

Моделирование вычислительных, телекоммуникационных, управляющих и социально-экономических систем

DOI: 10.5862/JCSTCS/4
УДК 519.652

А.С. Ильин

АЛГОРИТМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ

A.S. Ilyin

INTERPOLATION ALGORITHM FOR AN INCREASING FUNCTION BY EXPONENTIAL SPLINES

Представлены формулы вычисления параметров экспоненциальных и логарифмических базовых функций для интерполяции возрастающей функции, заданной таблицей. Рассмотрены случаи равномерных и неравномерных шагов аргумента. Главная цель – предотвращение интерполяционных выпуклостей, поэтому стыковка производных вытеснена на второстепенные позиции. Предложено рассматривать скачки производной как факторы качества исходных данных при визуальном контроле. На тестовом примере проведено сравнение двух вариантов склеивания базовых функций и обсужден вопрос сохраняемости формы. Представлен пример обработки экспериментальных градуировочных данных.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ; ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ; ГРАДУИРОВОЧНАЯ ФУНКЦИЯ; СОХРАНЯЕМОСТЬ ФОРМЫ.

The paper presents formulas for calculating the parameters of exponential and logarithmic basic functions for the interpolation of the increasing function set by the table. Cases with even and odd numbers of argument steps are considered. The main goal was to prevent interpolation convexity, so the joining of derivatives was relegated to minor positions. It has been suggested that jumps in a derivative should be regarded as quality factors for basic data when visual examination is performed. The test case involved comparing two variants of pasting basic functions and discussing the issue of form-keeping. An example of processing experimental calibration data is demonstrated. The procedure is presented in the Pascal language.

INTERPOLATION; EXPONENTIAL SPLINES; CALIBRATION FUNCTION; FORM-KEEPING.

Актуальность предлагаемого алгоритма обусловлена тем, что интерполяция требуется повсеместно при обработке экспериментальных данных. Весьма важной областью применения интерполяции является и робототехника, прежде всего по части разработки сенсорных устройств [1]. Обработка сигналов от датчиков обычно происходит с применением градуировочных функций,

определяющих зависимость электрического сигнала от измеряемых физических величин внешнего пространства. Например, мы измеряем интенсивность гамма-излучения, которое зависит от типа и объема материала, от плотности или концентрации содержащихся веществ. В этих и во многих других случаях имеющиеся теоретические формулы обычно нуждаются в эксперимен-

тальных проверках и поправках. Именно экспериментальные данные обычно применяются в качестве эталонных. В ряде случаев они формируются на основе измерений на заготовленном наборе образцов (в пределах десятка). Поэтому на ограниченном количестве строк табличных данных возникает задача построения интерполяционной функции; при этом следует контролировать ее качество, т. е. выявлять общую закономерность (норму) и отклонение от нормы, чтобы при необходимости повторить изготовление образцов либо принять решение о том, что вместо интерполяции надо выполнить сглаживание, например, методом наименьших квадратов.

При разработке новых сенсорных систем для расширяющихся областей применения часто случается, что в условиях кооперации и распределения полномочий между специалистами разного профиля формирование градуировочных зависимостей происходит без участия разработчиков настраиваемой контрольно-измерительной аппаратуры, по отношению к которым экспериментаторы являются пользователями или заказчиками. Поэтому актуальна интеллектуализация предоставляемых программно-аппаратных средств, в данном случае и по части формирования градуировочных зависимостей. Пользователям должны быть предоставлены удобные средства для работы, включая индикацию понятных и исчерпывающих сведений о качестве исходных и формируемых данных.

Известно, что для обработки экспериментальных данных выбор метода аппроксимации (интерполяции) целесообразно осуществлять с учетом условий, характерных для данного анализируемого эксперимента: характер изменения данных, количество точек, точность измерения.

Для градуировочных функций типично, что природа нам предоставляет монотонно возрастающие зависимости: $y(x_i) < y(x_{i+1})$ при $x_i < x_{i+1}$.

