока свойства  $j$  в другой  $4^x$ -вектор тока свойства, удовлетворяющий (3.46), т.к.

$$\hat{L}^{(4)} j = {}^{(4)}j'$$

и

$$i\hbar\hat{L} = [\hat{H}, \hat{L}]. \quad (3.47)$$

Уравнения распространения в форме (3.41) могут быть записаны на языке кольца  $R_\otimes$ . Учитывая, что

$$p^0 \circ e^{\frac{i}{\hbar} X_\mu p^\mu} n(x^\tau | p^\delta) = \left[ e^{\frac{i}{\hbar} [Et - \vec{r}\vec{p}]} n(t, \vec{r} | E, \vec{p}) \right] E = e^{\frac{i\hbar}{X_\mu p^\mu}} \cdot i\hbar\partial_0 n(x^\tau | p^\delta),$$

$$\vec{p} \circ \left[ e^{\frac{i}{\hbar} [Et - \vec{p}\vec{r}]} \cdot n(t, \vec{r} | E, \vec{p}) \right] = \left[ e^{\frac{i}{\hbar} [Et - \vec{r}\vec{p}]} n(t, \vec{r} | E, \vec{p}) \right] \vec{p} = -i\hbar e^{\frac{i}{\hbar} [Et - \vec{p}\vec{r}]} \vec{\nabla} n(t, \vec{r} | E, \vec{p}),$$

получим:

$$\begin{aligned} \Psi_\mu \circ [p^\mu + X^\mu] &= 0 \\ \Psi_\mu \circ [p_\nu + W_\nu] - \Psi_\nu \circ [p_\mu + W_\mu] &= 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Или в обычной форме:

$$\begin{aligned} \Psi_0 \circ E &= \bar{\Psi} \circ [\vec{p} - \Delta \vec{X}] - \Psi \circ X \\ \bar{\Psi} \circ E &= \Psi_0 \circ [\vec{p} - \Delta W] - \bar{\Psi} \circ \Delta \vec{W} \\ \bar{\Psi} \circ [\vec{p} - \Delta \vec{W}] &= 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Следует помнить, что  $\vec{P}$  – контрвариантный вектор, а  $\Delta\vec{W}$  и  $\Delta\vec{X}$  – ковариантные векторы.

Согласно положениям ГП переход от естественного (квантового) описания к классическому заключается в переходе от кольца  $R$  к кольцу с обычным умножением. В этом классическом случае получаем:

$$[E + B]^2 = (A^2 - \Delta\vec{A})^2 + (\vec{P} - \Delta\vec{B})^2, \quad (3.50)$$

т.е. фактически, опять классические уравнения движения.

Таким образом, можно сделать вывод, что описание даже простого комплексного свойства требует подход, типичный для квантовой механики.

### 3.6 Уравнения Максвелла для поля свойств

Перепишем систему уравнений (3.38)-(3.39) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \text{div } j &= \xi_\Psi = \frac{i}{\hbar} (\mathbf{X}\Psi + \Delta\vec{X} \cdot \vec{j}), \\ \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \text{grad } \Psi &= -\vec{E}_\Psi = \frac{i}{\hbar} (W \vec{j} + \Delta W \Psi), \\ \text{rot } \vec{j} &= \vec{H}_\Psi = \frac{i}{\hbar} (\Delta\vec{W} \times \vec{j}), \end{aligned} \quad (3.51)$$

где по аналогии с электродинамикой величины  $\vec{E}_\Psi$  и  $\vec{H}_\Psi$  будем называть напряженностями поля свойств. На последнее обстоятельство указывает тот факт, что потенциалы электромагнитного и гравитационного полей можно рассматривать как аддитивные свойства, характеризующие среду (выполняется принцип суперпозиции). Из (3.51) очевидно следуют первые два уравнения Максвелла для электромагнитного поля, т.е.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{H}_\Psi &= 0 \\ \text{rot } \vec{E}_\Psi &= -\frac{\partial \vec{H}_\Psi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Определим 4<sup>x</sup>-ток поля свойства так:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E}_\Psi &= -\Psi - \frac{\partial \xi}{\partial t} = 4\pi \rho_\Psi, \\ \text{rot } \vec{H}_\Psi &= \frac{\partial \vec{E}_\Psi}{\partial t} + \vec{\nabla} \xi - \vec{j}_\Psi = \frac{\partial E_\Psi}{\partial t} + 4\pi \vec{I}_\Psi. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Введем кососимметричный тензор поля свойств



$$F_{\Psi\mu\nu} = \partial_\mu j_\nu - \partial_\nu j_\mu ,$$

для которого выражение (3.53) примет более простой вид:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu j^\nu - \partial^\nu \partial_\nu j_\mu = \partial_\mu \xi_\Psi + \square j_\mu = -4\pi I_{\Psi\mu}. \quad (3.54)$$

Здесь  $\square$  – оператор Д'Аламбера.

Ввиду полной аналогии с уравнениями электродинамики Максвелла, систему уравнений (3.52)-(3.53) будем называть уравнениями Максвелла для поля свойств. Из уравнений (3.51) вытекает следующее равенство:

$$\left( \frac{\partial \Delta \vec{W}}{\partial t} - \text{grad} W \right) \times \vec{j} = \Psi \text{rot} \Delta \vec{W}. \quad (3.55)$$

Точно таким же методом воспользуемся для описания векторных полей показателей рассеяния и диссипации. Имеем:

$$\begin{aligned} \vec{E}_A &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} A \\ \vec{H}_A &= \text{rot} \Delta \vec{A} \\ F_{A\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Таким образом, квазипотенциал квазигравитационного поля (или показателя рассеяния), а точнее, их напряженности удовлетворяют соответствующим уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{H}_A &= 0 \\ \text{rot} \vec{E}_A &= -\frac{\partial \vec{H}_A}{\partial t} \\ \text{div} \vec{E}_A &= 4\pi \rho_A \\ \text{rot} \vec{H}_A &= \frac{\partial \vec{E}_A}{\partial t} + 4\pi \vec{I}_A. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Здесь  $\xi_A = \frac{\partial A}{\partial t} + \text{div} \Delta \vec{A}$ .

Более коротко можно переписать систему (3.57) в виде:

$$\partial^\nu F_{A\mu\nu} = \partial_\mu \xi_A + \square A_\mu = -4\pi I_{A\mu}. \quad (3.58)$$

Точно таким же образом определим напряженность полей для квазипотенциала  $B_\mu$ , а также для  $W_\mu$  и  $X_\mu$ , причем все они удовлетворяют

уравнениям Максвелла. Соответственно, с помощью уравнения типа (3.58) можно определить соответствующие токи. Нетрудно видеть, что токи величин  $A$  и  $B$  описывают некоторые сохраняющиеся величины. Таким образом, показатели рассеяния и диссипации можно описать с помощью токов некоторых сохраняющихся величин. Обратим внимание, что квазипотенциалы  $A_\mu$  и  $B_\mu$  являются характеристиками среды по отношению к данному конкретному (простому, комплексному) свойству. Поэтому, как это принято в физике, квазипотенциалы  $A$  и  $B$  можно попытаться представить в виде:

$$\begin{aligned} A_\mu(\vec{r}, t) &= q_A \varphi_{A\mu}(\vec{r}, t), \\ B_\mu(\vec{r}, t) &= q_B \varphi_{B\mu}(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (3.59)$$

где  $q_A$  и  $q_B$  (будем называть квазизарядами,  $q_A = \mu$  – квазигравитационная масса,  $q_B$  – квазиэлектрический заряд) – скаляры, характеризующие данное свойство по отношению к данной среде;  $\varphi_\mu$  –  $4^x$ -потенциал поля соответствующего свойства – характеристика среды и может быть определена с помощью уравнений Максвелла при помощи соотношений (3.57) или (3.58). Необходимо отметить, что последнее разделение возможно только при выполнении принципа суперпозиции и возможно далеко не всегда!

Обратим внимание, что между током свойства и напряженностями соответствующих полей, как это следует из уравнений (3.51) и (3.56), существуют весьма симметричные соотношения,

$$\begin{aligned} \vec{j} \times \vec{E}_W &= \Psi \vec{H}_W \\ \vec{H}_\Psi &= \frac{i}{\hbar} \Delta \vec{W} \times \vec{j} \\ \vec{E}_\Psi \times \Delta \vec{W} &= W \vec{H}_\Psi \\ \vec{j} \times \vec{E}_\Psi &= \Psi \vec{H}_\Psi \end{aligned} \quad (3.60)$$

во многом напоминающие законы классической электродинамики.

Подведем некоторые итоги: во-первых, описание простого комплексного свойства по своему формализму напоминает аппарат квантовой механики; во-вторых, то, что считается основными законами физики (уравнения Шредингера, Дирака, Максвелла и т.д.) по сути, не являются таковыми, а выражают собой лишь способ описания. Поэтому и не удивительно, что многие результаты других разделов науки (например, теории упругости) во многом по своей форме напоминают результаты квантовой физики; в-третьих, на языке ТП не возникает

то, что обычно называют «концептуальные проблемы квантовой механики» [30-34]. Аппарат кольца  $R$  позволяет вообще обойтись без операторов и приписывать всем величинам конкретные числовые значения; в-четвертых, для любого комплексного простого свойства, можно величины (квазипотенциал квазигравитационного поля и квазипотенциал квазиэлектромагнитного поля), описывающего поведение данного свойства в среде. Более того, можно утверждать, что других «взаимодействий» для таких свойств не существует.

Однако, для того, чтобы полностью описать эволюцию какого-либо свойства на языке ТП, необходимо знать связь между  $4^x$ -токами  $I_{A\mu}, I_{B\mu}$  и  $4^x$ -током свойства  $j_\mu$ . Ответ на этот вопрос ТП дать не может и не должна. На этот вопрос может ответить только физика соответствующего процесса. Отметим, что из величин  $j_\mu, j_\mu^*, B_\mu, A_\mu$  можно составить довольно много «удобных токов», например

$$I^\mu = [j^\mu j^{\nu*} + j^{\mu*} j^\nu] A_\nu - (j_\nu j^{\nu*}) A_\mu,$$

который достаточно хорошо соответствует токам квантовой механики.

Найдем по аналогии с уравнениями Максвелла уравнения второго порядка для  $4^x$ -вектора плотности комплексного тока  $j_\mu$ . Обозначим для краткости  $R_\mu = i\hbar \partial_\mu + W_\mu$ ,  $Q_\mu = i\hbar \partial_\mu + X_\mu$  и  $P_\mu = i\hbar \partial_\mu + B_\mu$ . Тогда уравнение (3.41) в новых обозначениях примет вид:

$$\begin{aligned} R_\mu j_\nu &= R_\nu j_\mu, \\ Q_\mu j^\mu &= 0. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Обратим внимание, что

$$[R_\mu ; R_\nu] = R_\mu R_\nu - R_\nu R_\mu = i\hbar (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) = i\hbar F_{W\mu\nu}. \tag{3.62}$$

Определим выражение

$$(Q^\nu \cdot R_\nu) \cdot j_\mu = (P^\nu - A^\nu) \cdot (P^\nu + A^\nu) \cdot j_\mu = [P^\nu P_\nu - A^\nu A_\nu + i\hbar \partial_\nu A^\nu] \cdot j_\mu.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} (Q^\nu \cdot R_\nu) \cdot j_\mu &= R^\nu \cdot R_\nu \cdot j_\mu - 2A^\nu \cdot R_\nu \cdot j_\mu = R^\nu \cdot R_\mu \cdot j_\nu - 2A^\nu \cdot R_\nu \cdot j_\mu = \\ &= R_\mu \cdot R_\nu \cdot j^\nu - 2A^\nu \cdot R_\nu \cdot j_\mu - i\hbar F_{W\mu\nu} j^\nu = R_\mu \cdot 2A_\nu \cdot j^\nu - 2A^\nu \cdot R_\nu \cdot j_\mu - i\hbar F_{W\mu\nu} j^\nu = \\ &= 2i\hbar F_{A\mu\nu} j^\nu - i\hbar F_{W\mu\nu} j^\nu = -i\hbar F_{X\mu\nu} j^\nu. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое уравнение второго порядка имеет вид:

$$P^\nu P_\nu - \mu^2 + i\hbar \partial_\nu A^\nu + i\hbar F_{\kappa\mu\nu} j^\nu = 0. \quad (3.63)$$

Данное уравнение можно рассматривать как некоторое обобщение известного уравнения Клейна-Гордона-Фока на простое комплексное свойство.

### 3.7 Распространение квантовых объектов

Как указывалось выше, квантовомеханические амплитуды вероятности ведут себя как простое комплексное свойство. Рассмотрим описание квантовомеханического объекта (частицы). В основу описания положим следующие постулаты.

П1. Состояние микрообъекта полностью описывается распределениями  $\psi(\vec{r}, t)$  и  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , заданными в некотором базисе (системе отсчета).

Плотность свойства  $\psi$  будем трактовать как квантовомеханическую волновую функцию. Отметим некоторые отличия данного подхода от классической квантовой механики: во-первых, кроме волновой функции  $\psi$ , вводится ток волновой функции  $\vec{j}$ ; во-вторых, воздержимся от трактовки  $\psi$ , как амплитуды вероятности нахождения объекта в данной точке пространства.

П2. Волновая функция частицы  $\psi$  и ее ток  $\vec{j}$  подчиняются уравнениям распространения (3.39) со скоростью распространения  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с.

Тогда для любого микрообъекта существует лишь одна скорость распространения волновой функции – скорость света в вакууме. Других скоростей для микрообъектов не существует.

П3. Выполняется принцип относительности Эйнштейна, т.е. справедливо уравнение (3.40).

П4. Выполняется принцип соответствия.

Иными словами, описание методами ТП в нерелятивистском пределе должно соответствовать квантовой механике, а при  $\hbar \rightarrow 0$ , переходить в классическое описание.

Переход к классическому описанию происходит при помощи уравнения (3.44). Полагая  $A_\mu A^\mu = M^2$ , где  $M$  – энергия покоя, выражающаяся в единицах импульса и  $B = -\frac{e\varphi}{c}$ ,  $\Delta \vec{B} = \frac{e}{c} \vec{A} \left( B^\mu = -\frac{e}{c} A^\mu \right)$ ,  $e$  – элементарный заряд,  $\varphi$  и  $\vec{A}$  – скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля.

Полагая в данном базисе  $\Delta\vec{A} \equiv 0$  и  $A = \pm M$ , получим для частицы в электромагнитном поле уравнения распространения (3.39)-(3.40) в виде:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{c \partial t} &= \left( \hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \vec{j} + \left( \frac{e\varphi}{c} + A \right) \Psi = 0 \\ i\hbar \frac{\partial \vec{j}}{c \partial t} &= \left( \hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \Psi + \left( \frac{e\varphi}{c} + A \right) \vec{j} = 0 \\ \left( \hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times \vec{j} &= 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

здесь  $\hat{P} = \hat{P} - \frac{e}{c} \vec{A} = -\left( i\hbar \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)$  – обобщенный импульс.

Нетрудно видеть, что в стационарном случае уравнения (3.64) в нерелятивистском случае  $\varepsilon - \frac{e\varphi}{c} \ll M$  переходят в одночастичное уравнение Шредингера

$$\frac{\hat{P}^2}{2m_0} \Psi + e\varphi \Psi = \varepsilon \Psi, \quad (3.65)$$

где  $E = M + \frac{\varepsilon}{c}$ ,  $M = m_0 c$ .

Обратим внимание на следующее интересное обстоятельство, что решения уравнения Дирака [35-37]

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \Psi_1 &= (\hat{p}_x - i\hat{p}_y) \Psi_2 + \hat{p}_z \Psi_3 + M \Psi_1 \\ i\hbar \partial_t \Psi_2 &= (\hat{p}_x - i\hat{p}_y) \Psi_3 + \hat{p}_z \Psi_4 + M \Psi_2 \\ i\hbar \partial_t \Psi_3 &= (\hat{p}_x - i\hat{p}_y) \Psi_2 + \hat{p}_z \Psi_1 + M \Psi_3 \\ i\hbar \partial_t \Psi_4 &= (\hat{p}_x - i\hat{p}_y) \Psi_1 + \hat{p}_z \Psi_2 + M \Psi_4 \end{aligned} \quad (3.66)$$

для четырехкомпонентной волновой функции (которую обычно представляют в виде биспинора) линейным образом выражаются через решение системы (3.64). А именно:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \Psi \\ \bullet \\ j_z \\ j_x + ij_y \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \bullet \\ \Psi \\ j_x - ij_y \\ -j_z \end{pmatrix} + \tilde{c}_1 \begin{pmatrix} \tilde{j}_x - \tilde{j}_y \\ -j_z \\ \bullet \\ \tilde{\Psi} \end{pmatrix} + \tilde{c}_2 \begin{pmatrix} \tilde{j}_z \\ \tilde{j}_x + \tilde{j}_y \\ \tilde{\Psi} \\ \bullet \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

здесь  $c_1, c_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$  – произвольные постоянные и  $\varphi \vec{j}$  – решения уравнения (3.64) для  $A=+M$  и  $\tilde{\varphi} \vec{j}$  – решения уравнения (3.64) для  $A=-M$ .

Поскольку уравнения Дирака – основа квантовой электродинамики [35, 38-40], то видно, что данный подход приводит к правильным результатам хотя бы для электронов.

**П р и м е ч а н и е.** Уравнение Дирака описывает поведение электронов с большой степенью точности. Уравнение Дирака позволяет, по-видимому, успешно описать свойства нейтрино. Однако попытки применить уравнение Дирака к тяжелым частицам со спином  $\frac{1}{2}$  не привели к вполне удовлетворительным результатам.

Для того, чтобы выяснить, какие же микрообъекты описывает уравнение (3.64), воспользуемся уравнением распространения в форме (3.46). Для частицы, двигающейся в пустом пространстве, должен сохраняться полный момент импульса. Поэтому, должен существовать оператор полного момента, коммутирующий с гамильтонианом. Выберем произвольно ориентированную ось  $Z$  и рассмотрим коммутатор  $[\hat{H}; \hat{L}_z]$ . Нетрудно видеть, что

$$[\hat{H}; \hat{L}_z] = -i\hbar \begin{pmatrix} \bullet & -\hat{p}_y & \hat{p}_x & \bullet \\ -\hat{p}_y & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hat{p}_x & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, момент количества движения не является интегралом движения и не сохраняется. Для того, чтобы найти величину, играющую роль полного момента количества движения, введем оператор  $\hat{Y} = \hat{L} + \hat{S}$ , где  $\hat{S}$  – неизвестный оператор. Будем требовать, чтобы  $\hat{Y}$  коммутировал с оператором  $\hat{H}$ . Нетрудно убедиться, что этому условию удовлетворяет оператор.

$$\hat{S}_z = i\hbar \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & -1 & \bullet \\ \bullet & 1 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

Собственными значениями оператора  $S_z = 0, S_z = \pm\hbar$ .

Таким образом, можно утверждать, что система уравнений (3.64) описывает частицы с целым спином.

Остановимся на некоторых особенностях применения ТП к квантовомеханическим объектам.

1. Физический смысл  $4^x$ -потенциала электромагнитного поля с позиций ТП заключается в том, что  $4^x$ -потенциал электромагнитного поля соответствует  $4^x$ -вектору показателя диссипации среды. Характеристикой микрообъекта по отношению к данной среде (электромагнитному полю) является электрический заряд частицы.

2. Калибровочная инвариантность  $4^x$ -потенциала электромагнитного поля означает произвол в выборе отсчета фазы волновой функции, т.е.

$$S' = S + \Phi,$$

отсюда следует  $B'_\mu = B_\mu + \partial_\mu \Phi$ .

3. Т.к. согласно принципу суперпозиции электромагнитное поле можно рассматривать как аддитивное свойство, то для него справедливо уравнение распространения с источниками.

4. Четырех-потенциал  $A_\mu$ , согласно уравнениям Гамильтона-Якоби, соответствует  $4^x$ -потенциалу гравитационного поля. В отсутствии гравитации в классическом приближении  $A_\mu A^\mu = M^2$ .

5.  $4^x$ -потенциал гравитационного поля не обладает калибровочной инвариантностью (что следует из уравнений распространения).

6. Учитывая, что и для гравитационного поля справедлив принцип суперпозиции, то его тоже можно рассматривать как аддитивное свойство с соответствующими уравнениями распространения. Физический смысл  $4^x$ -потенциала гравитационного поля соответствует 4-вектору показателя рассеяния среды. Характеристикой микрообъекта по отношению к данной среде (гравитационному полю) является собственная масса частицы.

7. Поскольку в макроскопическом (классическом) уравнении движения частицы входит только инвариант  $A_\mu A^\mu$ , не зависящий от выбора инерциального базиса, то никакие макроскопические опыты не позволяют определить векторный потенциал гравитационного поля. Иными словами, векторный потенциал гравитационного поля может проявляться только на квантовом уровне.

8. Поскольку по отношению к данному свойству среда характеризуется только рассеянием и поглощением, то в Природе могут существовать только два вида классических полей, которыми и являются гравитационное и электромагнитное.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Выше было принято естественное допущение, что  $4^x$ -потенциал  $A_\mu$  является действительной величиной. На это указывает, кроме общих соображений ТП, и то обстоятельство, что для свободной частицы  $A_\mu A^\mu = M^2$ . Поэтому, в дальнейшем все объекты (свойства), для которых  $A_\mu$  – действительная величина, будем называть объектами класса I. Однако, нет каких-либо физических запретов на существование частиц (их будем называть объектами класса II), для которых  $4^x$ -потенциал гравитационного поля является чисто мнимой величиной, т.е.  $A_\mu = i\bar{A}_\mu$  с условием

$$A_\mu A^\mu = \bar{\Delta}\bar{A}^2 - \bar{A}^2 \geq 0.$$

Эти вопросы тесно связаны с проблемой тахионов [41]. В этом случае  $4^x$ -векторы  $W_\mu$  и  $X_\mu$  имеют вид:

$$\begin{aligned} W_\mu &= B_\mu + i\bar{A}_\mu \\ X_\mu &= B_\mu - i\bar{A}_\mu = W'_\mu. \end{aligned}$$

Последнее обстоятельство делает уравнения распространения более симметричными. Хотелось бы обратить внимание, что описание квантовомеханических объектов не есть какие-то особые «законы» Природы. В рамках ТП все явления окружающего мира в той или иной степени квантованы. Т.е. квантование – это способ описания тех или иных явлений.

### 3.8 Введение в многоканальную теорию распространения

Понятие «структуры свойства» делает теорию переноса значительно более богатой и применимой к широкому кругу объектов. Как указывалось ранее, в основе ТП лежит постулат о том, что безразлично, какому объекту приписать структуру – самому свойству  $M$  или пространству. Поэтому часто вместо термина «структура свойства» будем употреблять «канал распространения».

Пусть имеется  $N$  каналов распространения. В качестве локальной характеристики сложного свойства, распространяющегося вдоль оси  $Ox$ , введем плотности по каждому каналу, т.е.  $\{n_{\rightarrow}(x,t)\xi; n_{\leftarrow}(x,t)\xi\}$ , где  $\xi = 1, 2, \dots, N$  – номер канала.

Аналогично, как и ранее, введем понятие тока свойства в данном канале



$$\Phi_{\leftarrow}(x, t | \xi) = n_{\leftarrow}(x, t, \xi) \cdot c_{\leftarrow}(x, t, \xi),$$

где скорость свойства в каждом канале понимается в смысле (3.16).

Введем по аналогии с одноканальным случаем характеристики слоя среды в одномерном пространстве отрезка  $[x_1; x_2]$ :

- коэффициент прохождения  $\Lambda(y, t, x_1 | x_2, \tau, \xi)$ , характеризующий ток свойства  $M - \Phi_{\rightarrow}(x_2 - 0, t + \tau, \xi)$  – на канале  $\xi$ , прошедшего слой  $(x_1, x_2)$  в момент времени  $t + \tau$ , если в момент времени  $t$  на канале под номером  $\eta$  поступает единичный ток свойства  $M - \Phi_{\rightarrow}(x, t') = \delta(t' - t)$ , где  $t'$  – текущее время.
- коэффициент отражения  $P(y, t, x_1 | x_2, \tau, \xi)$ , характеризующий ток свойства  $M - \Phi_{\leftarrow}(x_1 - 0, t + \tau, \xi)$  – на канале  $\xi$ , отразившийся в момент времени  $t + \tau$  от слоя  $(x_1, x_2)$ , если в момент времени  $t$  на канале под номером  $\eta$  поступает единичный ток свойства  $M - \Phi_{\rightarrow}(x, t') = \delta(t' - t)$ , где  $t'$  – текущее время.
- коэффициент поглощения  $R(y, t, x_1 | x_2, \tau, \xi) = \Phi_r(t + \tau)$ , характеризующий ток свойства  $M$ , поглотившийся (перешедший в другие свойства) в слое  $(x_1, x_2)$  в момент времени  $t + \tau$ , если на канал под номером  $\eta$  поступает единичный ток свойства  $M - \Phi_{\rightarrow}(x, t', \eta) = \delta(t' - t)$ , где  $t'$  – текущее время.

Напомним, что для введения выше коэффициентов речь идет о первом пересечении соответствующих границ (формально на границе можно поставить в точках  $x_1 - 0, x_2 + 0$  полностью поглощающие экраны).

Для  $N$  каналов распространения  $\Lambda$  и  $P$  представляют собой квадратные матрицы  $N \times N$ , а коэффициент  $R$  –  $N$ -мерный вектор.

Коэффициенты  $\Lambda, P, R$  полностью описывают решение одномерных задач ТП. Нетрудно видеть, что все диаграммы (см. п. 3.2) имеют место и в многоканальном случае. Справедливы соотношения (3.21) с учетом того, что коэффициенты  $\Lambda$  и  $P$  представляют собой уже матрицы, а в качестве единицы должна использоваться единичная матрица  $I$ .

В качестве локальной характеристики среды введем матрицу показателей рассеяния –  $a_{\leftarrow}(y | x, t | \xi)$ , определяемую из соотношения:

$$\bar{P}(y, t, x | s, x \pm dx, \xi) = a_{\leftarrow}(\eta | t, x | \xi) dx, \quad (3.68)$$

элементы которой можно трактовать как ток свойства, «отраженного» от единичного слоя на канале под номером  $\xi$  единичного тока.  $\bar{P}$  – Лаплас-образ коэффициента  $P$ ,  $S$  – параметр преобразования Лапласа.

Аналогично в качестве локальной характеристики введем вектор показателей поглощения  $\chi(y|x, t)$ , который можно трактовать как ток поглощенного свойства в единичном слое, если на канале под номером  $\eta$  «падает» единичный ток, т.е.

$$\bar{R}(\eta, t, x | s, x \pm dx) = \chi_{\leftarrow}(\eta | t, x) dx \quad (3.69)$$

В отличие от одноканального случая, необходимо ввести еще матрицу показателей прохождения  $q_{\leftarrow}(\eta | x, t | \xi)$ , у которой все диагональные элементы равны нулю ( $2N(N-1)$  в общем случае комплексных чисел). Элементы этой матрицы можно трактовать как ток свойства  $M$ . Отметим, что можно составить соотношение связи

$$\chi_{\leftarrow}^{kn} = q_{\leftarrow}^{kn} + \chi_{\leftarrow} \delta_{kn},$$

т.е. включить переход с канала на канал в поглощение (уход с данного канала).

Рассмотрим коэффициент прохождения тонкого слоя  $dx > 0$ . Имеем:

при  $\eta = \xi$

$$\Lambda(\xi, t, x | x + dx, \tau, \xi) = \left[ 1 - \sum_{n=1}^N a_{\leftarrow}(\xi | n) dx - \chi_{\leftarrow}(\xi) dx - \sum_{n=1}^N q(\xi | n) \right] \cdot \delta \left[ \tau - \frac{dx}{C_{\leftarrow}(\xi)} \right] \quad (3.70)$$

при  $\eta \neq \xi$

$$\Lambda(\eta, t, x | x + dx, \xi) = q(\eta | \xi) dx \cdot \varphi(\tau, dx)$$

здесь  $\varphi(\tau, dx)$  – функция распределения по временам перехода с канала  $\eta$  на канал  $\xi$ .

Примем, что  $\bar{\varphi}(s, dx) \rightarrow 0$  при  $dx \rightarrow 0$ . Для изображения  $\bar{\Lambda}$ , сохраняя только члены, пропорциональные  $dx$ , получим:

при  $\eta = \xi$

$$\bar{\Lambda}(\xi, t, x | x + dx, s, \xi) = 1 - \left[ \frac{S}{C_{\rightarrow}(\xi)} + \sum_{n=1}^N (a_{\rightarrow}(\xi|n) + q_{\rightarrow}(\xi|n) + \chi_{\rightarrow}(\xi)) \right] dx = 1 - S_{\rightarrow}(\xi | x, t, s)$$

при  $\eta \neq \xi$

$$\bar{\Lambda}(\eta, t, x | x + dx, s, \xi) = q_{\rightarrow}(\eta | \xi) dx = -S_{\rightarrow}(\eta | x, t, s | \xi) dx \quad (3.71)$$

Обозначим через  $\Theta_{\rightarrow}(\eta | t, x | \xi)$  выражение:

$$\Theta_{\rightarrow}(\eta | t, x | \xi) = \sum_{n=1}^N \left( a_{\rightarrow}(\xi | \eta) + q_{\rightarrow}(\xi | \eta) + \chi_{\rightarrow}(\xi) \right) \quad \eta = \xi, \quad (3.72)$$

которое будем матрицей показателей диссипации свойства  $M$ , т.е. матрицей, определяющей ток свойства, ушедшего с канала  $\eta$ . Тогда  $S_{\rightarrow}(\eta | t, x, s | \xi)$  имеет

вид:

$$S_{\rightarrow}(\eta | t, x, s | \xi) = \frac{S}{C_{\rightarrow}(\xi)} \delta_{\eta\xi} + \Theta_{\rightarrow}(\eta | t, x | \xi), \quad (3.73)$$

$$а \quad \bar{\Lambda}(\eta, t, x | x \pm dx, s, \xi) = \delta_{\eta\xi} - S_{\rightarrow}(\eta | x, t, s | \xi) dx,$$

где  $\delta_{\eta\xi}$  – символ Кронекера, т.е. элементы единичной матрицы  $I$ .

Не представляет труда обобщить полученные результаты, как на бесконечное число дискретных каналов, так и на случай непрерывного распределения каналов распространения. Для непрерывного распределения каналов следует ввести соответствующие плотности токов по каналам и заменить суммирование на интегрирование. Поэтому в дальнейшем значок «0» будет означать суммирование по повторяющимся дискретным переменным и интегрирование по непрерывным. Отметим, что все элементы  $\bar{\Lambda}, \bar{P}, \bar{R}$  являются элементами алгебры  $R_{\circ}$ .

В качестве переменной  $\xi$  может быть использована любая характеристика свойства  $M$ , например, в физической кинетике это может быть скорость частиц. В этом случае уравнения распространения представляют собой кинетические уравнения.

По аналогии с концепцией, представленной в п. 3.2, определим матрицу интегральных коэффициентов прозрачности, отражения и диагональную матрицу поглощения следующим образом:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\leftarrow}(\eta, x, t | x \pm \Delta x, \xi) &= \int_0^{\infty} \Lambda_{\leftarrow}(\eta, t, x | x \pm \Delta x, \tau, \xi) d\tau = \bar{\Lambda}_{\leftarrow}(\eta, x | x + \Delta x, \xi) \Big|_{S=0} \\
p_{\leftarrow}(\eta, x, t | x \pm \Delta x, \xi) &= \int_0^{\infty} P_{\leftarrow}(\eta, t, x | x \pm \Delta x, \tau, \xi) d\tau = \bar{P}_{\leftarrow}(\eta, x | x + \Delta x, \xi) \Big|_{S=0} \\
r_{\leftarrow}(\eta, x, t | x \pm \Delta x, \xi) &= \int_0^{\infty} R_{\leftarrow}(\eta, t, x | x \pm \Delta x, \tau, \xi) d\tau = \bar{R}_{\leftarrow}(\eta, x | x + \Delta x, \xi) \Big|_{S=0}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\Delta x \geq 0$$

Как и ранее, можно ввести соответствующие средние времена:

$$\begin{aligned}
\bar{t}_{\lambda_{\leftarrow}}(y | \Delta x | \xi) &= \lambda_{\leftarrow}^{-1}(y | \Delta x | \xi) \int_0^{\infty} \tau \Lambda_{\leftarrow}(y, x | x \pm \Delta x, \tau, \xi) d\tau = -\frac{\partial}{\partial S} \ln \bar{\Lambda}_{\leftarrow}(\eta, x | x \pm \Delta x, \xi) \Big|_{S=0} \\
\bar{t}_{p_{\leftarrow}}(y | \Delta x | \xi) &= -\frac{\partial}{\partial S} \ln \bar{P}_{\leftarrow}(\eta, x | x \pm \Delta x, \xi) \Big|_{S=0} \\
\bar{t}_{r_{\leftarrow}}(y | \Delta x | \xi) &= -\frac{\partial}{\partial S} \ln \bar{R}_{\leftarrow}(\eta, x | x \pm \Delta x, \xi) \Big|_{S=0}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Смысл каждого из них очевиден. Например,  $\bar{t}_{\lambda_{\leftarrow}}(y | \Delta x | \xi)$  – среднее время прохождения в направлении оси  $Ox$  слоя  $(x; x + \Delta x)$ , если свойство «падает» на этот слой на канал  $\eta$  в момент времени  $t$ , а выход осуществляется на канале  $\xi$ .

Введем понятие средней скорости прохождения свойством  $M$  слоя  $\Delta x$  на канале  $\xi$ :

$$\left\langle v_{\leftarrow}(\xi, \Delta x) \right\rangle \stackrel{Def}{=} \frac{\Delta x}{\bar{t}_{\lambda_{\leftarrow}}(\xi | \Delta x | \xi)} \tag{3.76}$$

Дадим определение понятия скорости свойства  $M$  на канале  $\xi$ .

Скоростью свойства  $M$  в точке  $x$  в момент времени  $t$  в направлении оси  $Ox$  (против оси  $Ox$ ) на канале  $\xi$  будем называть предел средней скорости, если он существует, при толщине слоя  $\Delta x \rightarrow 0$ ,

$$c_{\leftarrow}(t, x, \xi) \stackrel{Def}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\bar{t}_{\lambda_{\leftarrow}}(\xi | \Delta x | \xi)} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\bar{\Lambda}_{\leftarrow}(S=0)(\xi, x | x + \Delta x, \xi)}$$

Или в виде:

$$c_{\leftarrow}^{-1}(t, x, \xi) = S'_{\leftarrow}(\xi | t, x | \xi) \Big|_{S=0}$$

Скорость свойства  $M$  на канале  $\xi$  есть характеристика не только самого свойства, но и среды в данном базисе. Таким образом, у сложного свойства может иметься несколько скоростей (например, скорость звука в твердых телах). Понятие скорости свойства  $M$  на канале  $\xi$  легко обобщается и на непрерывное распределение каналов. Аналогично с п. 3.2 можно ввести и понятие «ускорения» свойства  $M$  на канале  $\xi$ . Учитывая нестационарный принцип, можно утверждать, что все выражения для одноканального случая справедливы и для многоканального (например, выражения (3.21) и (3.24)) с учетом некоммутативности умножения. Уравнения одномерного распространения (3.28) в этом случае примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\Phi_{\rightarrow}(x, t, \xi)}{c_{\rightarrow}(x, t, \xi)} \right] + \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_{\rightarrow}(x, t, \xi)] + \Phi_{\rightarrow}(t, x, \eta) \circ \Theta_{\rightarrow}(y | t, x | \xi) - \Phi_{\leftarrow}(x, t, y) \circ a_{\leftarrow}(y | t, x | \xi) = 0 \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\Phi_{\leftarrow}(x, t, \xi)}{c_{\leftarrow}(x, t, \xi)} \right] + \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_{\leftarrow}(x, t, \xi)] + \Phi_{\leftarrow}(t, x, \eta) \circ \Theta_{\leftarrow}(y | t, x | \xi) - \Phi_{\rightarrow}(x, t, y) \circ a_{\rightarrow}(y | t, x | \xi) = 0$$

Таким образом, уравнения (3.77) и уравнения (3.28) имеют один и тот же вид с той лишь разницей, что вместо обычного умножения рассматривается умножение в смысле « $\circ$ ». Использование данного метода и метода диаграмм позволяет расширить классическую теорию переноса [42-46].

Заметим, что все, что относилось к одноканальному случаю в трехмерном варианте, имеет место и в многоканальном случае. В частности, для многоканального случая справедливы уравнения типа (3.39), (3.40) и (3.43) с той лишь разницей, что в случае дискретного числа каналов квазипотенциалы  $A_{\mu}$  и  $B_{\mu}$  будут представлять собой матрицы. Отметим, что в этом случае получаются значительно более интересные результаты, чем в одноканальном варианте [47-51].

Вернемся к понятию взаимодействия свойств. Как указывалось выше, описание взаимодействия свойств можно вести двояко. Пусть имеются два взаимодействующих свойства  $M_1$  (с  $N_1$  каналами распространения) и  $M_2$  (с  $N_2$  каналами распространения).

Первый подход будет заключаться в том, что можно рассмотреть свойство  $M$  ( $M = M_1 \oplus M_2$ ) с  $N = N_1 + N_2$  каналами распространения. При этом квазигамильтониан целесообразно представить в виде:

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & H' \\ H'' & H_2 \end{pmatrix}, \quad (3.78)$$

сохранив уравнения распространения для  $N$  каналов. Причем,  $H_1$  относится к первому свойству, а  $H_2$  – ко второму. Матрицы  $H'$  и  $H''$  (число элементов  $N_1 \times N_2$  в каждой) описывают взаимодействие свойств  $H_1$  и  $H_2$ . Если матрицы  $H'$  и  $H''$  состоят только из нулевых элементов, то будем говорить, что свойства  $M_1$  и  $M_2$  не взаимодействуют. Взаимодействие будем называть слабым, если элементы матриц  $H'$  и  $H''$  малы. Малость элементов будем определять применимостью математической теории возмущений к данному объекту. Из вышесказанного следует, что любое  $N$ -канальное свойство можно рассматривать как  $N$  одноканальных (простых) взаимодействующих свойств. Таким образом, простое комплексное свойство можно рассматривать как два простых действительных свойства, взаимодействующих друг с другом. При этом, по мере распространения, действительная часть превращается в мнимую и наоборот. В стационарном состоянии явно виден обменный характер взаимодействия.

Второй подход – полевой. Некоторые характеристики свойства  $M_1$  определяют токи свойства  $M_1$ . Эти токи определяют поле  $I_1$ , т.е. свойство с источниками (см. уравнения Максвелла для свойств). Промежуточное свойство  $I$  определяет локальные характеристики среды для второго свойства  $M_2$  и, тем самым, воздействует на него и наоборот. Причем для свойства  $I$  справедливы такие же по виду уравнения распространения, но с источниками.

Кратко остановимся на описании распространения простого свойства в трехмерном пространстве. Выберем в данной точке пространства некоторое направление, характеризуемое единичным вектором  $\vec{e}_{\varphi,\theta}$ , где  $\varphi, \theta$ , например, суть углы Эйлера. Уравнения (3.77) в этом случае примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\Phi_{\leftarrow}(\varphi, \Theta)}{c_{\leftarrow}(\varphi, \Theta)} \right] \pm \vec{e}_{\varphi, \Theta} \cdot \vec{\nabla}_{\leftarrow} \Phi_{\leftarrow}(\varphi, \Theta) + \Phi_{\leftarrow}(\vec{e}, \vec{\Theta}) \circ \Theta_{\leftarrow}(\vec{\varphi}, \vec{\Theta} | \varphi, \Theta) - \Phi_{\leftarrow}(\vec{\varphi}, \vec{\Theta}) \circ a_{\leftarrow}(\vec{\varphi}, \vec{\Theta} | \varphi, \Theta) = 0. \quad (3.79)$$

Здесь  $\Phi(\vec{\varphi}, \vec{\Theta}) \circ \Theta(\vec{\varphi}, \vec{\Theta} | \varphi, \Theta) \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\vec{\varphi}, \vec{\Theta}) \Theta(\vec{\varphi}, \vec{\Theta} | \varphi, \Theta) d\vec{\varphi} d\vec{\Theta}$

В данном случае переменные  $\varphi$  и  $\theta$  являются характеристиками свойства. В частном случае, если показатели среды можно представить в виде:

$$a_{\leftarrow}(\varphi, \Theta) = a_{\leftarrow} + \Delta \vec{a}_{\leftarrow} \vec{e}_{(\varphi, \Theta)},$$

$$\chi_{\leftarrow}(\varphi, \Theta) = \chi_{\leftarrow} + \Delta \vec{\chi}_{\leftarrow} \vec{e}_{(\varphi, \Theta)},$$

где  $a_{\leftarrow}, \chi_{\leftarrow}, \Delta \vec{a}_{\leftarrow}, \Delta \vec{\chi}_{\leftarrow}$  и  $c$  могут зависеть от координат и времени и не зависят от угла ориентации, то уравнение (3.79) для простого скалярного свойства можно представить в виде (3.30) или (3.39).

В общем случае, пусть эволюция изучаемого аддитивного свойства  $M$  описывается зависимостью плотности свойства  $n(t, x, \xi)$ . Под плотностью свойства  $M$  понимается количественная характеристика свойства в единичном объеме пространства действительных непрерывных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , образующих базис линейного векторного пространства в зависимости от переменных  $t$  и  $\xi$ :  $t = \{t_1, t_2, \dots, t_L\}$  – элементы  $L$ -мерного векторного пространства, описывающие эволюцию данного свойства, например, текущее время  $t$ ,  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  – набор переменных, описывающих структуру свойства, например, цвет свойства, направление распространения вдоль заданной оси ( $\vec{\leftarrow}$ ) и т. д.

В данной работе ограничимся рассмотрением линейного случая. Примем, что состояние свойства при  $t = \bar{t}$  полностью определяет его состояние при всех остальных значениях  $t$ . Будем представлять  $n(t, x, \xi)$  в виде:

$$n(t, x, \xi) = \int_{(V)} n(\bar{t}, \bar{x}, \eta) \circ G(\bar{t}, \bar{x}, \eta | t - \bar{t}, x - \bar{x}, \xi) dV_{\bar{x}} \quad (3.80)$$

Здесь  $G(t, x, y | \tau, r, \xi)$  играет роль матрицы плотности в физике [52] и описывает переход «свойства» из одного состояния в другое, знак «0» означает суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным значениям параметра  $\eta$ ,  $\tau = t - \bar{t}$ ,  $r = x - \bar{x}$  – векторы переноса.

Примем, что все значения  $x_n$  принадлежат всей числовой оси. Рассмотрим Фурье-образ  $\bar{G}$ , а именно:

$$G(t, x, \eta | \tau, k, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \sum_{n=1}^N k_n r_n} G(t, x, \eta | \tau, r, \xi) dr_1 \dots dr_N$$

Тогда  $\bar{G}$  можно представить в виде:

$$\bar{G}(t, x, \eta | \tau + \Delta\tau, k, \xi) = \bar{G}(t, x, \eta | \tau, k, \xi) \circ \Delta \bar{G}(t + \tau, x, \eta | \Delta\tau, k, \xi) \quad (3.81)$$

Выражение (3.78) представляет по сути уравнения Колмогорова-Смолуховского-Чепмена для данного случая. Знак  $\Delta$  понимается в смысле (2.31) только по всем  $N$  - переменным.