Однако возрастание может быть неравномерным и переходящим в асимптотическое приближение к некоторому предельному уровню. Если на таких участках получены редкие исходные данные, то

обычные способы построения интерполяционной кривой с помощью полиномов дадут неверную картину с выпуклостями. Предостережения об этом эффекте имеются, например, в [2, с. 409] и в [3].

В связи с этим заслуживают внимание экспоненты. Известно [4], что поиск параметров интерполяционной функции в виде суммы экспонент является задачей сложной из-за нелинейности экспонент, даже не всегда имеющей решение. Считается, что построение суммы экспонент целесообразно в тех случаях, когда происхождение исходной таблично заданной функции имеет экспоненциальную природу, как, например, результаты измерений интенсивности излучения смеси радиоактивных материалов.

Поэтому мы приходим к необходимости использовать кусочно-экспоненциальные комбинации. Традиционно они называются *сплайнами*.

Например, в [5] рассматриваются «экспоненциальные гистосплайны».

На основе экспоненты представляются функции синус и косинус – гиперболические и тригонометрические. Такого рода обобщения называются *экспоненциальными L-сплайнами* [6, 7] и предлагаются для самого широкого использования. Однако проработанные теоретические основы оказываются весьма далекими от практического внедрения. Тем самым подтверждаются слова, написанные в [8, с. 44] именно по теме аппроксимации: «Общие формулы, рассчитанные на все случаи жизни, нередко оказываются настолько сложными, что их не применяют ни в одном конкретном случае». Там же [8, с. 44] далее отмечен факт, постоянно получающий практическое подтверждение: «Трудоёмкость же вычислений часто оказывается существенно меньшей при применении рекуррентных процедур».

Поэтому для практической деятельности по части формирования градуировочных зависимостей сенсорных устройств возникла необходимость выполнить интерполяцию экспонентами, хоть и не по обобщенной методике, но в значительной мере универсальной, ограничиваемой лишь условием монотонности возрастания (или убывания) требуемой функции.

Построение экспоненты по трем произвольным точкам. Искомую экспоненциальную функцию запишем в виде $y = C + B \exp(Ax)$.

Для вычисления трех параметров запишем систему трех уравнений на трех точках:

$$\begin{aligned} y_1 &= C + B \exp(Ax_1); \\ y_2 &= C + B \exp(Ax_2); \\ y_3 &= C + B \exp(Ax_3). \end{aligned} \quad (1)$$

Разумеется, надо предварительно проверить неравенство отношений $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ и $(y_3 - y_1)/(x_3 - x_1)$, чтобы предотвратить попытки строить экспоненту по прямой линии.

Исключаем параметр C :

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= B(\exp(Ax_1) - \exp(Ax_2)); \\ y_3 - y_2 &= B(\exp(Ax_3) - \exp(Ax_2)). \end{aligned} \quad (2)$$

Исключаем параметр B :

$$\begin{aligned} (y_3 - y_2)(1 - \exp(-A(x_2 - x_1))) &= \\ = (y_2 - y_1)(\exp(A(x_3 - x_2)) - 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Полученное уравнение относительно A удобно записать в виде функции, приравняемой к нулю:

$$\begin{aligned} R(A) &= (y_2 - y_1)(\exp(A(x_3 - x_2)) - 1) + \\ &+ (y_3 - y_2)(\exp(-A(x_2 - x_1)) - 1) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Функция $R(A)$ имеет спад от минус-бесконечности и возрастание в плюс-бесконечность, а в отрицательную область плавно входит через точку $R(0) = 0$. Поэтому точка выхода из отрицательной области (искомое решение уравнения) находится приблизительно на таком же расстоянии от точки минимума A_{\min} , как и точка $R(0)$. Для поиска точки минимума запишем уравнение с первой производной:

$$\begin{aligned} R'(A) &= (y_2 - y_1)(x_3 - x_2) \exp(A(x_3 - x_2)) - \\ &- (y_3 - y_2)(x_2 - x_1) \exp(-A(x_2 - x_1)) = 0. \end{aligned}$$

Получаем решение:

$$A_{\min} = \frac{\ln \left(\frac{(y_3 - y_2)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_3 - x_2)} \right)}{x_3 - x_1}. \quad (5)$$

Как видно, выражение под логарифмом

всегда положительное при условии монотонного возрастания исходных данных.