Учитывая, что  $\bar{G}(t, x, y | 0, k, \xi) = I_{\eta\xi}$  – единица соответствующего кольца, и обозначая

$$H_n(t, x, \eta | k, \xi) = \frac{\partial}{\partial r_n} \bar{G}(t, x, y | \tau, k, \xi) \Big|_{\tau=0}, \text{ получим:}$$

$$\Delta\tau = d\tau$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_n} \bar{G}(t, x, \eta | \tau, k, \xi) = \bar{G}(t, x, \eta | \tau, k, \xi) \circ \Delta H_n(t + \tau, x, \eta | k, \xi) \quad (3.82)$$

$$\Delta\tau = \tau \quad \tau \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_n} \bar{G}(t, x, \eta | \tau, k, \xi) = H_n(t, x, \eta | k, \xi) \circ \Delta \bar{G}(t, x, \eta | \tau, k, \xi) + \frac{\partial}{\partial t_n} \bar{G}(t, x, \eta | \tau, k, \xi).$$

Отсюда для  $\bar{G}$  имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t_n} \bar{G}(t | \tau) = \bar{G}(t, \tau) \circ \Delta H_n(t + \tau) - H_n(t) \circ \Delta \bar{G}(t, \tau). \quad (3.83)$$

Выражения для  $H_n(t, x, \eta, k, \xi)$  строятся для каждой модели свойства и зависят как от структуры свойства, так и от вида модели. В частности, уравнения (3.49) суть частный случай общих уравнений (3.82).



## 4. Уравнения переноса аддитивных свойств

### 4.1 Уравнения переноса

Физические процессы в окружающем мире описываются набором характеристик, которым можно придать некоторые числовые значения. Под процессом будем понимать упорядоченную последовательность событий, характеризуемую набором определенных числовых величин. Человеческое сознание (наблюдатель) способно лишь устанавливать причинно-следственные связи между различными явлениями (по крайней мере, Так принято считать). Частично упорядоченное множество причинно-следственных связей и определяет такое понятие как время. Рассмотрим систему, состояние которой будем описывать набором обобщенных координат  $q_1 \dots q_N$  – действительных чисел. Кроме того, система может характеризоваться совокупностью дискретных параметров, которым взаимнооднозначно будем приписывать некоторое натуральное число, называемое каналом распространения. Такие системы будем называть простыми.

Пусть в момент времени  $t$  система находится в одном из возможных состояний  $\eta$  и обобщенными координатами  $\vec{q} = \{q_1 \dots q_N\}$  – вектор в соответствующем конфигурационном пространстве. Введем матрицу перехода  $\Lambda_{\eta\xi}(t, q_1 \dots q_N | \tau | \theta_1 \dots \theta_N) = \Lambda_{\eta\xi}(t, \vec{q} | \tau | \vec{\theta})$ , которую будем интерпретировать как плотность вероятности перехода системы с канала  $\eta$  на канал  $\xi$  за время  $\tau$  и обобщенные координаты изменяются на величину  $\vec{\theta}$ . Тогда для матрицы перехода можно написать следующее равенство:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\eta\xi}(t, \vec{q} | \tau | \vec{\theta}) &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_{\eta\nu}(t, \vec{q} | \tau_1 | \vec{r}) \Lambda_{\nu\xi}(t + \tau_1, \vec{q} + \vec{r} | \tau - \tau_1 | \vec{\theta} - \vec{r}) d\Omega = \\ &= \Lambda_{\eta\nu}(t, \vec{q} | \tau_1 | \vec{r}) \circ \Lambda_{\nu\xi}(t + \tau_1, \vec{q} + \vec{r} | \tau - \tau_1 | \vec{\theta} - \vec{r}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам  $\nu$  подразумевается суммирование.

Уравнение (4.1) представляет собой известное уравнение Смолуховского-Колмогорова-Чепмена и означает переход системы из одного состояния в другое через всевозможные промежуточные состояния, согласно известным теоремам сложения и умножения вероятностей. Таким образом, рассматриваемые процессы являются марковскими. Воспользуемся обратным

преобразованием Фурье (2.37) и согласно (2.32) и (2.38) для Фурье-образа  $\tilde{\Lambda}$  будем иметь:

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_{\eta\xi}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} N \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{P} \cdot \vec{\theta}\right) \Lambda_{\eta\xi}(t, \vec{q}|\tau|\vec{\theta}) d\Omega = \\ &= \tilde{\Lambda}_{\eta\nu}(t, \vec{q}|\tau_1|\vec{P}) \circ \tilde{\Lambda}_{\nu\xi}(t + \tau_1, \vec{q}|\tau - \tau_1|\vec{P}).\end{aligned}\quad (4.2)$$

Если система существует в любой момент времени, то при  $\tau = 0$

$$\tilde{\Lambda}_{\eta\xi}(t, \vec{q}|0|\vec{P}) = \delta_{\eta\xi} = I, \quad (4.3)$$

где  $I$  – единичная матрица (единица кольца  $R_0$ ).

Для малых времен  $\tau$ , при разложении  $\tilde{\Lambda}$  по степеням  $\tau$  получим:

$$\tilde{\Lambda}_{\eta\xi}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P}) + \frac{1}{i\hbar} H_{\eta\xi}(t, \vec{q}|\vec{P})\tau + \dots \quad (4.4)$$

Матрицу  $H_{\eta\xi}(t, \vec{q}|\vec{P})$  будем называть квазигамильтонианом системы.

Положим в уравнении (4.2)  $\tau_1 = d\tau$ , тогда

$$\begin{aligned}\Lambda_{\eta\xi}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P}) &= \left[ \delta_{\eta\nu} + \frac{1}{i\hbar} H_{\eta\nu}(t, \vec{q}|\vec{P})d\tau \right] \circ \\ &\circ \left[ \Lambda_{\nu\xi}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P}) + \tilde{\Lambda}'_{\nu\xi}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P})d\tau - \tilde{\Lambda}'_{\tau}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P})d\tau + 0(d\tau)^2 \right].\end{aligned}$$

После несложных алгебраических преобразований получим:

$$\tilde{\Lambda}'_{\tau\eta\xi}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P}) = \frac{1}{i\hbar} H_{\eta\nu}(t, \vec{q}|\vec{P}) \circ \Lambda_{\nu\xi}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P}) + \tilde{\Lambda}'_{\tau\eta\xi}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P}). \quad (4.5)$$

Положим теперь в уравнении (4.2)  $\tau_1 = \tau$   $\tau \rightarrow \tau + d\tau$ , тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_{\eta\xi}(t, \vec{q}|\tau + d\tau|\vec{P}) &= \tilde{\Lambda}_{\eta\xi}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P}) + \tilde{\Lambda}'_{\tau\eta\xi}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P})d\tau + 0(\tau^2) = \\ &= \tilde{\Lambda}_{\eta\nu}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P}) \circ \tilde{\Lambda}_{\nu\xi}(t + \tau, \vec{q}|d\tau|\vec{P}) = \\ &= \tilde{\Lambda}_{\eta\nu}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P}) \circ \left[ \delta_{\nu\xi} + \frac{1}{i\hbar} H(t + \tau, \vec{q}|\vec{P}|d\tau) \right] + 0(\tau^2).\end{aligned}$$

Сохраняя слагаемые первой степени по  $d\tau$  будем иметь:

$$i\hbar \tilde{\Lambda}'_{\tau\eta\xi}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P}) = \tilde{\Lambda}_{\eta\nu}(t, \vec{q}|\tau|\vec{P}) \circ H_{\nu\xi}(t + \tau, \vec{q}|\vec{P}). \quad (4.6)$$

Уравнения (4.5) и (4.6) для Фурье-образов  $\Lambda$  будем называть уравнениями переноса. Выражение для квазигамильтониана  $H$  должно строиться из

соответствующих моделей в каждом конкретном случае. Если  $H_{\eta\xi}(\vec{q}|\vec{P})$  не зависит от времени  $t$  явно, то матрицы  $H$  и  $\tilde{\Lambda}$  коммутируют в кольце  $R_0$ . В задачах чаще приходится вводить не длительность процесса, а время начала события  $t$  и время окончания события  $T = t + \tau$ . Так как

$$\tilde{\Lambda}_t(t|T) = \tilde{\Lambda}'_t(t|\tau)_{\tau=T-t} - \tilde{\Lambda}'_T(t|T),$$

то справедлива следующая система уравнений переноса:

$$\begin{aligned} i\hbar \tilde{\Lambda}'_{\eta\xi t}(t, \vec{q}|T|\vec{P}) &= H_{\eta\nu}(t, \vec{q}|\vec{P}) \circ \tilde{\Lambda}_{\nu\xi}(t, \vec{q}|T|\vec{P}), \\ i\hbar \tilde{\Lambda}'_{\eta\xi T}(t, \vec{q}|T|\vec{P}) &= \tilde{\Lambda}_{\eta\nu}(t, \vec{q}|T|\vec{P}) \circ H_{\nu\xi}(T, \vec{q}|\vec{P}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

В случае если  $H(\vec{q}|\vec{P})$  не зависит от времени явно, то решение уравнений (4.7) в операторной форме можно представить в виде:

$$\Lambda_{\eta\xi}(\vec{q}|\tau|\vec{P}) = \exp \circ \left[ -\frac{i}{\hbar} H_{\eta\xi}(\vec{q}|\vec{P})\tau \right]. \quad (4.8)$$

Вся сложность проблемы будет заключаться в приведении выражения (4.8) к функции.

## 4.2 Уравнение эволюции простых систем

Система уравнений (4.7) или выражение (4.8) позволит описывать Фурье-образы распределения  $\Lambda$  на языке кольца  $R_0$ . Для получения дифференциальных соотношений необходимо в уравнениях (4.7) перейти к оригиналам. Для простоты рассмотрим случай с одной переменной  $x$ , т.е.

$$\Lambda = \Lambda(x, t|\tau|r_x) = \Lambda(x|r_x)$$

$$\tilde{\Lambda}(x_1|p_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(x|r_x) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_x r_x \right] d r_x.$$

Уравнение (4.7) в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} i\hbar \tilde{\Lambda}'_T(x|p_x) &= \tilde{\Lambda}(x|p_x) \circ H(x|p_x) \stackrel{Def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^n}{n!} H_X^{(n)}(x, p_x) \tilde{\Lambda}_{p_x}(x|p_x) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^n}{n!} H_X^{(n)}(x_1|p_x) \Lambda(x|r_x) \cdot \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_x r_x \right] \left( \frac{i}{\hbar} \right)^n \cdot r_x^n d r_x = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x+r_x|p_x) \cdot \Lambda(x|r_x) \cdot \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_x r_x \right] d r_x. \end{aligned}$$

Перейдем к новой переменной  $z = x + r_x$  и  $\bar{\Lambda}(x|z)$  описывает переход из точки  $x$  в точку  $z$  за время  $\tau$ . Тогда

$$\begin{aligned} i\hbar \tilde{\Lambda}'_T(x|p_x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(z_1|p_x) \Lambda(x|z) \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_x (z-x)\right] dz = \\ &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} x p_x\right] \int_{-\infty}^{+\infty} H(z_1|p_x) \bar{\Lambda}(x|z) \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_x z\right] dz. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\tilde{\Lambda}(x|p_x) \exp\left[\frac{i}{\hbar} x p_x\right] \rightarrow \bar{\Lambda}(x|z)$ , получим

$$\begin{aligned} i\hbar \tilde{\Lambda}'_T(x|p_x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(z_1|p_x) \bar{\Lambda}(x|z) \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_x z\right] dz = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_x z\right] dz \left[ H\left(\frac{1}{z} | i\hbar D_z^2\right) \cdot \bar{\Lambda}(x|z) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для случая одной переменной имеем следующее уравнение:

$$i\hbar \bar{\Lambda}'_T(t, x|T|z) = H\left(T, \frac{1}{z} | i\hbar D_z^2\right) \cdot \bar{\Lambda}(t, x|T|z). \quad (4.9)$$

Здесь  $D_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}$  и согласно [7] номера под некоммутационными величинами

обозначают порядок их следования справа налево.

В общем случае с учетом того, что  $[D_n; z_k] = \delta_{nk}$ ,  $\vec{z} = \vec{q} + \vec{\theta}$  и

$D_n \equiv \frac{\partial}{\partial z_n}$  выражение (4.9) легко обобщается на случай многих переменных.

Окончательно имеем:

$$i\hbar \bar{\Lambda}'_{T \xi \eta}(t, \vec{q}|T|\vec{z}) = H_{\xi \nu}^T\left(T, \frac{1}{\vec{q}} | i\hbar \vec{D}_z^2\right) \cdot \bar{\Lambda}_{\nu \eta}^T(t, \vec{q}|T|\vec{z}). \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) описывает эволюцию простых систем во времени при заданных начальных и граничных условиях.  $\bar{\Lambda}^T$  – транспонированная матрица  $\bar{\Lambda}$

$$\bar{\Lambda}_{\eta \xi}(t, \vec{q}|T|\vec{z})|_{T=t} = \delta(\vec{z} - \vec{q}). \quad (4.11)$$

Для построения уравнения (4.10) можно предложить очень простую схему.

1. Строится физическая модель системы («правила игры») и рассматриваются возможные перемещения.

2. Используя обратное преобразование Фурье, определяется транспорированный квазигамильтониан этой системы.
3. Заменой  $p_n$  на  $i\hbar \frac{\partial}{\partial z_n}$  строим уравнение эволюции (4.10).

Рассмотрим несколько примеров:

Пример 1. Движение классической частицы при наличии поля случайных сил.

Задача движения частицы при наличии случайных сил рассматривается в статистической физике [52, 53]. Подобного рода задачи тем интересны, что одним из выводов физики XX века следует признать следующий: «В Природе не существует абсолютно гладких кривых» (как и поверхностей!). Чем более точно производятся измерения, тем в большей степени зависимость измеряемой величины, например от времени, становится менее гладкой.

Пусть материальная точка массой  $m$  находится в поле регулярной силы  $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ . Предложим следующую модель («правило игры»). Кроме регулярной силы (приходящего и уходящего тока импульса) частица может получать импульс  $\vec{p}$ , распределенный по нормальному закону с дисперсией  $\sigma^2$ . Нормальный закон распределения можно обосновать законом больших чисел. Действие случайной силы подчиняется экспоненциальному закону распределения со средним временем  $\tau_0 = 1/\lambda$  (как закон радиоактивного распада). Следует ожидать, что это достаточно типичная картина для случайных сил. Введем функцию распределения  $\Lambda(t_0, \vec{R}, \vec{p}_0 | \tau | \vec{q}, \vec{p})$ . Здесь  $\vec{R}$  и  $\vec{p}_0$  – координаты и импульс частицы в момент времени  $t_0$  соответственно;  $\vec{p} = \vec{r} - \vec{R}$  – вектор перемещения за время  $\tau$ ;  $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}_0$  – изменение импульса за это же время. В силу условия нормировки

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(t_0, \vec{R}, \vec{p}_0 | \tau | \vec{q}, \vec{p}) d\rho_x d\rho_y d\rho_z dq_x dq_y dq_z \equiv 1.$$

Для малого промежутка времени  $\tau$  выражение для  $\Lambda(t_0 | \tau)$  имеет вид:

$$\Lambda(t_0, \vec{R}, \vec{p}_0 | \tau | \vec{q}, \vec{p}) = \delta\left(\vec{p} - \frac{\vec{p}_0 \tau}{m}\right) \times \left[ (1 - \exp[-\lambda \tau]) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{(\vec{q} - \vec{F} \tau)^2}{2\sigma^2}\right] + \exp[-\lambda \tau] \delta(\vec{q} - \vec{F} \tau) \right]. \quad (4.12)$$

Применим к обеим частям равенства (4.12) обратное преобразование Фурье. Имеем:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}(t_0, \vec{R}, \vec{p}_0 | \tau | \vec{p}, \vec{u}) &= \iint \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \Lambda(t_0, \vec{R}, \vec{p}_0 | \tau | \vec{p}, \vec{q}) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{S} \vec{p} - \vec{u} \vec{q}) \right] dV_q dV_p = \\
&= \exp \left[ \frac{i \vec{p}_0 \vec{S}}{\hbar m} \tau \right] \left[ (1 - \exp[\lambda \tau]) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \vec{u} \vec{F} \tau \right] \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2\hbar^2} u^2 \right] + \exp[-\lambda \tau] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \vec{u} \vec{F} \tau \right] \right] = \\
&= 1 + \left[ \frac{i \vec{p}_0 \vec{S}}{\hbar m} + \lambda \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2\hbar^2} u^2 \right] + \frac{i}{\hbar} \vec{F} \vec{u} - \lambda \right] \tau.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Таким образом, квазигамильтониан  $H$ , согласно (4.4), имеет вид:

$$H = \frac{i \vec{p}_0 \vec{S}}{m \hbar} + \frac{i}{\hbar} \vec{F} \vec{u} + \lambda \left[ \exp \left[ -\frac{\sigma^2 (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{2 \hbar^2} \right] - 1 \right]. \tag{4.14}$$

В соответствии с уравнением (4.10) будем иметь:

$$\begin{aligned}
i \hbar \Lambda'_T(t, \vec{R}, \vec{p}_0 | T | \vec{r}, \vec{p}) &= -\frac{\vec{p}}{m} \vec{\nabla} \Lambda(t, \vec{R}, \vec{p}_0 | T | \vec{r}, \vec{p}) - (\vec{\nabla}_p \vec{F}(\vec{r}, \vec{p})) \times \\
&\times \Lambda(t, \vec{R}, \vec{p}_0 | T | \vec{r}, \vec{p}) + \lambda \left[ \exp \left[ \frac{\sigma^2}{2\hbar^2} D_p^2 \right] - 1 \right] \cdot \Lambda(t, \vec{R}, \vec{p}_0 | T | \vec{r}, \vec{p}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Уравнение (4.15) описывает плотность вероятности обнаружения частицы в момент времени  $T$  в точке с координатами  $\vec{r}$  и импульсом  $\vec{p}$  в рамках сделанных допущений, если в момент времени  $t$  она находилась в точке с координатами  $\vec{R}$  и имела импульс  $\vec{p}_0$ .

**Пример 2.** Рассмотрим распространение объекта (частицы) в трехмерном евклидовом пространстве, состояние которого в момент времени  $t$  будет описываться его декартовыми координатами  $\vec{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$ .

Примем следующую модель: частица распространяется с постоянной скоростью  $c$ ; направление распространения в момент времени  $t$  будет характеризоваться единичным вектором скорости  $\vec{v}$ ; вектор скорости  $\vec{v}$  может поворачиваться в пространстве с угловой скоростью  $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$ ; кроме того возможен процесс рассеивания, описываемый распределением  $A(t, \vec{x}, \vec{v} | \vec{\theta})$ , где  $\vec{\theta} = \vec{u} - \vec{v}$  – изменение единичного вектора скорости рассеивания частицы в момент времени  $t$  с координатами  $\vec{x}$ ; введем еще показатель поглощения  $\varkappa(\vec{x}, t, \vec{v})$ . Для малого промежутка времени, согласно сделанным допущениям, выражение для  $\Lambda(t, \tau)$  примет вид:

$$\Lambda(t, \vec{x}, \vec{v} | \tau | \vec{r}, \vec{\theta}) = [1 - c(a + \varkappa)\tau] \delta(\vec{r} - c\vec{v}\tau) \cdot \delta[\vec{\theta} - \vec{\omega} \times \vec{v} c d\tau] + c\tau A(t, \vec{x}, \vec{v} | \vec{\theta}) \delta(\vec{r}), \quad (4.16)$$

где  $a(t, \vec{x}, \vec{v}) = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} A(t, \vec{x}, \vec{v} | \vec{\theta}) d\theta_x d\theta_y d\theta_z$  – интегральный показатель рассеяния,

$\vec{r} = \vec{z} - \vec{x}$  – вектор перемещения.

Соотношение (4.16) можно интерпретировать следующим образом: если изучаемое аддитивное свойство (частица) не рассеивается за время  $\tau$  (эта доля равна:  $[1 - c(a + \varkappa)\tau]$ ), то оно переместится на расстояние  $\vec{r} = c\vec{v}\tau$ , при этом его скорость изменилась на вектор  $\vec{\omega} \times \vec{v} c d\tau$ ; если же произошел акт рассеивания с долей рассеяния  $A_{c\tau}$ , то с точностью до малых высшего порядка малости получим второе слагаемое в выражении (4.16).

Применим к обеим частям равенства (4.16) обратное преобразование Фурье. Имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(t, \vec{x}, \vec{v} | \tau | \vec{p}, \vec{k}) &= \int \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(t, \vec{x}, \vec{v} | \tau | \vec{r}, \vec{\theta}) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} + \vec{k} \cdot \vec{\theta})\right] = \\ &= [1 - c(a(\vec{x}, \vec{v}, t) + \varkappa(\vec{x}, \vec{v}, t))\tau] \exp\left[\frac{ic}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{v} + \vec{k} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v})c\tau)\right] + \\ &+ c\tau \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} A(t, \vec{x}, \vec{v} | \vec{\theta}) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\vec{k} \cdot \vec{\theta}\right] d\Omega_{\theta}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Таким образом, квазигамильтониан  $H$  примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} H(t, \vec{x}, \vec{v} | \vec{p}, \vec{k}) &= \frac{i}{\hbar} [\vec{v} \cdot \vec{p} + \vec{k} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v})] - [a(\vec{x}, \vec{v}, t) + \varkappa(\vec{x}, \vec{v}, t)] + \\ &+ \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} A(t, \vec{x}, \vec{v} | \vec{\theta}) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\vec{k} \cdot \vec{\theta}\right] d\Omega_{\theta}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

В соответствии с уравнением (4.10) будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{c} \Lambda'_T(t, \vec{x}, \vec{v} | T | \vec{z}, \vec{u}) &= -i\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_z \Lambda(t, \vec{x}, \vec{v} | T | \vec{z}, \vec{u}) - \\ &- i[a(T, \vec{z}, \vec{u}) + \varkappa(T, \vec{z}, \vec{u})] \cdot \Lambda(t, \vec{x}, \vec{v} | T | \vec{z}, \vec{u}) - i\vec{\nabla}_u [\omega(T, \vec{z}, \vec{u}) \times \vec{u} \cdot \Lambda(t, \vec{x}, \vec{v} | T | \vec{z}, \vec{u})] + \\ &+ i \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} A[T, \vec{z}, \vec{u} - \vec{\theta} | \vec{\theta}] \cdot \Lambda(t, \vec{x}, \vec{v} | T | \vec{z}, \vec{u} - \vec{\theta}) d\Omega_{\theta}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Интегрально-дифференциальное уравнение (4.19) описывает распространение простого аддитивного квантового свойства (частицы). Приведенные в главе 3 уравнения распространения простого комплексного свойства (см. п. 3.5) являются дифференциальным приближением

кинетического уравнения (4.19). При этом все дифференциальные показатели рассеивания  $\Lambda$  и поглощения  $\mathfrak{a}$  следует считать чисто мнимыми величинами. Акты рассеивания и «поглощения» (рождения) превращают действительную часть в мнимую и наоборот, т.е. у любого простого устойчивого свойства существует, по крайней мере, два «начала», – условно «белое» (действительное) и условно «черное» (мнимое).

Рассмотрим физический смысл переменной преобразования Фурье  $\vec{p}$ . Определим среднее перемещение аддитивного свойства  $\langle \vec{r} \rangle$ . Для этого рассмотрим выражение  $-i\hbar \vec{\nabla}_p \ln \tilde{\Lambda}$  для малых  $\tau$ .

С одной стороны с учетом (4.4) получаем, что

$$-i\hbar \vec{\nabla}_p \ln \tilde{\Lambda} = \vec{\nabla}_p H \cdot \tau.$$

С другой стороны для малых  $\tau$ , а, следовательно, и малых  $\vec{r}$  имеем:

$$-i\hbar \vec{\nabla}_p \tilde{\Lambda}(\vec{p}) = -i\hbar \frac{\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\hbar} \vec{r} \Lambda \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{r} \right] d\Omega_r}{\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{r} \right] \Lambda(\vec{r}) d\Omega_r} \cong \frac{\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{r} \Lambda(\vec{r}) d\Omega_r}{\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{r} \Lambda(\vec{r}) d\Omega_r} = \langle \vec{r} \rangle. \quad (4.20)$$

Таким образом, средняя скорость свойства:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\langle \vec{r} \rangle}{\tau} = \vec{\nabla}_p H.$$

Отсюда следует вывод, если принять гамильтониан  $H(t, q, p)$  квадратичная форма от квазиимпульса, то

$$\langle \vec{v} \rangle = \vec{\nabla}_p H(t, q, p) = \frac{\vec{p}}{m}.$$

### 4.3 Квантовые и классические траектории

Рассмотрим простую одномерную систему, описываемую квазигамильтонианом  $H(x, p)$ . Пусть в момент времени  $t$  задана некоторая функция  $\varphi(x, p)$ . Определим новую функцию  $\tilde{\varphi}(x, p, \tau)$  следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(x, p, \tau) \stackrel{Def}{=} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} H \tau \right] \circ \varphi \circ \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} H \tau \right]. \quad (4.22)$$

Определим  $\dot{\tilde{\varphi}}(x, p, \tau) = d\varphi/d\tau$ :



$$\begin{aligned} \check{\varphi}(x, p, \tau) &= \frac{i}{\hbar} H \circ \left[ \exp \circ \left[ \frac{i}{\hbar} H \tau \right] \circ \varphi \circ \exp \circ \left[ -\frac{i}{\hbar} H \tau \right] \right] - \\ &- \left[ \exp \circ \left[ \frac{i}{\hbar} H \tau \right] \circ \varphi \circ \exp \circ \left[ -\frac{i}{\hbar} H \tau \right] \right] \frac{i}{\hbar} H = \frac{i}{\hbar} \left[ H \circ \check{\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Заметим, что соотношение (4.23) полностью совпадает с производной по времени в классической квантовой механике.

Рассмотрим более подробно выражение (4.22), воспользовавшись соотношением (2.24).

$$\begin{aligned} L \circ \exp \circ (M) &= \exp \circ (M) \circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} {}^{(n)}L; \\ {}^{(n+1)}L &= \left[ M \circ {}^{(n)}L \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } L = \varphi(p, q); M = -\frac{i}{\hbar} H \tau.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} {}^{(1)}L &= -\frac{i}{\hbar} [H, \varphi] \tau = -\check{\varphi}_{\tau=0} \tau \quad \text{и т.д.} \\ {}^{(2)}L &= -\check{\varphi}_{\tau=0} \tau^2 \end{aligned}$$

$$\text{Т.е. } \exp \left[ \frac{i}{\hbar} H \tau \right] \circ \varphi(t, p, q) \circ \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} H \tau \right] = \check{\varphi}(t + \tau, p, q). \quad (4.24)$$

Таким образом, преобразование подобия (4.22) определяет явное выражение произвольной функции состояния в произвольный момент времени  $T = t + \tau$ , если известно ее выражение в некий произвольный момент времени  $t$ . Т.е. соотношение (4.22) позволяет построить квантовые траектории  $\check{x}(T, x, p)$  и  $\check{p}(T, x, p)$ . Рассмотрим теперь более общий случай простой системы, описываемый функцией перехода  $\check{\Lambda}(t, \check{x}|T|\check{p})$ . Примем, что для элемента  $\Lambda \in R_0$  нет делителей нуля.

*Примечание.* Более общий случай будет рассмотрен в главе 5.

Тогда существует единственный обратный элемент кольца

$$B \in R_0 \quad B(t, \check{x}|T|\check{p}) = \check{\Lambda}^{-1}, \quad \text{для которого}$$

$$\check{\Lambda}^{-1} \circ \Lambda = \check{\Lambda} \circ \check{\Lambda}^{-1} = 1. \quad (4.25)$$

Дифференцируя по времени  $T$  соотношение (4.25) получим

$$(\tilde{\Lambda} \circ B)'_T = \tilde{\Lambda} \circ \frac{1}{i\hbar} H \circ B + \tilde{\Lambda} \circ B'_T = 0.$$

Отсюда для функции  $B(t, \bar{x}|T|\bar{p})$  имеем следующее уравнение:

$$i\hbar B'_T(t, \bar{x}|T|\bar{p}) + H(T, \bar{x}|\bar{p}) \circ B(t, \bar{x}|T|\bar{p}) = 0. \quad (4.26)$$

Если  $H(T, \bar{x}, \bar{p})$  не зависит от времени явно (автономная система), то

$$B(\bar{x}|\tau|\bar{p}) = \tilde{\Lambda}(\bar{x}|\tau|\bar{p}). \quad (4.27)$$

Определим произвольную функцию состояния  $\tilde{\varphi}(\bar{x}, T|\bar{p})$ , если известен вид этой функции при  $T = t$ , т.е.  $\tilde{\varphi}(\bar{x}, T|\bar{p})_{T=t} = \varphi(t, \bar{x}|\bar{p})$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dT} [B(t, \bar{x}|T|\bar{p}) \circ \varphi(t, \bar{x}|\bar{p}) \circ \tilde{\Lambda}(t, \bar{x}|T|\bar{p})] = \\ & = B'_T(t, \bar{x}|T|\bar{p}) \circ \varphi(t, \bar{x}|\bar{p}) \circ \tilde{\Lambda}(t, \bar{x}|T|\bar{p}) + B(t, \bar{x}|T|\bar{p}) \circ \varphi(t, \bar{x}|\bar{p}) \circ \tilde{\Lambda}'_T(t, \bar{x}|T|\bar{p}) = \\ & = \frac{i}{\hbar} H(T, \bar{x}|\bar{p}) \circ \tilde{\varphi}(\bar{x}, T|\bar{p}) - \frac{i}{\hbar} \tilde{\varphi}(\bar{x}, T|\bar{p}) \circ H(\bar{x}, T|\bar{p}) = \frac{i}{\hbar} [H \circ \tilde{\varphi}]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Таким образом, произвольная функция состояния в произвольный момент времени выражается через функцию перехода  $\Lambda(t, \bar{x}|T|\bar{p})$  следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(\bar{x}, T|\bar{p}) = \Lambda^{\circ -1}(t, \bar{x}|T|\bar{p}) \circ \varphi(t, \bar{x}|\bar{p}) \circ \Lambda(t, \bar{x}|T|\bar{p}). \quad (4.29)$$

И в случае автономной системы:

$$\tilde{\varphi}(\bar{x}, T|\bar{p}) = \exp^{\circ} \left[ \frac{i}{\hbar} H(\bar{x}|\bar{p})\tau \right] \circ \varphi(\bar{x}|\bar{p}) \circ \exp^{\circ} \left[ -\frac{i}{\hbar} H(\bar{x}|\bar{p})\tau \right]. \quad (4.30)$$

Тем самым можно построить квантовые траектории движения  $\tilde{\bar{x}}(\bar{x}|T|\bar{p})$  и  $\tilde{\bar{p}}(\bar{x}|T|\bar{p})$ .

Рассмотрим отличие квантовых (естественных) и классических функций состояния.

Вернемся к классическим скобкам Пуассона (см. п. 1.4).

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varphi}}(\tau, \bar{x}, \bar{p}) &= \{H(\bar{x}, \bar{p}); \bar{\varphi}(\tau, \bar{x}, \bar{p})\} = \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial p_k} \dot{p}_k \right] = \\ &= \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right] \bar{\varphi}(\tau, \bar{x}, \bar{p}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Введя для краткости  $D_{p,k} = \frac{\partial}{\partial p_k}$  и  $D_{x,k} = \frac{\partial}{\partial x_k}$ , в силу инвариантности формы первого дифференциала будем иметь:

$$\bar{\varphi}(\tau, \bar{x}, \bar{p}) = \exp \left[ \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} D_{x,k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} D_{p,k} \right) \right] \varphi(\bar{x}, \bar{p}) = \varphi[\bar{\bar{x}}(\tau, \bar{x}, \bar{p}); \bar{\bar{p}}(\tau, \bar{x}, \bar{p})]. \quad (4.32)$$

Видим, что вид функции не меняется. В квантовой физике меняется и вид самой функции. Например, если кинетическая энергия частицы в начальный момент времени равна  $\tilde{E}_{кин} = p^2/2m$ , то согласно (4.30)

$$\tilde{E}_{кин} = \frac{\tilde{p}(\tau, \bar{x}, \bar{p}) \circ \tilde{p}(\tau, \bar{x}, \bar{p})}{2m}. \quad (4.33)$$

Таким образом, в квантовой физике инварианты – лишь формы, представленные на языке кольца  $R_0$ .

Сохраняют свой вид только те выражения, для которых

$$\left[ \varphi(\bar{x} | \bar{p}) \circ H(\bar{x} | \bar{p}) \right] = 0, \quad (4.34)$$

что в некоторой мере поясняет один из принципов классической квантовой механики, согласно которому одновременно могут быть определены лишь те физические величины, которые коммутируют с гамильтонианом.

В предлагаемой модели квантовой теории любые физические величины могут быть определены в любой момент времени, но только имеет ли данная величина тот смысл, который она имела в классической механике?!

**П р и м е р.** Теорема о кинетической энергии.

$$\begin{aligned} \dot{E}_k &= \frac{i}{\hbar} \left[ H(\bar{r} | \bar{p}) \circ E_k \right] = i\hbar \left[ U(\bar{r}) \circ \frac{p^2}{2m} \right] = \\ &= \frac{i}{2m\hbar} \left[ U(r) p^2 - \left( p^2 U(r) - i\hbar \vec{\nabla} U(r) \cdot 2\bar{p} + \frac{(-i\hbar)^2}{2!} 2 \operatorname{div} \vec{F}(r) \right) \right] = \\ &= N - \frac{i\hbar}{2m} \operatorname{div} \vec{F}(r), \end{aligned} \quad (4.35)$$

т.е. возникла добавка, связанная с изменением формы.

#### 4.4 Связь квантовой теории с классической квантовой физикой

Найдем связь вышерассмотренного представления с классической квантовой механикой. Предположим, что эволюцию простой системы можно описать классическим гамильтонианом  $H(\vec{q}, \vec{p})$ , где  $q_n$  и  $p_k$  – обобщенные координаты и импульсы, соответственно. Тогда квантовая механическая задача в шредингеровском представлении решается формальной заменой  $p_k \rightarrow \hat{p}_k = -i\hbar \partial_k = -i\hbar D_k$  и уравнение Шредингера для простой одноканальной системы примет вид:

$$i\hbar \partial_\tau \Psi(\vec{q}, \tau) = \hat{H}(\vec{q}, \hat{\vec{p}}) \cdot \Psi(\vec{q}, \tau) \quad (4.36)$$

с начальным условием:  $\Psi(\vec{q}, \tau)|_{\tau=0} = \Psi_0(\vec{q})$ .

Соответствующая спектральная задача имеет вид:

$$\hat{H}(\vec{q}, \hat{\vec{p}}) \cdot \psi_n(q) = E_n \psi_n(q). \quad (4.37)$$

Для простоты спектр энергии будем считать дискретным, а соответствующие волновые функции ортонормированными.

Если же спектр непрерывный или же имеют место вырожденные состояния, то следует воспользоваться известными процедурами квантовой механики [37, 54, 55]. Соответствующее уравнение для функции перехода для  $\tilde{\Lambda}(t, \vec{q}|T|\vec{p})$  имеет вид (4.7), т.е.

$$i\hbar \tilde{\Lambda}'_\tau(\vec{q}|\tau|\vec{p}) = H(\vec{q}, \vec{p}) \circ \tilde{\Lambda}(\vec{q}|\tau|\vec{p}) = H[\vec{q}; (\vec{p} - i\hbar \vec{D}_q)] \cdot \tilde{\Lambda}(\vec{q}|\tau|\vec{p}). \quad (4.38)$$

Рассмотрим некоторые свойства некоммутативного умножения « $\circ$ »:

##### 1. Умножение на экспоненту.

Для аналитической функции двух переменных  $A(q, p)$  и действительного числа  $\alpha$  согласно (2.24) имеем:

$$\begin{aligned} A(q, p) \circ \exp\left[\frac{i}{\hbar} \alpha q p\right] &= \exp\left[\frac{i}{\hbar} \alpha q p\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^n}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} \alpha p\right)^n \circ A_p^{(n)}(q, p) = \\ &= \exp\left[\frac{i}{\hbar} \alpha q p\right] \cdot A[q, (1 + \alpha)p]; \\ \exp\left[\frac{i}{\hbar} \alpha q p\right] \circ A(q, p) &= \exp\left[\frac{i}{\hbar} \alpha q p\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^n}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} \alpha q\right)^n \circ A_q^{(n)}(q, p) = \\ &= \exp\left[\frac{i}{\hbar} \alpha q p\right] \cdot A[(1 + \alpha)q, p]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Отсюда следует, что для любых чисел  $\alpha$  и  $\beta$  имеем:

$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\beta q p\right] \circ A(q, p) \circ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\alpha q p\right] &= \\ &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}((\alpha + \beta) + \alpha\beta)q p\right] \cdot A[(1 + \beta)q, (1 + \alpha)p]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

При  $\beta = \frac{-\alpha}{1 + \alpha}$

$$\exp\left[-\frac{\alpha}{1 + \alpha}\frac{i}{\hbar}\beta q p\right] \circ A(q, p) \circ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\alpha q p\right] = A\left[\frac{q}{1 + \alpha}; p(1 + \alpha)\right]. \quad (4.41)$$

При  $\beta = -\alpha$

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\alpha q p\right] \circ A(q, p) \circ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\alpha q p\right] = A[(1 - \alpha)q; p(1 + \alpha)] \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\alpha^2 q p\right]. \quad (4.42)$$

## 2. Квантомеханический гамильтониан.

$$\begin{aligned} H(\vec{q}, \vec{p}) \circ \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{q} \cdot \vec{p}\right) \psi(\vec{q}) &= H(\vec{q}; \vec{p} - i\hbar\vec{D}_q) \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{q} \cdot \vec{p}\right) \psi(\vec{q}) = \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{q} \cdot \vec{p}\right) \cdot \hat{H}(\vec{q}, \hat{p}) \cdot \Psi(\vec{q}). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Вышеприведенное соотношение позволяет перевести формализм квантовой механики на язык кольца  $R_0$ . Действительно, уравнение Шредингера (4.36) можно представить в виде:

$$i\hbar\partial_\tau \Psi(\vec{q}, \vec{p}, \tau) = H(\vec{q}, \vec{p}) \circ \tilde{\Psi}(\vec{q}, \vec{p}, \tau), \quad (4.44)$$

где  $\tilde{\Psi}(\vec{q}, \vec{p}, \tau) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q} \cdot \vec{p}\right) \Psi(\vec{q}, \tau)$ , т.е. волновая функция  $\Psi(\vec{q}, \tau)$  является амплитудой волны для  $\tilde{\Psi}(\vec{q}, \vec{p}, \tau)$ .

Найдем представление  $\tilde{\Lambda}(\vec{q}, \tau, \vec{p})$  через собственные функции стационарного уравнения Шредингера (4.37). Пусть  $\tilde{\Lambda}(\vec{q}, \tau, \vec{p})$  имеет вид:

$$\tilde{\Lambda}(\vec{q}, \tau, \vec{p}) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\vec{q} \cdot \vec{p}\right] \sum_{(m)} c_m(\vec{p}) \psi_m(\vec{q}) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_m \tau\right]. \quad (4.45)$$

Нетрудно видеть, что представление (4.45) удовлетворяет уравнению (4.38) с одной стороны и уравнению Шредингера (4.37) с другой. Так как при

$\tau = 0$   $\tilde{\Lambda}(\vec{q}, \tau, \vec{p}) \equiv 1$ , выражение (4.45) представляет собой разложение единицы по волновым функциям эрмитова оператора  $\hat{H}(\vec{q}, \hat{\vec{p}})$ . С учетом ортогональности волновых функций имеем:

$$\psi_{pm}^*(\vec{p}) = c_m(\vec{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \psi_m^*(\vec{q}) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{p}\right] d\Omega_q. \quad (4.46)$$

Здесь  $\psi_m^*(\vec{p})$  – волновая функция в импульсном представлении. Таким образом, функцию перехода  $\tilde{\Lambda}(\vec{q}, \tau, \vec{p})$  простой системы можно представить в виде:

$$\tilde{\Lambda}(\vec{q}, \tau, \vec{p}) = \sum_{(m)} \psi_m^*(\vec{p}) \psi_m(\vec{q}) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{q} - E_m \tau)\right]. \quad (4.47)$$

$B(\vec{q}, \tau, \vec{p}) = \tilde{\Lambda}^{\circ-1}(\vec{q}, \tau, \vec{p})$  легко может быть найдена заменой  $\tau$  на  $-\tau$ :

$$B(\vec{q}, \tau, \vec{p}) = \sum_{(n)} \psi_{pn}^*(\vec{p}) \psi_n(\vec{q}) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{q} - E_n \tau)\right]. \quad (4.48)$$

Покажем, что действительно  $B \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ B \equiv 1$ . Для простоты ограничимся одномерным случаем.

$$\begin{aligned}
B \circ \Lambda &= \sum_{(n)} \psi_{pn}^*(p) \psi_n(q) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{q} - E_n \tau) \right] \circ \sum_{(m)} \psi_{pm}^*(p) \psi_m(q) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{q} - E_m \tau) \right] = \\
&= \sum_{(m,n)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (E_m - E_n) \tau \right] \psi_n(q) \psi_{pm}^*(p) \left[ \psi_{pn}^*(p) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p \cdot q \right] \circ \psi_m(q) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p \cdot q \right] \right] = \\
&= \sum_{(m,n)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (E_m - E_n) \tau \right] \psi_n(q) \psi_{pm}^*(p) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(z) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p \cdot (z - q) \right] \circ \psi_m(q) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p \cdot q \right] dz \right] = \\
&= \sum_{(m,n)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (E_m - E_n) \tau \right] \psi_n(q) \psi_{pm}^*(p) \times \\
&\times \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(z) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p \cdot (z - q) \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^k}{k!} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^k (z - q)^k D_q^k \left( \psi_m(q) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p \cdot q \right] \right) dz \right] = \\
&= \sum_{(m,n)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (E_m - E_n) \tau \right] \psi_n(q) \psi_{pm}^*(p) \times \\
&\times \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(z) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p \cdot (z - q) \right] \circ \psi_m(q + z - q) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p \cdot (q + z - q) \right] dz \right] = \\
&= \sum_{(m,n)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (E_m - E_n) \tau \right] \psi_n(q) \psi_{pm}^*(p) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(z) \psi_m(z) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p \cdot q \right] dz = \\
&= \sum_{(m,n)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (E_m - E_n) \tau \right] \psi_n(q) \psi_{pm}^*(p) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p \cdot q \right] \delta_{mn} = \\
&= \sum_{(n)} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p \cdot q \right] \psi_{pn}^*(p) \psi_n(q) \equiv 1.
\end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что функции

$$\Psi_m(\vec{q} | \vec{p}) = \psi_{pm}^*(\vec{p}) \psi_m(\vec{q}) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p \cdot q \right] \quad (4.49)$$

в кольце  $R_0$  образуют ортогональный базис, т.е.

$$\begin{aligned}
\Psi_n(\vec{q} | \vec{p}) \circ \Psi_m(\vec{q} | \vec{p}) &= 0 & n \neq m \\
\Psi_n(\vec{q} | \vec{p}) \circ \Psi_n(\vec{q} | \vec{p}) &= \Psi_n(\vec{q} | \vec{p}) & n = m
\end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\sum_{(n)} \Psi_n(\vec{q} | \vec{p}) \equiv 1. \quad (4.51)$$

Рассмотрим оригинал функции перехода. Если  $\Lambda(\vec{q}, \tau, \vec{z})$  – доля свойства, перешедшего из точки с обобщенными координатами  $\vec{q}$  в точку с координатами  $\vec{z} = \vec{q} + \vec{r}$ , то с учетом (4.47) и обратного преобразования Фурье имеем:

$$\Lambda(\vec{q}, \tau, \vec{z}) = \sum_{(m)} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} E_m \tau \right] \psi_m(\vec{q}) \psi_m^*(z). \quad (4.52)$$

Из соотношения (4.52) следует, что  $\Lambda(\vec{q}, \tau, \vec{z})$  действительно принадлежит кольцу  $R_{\circ}$ . Действительно, для любых  $\tau_1$  и  $\tau_2$  имеем:

$$\begin{aligned} \Lambda(\vec{q} | \tau_1 + \tau_2 | \vec{z}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \Lambda(\vec{q} | \tau_1 | \vec{y}) \cdot \Lambda(\vec{y} | \tau_2 | \vec{z}) d\Omega_y = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \sum_{(m)} \sum_{(n)} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_m \tau_1\right] \psi_m(\vec{q}) \psi_m^*(\vec{y}) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n \tau_2\right] \psi_n(\vec{y}) \psi_m^*(\vec{z}) d\Omega_y = \\ &= \sum_{(m)} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n (\tau_1 + \tau_2)\right] \psi_m(\vec{q}) \psi_m^*(\vec{z}). \end{aligned} \quad (4.53)$$

## 4.5 Основные принципы квантовой физики

Сформулируем те основные положения, которые необходимо положить в основу квантовой теории.