Удвоенное расстояние до точки минимума, являющееся приближенным решением уравнения (4), берем в качестве начального значения для итерационного процесса по методу касательных:

$$\begin{aligned} A_0 &= 2A_{\min}; \quad R(A_0) + R'(A_0)\Delta A = 0; \\ \Delta A &= -R(A_0) / R'(A_0); \quad A \leftarrow A_0 + \Delta A. \end{aligned}$$

Всего лишь пять итерационных шагов оказываются достаточными, чтобы получить решение уравнения (4) с машинной точностью.

Далее обратными подстановками в (2) и (1) получаем значения параметров B и C .

Построение экспоненты на равномерных шагах аргумента. Рассмотрим часто встречающийся вариант, когда $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$.

Для исключения параметров A и B применяем попарное деление уравнений (1), получаем уравнение, решаемое относительно параметра C :

$$\frac{y_2 - C}{y_1 - C} = \frac{y_3 - C}{y_2 - C}.$$

Получаем точное решение:

$$C = \frac{y_2^2 - y_1 y_3}{2y_2 - y_1 - y_3}.$$

Обозначив

$$r = \exp(A(x_3 - x_2)) = \exp(A(x_2 - x_1)),$$

запишем уравнение (3) в виде:

$$(y_3 - y_2)(1 - 1/r) = (y_2 - y_1)(r - 1).$$

Решение этого уравнения $r = (y_3 - y_2) / (y_2 - y_1)$ позволяет получить:

$$A = \frac{\ln \left(\frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} \right)}{x_3 - x_2}. \quad (6)$$

Вычислив значения параметров A и C , получаем из (1) значение B с помощью любой из трех формул:

$$\begin{aligned} B &= (y_1 - C) \exp(-Ax_1) = \\ &= \frac{(y_2 - y_1)^2}{(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)} \exp(-Ax_1), \\ B &= (y_2 - C) \exp(-Ax_2) = \\ &= \frac{(y_3 - y_2)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)} \exp(-Ax_2), \end{aligned} \quad (7)$$

$$B = (y_3 - C) \exp(-Ax_3) = \frac{(y_3 - y_2)^2}{(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)} \exp(-Ax_3). \quad (7)$$

Формулы (1)–(7) запрограммированы в процедуре, представленной в приложении.

Аналогично можно построить функцию $x = c + b \exp(ay)$ по формулам (1)–(5), при этом везде поменять местами x и y .

Соответственно получаем логарифмическую функцию $y = \ln((x - c)/b)/a$.

Построение логарифмической функции на равномерных шагах аргумента. Рассмотрим также вариант $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ для логарифмической функции, хотя при этом получается решение итерационное, а не в виде точных аналитических формул.

Систему уравнений для этого варианта удобнее записать с экспонентами:

$$x_1 = c + b \exp(ay_1); \quad x_2 = c + b \exp(ay_2); \\ x_3 = c + b \exp(ay_3).$$

Вычитая первое из второго, второе из третьего, приравнявая шаги аргумента x , получаем:

$$\exp(ay_2) - \exp(ay_1) = \exp(ay_3) - \exp(ay_2).$$

После операции деления получаем:

$$\exp(a(y_3 - y_2)) + \exp(-a(y_2 - y_1)) = 2.$$

Если $y_3 - y_2 > y_2 - y_1$, то сделаем следующие обозначения:

$$p = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}; \quad z = \exp(a(y_2 - y_1)).$$

Приходим к необходимости найти точку пересечения горизонтальной линии уровня два со следующей функцией:

$$h(z) = z^p + \frac{1}{z} = 2.$$

Кроме искомой точки пересечения, зависящей от параметра p , существует и постоянная точка пересечения при $z = 1$. Точка минимума функции $h(z)$ находится приблизительно посередине между двумя точками пересечения уровня два. Приравнявая производную к нулю, находим:

$$z_{\min} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Отсчитывая удвоенное расстояние от точки $z = 1$, находим приближенное реше-

ние $z = 1 - 2(1 - z_{\min})$.