1. Совокупности точек трехмерного пространства (обобщенные координаты  $q_k, k \in [1, N]$ ,  $N$  – число степеней свободы) будем ставить в соответствие комплексное число  $\Psi$  (простые системы) и множество чисел  $\Psi_1 \dots \Psi_M$  – каналов распространения в случае рассмотрения сложных систем.

Числа  $\Psi$  – аддитивная физическая величина (экстенсивный параметр), для которых естественным образом определено понятие сложение (аддитивная группа). Зависимость  $\Psi(\vec{q})$  – полностью определяет состояние системы, т.е. ее форму.

2. Множество функций  $\Psi(\vec{q})$  следует упорядочить. Почти всюду упорядоченное множество  $\Psi(\vec{q})$  будем называть процессом. Для этого необходимо ввести понятие времени. Таким образом, процесс описывается функцией  $N+1$  переменной, т.е.  $\Psi(\vec{q}, t)$ . Время  $t$  представляет собой параметр упорядочивания событий – договорное время. Чаще всего наблюдатели, которые по иному упорядочивают события, содержатся в сумасшедших домах.

3. Метрику трехмерного пространства будем определять, приняв, что «свободная» (см. далее) система  $\Psi(\vec{q})$  распространяется с некоторой постоянной скоростью  $c$  ( $\sim 3 \cdot 10^8$  м/с), что автоматически приводит к постулатам специальной теории относительности. Так удобнее и проще определять метрику на «больших» расстояниях (например, в других звездных системах). В целом данный вопрос в большей степени относится к области философии, на который имеется два диаметрально противоположных суждения.



Первое (современное) – пространство Риманово и вообще существует независимо от нашего сознания.

Второе: пространство-время – «чистый холст» [18, 21]. «Художник», т.е. наблюдатель сам определяет и выбирает соответствующий базис, т.е. систему отсчета. Авторы придерживаются именно этой, – второй точки зрения.

Таким образом, принимаем, что рассмотрение всех процессов будем вести в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1.

4. Переход из одного состояния в другое осуществляется с помощью функции перехода (для простой системы) и матрицы перехода (для сложной системы), подчиняющихся естественной (квантовой логике)

$$\Psi(T, \vec{z}) = \Psi(T, \vec{q}) \circ \Lambda(t, \vec{q} | T | \vec{z}). \quad (4.54)$$

$$\Lambda(t, \vec{q} | \tau_1 + \tau_2 | \vec{z}) = \Lambda(t, \vec{q} | \tau_1 | \vec{z}) \circ \Lambda(t + \tau_1, \vec{q} | \tau_2 | \vec{z}). \quad (4.55)$$

5. Фурье образ функции перехода, а именно:

$$\tilde{\Lambda}(t, \vec{q} | \tau | \vec{p}) \stackrel{Def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \Lambda(t, \vec{q} | \tau | \vec{r}) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r} \right] d\Omega_r. \quad (4.56)$$

Здесь:  $\vec{q}$  – вектор в пространстве обобщенных координат в момент времени  $t$ ,  $\Lambda$  – доля комплексного свойства  $\Psi$  через время  $\tau$  (т.е. в момент времени  $T = t + \tau$ ) в точке  $\vec{z}$ ; соответственно  $\vec{r} = \vec{z} - \vec{q}$  – вектор перемещения;  $\vec{p}$  – обобщенный квазиимпульс;  $\hbar$  – некая масштабная константа, равная для физических систем квантовой постоянной:

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Термин «обобщенный» понимается в том смысле, что аксиоматика предлагаемого описания подразумевает возможность более широкого применения данной теории, чем обычное квантовомеханическое описание. Например, распространение информации, понятие биоэнергии и пр., т.е. везде, где происходит распространение аддитивных величин.

Для малых времен  $\tau$  выражение для  $\tilde{\Lambda}$  имеет вид:

$$\tilde{\Lambda}(t, \vec{q} | \tau | \vec{p}) = 1 + \frac{1}{i\hbar} H(t, \vec{q} | \vec{p}) \tau + o(\tau)^2, \quad (4.57)$$

где  $H(t, \vec{q} | \vec{p})$  будем называть квазигамильтонианом системы.

6. Если в начальный момент времени  $t$  задана произвольная функция  $\varphi(\vec{q}, \vec{p})$ , то  $\tilde{\varphi}(\vec{q} | T | \vec{p})$  в произвольный момент времени  $T = t + \tau$  определяется

соотношениями (3.8) и (3.9), а скорость изменения функции  $\tilde{\varphi}$  соотношением (3.2) по форме, совпадающей с аналогичным соотношением в квантовой механике.

Если формально ввести обобщенные координаты и импульсы, то можно построить (назначить) квантовые траектории движения  $\tilde{q}(\tilde{q}|T|\tilde{p})$  и  $\tilde{p}(\tilde{q}|T|\tilde{p})$ , воспользовавшись соотношениями (3.8) и (3.9) (более подробно этот вопрос будет рассмотрен в главе 5).

В отличие от классической квантовой механики, где одновременно нельзя даже говорить о координатах и импульсах (хотя квантовая статистика, с оговорками, эту проблему пытается обойти!), в данной теории координаты и импульсы всегда можно задать и проследить за их изменениями. Однако, в отличие от классического описания, функциональная зависимость  $\tilde{\varphi}(\tilde{q}, \tilde{p})$  меняет свой вид, что во многих случаях делает изучение эволюции данной величины бессмысленным. Так же, как и в классической квантовой механике, функциональный вид зависимостей не меняется только для тех величин, которые коммутируют с квазигамильтонианом на языке кольца  $R_0$ .

Переход к законам классической физики осуществляется переходом от кольца  $R_0$  к кольцу с обычным умножением, т.е. формальным устремлением размерной постоянной  $\hbar \rightarrow 0$ .

7. То, что в соответствие совокупности координат ставится как минимум комплексное число, означает, что микрообъект можно представить как совокупность двух начал (условно «белого» и условно «черного»), распределенных в пространстве и взаимнопревращающихся друг в друга. Распространение аддитивной величины  $\Psi$ , которую можно рассматривать как некую реальность, происходит в некоторой среде по отношению к данному свойству. Реальной существования волн Де-Бройля рассматривалась в работах самого Л. Де Бройля [30] и многих других авторов [27, 31-34], которые до конца не были востребованы.

Как показано в главе 3, в качестве основных характеристик среды достаточно ввести показатель рассеяния (квазигравитационный потенциал) и показатель поглощения ( $4^{\text{x}}$  потенциал электромагнитного поля). Рассмотрение сложных, т.е. многоканальных, систем позволяет описать с помощью перехода части свойств с канала на канал, т.е. переходы с канала на канал без отражения

(сильное взаимодействие) и переход с канала на канал с отражением (слабое взаимодействие).

## 5 Описание квантовых систем

### 5.1 Назначенные квантовые траектории

Как было указано в предыдущей главе, в качестве характеристики механического движения можно согласно (3.8) определить (назначить) квантовые траектории, а именно:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\bar{x}, \bar{p}|T) &= \tilde{\Lambda}^{-1}(t, \bar{x}|T|\bar{p}) \circ \bar{x} \circ \tilde{\Lambda}(t, \bar{x}|T|\bar{p}); \\ \tilde{p}(\bar{x}, \bar{p}|T) &= \tilde{\Lambda}^{-1}(t, \bar{x}|T|\bar{p}) \circ \bar{p} \circ \tilde{\Lambda}(t, \bar{x}|T|\bar{p}),\end{aligned}\tag{5.1}$$

а в случае автономных простых систем:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\bar{x}, \bar{p}|\tau) &= \exp \circ \left[ \frac{i}{\hbar} H(\bar{x}, \bar{p})\tau \right] \circ \bar{x} \circ \exp \circ \left[ -\frac{i}{\hbar} H(\bar{x}, \bar{p})\tau \right]; \\ \tilde{p}(\bar{x}, \bar{p}|\tau) &= \exp \circ \left[ \frac{i}{\hbar} H(\bar{x}, \bar{p})\tau \right] \circ \bar{p} \circ \exp \circ \left[ -\frac{i}{\hbar} H(\bar{x}, \bar{p})\tau \right].\end{aligned}\tag{5.2}$$

Здесь  $\bar{x}$  и  $\bar{p}$  – начальные условия в момент времени  $t$ ,  $\tau = T - t$ .

Предназначение траекторий движения – кинематически описать движение системы. Чаще всего в классической физике изучаемый объект (тело) заменяется материальной точкой (материальная точка – объект, который на шкале своих свойств (пространство) имеет только место, но не имеет протяженности). Замена реального объекта на материальную точку с одной стороны очень удобно, а с другой стороны, это упрощающий метод физики. Так, при изучении движения автомобиля извне, можно выбрать, вообще говоря, любую точку, жестко связанную с автомобилем и следить за ней, т.е. назначить ее траекторию. Однако, для наблюдателя, сидящего в автомобиле, вряд ли это будет уместно. Поэтому введенные с помощью соотношений (5.1) и (5.2) квантовые траектории движения являются лишь одним из способов описания данного движения, особенно представляя, что в качестве модели изучаемого объекта принято некоторое распространяющееся облако, состоящее, по крайней мере, из двух начал ( $\Psi_R$  и  $\Psi_L$ ) с взаимным превращением друг в друга с частотой  $E$ . (в энергетических единицах).

Раскроем соотношение (5.2) для одномерной автономной системы. Для произвольной функции  $\tilde{\varphi}(x, p, \tau)$ , определяемой соотношением (4.22), ее производная по времени определяется скобками Пуассона (4.23)

$$\dot{\tilde{\varphi}}(x, p, \tau) = \frac{i}{\hbar} \left[ H(x, p) \circ \tilde{\varphi}(x, p, \tau) \right]. \quad (5.3)$$

Пусть  $H(x, p)$  имеет вид классического гамильтониана:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x). \quad (5.4)$$

Тогда с учетом свойств кольца  $R_{\circ}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varphi}}(x, p, \tau) &= \frac{i}{\hbar} \left[ H(x, p) \circ \tilde{\varphi}(x, p, \tau) \right] = \\ &= \frac{i}{\hbar} \left\{ (-i\hbar) \frac{p}{m} D_x + \frac{(-i\hbar)^2}{2m} D_x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^n}{n!} U^{(n)}(x) D_p^n \right\} \tilde{\varphi}(x, p, \tau) = \\ &= \left\{ \frac{p}{m} D_x + F(x) D_p - \frac{i\hbar}{2m} D_x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^{n-1}}{n!} F^{(n-1)}(x) D_p^n \right\} \tilde{\varphi}(x, p, \tau) = \hat{M} \cdot \tilde{\varphi}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь  $F(x) = -dU/dx$  – классическая сила.

Если ввести обозначения:

$$\hat{M}_{\circ} = \frac{p}{m} D_x + F(x) D_p$$

классический оператор скобок Пуассона

$$\hat{M}_{\text{кв}} = -\frac{i\hbar}{2m} D_x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^{n-1}}{n!} F^{(n-1)} D_p^n = -i\hbar \left[ \frac{D_x^2}{2m} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^n}{(n+2)!} F^{(n+1)} D_p^{(n+2)} \right], \quad (5.6)$$

то

$$\hat{M} = \hat{M}_{\circ} + \hat{M}_{\text{кв}}.$$

Таким образом,  $\tilde{\varphi}(x, p, \tau)$  в операторной форме примет вид:

$$\tilde{\varphi}(x, p, \tau) = \exp \left[ \hat{M}_{\circ} \tau \right] \cdot \varphi(x, p). \quad (5.7)$$

Выражения (5.5) и (5.7) легко обобщаются на произвольную автономную систему.

Заметим, что для классических систем в силу инвариантности форм первого дифференциала

$$\tilde{\varphi}(x, p, \tau) = \exp \left[ \hat{M}_\circ \tau \right] \cdot \varphi(x, p) = \varphi \left[ \tilde{x}(x, p, \tau), \tilde{p}(x, p, \tau) \right] \quad (5.8)$$

$\tilde{\varphi}$  не меняет свою форму, на чем, собственно, и строится классическая физика.

В квантовой физике все обстоит иначе. В общем случае меняется и вид самой функции  $\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{p})$ . Этот факт и делает расчет некоторых физических величин бессмысленным. Исключение составляют только те физические величины, которые коммутируют с гамильтонианом.

Вернемся к квантовым траекториям. Согласно (5.7) их можно определить так:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(x, p, \tau) &= \exp \left[ \hat{M}_\circ \tau \right] \cdot x; \\ \tilde{p}(x, p, \tau) &= \exp \left[ \hat{M}_\circ \tau \right] \cdot p. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Заметим, что для равномерного и равноускоренного движений, квантовые и классические траектории совпадают.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(x, p, \tau) &= \exp \left[ \left( \frac{p}{m} D_x + F D_p - \frac{i\hbar}{2m} D_x^2 \right) \tau \right] \cdot x = x + \frac{p}{m} \tau + \frac{F}{2m} \tau^2; \\ \tilde{p}(x, p, \tau) &= \exp \left[ \left( \frac{p}{m} D_x + F D_p - \frac{i\hbar}{2m} D_x^2 \right) \tau \right] \cdot p = p + F \tau. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Построить квантовые траектории возможно и методами классической квантовой механики, с использованием явного представления  $\Lambda$  и  $\Lambda^{\circ-1}$  с помощью соотношений (4.12) и (4.13), а именно:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(x, p, \tau) &= \sum_{(n)} \psi_{np}^*(p) \psi_n(x) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (p x - E_n \tau) \right] \circ x \circ \\ &\circ \sum_{(m)} \psi_{mp}^*(p) \psi_m(x) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (p x + E_m \tau) \right] = \\ &= \sum_{(m,n)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (E_n - E_m) \tau \right] \psi_{np}^*(p) \psi_n(x) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p x \right] \circ x \psi_m(x) \psi_{mp}^*(p) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p x \right] = \\ &= \sum_{(m,n)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (E_n - E_m) \tau \right] \psi_n(x) \psi_{mp}^*(p) \left[ \psi_{np}^*(p) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p x \right] \circ x \psi_m(x) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p x \right] \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(m,n)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (E_n - E_m) \tau \right] \psi_n(x) \psi_{m,p}^*(p) \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^k}{k!} \psi_n^*(z) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (z-x)p \right] \left( \frac{i}{\hbar} \right)^k (z-x)^k D_x^k \psi_m(x) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p x \right] dz = \\
&= \sum_{(m,n)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (E_n - E_m) \tau \right] \psi_n(x) \psi_{m,p}^*(p) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(z) \cdot z \psi_m(z) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p x \right] dz = \\
&= \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (E_n - E_m) \tau - p x \right] \psi_m^*(p) \psi_n(x) z_{mn},
\end{aligned} \tag{5.11}$$

где матричные элементы  $z_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(z) z \psi_m(z) dz$ .

Аналогичным образом можно выразить  $\tilde{p}(x, p, \tau)$ .

## 5.2 Гармонический осциллятор

Рассмотрим квазигамильтониан в виде:

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2. \tag{5.12}$$

Определим согласно (5.2)  $\tilde{x}(x, p, \tau)$  и  $\tilde{p}(x, p, \tau)$ .

Предварительно рассмотрим следующие полезные соотношения. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  – производные числа и  $M = \alpha p^2 + \gamma p x + x^2$  – некоторая квадратичная форма. Воспользуемся выражениями (2.22), (2.24) и (2.25). Имеем:

$$\begin{aligned}
L = x, \quad {}^{(1)}L &= [M \circ L] = (-i\hbar)[2\alpha p + \gamma x] \\
{}^{(2)}L &= (-i\hbar)^2 (\gamma^2 - 4\alpha\beta)x = (-i\hbar)^2 D_0 x; \quad D_0 = \gamma^2 - 4\alpha\beta \\
{}^{(3)}L &= [M \circ {}^{(2)}L] = (-i\hbar)^3 D_0 [2\alpha p + \gamma x] \dots
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
x \circ \exp^\circ [M] &= \exp [M] \circ \tilde{x} = \exp [M] \circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} {}^{(n)}L \\
\tilde{x} &= x - \frac{(-i\hbar)}{1!} [2\alpha p + \gamma x] + \frac{(-i\hbar)^2}{2!} D_0 x - \frac{(-i\hbar)^3}{3!} D_0 [2\alpha p + \gamma x] + \dots = \\
&= \left[ 1 + \frac{(-i\hbar\sqrt{D_0})^2}{2!} + \frac{(-i\hbar\sqrt{D_0})^4}{4!} + \dots \right] x - \left[ \frac{(-i\hbar\sqrt{D_0})}{1!} + \frac{(-i\hbar\sqrt{D_0})^3}{3!} + \dots \right] \times \\
&\times \frac{1}{\sqrt{D_0}} [2\alpha p + \gamma x] = \cos(\hbar\sqrt{D_0})x - \frac{1}{i\sqrt{D_0}} \sin(\hbar\sqrt{D_0}) [2\alpha p + \gamma x].
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\exp^\circ [M] \circ x = x' \circ \exp^\circ [M] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} {}^{(n)}L \circ \exp^\circ [M].$$

$$x' = \cos(\hbar \sqrt{D_0}) x + \frac{1}{i \sqrt{D_0}} \sin(\hbar \sqrt{D_0}) [2\alpha p + \gamma x]. \quad (5.14)$$

Пусть теперь  $L = p$

$${}^{(1)}L = [M \circ p] = i \hbar [\gamma p + 2\beta x]$$

$${}^{(2)}L = (i \hbar)^2 (\gamma^2 - 4\alpha\beta) p = (i \hbar)^2 D_0 p$$

$${}^{(3)}L = (i \hbar)^3 D_0 [\gamma p + 2\beta x]$$

$${}^{(4)}L = (i \hbar)^4 D_0^2 p \dots$$

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \left[ 1 + \frac{(i \hbar \sqrt{D_0})^2}{2!} + \frac{(i \hbar \sqrt{D_0})^4}{4!} + \dots \right] p - \left[ \frac{(i \hbar \sqrt{D_0})}{1!} + \frac{(i \hbar \sqrt{D_0})^3}{3!} + \dots \right] [\gamma p + 2\beta x] = \\ &= \cos(\hbar \sqrt{D_0}) p + \frac{1}{i \sqrt{D_0}} \sin(\hbar \sqrt{D_0}) [\gamma p + 2\beta x]. \end{aligned}$$

$$\exp^\circ [M] \circ p = p' \circ \exp^\circ [M].$$

$$p' = \cos(\hbar \sqrt{D_0}) p - \frac{1}{i \sqrt{D_0}} \sin(\hbar \sqrt{D_0}) [\gamma p + 2\beta x]. \quad (5.15)$$

$$\text{Отметим, что } [\tilde{p} \circ \tilde{x}] = [p' \circ x'] = -i \hbar.$$

Действительно, например,

$$\begin{aligned} [p' \circ x'] &= \left[ \cos \Theta p + \frac{i}{\sqrt{D_0}} \sin \Theta (\gamma p + 2\beta x) \circ \cos \Theta x + \frac{1}{i \sqrt{D_0}} \sin \Theta (2\alpha p + \gamma x) \right] = \\ &= \left[ \cos^2 \alpha + \frac{\gamma^2}{D_0} \sin^2 \alpha - \frac{4\alpha\beta}{D_0} \sin^2 \alpha \right] \cdot [p \circ x] = [p \circ x]. \end{aligned}$$

Здесь для краткости  $\Theta = \hbar \sqrt{D_0}$ .

Рассмотрим теперь поставленную задачу с гамильтонианом вида (5.12).