Для итерационного уточнения по методу касательных нетрудно получить формулу:

$$z \leftarrow z + \gamma \frac{2z^2 - z^{p+2} - z}{pz^{p+2} - 1}.$$

Эмпирически найдено подходящее значение $\gamma = 1, 4$.

Получаем значение параметра

$$a = \ln(z)/(y_2 - y_1).$$

Если $y_2 - y_1 > y_3 - y_2$, то обозначения сделаем иначе:

$$p = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}; \quad z = \exp(a(y_3 - y_2)).$$

Приходим к необходимости найти точку пересечения горизонтальной линии уровня два со следующей функцией:

$$h(z) = z + \frac{1}{z^p} = 2.$$

Находим точку минимума и отмеряем удвоенное расстояние:

$$z = 1 + 2(p^{\frac{1}{p+1}} - 1).$$

Аналогично строим итерационный процесс уточнения по методу касательных, получаем формулу:

$$z \leftarrow z + z \frac{2z^p - z^{p+1} - 1}{z^{p+1} - p}.$$

Оказывается, что такой пересчет достаточно выполнить три раза.

Получаем значение параметра

$$a = \ln(z)/(y_3 - y_2).$$

Далее вычисляем оставшиеся параметры требуемой функции:

$$b = \frac{x_2 - x_1}{\exp(ay_2) - \exp(ay_1)}; \quad c = x_1 - b \exp(ay_1).$$

Склеивание базовых функций. Имея набор функций, построенных на тройках заданных точек (в виде экспоненты, логарифма или прямой линии), приступаем к их склеиванию следующим образом:

пусть на точках (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) построена функция $F_1(x)$;

пусть на точках (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) построена функция $F_2(x)$;

обратные функции обозначим маленькими буквами $f_1(y)$ и $f_2(y)$;



на интервале от x_1 до x_2 , который является общим для функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, формируем комбинацию по формуле $G_1(x) = U_1(x)F_1(x) + (1 - U_1(x))F_2(x)$;

аналогично на интервале от x_2 до x_3 формируем комбинацию

$$G_2(x) = U_2(x)F_2(x) + (1 - U_2(x))F_3(x);$$

и т. д.

Каждая склеивающая функция $U_k(x)$ на своем интервале от x_k до x_{k+1} должна удовлетворять условию $0 \leq U_k(x) \leq 1$. Иначе говоря, мы уверены, что истинная функция проходит где-то в зоне между $F_k(x)$ и $F_{k+1}(x)$.

Этот вариант склеивания путем суммирования вертикальной координаты y будем называть вертикальным.

Аналогичное склеивание обратных функций путем суммирования горизонтальной координаты x будем называть горизонтальным:

$$g_1(y) = u_1(y)f_1(y) + (1 - u_1(y))f_2(y),$$

$$g_2(y) = u_2(y)f_2(y) + (1 - u_2(y))f_3(y)$$

и т. д.

Будем называть правильным перекрестком в точке x_k ситуацию, когда обе разности $F'_{k-1}(x_k) - F'_k(x_k)$ и $F'_{k+1}(x_k) - F'_k(x_k)$ больше нуля (или обе меньше нуля).

В отличие от правильных перекрестков, будем называть x_k точкой прогиба, если при подходе к ней обе разности $F'_{k-1}(x_k) - F'_k(x_k)$ и $F'_{k+1}(x_k) - F'_k(x_k)$ больше нуля или обе меньше нуля. При этом разности $F'_{k-1}(x_k) - F'_k(x_k)$ и $F'_{k+1}(x_k) - F'_k(x_k)$ имеют разные знаки.

Варианты склеивания. Наиболее простым вариантом является усреднение:

$$H(x) = (F_1(x) + F_2(x)) / 2.$$

В этом случае гарантируется, что итоговая функция будет всегда возрастающая (или убывающая).

Непрерывность производной не соблюдается, но существует возможность регулировать изломы за счет выбора видов функций (экспонента или логарифм) и вариантов их склеивания (по горизонтали или по вертикали) в их комбинированных комбинациях.