Согласно (5.13) и (5.15), полагая

$$\alpha = -\frac{i\tau}{2m\hbar}, \beta = -\frac{im\omega^2\tau}{2\hbar}, \gamma = 0, \sqrt{D_0} = \frac{\omega\tau}{\hbar}, \text{ имеем:}$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}(x, p, \tau) &= x \cos \omega \tau + \frac{p}{m \omega} \sin \omega \tau, \\ \tilde{p}(x, p, \tau) &= p \cos \omega \tau - m \omega x \sin \omega \tau.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Заметим, что данное решение совпадает с результатами классической механики с начальными условиями:

$$\tilde{x}|_{\tau=0} = x; \tilde{p}|_{\tau=0} = p.$$

Определим полную энергию  $E$  в произвольный момент времени:

$$\begin{aligned}E = H &= \frac{\tilde{p} \circ \tilde{p}}{2m} + \frac{m \omega^2}{2} \tilde{x} \circ \tilde{x} = \frac{\tilde{p}^2}{2m} - \frac{i \hbar}{2m} \tilde{p}'_p \tilde{p}'_x + \frac{m \omega^2}{2} \tilde{x}^2 - \frac{i \hbar m \omega^2}{2} \tilde{x}'_p \tilde{x}'_x = \\ &= \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{m \omega^2}{2} \tilde{x}^2 + \frac{i \hbar}{2m} \cos \omega \tau \cdot \sin \omega \tau \cdot m \omega - \frac{i \hbar m \omega^2}{2m \omega} \sin \omega \tau \cdot \cos \omega \tau = \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m \omega^2}{2} x^2.\end{aligned}\tag{5.17}$$

Следует отметить, что в силу квантованности энергии не все начальные условия могут быть реализованы, а только те, для которых:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m \omega^2}{2} x^2 = E_n.\tag{5.18}$$

Определим теперь  $\tilde{\Lambda}(x|\tau|p)$ . Имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}(x|\tau|p) &= \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} H(x, p) \tau \right] \cdot 1 = \exp \left[ -\frac{i}{2m\hbar} p^2 - \frac{i m \omega^2}{2\hbar} x^2 \right] \cdot 1 = \\ &= \exp \left[ -\frac{i}{2m\hbar} (p - i \hbar D_x)^2 - \frac{i m \omega^2}{2\hbar} x^2 \right] \cdot 1 = \\ &= \exp \left[ -\frac{i (i \hbar)^2}{2m\hbar} \left( D_x + \frac{i}{\hbar} p \right)^2 - \frac{i m \omega^2}{2\hbar} x^2 \right] \cdot 1 = \\ &= \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p x \right] \exp \left[ \frac{i \hbar}{2m} D_x^2 - \frac{i m \omega^2}{2\hbar} x^2 \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p x \right] \cdot 1.\end{aligned}\tag{5.19}$$

Таким образом, вся задача сводится к приведению оператора  $\exp[M] \cdot 1$  к функции. Здесь:

$$M = a D^2 = b x^2, \quad a = \frac{i \hbar}{2m} \tau, \quad b = \pm \frac{i m \omega^2}{2\hbar} \tau.$$



В качестве примера (хотя данный оператор можно внести в список табличных формул) приведем  $\exp[M]$  к функции. Имеем:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda} &= \exp[-ikx] \cdot \exp[aD^2 - bx^2] \cdot \exp[ikx] = \\
&= \exp[-ikx] \cdot \exp\left[-\frac{S}{2}D\right] \cdot \exp[aD^2 - b(x+SD)^2] \cdot \exp[SD^2] \cdot \exp[ikx] = \\
&= \exp[-ikx] \cdot \exp\left[-\frac{S}{2}D\right] \cdot \exp[aD^2 - bx^2 - 2bSxD - bS^2D^2 - bS] \times \\
&\quad \times \exp[SD^2] \cdot \exp[ikx] = \exp\left[-\frac{Sk^2}{2} - bS\right] \cdot \exp[-ikx] \exp\left[\frac{SD^2}{2}\right] \times \\
&\quad \times \exp[(a-bS^2)D^2 - 2bSxD - bx^2] \cdot \exp[ikx].
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Данный прием позволяет достаточно просто привести выражение (5.20) к функции. Примем следующие обозначения:

$$S = \sqrt{\frac{a}{b}}, k = \frac{p}{\hbar}.$$

Получим:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda} &= \exp\left[-ikx - bS - \frac{Sk^2}{2}\right] \cdot \exp\left[\frac{SD^2}{2}\right] \cdot \exp[-2bSxD - bx^2] \cdot \exp[ikx] = \\
&= \exp\left[-ikx - bS - \frac{Sk^2}{2}\right] \cdot \exp[SD^2] \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{4S}\right] \cdot \exp[-2bSxD] \cdot \exp\left[\frac{x^2}{4S} + ikx\right].
\end{aligned}$$

С учетом соотношения  $\exp[\lambda xD] \cdot f(x) = f(e^\lambda \cdot x)$ , имеем:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda} &= \exp\left[-ikx - bS - \frac{Sk^2}{2}\right] \cdot \exp\left[\frac{SD^2}{2}\right] \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{4S}\right] \times \\
&\quad \times \exp\left[\frac{\exp[-4bS]x^2}{4S} + ik \exp[-2bS]x\right] = \\
&= \exp\left[-ikx - bS - \frac{Sk^2}{2}\right] \cdot \exp\left[\frac{SD^2}{2}\right] \cdot \exp\left[\frac{(\exp[-4bS]-1)x^2}{4S} + ik \exp[-2bS]x\right].
\end{aligned}$$

Далее учтем, что согласно (2.13)

$$\exp(\alpha D^2) \cdot \exp[\alpha x^2 + \beta x] = \frac{1}{\sqrt{1-4\alpha\alpha}} \exp\left[\frac{\alpha x^2 + \beta x + \alpha\beta^2}{1-4\alpha\alpha}\right].$$

Тогда  $\tilde{\Lambda}(x|\tau|p)$  окончательно примет вид:

$$\tilde{\Lambda}(x|\tau|p) = \frac{1}{\sqrt{\cos(\omega\tau)}} \cdot \exp \left[ -\frac{i p^2}{2m\hbar\omega} \operatorname{tg}(\omega\tau) - \frac{im\omega}{2\hbar} x^2 \operatorname{tg}(\omega\tau) + \frac{2ipx \sin^2(\omega\tau/2)}{\hbar \cos(\omega\tau)} \right]. \quad (5.21)$$

Нетрудно убедиться, что соотношения (5.16) действительно выполняются:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} \circ \left[ x \cos(\omega\tau) + \frac{p}{m\omega} \sin(\omega\tau) \right] &= \left( x \cos(\omega\tau) + \frac{p}{m\omega} \sin(\omega\tau) \right) \cdot \Lambda - i\hbar \tilde{\Lambda}'_p \cos(\omega\tau) = \\ &= \left[ x \cos(\omega\tau) + \frac{p}{m\omega} \sin(\omega\tau) - \right. \\ &\quad \left. - i\hbar \left( -\frac{2i}{2m\hbar\omega} p \operatorname{tg}(\omega\tau) \cos(\omega\tau) + \frac{2ix \sin^2(\omega\tau/2)}{\hbar \cos(\omega\tau)} \cos(\omega\tau) \right) \right] \cdot \tilde{\Lambda} = \\ &= [\cos(\omega\tau) + 2\sin^2(\omega\tau/2)] \cdot x \cdot \tilde{\Lambda} = x \circ \tilde{\Lambda}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} \circ [p \cos(\omega\tau) - m\omega x \sin(\omega\tau)] &= (p \cos(\omega\tau) - m\omega x \sin(\omega\tau)) \cdot \tilde{\Lambda} + i\hbar \tilde{\Lambda}'_p m\omega \sin(\omega\tau) = \\ &= [p \cos(\omega\tau) - m\omega x \sin(\omega\tau) + \\ &\quad + i\hbar \left( -\frac{2i}{2m\hbar\omega} p \operatorname{tg}(\omega\tau) \omega \sin(\omega\tau) + \frac{2ix \sin^2(\omega\tau/2)}{\hbar \cos(\omega\tau)} m\omega \sin(\omega\tau) \right)] \cdot \tilde{\Lambda} = \\ &= [p(\cos(\omega\tau) + \operatorname{tg}(\omega\tau) \sin(\omega\tau)) + \\ &\quad + (-m\omega \sin(\omega\tau) - 2m\omega \operatorname{tg}(\omega\tau) \sin^2(\omega\tau/2))] \cdot \tilde{\Lambda} = \left[ \frac{p}{\cos(\omega\tau)} - m\omega x \operatorname{tg}(\omega\tau) \right] \cdot \tilde{\Lambda}. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} p \circ \tilde{\Lambda} &= p \tilde{\Lambda} - i\hbar \tilde{\Lambda}'_x = \left[ p - i\hbar \left( -\frac{im\omega}{2\hbar} 2x \operatorname{tg}(\omega\tau) + \frac{2ip \sin^2(\omega\tau/2)}{\hbar \cos(\omega\tau)} \right) \right] \tilde{\Lambda} = \\ &= \left[ p \left( 1 + \frac{2\sin^2(\omega\tau/2)}{\cos(\omega\tau)} \right) - m\omega \operatorname{tg}(\omega\tau) \right] \Lambda = \left[ \frac{p}{\cos(\omega\tau)} - m\omega x \operatorname{tg}(\omega\tau) \right] \Lambda. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо верное тождество.

Рассмотрим преобразование Фурье выражения (5.22), а именно:

$$\Lambda(x|\tau|r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Lambda}(x|\tau|p) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p r \right] d p.$$

Воспользуемся таблицами интегральных преобразований [6]. После некоторых алгебраических преобразований получим:

$$\Lambda(x|\tau|y) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin(\omega\tau)}} \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar} \operatorname{ctg}(\omega\tau) \left[ x^2 - \frac{2xy}{\cos(\omega\tau)} + y^2 \right] \right\}. \quad (5.23)$$

Здесь  $y = x + r$  – конечная координата.

Выражение (5.23) можно трактовать и как амплитуду перехода частицы, совершающей гармонические колебания с частотой  $\omega$  из точки с координатой  $x$  в точку с координатой  $y$  за время  $\tau$ .

### 5.3 Инвариантность коммутационных соотношений. Замена переменных в кольце $R$ .

Рассмотрим классическую гамильтонову систему, для которой справедливы уравнения (5.2) с начальными условиями  $\tilde{q}_n(0) = q_n$  и  $\tilde{p}_n(0) = p_n$ , подчиняющиеся коммутационным соотношениям:

$$\left[ p_n \circ q_m \right] = -i \hbar \delta_{nm}. \quad (5.24)$$

Пусть  $\tilde{\Lambda}(\vec{q}|\tau|\vec{p})$  есть решение уравнения (4.7) в форме (4.8) с начальным условием  $\tilde{\Lambda}(\vec{q}|0|\vec{p}) = 1$ .

Тогда согласно (5.2) будем иметь:

$$\begin{aligned} q_n \circ \tilde{\Lambda}(\vec{q}|\tau|\vec{p}) &= \tilde{\Lambda}(\vec{q}|\tau|\vec{p}) \circ q_n(\vec{q}|\tau|\vec{p}); \\ p_n \circ \tilde{\Lambda}(\vec{q}|\tau|\vec{p}) &= \tilde{\Lambda}(\vec{q}|\tau|\vec{p}) \circ p_n(\vec{q}|\tau|\vec{p}). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Здесь время  $\tau$  можно рассматривать как параметр. Из соотношений (5.23) и (5.24) следует, что для всех  $\tau$  выполняется условие (5.24), т.е.

$$\left[ \tilde{p}_n(\vec{q}, \vec{p}, \tau) \circ \tilde{q}_m(\vec{q}, \vec{p}, \tau) \right] = -i \hbar \delta_{nm}. \quad (5.26)$$

Последнее равенство позволяет в кольце  $R$  производить замену переменных с сохранением коммутационных соотношений. Для этого достаточно в функции перехода  $\tilde{\Lambda}$  перейти к новым переменным  $\tilde{\vec{q}}$  и  $\tilde{\vec{p}}$  и воспользоваться соотношениями (5.1) или (5.2), изменив порядок их следования.

Соотношения (5.24)-(5.26) позволяют сделать следующие выводы: во-первых, существует тесная связь классических и квантовых представлений, во-вторых, выражение (5.25) можно рассматривать как уравнения для определения  $\tilde{\Lambda}(\vec{q}|\tau|\vec{p})$  и в некоторых частных случаях они могут оказаться более удобными, чем (4.7), например, выражения (5.22) можно рассматривать как уравнения для нахождения явного вида выражения  $\tilde{\Lambda}(\vec{q}|\tau|\vec{p})$ , в третьих, в различных

выражениях, содержащих оператор дифференцирования (не обязательно имеющих физический смысл) возможно произвести замену операторов.

В математических приложениях удобно использовать кольцо  $R_\hbar$ , не содержащее размерную постоянную  $\hbar$  ( $\hbar=1$ ).

Рассмотрим несколько простейших примеров. В случае двух некоммутирующих переменных  $k$  и  $x$  ( $[k \circ x] = -i$ ) иногда удобно произвести замену:

$$\begin{aligned} x &= t \exp[-i \alpha S] \\ k &= \frac{1}{\alpha i} (\exp[i \alpha S] - 1) \quad \alpha \in R \\ [S \circ t] &= -i \end{aligned} \quad (5.27)$$

Рассмотрим уравнение вида:

$$A(x, k) \circ y(x, k) = B(x, k), \quad (5.28)$$

где  $A(x, k)$  и  $B(x, k)$  – известные функции двух переменных,  $y(x, k)$  – искомая функция.

Уравнение (5.28) представляет собой линейное обыкновенное дифференциальное уравнение при условии, что  $A(x, k)$  представляет собой полином по  $k$  или по  $x$ . Пусть, например,  $A(x, k)$  – полином  $N$ -ой степени по  $k$ .

Учитывая, что

$$\exp[i \alpha S] \circ \bar{y}(t, S) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} (i \alpha)^n D_t^n \bar{y}(t, S) = \bar{y}(t + \alpha, S).$$

Здесь  $\bar{y}(t, S) = y(t, S) \circ 1$ .

Таким образом, дифференциальные уравнения можно превратить в разностные и наоборот. Заметим, что в дифференциальных уравнениях

$$P_N \left( x, D \right) \cdot y(x) = B(x) \quad (5.29)$$

можно сразу же сделать замену  $x = t T_{-\alpha}$ ,  $D_x = (T_\alpha - 1)/\alpha$ , где  $T_\alpha$  – оператор сдвига на  $\alpha$ .

Если  $y(x) \cdot 1 = \bar{y}(t)$ , то уравнение (5.29) превратится в уравнение в конечных разностях. Переход от  $y(x)$  к  $\bar{y}(t)$ , и наоборот, легко осуществляется путем разложения по базисным функциям, например,

$$\begin{aligned}
 \cos \Omega t &\rightarrow \cos(\alpha \Omega) \cos \left[ \operatorname{tg} \left[ (\Omega \alpha) \frac{x}{\alpha} \right] \right] \\
 \sin \Omega t &\rightarrow \cos(\alpha \Omega) \sin \left[ \operatorname{tg} \left[ (\Omega \alpha) \frac{x}{\alpha} \right] \right] \\
 \cos \omega x &\rightarrow \sqrt{1 + \alpha^2 \omega^2} \cos \left[ \operatorname{arctg}(\alpha \omega) \frac{t}{\alpha} \right] \\
 \sin \omega x &\rightarrow \sqrt{1 + \alpha^2 \omega^2} \sin \left[ \operatorname{arctg}(\alpha \omega) \frac{t}{\alpha} \right] \\
 \exp[\lambda x] &\leftarrow (1 + \alpha \lambda)^{t/\alpha}.
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Этим самым осуществляется основная идея операционного исчисления [5, 6], позволяющая перейти от пространства оригиналов в пространство изображений. Затем работа и получение результата в пространстве изображений с последующим обратным переходом в пространство оригиналов.

Использование замены переменных в кольце  $R_\alpha$  позволяет осуществить данный переход. В частности такие проблемы существуют в теории упругих сред с микроструктурой [55, 56], где проблема заключается в установлении взаимно-однозначного соответствия между функциями дискретного аргумента и некоторым классом аналитических функций, а также между операциями над ними.

Тем не менее, попытка построить оператор  $Q = \sqrt{D_x}$  (см. теорию дробного дифференцирования) наталкивается на ряд трудностей. Так нельзя внести множество констант в область определения  $Q$ . Действительно, пусть  $Q \cdot 1 = g(x) \neq 0$ , тогда  $Q^2 \cdot 1 = D_x \cdot 1 = 0$ , откуда  $Q \cdot g(x) \equiv 0$ , т.е.  $g(x) = \ker Q$ . С другой стороны  $D_x \cdot g(x) = Q \cdot 0 = 0$ , т.е.  $g(x) = C$  и, следовательно,  $Q \cdot 1 = 0$ .

Если же определены  $Q \cdot x = r(x) \neq 0$ , то  $D_x \cdot x = Q^2 \cdot x = 1$ . С другой стороны  $Q^2 \cdot r(x) \equiv 0$ , т.е.  $r(x) = C \neq 0$  – получаем противоречие.

Таким образом, оператор  $Q$  нельзя корректно определить даже для полиномов любой степени, что сразу же снижает область применимости «дробного дифференцирования». Тем не менее, в квантовой механике рассматривается оператор  $\hat{H} = \sqrt{E_0^2 + c^2 \hat{p}^2}$ . Трудности с дробным

дифференцированием заставляют использовать оператор  $\hat{H}^2$ , что приводит к известному уравнению Клейна-Гордона-Фока. Использование кольца  $R_0$  позволяет обойти проблемы подобного рода. Тем не менее, кольцо  $R_0$  содержит делители нуля. Рассмотрим произведение

$$L \circ y = z = \overline{\overline{L \circ y}}, \quad (5.31)$$

где  $L, y, z \in R_0$ , например, с помощью представления (2.21). Зафиксируем элемент  $L$  кольца  $R_0$ , который будем рассматривать как некий линейный оператор, осуществляющий отображение  $\Omega$  в  $D$ , где  $\Omega$  и  $D$  представляют собой векторные пространства – область определения и область значений оператора  $L$  соответственно ( $\Omega, D \in R_0$ ).

Дадим более общее определение произведению  $L \circ y$ , а именно:

$$\begin{aligned} L \circ y &= \overline{\overline{L y \oplus L \cdot 0}} = z, \\ 0 &\in L \cdot 0, \\ y &\in \Omega, \\ z &\subset D. \end{aligned} \quad (5.32)$$

$L \cdot 0$  – линейное многообразие в  $\Omega (L: \Omega \rightarrow D)$ . Символами  $X \oplus Y$ , где  $X$  и  $Y$  – множества линейного пространства  $\Omega$ , обозначаются множества линейного пространства из  $\Omega$  вида  $x + y$ , где  $x \in X, y \in Y$ . Таким образом, оператор  $L$  отображает элемент  $y$  из  $\Omega$  в множество  $z \subset D$ , где  $\overline{\overline{L y}}$  – некий элемент  $\overline{\overline{L \circ y}} \in z$ , который будем называть частным значением оператора  $L$  (аналогично частному решению линейного дифференциального уравнения), а множество  $L \cdot 0$  – нули оператора  $L^{-1}$ . Линейность оператора  $L$  понимается в том смысле, что для любых элементов  $y_1$  и  $y_2$  из  $\Omega$  и чисел  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  существует хотя бы один элемент из множеств  $L \circ y_1$  и  $L \circ y_2$  и  $L \circ (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$ , для которого существует

$$L \circ (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \overline{\overline{L \circ y_1}} + \lambda_2 \overline{\overline{L \circ y_2}}. \quad (5.33)$$

Множество  $Z = \overline{\overline{L y \oplus L \cdot 0}}$  является классом смежности по линейному многообразию  $Z_0 = L \cdot 0$ . Таким образом, оператор  $L$  отображает элемент  $y$  в элемент  $Z = D/Z_0$ , где  $D/Z_0$  – фактор пространства  $D$  по  $Z_0$ .

Заметим, что т.к.  $L \cdot 0$  – линейное многообразие, то

$$L \cdot 0 \oplus \lambda \cdot L \cdot 0 = L \cdot 0 - \lambda \cdot L \cdot 0 = L \cdot 0. \quad (5.34)$$

Соотношение (5.32) однозначным образом определяет  $Z$ . Два элемента  $L_1$  и  $L_2$  будем называть равными, если для любого  $y \in \Omega$

$$L_1 \circ y = L_2 \circ y. \quad (5.35)$$

Если же для любого элемента  $y \in \Omega$  выполняется

$$L_1 \circ y \subset L_2 \circ y. \quad (5.36)$$

то будем между элементами ставить знак включения, т.е.  $L_1 \subset L_2$ .

Лемма. Для того, чтобы  $L_1 \subset L_2$  необходимо и достаточно, чтобы  $L_1 \circ 0 \subset L_2 \circ 0$  и для любого  $y \in \Omega$  существует хотя бы один элемент из множеств  $L_1 \circ y$  и  $L_2 \circ y$  такой, что  $\overline{L_1 \circ y} = \overline{L_2 \circ y}$ .

Доказательство.

*Необходимость.* Пусть  $L_1 \subset L_2$ , тогда для  $y = 0$  согласно (5.36)  $L_1 \circ 0 \subset L_2 \circ 0$ .

*Достаточность.* Пусть для произвольного  $y \in \Omega$   $\overline{L_1 \circ y} = \overline{L_2 \circ y}$ , тогда

$$L_1 \circ y = \overline{L_1 \circ y} \oplus L_1 \circ 0 \subset \overline{L_2 \circ y} \oplus L_2 \circ 0 = L_2 \circ y. \quad (5.37)$$

Следствие. Если знак включения заменить равенство, то получим необходимое и достаточное условия равенства элементов  $L_1$  и  $L_2$ .

Заметим, что если  $L \cdot 0 = 0$ , то вышеприведенное определение совпадает с общепринятым определением линейного оператора  $D = D/0$ . Учитывая (5.32) и (5.34), свойства линейности можно представить так:

$$\begin{aligned} L \circ (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= \overline{L \circ (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)} \oplus L \circ 0 = \\ &= \lambda_1 \overline{L \circ y_1} + \lambda_2 \overline{L \circ y_2} \oplus L \circ 0 = \lambda_1 L \circ y_1 + \lambda_2 L \circ y_2. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Справедливо следующее утверждение.

Если для произвольных элементов  $y_1$  и  $y_2$  из  $\Omega$  существует хотя бы один элемент из множеств  $L \circ y_1$  и  $L \circ y_2$  такой, что  $\overline{L \circ y_1} = \overline{L \circ y_2}$ , то  $L \circ y_1 = L \circ y_2$ .

Доказательство очевидно и сразу следует из (5.32).

Следовательно, пространства  $\Omega$  и  $D$  естественным образом разбиваются на классы смежности, не содержащие одинаковых элементов, что схематически представлено на рисунке 5.1.

Каждый класс в пространстве  $D$  можно определить одним элементом  $L_y$  и соотношением (5.32).

Таким образом, любой элемент  $L$  из  $R_0$  осуществляет отображение множеств  $Y \in \Omega$  в  $Z \subset D$ , т.е.

$$L \circ Y = Z. \quad (5.39)$$

Если множество  $Z$  состоит из одного элемента, то будем говорить, что элемент кольца  $R_0$  осуществляет отображение «в» (нескольким прообразам соответствует один образ  $L \cdot 0 = 0$ ). Если множество  $Y$  состоит из одного элемента, то  $L$  осуществляет отображение «на» (одному прообразу соответствует несколько образов).

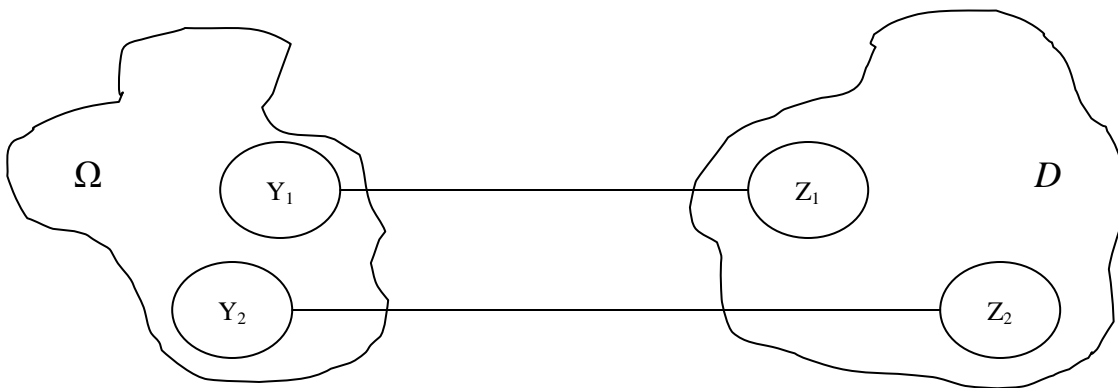


Рисунок 5.1 – Иллюстрация взаимно-однозначного соответствия между разбиениями множеств  $\Omega$  и  $D$  на классы смежности

Из вышесказанного следует, что между множествами  $Y$  и  $Z$  существует взаимно-однозначное соответствие. Таким образом, естественно определить обратный элемент  $L^{-1}$ , как оператор, отображающий  $Z$  на  $Y$ , т.е.

$$L^{-1} \circ Z = Y \quad Z \subset D, Y \subset \Omega. \quad (5.40)$$

**Определение.** Оператор  $L^{-1} \in (D \rightarrow \Omega)$  будем называть обратным  $L$ , если для произвольного  $y \in \Omega$   $L_y = Z$ , выполняются следующие условия:



1.  $\forall z \in Z \quad L^{-1} \circ z = Y \quad y \in Y$
2.  $L^{-1} \circ z \cap Y = \emptyset$ .

Заметим, что когда множества  $Y$  и  $Z$  состоят из одного элемента, то данное определение совпадает с общепринятым. Под обратным везде будем понимать элемент, определенный в смысле (5.32).

Теорема. Для любого элемента кольца  $R$  всегда существует единственный обратный элемент, для которого справедливо соотношение (5.40), т.е.

$$\begin{aligned} L^{-1} \circ z &= \overline{L^{-1} \circ z} + \overline{L^{-1} \circ 0} = Y \subset \Omega \quad Z \in D \\ L^{-1} \circ 0 &= Y_0 \quad Y \in \Omega / Y_0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Доказательство.

Очевидно, что оператор  $L^{-1}$ , отображающий класс  $Z$  в  $Y$  согласно (5.40) будет единственным обратным оператором. Единственность непосредственно следует из определения и соотношения (5.35).

Докажем справедливость (5.40). Пусть

$$\begin{aligned} Y &= L^{-1} \circ z \\ Y' &= L^{-1} \circ z \oplus L^{-1} \circ 0. \end{aligned}$$

Предположим, что существует элемент  $y \in Y'$  такой, что  $y \in Y$ , но тогда согласно (5.41)  $y = \overline{L^{-1} \circ z} + \overline{L^{-1} \circ 0}$  и, следовательно  $L \circ y = L \circ (\overline{L^{-1} \circ z} + \overline{L^{-1} \circ 0}) = Z$ , т.к.  $\overline{L^{-1} \circ z} \in Y$ , но тогда  $y \in Y$ , т.к.  $Y$  – множество всех прообразов  $Z$ , следовательно, наше предположение неверно и  $Y \subset Y'$ .

Предположим, что существует элемент  $y \in Y$  такой, что  $y \in Y'$ . Возьмем произвольный элемент  $y' \in Y'$ , т.е.  $y' \in Y' \subset Y$ .

Тогда согласно (5.33) и (5.41) имеем:

$$L \circ (y - y') = L \circ y - L \circ y' = z - L \circ 0 - z' = L \circ 0 = Z_0.$$

Для любого элемента  $z_0 \in Z_0$  имеем:

$$L^{-1} \circ z_0 = L^{-1} \circ 0 = Y_0$$

и, следовательно, существует элемент из  $Y_0$  такой, что

$$y = y' + L^{-1} \circ 0 \in Y'.$$

Таким образом, наше предположение неверно и  $Y \subset Y'$ . Отсюда следует, что  $Y = Y'$ .

Иными словами, оператор  $L$  осуществляет взаимно-однозначное отображение между множествами  $Y \in \Omega/Y_0$  и  $Z \in D/Z_0$ .

Следствие 1.

$$(L^{\circ -1})^{\circ -1} = L. \quad (5.42)$$

Следствие 2.

Оператор  $L^{-1}$  – линеен, т.е.

$$L^{-1} \circ (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1 L^{-1} \circ z_1 \oplus \lambda_2 L^{-1} \circ z_2. \quad (5.43)$$

Доказательство.

Пусть

$$Y' = L^{-1} \circ (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \neq \lambda_1 L^{-1} \circ z_1 \oplus \lambda_2 L^{-1} \circ z_2 = Y.$$

Предположим, что в  $Y$  имеется элемент такой, что  $y \in Y'$ , но тогда

$$y = \lambda_1 \overline{L^{-1} \cdot z_1} + \lambda_2 \overline{L^{-1} \cdot z_2}$$

и отсюда в силу линейности оператора  $L$

$$L y = \lambda_1 z_1 \oplus \lambda_2 z_2.$$

Но  $Z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in Z$  и, следовательно, наше предположение неверно и  $Y \subset Y'$ . Тогда в силу утверждения  $Y' = Y$ .

Следствие 3.

Для операторов  $L$  и  $L^{-1}$  выполняются следующие тождества:

$$\begin{aligned} L \circ L^{-1} \circ y &= y \oplus L \circ 0, \\ L^{-1} \circ L \circ y &= y \oplus L^{-1} \circ 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Заметим, что если  $L \cdot 0 = 0$ ,  $L^{-1} \circ 0$  ядро  $L$  ( $\ker(L) = L^{-1} \circ 0$ ).

Пример. Пусть  $L = \|L_{ij}\|$  – особенная матрица ( $\text{Det } L = 0$ )  $\Omega = R^n$ , тогда  $D \subset \Omega$

и

$$L^{-1} \cdot y = \overline{L^{-1} \cdot y} \oplus L^{-1} \cdot 0. \quad (5.45)$$

Последнее выражение означает, что система линейных уравнений  $L \cdot \vec{y} = \vec{z}$  – неопределенна.

Вернемся к кольцу  $R_0$ . В общем случае  $R_0$  может содержать делители нуля. Например,  $\Lambda \circ \Psi$  и  $H \circ \Psi$  могут содержать множество функций  $\Psi_0$ , таких, что  $H \circ \Psi_0 = 0$ , для которых в обычном смысле может и не существовать  $L^{-1}$  и  $H^{-1}$ . В этом смысле можно говорить о структуре нуля, как совокупности элементов вида  $A \circ B = 0$  и, например, рассматривать вакуум, как нулевой элемент, имеющий структуру.

#### 5.4 Кинетическое уравнение

В главе 3 уравнения квантовой механики рассматриваются как распространение простого комплексного аддитивного свойства, т.е. как диффузия некоторой комплексной величины. Как известно из физической кинетики [52, 53], уравнения диффузии есть следствие соответствующего кинетического уравнения, так называемое диффузионное приближение. Рассмотрим распространение простого (без внутренней структуры) комплексного аддитивного свойства  $K$ , описываемого плотностью  $\Psi(\vec{r}, \vec{u}, t)$ .

Для описания его эволюции во времени необходимо принять определенную модель («правила игры»). Пусть каждая точка этого распределенного свойства распространяется с некоторой постоянной скоростью  $c$ . Направление распространения характеризуется единичным вектором  $\vec{u}$ .

Свойство  $K$  может поглощаться с чисто мнимым показателем поглощения  $i\alpha(\vec{r}, \vec{u}, t)$ ;  $\vec{r} = \{x, y, z\}$  – декартовы координаты. Кроме того, возможен процесс рассеивания, описываемый мнимым показателем рассеивания  $iA(t, \vec{r}, \vec{v}, |\vec{u}|)$ .

Используя пример 2 из раздела (4.2) и выражение (4.20) для функции перехода  $\Lambda(t, \vec{R}, \vec{v} | T | \vec{r}, \vec{u})$  (здесь  $\vec{v}$  – начальный вектор скорости, а  $\vec{u}$  – конечный) можно сразу же написать кинетическое уравнение, а именно:

$$\begin{aligned} & \frac{i\hbar}{c} \Lambda'_T(t, \vec{R}, \vec{v} | T | \vec{r}, \vec{u}) + i\hbar \vec{u} \vec{\nabla} \Lambda(t, \vec{R}, \vec{v} | T | \vec{r}, \vec{u}) + \\ & + [a(T, \vec{r}, \vec{u}) + \alpha(T, \vec{r}, \vec{u})] \Lambda(t, \vec{R}, \vec{v} | T | \vec{r}, \vec{u}) - \\ & - \int_{(\Omega_0)} A(T, \vec{r}, \vec{\theta} | \vec{u}) \cdot \Lambda(t, \vec{R}, \vec{v} | T | \vec{r}, \vec{u}) d\Omega_\theta = 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Для самого свойства  $\Psi(\vec{r}, \vec{u}, T)$  с учетом

$$\Psi(\vec{r}, \vec{u}, \tau) = \iint_{aV d\Omega_v} \Psi(\vec{R}, \vec{v}, t) \cdot \Lambda(t, \vec{R}, \vec{v} | T | \vec{r}, \vec{u}) dV d\Omega_v. \quad (5.47)$$

Получим следующее кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{c} \Psi'_v(\vec{r}, \vec{u}, \tau) + i\hbar \vec{u} \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, \vec{u}, \tau) + [a(\tau, \vec{r}, \vec{u}) + \varkappa(\tau, \vec{r}, \vec{u})] \Psi(\vec{r}, \vec{u}, \tau) - \\ - \int_{(\Omega_v)} \Psi(\tau, \vec{r}, \vec{v}) \cdot A(\tau, \vec{r}, \vec{v} | \vec{u}) d\Omega_v = 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Кинетическое уравнение (5.48) есть не что иное, как уравнение баланса некоторой комплексной аддитивной величины  $\Psi$ .

Для свободной частицы уравнение (5.48) можно представить в виде ( $\tau \rightarrow c\tau$ ):

$$\begin{aligned} i\hbar \phi'_\tau(\vec{r}, \vec{u}, \tau) = E_0 \phi(\vec{r}, \vec{u}, \tau) - i\hbar \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, \vec{u}, \tau) - [a^{(i)}(\vec{r}, \vec{u}) + \varkappa^{(i)}(\vec{r}, \vec{u})] \phi(\vec{r}, \vec{u}, \tau) + \\ + \int_{(\Omega_v)} \phi(\vec{r}, \vec{v}, \tau) \cdot A^{(i)}(\vec{r}, \vec{v} | \vec{u}) d\Omega_v = 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Здесь  $E_0 = Mc$  – соответственно масса и энергия свободной частицы;  $A^{(i)}(\vec{r}, \vec{v} | \vec{u})$  и  $\varkappa^{(i)}(\vec{r}, \vec{u})$  – соответствующие показатели рассеивания и поглощения. Их явная зависимость от координат и скоростей не относится непосредственно к механике и поэтому в данной работе не рассматривается. Интегрирование ведется по поверхности сферы  $V=1$ , т.е.  $d\Omega_v$  – должно содержать вырезающую функцию, а именно:

$$d\Omega_v = \delta[1 - (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)] dV_x dV_y dV_z. \quad (5.50)$$

## 5.5 Следствия из кинетического уравнения

Рассмотрим уравнение (5.48) и разложим  $A(\vec{r}, \vec{v} | \vec{u})$  по степеням  $\vec{v}$  и  $\vec{u}$ .  
Имеем:

$$\begin{aligned} A(\vec{r}, \vec{v} | \vec{u}) = A_0(\vec{r}) + \Delta \vec{A}_0 \cdot \vec{u} + \vec{A}_1 \cdot \vec{v} + \vec{A}_2 \cdot \vec{v} \cdot \vec{u} + \dots \\ \varkappa(\vec{r}, \vec{v} | \vec{u}) = \varkappa(\vec{r}) + \Delta \vec{\varkappa} \cdot \vec{u} + \dots \end{aligned} \quad (5.51)$$

Оставим в разложении (5.51) только первые четыре слагаемых, которым возможно придать некоторый физический смысл и учтем, что

$$a(\vec{r}, \vec{v}) = \int_{(\Omega_v)} A(\vec{r}, \vec{v} | \vec{u}) d\Omega_v = 2\pi A_0 + 2\pi \vec{A}_1 \cdot \vec{v}. \quad (5.52)$$

Интегралы, содержащие  $u$  в первой степени, равны нулю, а интеграл  $\int_{(\Omega_V)} d\Omega_V = 2\pi$ .

Действительно, рассмотрим интеграл вида:

$$J(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \delta[z - (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)] du_x du_y du_z.$$

Лаплас-образ  $\bar{J}(p)$  равен

$$\bar{J}(p) = \int_0^{\infty} J(z) \exp(-pz) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \exp[-p(x^2 + y^2 + z^2)] dx dy dz = \left( \sqrt{\frac{\pi}{p}} \right)^3.$$

Следовательно  $J(z) = 2 \sqrt{\frac{z}{\pi}} \cdot \pi^{3/2} = 2\pi \sqrt{z}$ .

Полагая  $z=1$  получим результат (5.51).

Отметим, что

$$\int_{(\Omega_V)} V_x^2 d\Omega_V = \frac{2\pi}{3}$$

т.к.

$$\int_{(\Omega_V)} V_x^2 d\Omega_V = \int_{(\Omega_V)} V_y^2 d\Omega_V = \int_{(\Omega_V)} V_z^2 d\Omega_V.$$

Представим  $\Psi(\tau, \vec{r}, \vec{u})$  в виде:

$$\Psi(\tau, \vec{r}, \vec{u}) = \Psi(\tau, \vec{r}) + j(\tau, \vec{r}) \cdot \vec{u} + T_{ij} u_i u_j + \dots \quad (5.53)$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

В данном приближении вычислим интеграл  $J$ :

$$\begin{aligned} J &= \int_{(\Omega_V)} \Psi(\tau, \vec{r}, \vec{v}) A(\vec{r}, \vec{v} | \vec{u}) d\Omega_V = \int_{(\Omega_V)} [\psi + \vec{j} \cdot \vec{v}] \times \\ &\times [A_0 + \Delta \vec{A}_0 \cdot \vec{u} + \vec{A}_1 \cdot \vec{v} + A_2 \vec{v} \vec{u} + \dots] d\Omega_V = \psi \cdot 2\pi [A_0 + \Delta \vec{A}_0 \cdot \vec{u}] + \\ &+ \int_{(\Omega_V)} (\vec{j} \cdot \vec{v}) [(\vec{A}_1 + A_2 \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}] d\Omega_V = 2\pi [A_0 + \Delta \vec{A}_0 \cdot \vec{u}] + \frac{2\pi}{3} (\vec{A}_1 + A_2 \cdot \vec{u}) \cdot \vec{j}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Отметим, что для  $\vec{L} = \text{const}(\vec{v})$

$$\int_{(\Omega_v)} (\vec{j} \cdot \vec{v}_x) \cdot (\vec{L} \cdot \vec{v}) d\Omega_v = \int_{(\Omega_v)} [j_x L_x v_x^2 + j_y L_y v_y^2 + j_z L_z v_z^2 + j_x L_y v_x v_y + \dots] d\Omega_v =$$

$$= \frac{2\pi}{3} (j_x L_x + j_y L_y + j_z L_z) = \frac{2\pi}{3} \vec{j} \cdot \vec{L}.$$

Тогда с учетом соотношений (5.53) и (5.54) уравнение (5.48) можно переписать в виде:

$$i\hbar [\dot{\psi} + \vec{u} \cdot \vec{j} + \dots] + (a + \varkappa) [\psi + \vec{u} \cdot \vec{j} + \dots] + i\hbar \vec{u} \cdot [\vec{\nabla} \psi + \vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{j}) + \dots] -$$

$$- 2\pi [A_0 + \Delta \bar{A}_0 \vec{u}] \psi - \frac{2\pi}{3} [\bar{A}_1 + A_2 \vec{u}] \cdot \vec{j} = 0.$$

Далее следует учесть, что в силу известного тождества

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

имеем

$$(\Delta \vec{\omega} \cdot \vec{u}) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{j}) = \Delta \vec{\omega} \cdot \vec{j} + (\vec{u} \times \Delta \vec{\omega}) \cdot (\vec{j} \times \vec{u})$$

и т.к.  $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = 1$

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{j})] = \vec{\nabla} \cdot [\vec{j} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{j})].$$

Тогда с учетом (5.52) получим

$$\left\{ i\hbar [\dot{\psi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}] + \varkappa \psi - \frac{2\pi}{3} \bar{A}_1 \cdot \vec{j} \right\} +$$

$$+ \left\{ i\hbar \vec{u} \cdot \vec{j} + [\Delta \vec{\varkappa} + 2\pi (\bar{A}_1 - \Delta \bar{A}_0)] \vec{u} \psi + \left( \varkappa + 2\pi A_0 - \frac{2\pi}{3} A_2 \right) \vec{u} \cdot \vec{j} \right\} +$$

$$+ [(\Delta \vec{\varkappa} + 2\pi \bar{A}_1) \cdot \vec{u}] \cdot \vec{u} \cdot \vec{j} + i\hbar \vec{\nabla} \cdot [\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{j})] + i\hbar \vec{\nabla} \psi + \dots = 0.$$

Или в виде:

$$\left\{ i\hbar [\dot{\psi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}] + \varkappa \psi - \frac{2\pi}{3} \bar{A}_1 \cdot \vec{j} + (\Delta \vec{\varkappa} + 2\pi \bar{A}_1) \cdot \vec{j} \right\} +$$

$$+ \vec{u} \cdot \left\{ i\hbar \dot{\vec{j}} + [\Delta \vec{\varkappa} + 2\pi (\bar{A}_1 - \Delta \bar{A}_0)] \psi + \left( \varkappa + 2\pi A_0 - \frac{2\pi}{3} A_2 \right) \vec{j} + i\hbar \vec{\nabla} \psi \right\} - \quad (5.55)$$

$$- i\hbar \vec{u} \cdot \text{rot}(\vec{u} \times \vec{j}) + [\vec{u} \times (\Delta \vec{\varkappa} + 2\pi \bar{A}_1)] \cdot (\vec{j} \times \vec{u}) + \dots = 0.$$

Собирая слагаемые при разных степенях  $\vec{u}$ , получим в диффузионном приближении следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
i\hbar \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right] + \alpha \psi + \left( \Delta \vec{\alpha} + \frac{4\pi}{3} \vec{A}_1 \right) \vec{j} &= 0 \\
i\hbar \left[ \dot{\vec{j}} + \vec{\nabla} \psi \right] + \left( \alpha + 2\pi A_0 - \frac{2\pi}{3} A_2 \right) \vec{j} + \left[ \Delta \vec{\alpha} + 2\pi (\vec{A}_1 - \Delta \vec{A}_0) \right] \psi &= 0
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Система (5.56) с точностью до обозначений совпадает с системой уравнений (3.9), т.к. согласно [52] диффузионные уравнения и есть диффузионное приближение более строгих кинетических уравнений. С учетом обозначений, принятых в главе 3, квазипотенциалы  $A$  и  $\Delta \vec{A}$  квазигравитационного поля, а также  $B$  и  $\Delta \vec{B}$  квазиэлектромагнитного поля, равны

$$\begin{aligned}
A &= \pi \left[ A_0 - \frac{A_2}{3} \right], \quad \Delta \vec{A} = \pi \left[ \frac{\vec{A}_1}{3} - \Delta \vec{A}_0 \right]; \\
B &= \alpha + \pi \left( A_0 - \frac{A_2}{3} \right), \quad \Delta \vec{B} = \Delta \alpha + \pi \left( \frac{5\vec{A}_1}{3} - \Delta \vec{A}_0 \right).
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Отсюда видно, что в кинетическом уравнении слагаемые, ответственные за рассеивание, также входят в квазиэлектромагнитный потенциал.