Например, уместно минимизировать сумму абсолютных величин разностей углов наклона получающейся изломанной итоговой

линии в узловых точках, вычисляемую по формуле:

$$\sum_k abs(arctg(0,5(F'_{k-1}(x_k) + F'_k(x_k))) - arctg(0,5(F'_k(x_k) + F'_{k+1}(x_k))))).$$

При горизонтальном склеивании обратных функций вместо функции $arctg$ надо применять функцию $arctg$, разрывающуюся в нуле.

Заметим, что в точке прогиба x_k разность арктангенсов можно рассматривать как две независимые разности:

$$abs(arctg(0,5(F'_{k-1}(x_k) + F'_k(x_k))) - arctg(F'_k(x_k))),$$

$$abs(arctg(F'_k(x_k)) - arctg(0,5(F'_k(x_k) + F'_{k+1}(x_k)))).$$

Поэтому такая задача минимизации может быть разбита на независимые подзадачи, граничащие в точках прогиба.

Аналогично можно ставить задачу минимизации максимальной разности углов. Но в рамках данной статьи ограничиваемся рассмотрением наиболее простых решений, претендующих на широкое использование именно благодаря своей простоте.

Рассмотрим склеивание следующего вида:

$$G(x) = ((x_2 - x)F_1(x) + (x - x_1)F_2(x)) / (x_2 - x_1).$$

В этом варианте первая производная

$$G'(x) = (F_2(x) - F_1(x) + (x_2 - x)F'_1(x) + (x - x_1)F'_2(x)) / (x_2 - x_1)$$

обладает свойством непрерывности; при этом $G'(x_k) = F'_k(x_k)$.

Очевидно, что на правильных перекрестках итоговая производная $G'(x)$ претерпевает заведомое занижение (или завышение) по сравнению с истинной производной требуемой функции. Между тем именно правильные перекрестки имеются в тех случаях, когда заданные исходные данные возрастают (убывают) вполне гладко. Это типично для градуировочных функций.

Сравнение вариантов склеивания. Чтобы проверить, в какой мере получаемая кривая интерполяции адекватна истинной

кривой (сохраняемость формы), наиболее резонно и проще всего взять в качестве тестовой какую-нибудь аналитическую функцию, которая чем-то похожа на заданную табличную функцию, выполнить интерполяцию на заданном наборе точек, а затем с мелким шагом построить график или таблицу отклонений результата интерполяции от исходной тестовой функции.

Рассмотрим пример тестовой интерполяции функции $y(x) = \sqrt{x+1}$ на целочисленных точках аргумента. Результаты представлены в табл. 1. Как видно, оказалось, что вариант $H(x)$ обеспечивает приближение лучше, чем вариант $G(x)$. Непрерывность производной $G'(x)$ совсем не означает, что она более точно повторяет $y'(x)$.

$$A_1 = -0,1707; B_1 = -2,4019; C_1 = 3,439;$$

$$A_2 = -0,1266; B_2 = -2,9013; C_2 = 3,984.$$

Вариант $H(x)$ не гарантирует плавность первой производной, но именно это свойство является полезным для того, чтобы пользоваться весьма простым критерием качества результатов измерений, принимаемых в качестве исходных данных для интерполяции. Анализируя скачки первой производной, можно выражать экспертное мнение, считать ли исходные данные впол-

не адекватными действительности.

Пример экспоненциальной интерполяции. Для экспериментальных данных, указанных в табл. 2, на рисунке представлены графики интерполяционной функции и ее производной (в масштабе, нормированном по максимуму первого графика). В связи с тем что форма зависимости имеет горизонтальную асимптоту, в качестве базовых функций применены экспоненты с вертикальным усреднением.

Как видно, имеющиеся скачки производной помогают обращать внимание пользователя на подозрительные участки кривой, для которых желательны уточнения исходных данных.

Пользователю предоставляется также возможность в интерактивном режиме вводить поправки (устранять горбы и провалы), наблюдать уточненные графики в сравнении с исходными.

Предлагаемая методика интерполяции в столь простом варианте удобна для практического программирования, обеспечивает адекватное построение градуировочных функций и контроль их качества. Использована на практике в области радиационных измерений.

Таблица 1