Произведем попытку в кинетическом уравнении (5.48) разделить «собственное» и «внешнее» воздействия. Для упрощения записи в уравнении (5.48) введем следующие обозначения:

$$W = W(\tau, \vec{r}, \vec{u}) = a(\tau, \vec{r}, \vec{u}) + \alpha(\tau, \vec{r}, \vec{u}) = W^{(e)} + W^{(i)},$$

где индексы « $e$ » и « $i$ » обозначают соответственно внешний и внутренний собственные показатели и интеграл вида:

$$\int_{(\Omega_v)} \Psi(\vec{v}) A(\tau, \vec{r}, \vec{v} | \vec{u}) d\Omega_v = A \bullet \Psi. \tag{5.58}$$

Распределение  $\Psi(\vec{r}, \vec{u}, \tau)$  представим в виде  $\varphi(\vec{r}, \vec{u}, \tau) \cdot \psi(\vec{r}, \vec{u}, \tau)$ , где  $\varphi(\vec{r}, \vec{u}, \tau)$  удовлетворяет уравнению (5.49), а  $\psi(\vec{r}, \vec{u}, \tau)$  – модулирует  $\varphi$ .

Тогда с учетом (5.49) уравнение (5.48) можно переписать в виде:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + i\hbar \vec{u} \vec{\nabla} \psi + W^{(e)} \psi - \varphi^{-1} \cdot [A^{(e)} + A^{(i)}] \bullet \varphi \psi + \psi \varphi^{-1} A^{(i)} \bullet \varphi = 0. \tag{5.59}$$

Перейдем к дифференциальному приближению. Имеем:

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{r}, \vec{u}, \tau) &= \bar{\psi}(\vec{r}) + \vec{j}(\vec{r})\vec{u} + \dots \\
\varphi(\vec{r}, \vec{u}, \tau) &= \varphi_0(\vec{r}) + \vec{G}(\vec{r})\vec{u} + \dots = \varphi_0(\vec{r})[1 + \vec{R} \cdot \vec{u} + \dots] \\
\psi \cdot \varphi &= [\bar{\psi} \varphi_0 + \vec{j} \vec{G}] + [\varphi_0 \vec{j} + \bar{\psi} \vec{G}]\vec{u} + \dots = \varphi_0 \{ (\bar{\psi} + \vec{j} \vec{R}) + (\vec{j} + \bar{\psi} \vec{R}) + \dots \} \\
\vec{R}(\vec{r}) &= \frac{\vec{G}}{\varphi_0}
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Рассматривая  $\vec{R}$  как малый параметр в нулевом диффузионном приближении, получим:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + i\hbar \vec{u} \vec{\nabla} \psi + W^{(e)} \psi - [A^{(e)} + A^{(i)}] \bullet \psi = 0. \tag{5.61}$$

В кинетическом уравнении (5.61) без всякого «ущерба» можно отбросить слагаемые, содержащие  $A^{(e)}$ , как отвечающие за суперслабое гравитационное взаимодействие. Таким образом, с позиций ОТП понятно, почему в основные уравнения не входит «собственная энергия» частиц. Рассмотрим, при каких условиях в диффузионном приближении величина  $\psi \psi^* = \rho$  является сокращающейся величиной.

Так как для действительных  $W^e$  и  $A = A^{(i)}$

$$i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} + i\hbar \vec{u} \vec{\nabla} \psi^* + W^{(e)} \psi^* - A \bullet \psi^* = 0, \tag{5.62}$$

то

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{u} - [\psi^* A \bullet \psi - \psi A \bullet \psi^*] = 0. \tag{5.63}$$

С учетом соотношений (5.54) и (5.60) получим:

$$\rho = \bar{\psi} \bar{\psi}^* + \vec{j} \vec{j}^*$$



$$\begin{aligned}
J &= \psi^* A \bullet \psi - \psi A \bullet \psi^* = 2\pi (\bar{\psi}^* + \vec{j} \cdot \vec{u}) \cdot \left[ (A_0 + \Delta \vec{A}_0 \vec{u}) \bar{\psi} + \frac{1}{3} (\vec{A}_1 + A_2 \vec{u}) \right] - \\
&- 2\pi (\bar{\psi} + \vec{j} \cdot \vec{u}) \cdot \left[ (A_0 + \Delta \vec{A}_0 \vec{u}) \bar{\psi}^* + \frac{1}{3} (\vec{A}_1 + A_2 \vec{u}) \right] + 0 \cdot (u_i u_j) = \\
&= \frac{2\pi}{3} (\vec{A}_1 + A_2 \vec{u}) (\bar{\psi}^* \vec{j} - \bar{\psi} \vec{j}^*) + 2\pi (A_0 + \Delta \vec{A}_0 \vec{u}) (\bar{\psi} \vec{j}^* - \bar{\psi}^* \vec{j}) \vec{u} + \\
&+ \frac{2\pi}{3} [(\vec{A}_1 + A_2 \vec{u}) \times \vec{u}] \cdot (\vec{j} \times \vec{j}^*) = \\
&= 2\pi \left[ (A_0 + \Delta \vec{A}_0 \vec{u}) \vec{u} - \frac{1}{3} (\vec{A}_1 + A_2 \vec{u}) \right] \cdot (\bar{\psi} \vec{j}^* - \bar{\psi}^* \vec{j}) + \frac{2\pi}{3} [\vec{A}_1 \times \vec{u}] \cdot [\vec{j} \times \vec{j}^*] + \dots = \\
&= 2\pi \left( A_0 - \frac{A_2}{3} \right) \vec{u} - 2\pi \left( \frac{\vec{A}_1}{3} - \Delta \vec{A}_0 \right) + 2\pi \vec{u} \times (\vec{u} \times \Delta \vec{A}_0) = \\
&= 2\pi \left\{ \left( A_0 - \frac{A_2}{3} \right) \vec{u} - \left( \frac{\vec{A}_1}{3} - \Delta \vec{A}_0 \right) + \vec{u} \times (\vec{u} \times \Delta \vec{A}_0) \right\} \cdot \vec{S} + \frac{2\pi}{3} [\vec{A}_1 \times \vec{u}] \cdot [\vec{j} \times \vec{j}^*] + \dots
\end{aligned}$$

Здесь  $\vec{S} = \bar{\psi} \vec{j}^* - \bar{\psi}^* \vec{j}$ .

Поскольку в выражении для  $\rho$  сохранены лишь слагаемые, не содержащие  $\vec{u}$ , то для того, чтобы  $\rho(\vec{r}, \tau)$  была сохраняющейся величиной, достаточно, чтобы  $\Delta \vec{A} \equiv 0$  или  $\Delta \vec{A}_0 = \frac{\vec{A}_1}{3}$ . В этом случае согласно (5.57)

$$\begin{aligned}
A &= A^{(i)} = \pi \left[ A_0 - \frac{A_2}{3} \right] \\
\Delta \vec{A} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Поскольку целью данной работы не является изучение внутренней структуры рассматриваемых объектов, то ограничимся лишь замечанием о том, что набор зависимостей  $A_0(r)$  и  $A_2(r)$  позволяет описывать устойчивые частицы с внутренней структурой, т.е. некий аналог континуума Коссера [57] в классической механике.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одна из основных целей данной работы – попытка разобраться в окружающем нас мире. Для этого необходимо как-то его описать. А что для этого нужно? Наличие хотя бы двух начал – назовем их, – условно белое и условно черное (например, инь и янь, товар и деньги и т.д.). Далее потребуется ввести экстенсивную локальную плотность этих «начал», а для этого нужен некоторый базис, т.е. система отсчета. Система координат (место) должна быть трехмерной, ибо так мы воспринимаем окружающий нас МИР (не десяти или одиннадцати мерным!). Для описания различных «событий» нужно их упорядочить, т.е. ввести время (для каких-то событий, возможно, времени может и не быть). Часто каждый индивид живет в своем времени – раньше, позже. Можно ввести некоторое договорное время, связанное с какими-то повторяющимися масштабными событиями, например периодом обращения Земли вокруг Солнца. Далее следует построить логику событий: прошлое – будущее, и она, естественно, будет квантовая.

Покажем это. Пусть имеется последовательность событий  $a, b, \dots$ , образующих процесс. Процесс – это упорядоченная последовательность событий. Описывать события будем функциями  $a(t, \tau), b(t, \tau), \dots$ , аналитическими по переменной  $t$  – время начала события и кусочно-непрерывной по длительности события  $\tau$ . Например,  $a(t, \tau)$  – плотность вероятности осуществления события  $a$  за время  $\tau$ . Если построить кольцо  $R_{\circ}$  с естественным сложением и умножением в смысле

$$c(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, \tau_1) b(t + \tau_1, \tau - \tau_1) d\tau_1 = a \circ b,$$

где  $a, b, c \in R_{\circ}$ , то данное равенство означает, что событие  $c$  есть последовательное выполнение событий  $a$  и  $b$ . По такому принципу работает большинство процессов в Природе. В простейшем случае, если  $a, b, \dots$  не зависят явно от времени начала события (система, например, не «старится»), то данное выражение представляет обычную свертку функций (умножение в смысле Микусинского), т.е.  $c(\tau) = a(\tau) * b(\tau)$ . Таким образом,  $R_* \subset R_{\circ}$ . Отметим, что в отличие от кольца Микусинского, кольцо  $R_{\circ}$  может иметь делители нуля, т.е. не может быть расширено элементарным способом до поля отношений.

Вместо кольца  $R_{\circ}$  целесообразно использовать кольцо  $R_{\circ}$ . Изоморфизм между кольцом  $R_{\circ}$  и  $R_{\circ}$  устанавливается с помощью преобразования Фурье

$$A(t, E) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, \tau) e^{\frac{i}{\hbar} E \tau} d\tau,$$

где  $A(t, E)$  – аналитическая функция по переменным  $t$  и  $E$ ;  $\hbar$  – некоторая размерная постоянная.

Определим произведение функций  $C = A \circ B$  следующим образом:

$$C(t, E) = A(t, E) \circ B(t, E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^n}{n!} \frac{\partial^n A}{\partial E^n} \frac{\partial^n B}{\partial t^n}$$

где  $A, B, C \in R_{\circ}$ .

Если в вышеуказанном соотношении осуществить формальный переход  $\hbar \rightarrow 0$ , то данное произведение превращается в обычное коммутативное умножение, т.е.

$$C(t, E) \underset{\hbar \rightarrow 0}{=} A(t, E) B(t, E).$$

В пространстве оригиналов этот переход означает, что

$$c(t, E) \underset{\hbar \rightarrow 0}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, \tau) b(t, \tau - \tau_1) d\tau_1 = a * b.$$

Последнее означает, что в данной задаче можно пренебречь зависимостью протекания события от текущего времени. Все вышесказанное указывает на то, что большинство встречающихся в природе явлений естественным образом квантованы, так как для их описания необходимо использовать некоммутативное кольцо  $R_{\circ}$ . Введенный выше параметр  $E$  будем называть квазиэнергией процесса. Если процесс циклический (в природе только такие процессы существуют), то аддитивная характеристика всего процесса  $E$  образует спектр квазиэнергий.

Чтобы построить систему отсчета необходимо ввести понятие скорости распространения «начал». Имея в распоряжении определение времени и задав скорость можно построить метрическое трехмерное пространство координат. Свойства данного пространства – *это способ описания*. Поэтому спор о том, каково наше пространство – евклидово, псевдоевклидово, риманово и т.д. – бессмыслен. Какое захотим, такое и будет в зависимости от наделенных свойств. Описание изучаемых процессов будет зависеть от того, каково пространство. Например, луч света (лазер) считать прямой или нет? То есть, что

есть прямая? Чем более «простое» пространство мы выбираем, тем сложнее может оказаться способ описания и наоборот.

Далее можно поступить так, как показано в п. 3.6. Что у нас «белое», а что «черное» (в любом белом всегда что-то «чернеется» и наоборот) должно на локальном уровне определяться калибровкой комплексной плотности данного «начала».

В качестве иллюстрации приведем пример нашего подхода к описанию нестационарной теплопроводности через реальные конструкции. Сравнительный анализ с экспериментом показал, что нестационарное уравнение Фурье не слишком хорошо описывает «быстрые» во времени процессы. Приняли, что тепловой поток имеет структуру – назовем эти виды «теплорода», например, красное, синее и зеленое тепло. Взаимное превращение тепла (смена цвета) с их различными коэффициентами теплопроводности позволяет адекватно описать весь процесс теплопереноса. Проверка – эксперимент. На попытку наивного вопроса: «А что такое цвет тепла»? Ответ: «Вопрос лишен смысла». Можно, конечно, дать объяснение, например, для электропроводящих материалов должны быть механизмы – решеточной, электронной и электромагнитной теплопроводности. Построить адекватное объяснение можно, наверное, всегда. А нужно ли? Заметим, что также строится в целом и вся физика. Атом неделим (Демокрит). Не все укладывается в науку. Атом имеет структуру – ядро и электроны. Ядро имеет структуру и т.д.

Таким образом, любые начала можно наделить структурой (тонкой структурой и т.д.). Например, оттенки черного и белого. Описать их взаимопревращение возможно либо введением дополнительных обобщенных координат – взаимодействие через поля с участием соответствующих «посредников», либо через систему уравнений баланса свойств со структурой.

Подведем предварительные итоги. Окружающий нас МИР материален, объективен и очень разнообразен. Знаем о нем мы еще очень мало. Существующие способы описания субъективны. На наш взгляд поле – посредник и всего лишь способ описания, хотя и очень хороший. Надеемся, как удалось показать, что используя традиционное построение физической теории можно описать и многие другие явления, в том числе нефизической природы, хотя по мере углубления знаний становится все сложнее отличить физическое от биологического и т.д. Рациональная механика – раздел математики и рациональная физика, скорее всего тоже.

## Список литературы

1. Беленький И.М. Введение в аналитическую механику. – М.: Высшая школа. 1964. – 323 с.
2. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1968. – 575 с.
3. Микусинский Ян. Операторные исчисления. – М.: ИЛ. 1956.
4. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1975. – 288 с.
5. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1975.
6. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1974. – 542 с.
7. Маслов В.П. Операторные методы. – М.: Наука. 1973.
8. Фейман Р.П. Об операторном исчислении, имеющем приложение в квантовой электродинамике // Проблемы современной физики. 1955. Т.3. С. 37-79.
9. Карасев М.В., Маслов В.П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. – М.: Наука, 1991.
10. Карасев М.В., Маслов В.П. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения // Современные проблемы математики. – М.: ВИНТИ, 1979. Т.13. С. 145-267.
11. Маслов В.П. Применение метода упорядоченных операторов для получения точных решений // ТНФ. 1977. Т.3, № 2. С. 185-209.
12. Маслов В.П., Незайкинский В.Е. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения // Современные проблемы математики. – М.: ВИНТИ, 1979. Т.13. С. 5-144.
13. Карасев М.В. О вейлевском и упорядоченном исчислении некоммутирующих операторов // Математические заметки. 1979. Т.26. № 6. С. 885-907.
14. Anderson R.F.V. The Weyl functional calculus // I. Funct. Anal. – 1969. V.4 № 2. P.p. 240-267.
15. Березин Ф.А. Квантование // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т.38. № 5. С. 1116-1175.

16. Березин Ф.А. Квантование в комплексных симметричных пространствах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. Т.39. № 2. С. 363-402.
17. Heaviside O. Electromagnetic theory. London. 1899.
18. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
19. Жилин П.А. Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики. В сб. Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем. Тр. XXII школы-семинара. – Санкт-Петербург. 1995. – С. 14-40.
20. Жилин П.А. Реальность и механика. Тр. XXIII школы-семинара. – Санкт-Петербург. 1996. – С. 6-49.
21. Жилин П.А. Актуальные проблемы механики. – Санкт-Петербург: ИПМАШ РАН, 2006. Т.1 – 306 с.
22. Коршунов В.С., Рымкевич П.П. Феноменологические законы диффузии в твердых телах. Изв. ВУЗов. Физика. 1979. № 4. С. 31-36.
23. Рымкевич П.П. Кинетика диффузии в твердых телах. Канд. дисс. – Л.: 1979. – 198 с.
24. Коршунов В.С., Матвеев В.Н., Рымкевич П.П. Трехмерная задача диффузии в однородной среде // Дифференциальные уравнения в частных производных: Сб. тр. – Л.: 1986. – С. 37-39.
25. Коршунов В.С., Рымкевич П.П. Описание кинетики диффузии в произвольных нестационарных полях в двухтоковом приближении // деп. В ЦИВТИ МО СССР Д5129. – Оpubл. в УПИН ЦИВТИ МО СССР. 1981. № 1.
26. Бейтмен Г., Эрдейн А. Таблицы интегральных преобразований. – М.: Наука, 1969. Т. 1.
27. Игнатович В.К. Нейтронная оптика. – М.: Наука, 2006.
28. Игнатович В.К. Этюд об одномерном периодическом потенциале // УФН. 1986. Т 150. С. 146-158.
29. Фок В.А. Решение одной задачи теории диффузии по методу конечных разностей и применение его к диффузии света // Труды ГОИ. Т4. Вып. 34. 1926.
30. de Broylie Non-linear wave mechanics. A causal interpretation. Elsvier Publishing Company: Amsterdam / London / N.Y. Princeton. 1966.
31. Дженнер М. Эволюция понятий квантовой механики. – М.: Наука, 1985.

- 32.Марков М.А. О трех интерпретациях квантовой механики. – М.: Наука, 1991.
- 33.Игнатович В.К. Ультрахолодные нейтроны – открытие и исследование // УФН, 166:3. 1996. С. 303-326.
- 34.Ignatovich V.K. Classical interpretation of quantum mechanic // В сборнике (КЕК Proceedings 96-5) Nuclear Physics and Fundamental Physics with Neutrons // Tsukuba, Japan. 1994.
- 35.Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. Т2. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. – 936 с.
- 36.Матвеев А.М. Атомная физика. – М.: Высшая школа, 1989.
- 37.Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
- 38.Тернов И.М., Халилов В.Р., Родионов В.Н. Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. – 304 с.
- 39.Хекли Э., Тирринг В. Элементарная квантовая теория поля (пер. с англ.). – М.: ИЛ, 1963. – 315 с.
- 40.Александров Е.Б., Хвостенко Г.И., Чайка М.П. Интерференция атомных состояний. – М.: Гл. ред. физ-мат. лит., 1991. – 256 с.
- 41.Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. – М.: высшая школа, 1990.
- 42.Кейз К., Извайфель П. Линейная теория переноса. – М.: Мир, 1972.
- 43.Игнатович В.К. Распространение акустических волн в упругих слоистых средах // Акустический журнал. 1992. 38 (1). С. 70-78 (see Sov. Physics Acoustics – USSR 38 (1): 34-39, 1992).
- 44.Игнатович В.К. О линейной задаче распространения излучения // ДАН СССР. 1991. 318 (2); 332-336; Sov. Phys. Dokl. 36. 382 (1991).
- 45.Апресян Д.А., Кравцов Ю.А. Теория переноса излучения. Статистические и волновые аспекты. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1983. – 216 с.
- 46.Гусев Е.Л. Математические методы синтеза слоистых структур. – Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1993. – 262 с.
- 47.Рымкевич П.П. Введение в теорию распространения свойств / Труды XXVII летней школы «Анализ и синтез нелинейных систем». – СПб.: ИПМаш РАН, 2000. С. 455-497.
- 48.Перевозников Е.Н., Рымкевич П.П., Сталевич А.М. Моделирование вязкоупругости синтетических нитей // Известия ВУЗов. ТЛП. 1992. № 1.

- 49.Рымкевич П.П. Модели современного мира в механике, физике, технике и экономике: учеб. пособие / П.П. Рымкевич, А.С. Горшков. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. – 28 с.
- 50.Горшков А.С., Макаров А.Г., Рымкевич О.В., Рымкевич П.П. Математическое моделирование процессов нестационарной теплопроводности через многослойные изделия текстильной и швейной промышленности // Дизайн. Материалы. Технология. 2010. № 4. С. 116-118.
- 51.Горшков А.С., Макаров А.Г., Рымкевич П.П., Рымкевич О.В. Нестационарный теплоперенос через многослойные изделия текстильной и швейной промышленности // Известия высших учебных заведений. Технология легкой промышленности. 2010. Т. 9. № 3. С. 44-47.
- 52.Лившиц Е.М., Патаевский Л.П. Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния. – М.: Наука, 1978. – 497 с.
- 53.Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Статистическая физика. Часть 1. – М.: Наука, 1976. – 583 с.
- 54.Гинсбург И.Ф. Квантовая механика (нерелятивистская теория) и отдельные задачи физики твердого тела. – Новосибирск: НГУ, 2004. – 209 с.
- 55.Соколов А.А., Тернов И.М. Квантовая механика и атомная физика. – М.: Просвещение, 1970. – 423 с.
- 56.Кукин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1975. – 416 с.
- 57.Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Hermann, Paris, 1909.



*Научное издание*

*Рымкевич Павел Павлович  
Горшков Александр Сергеевич*

**ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА**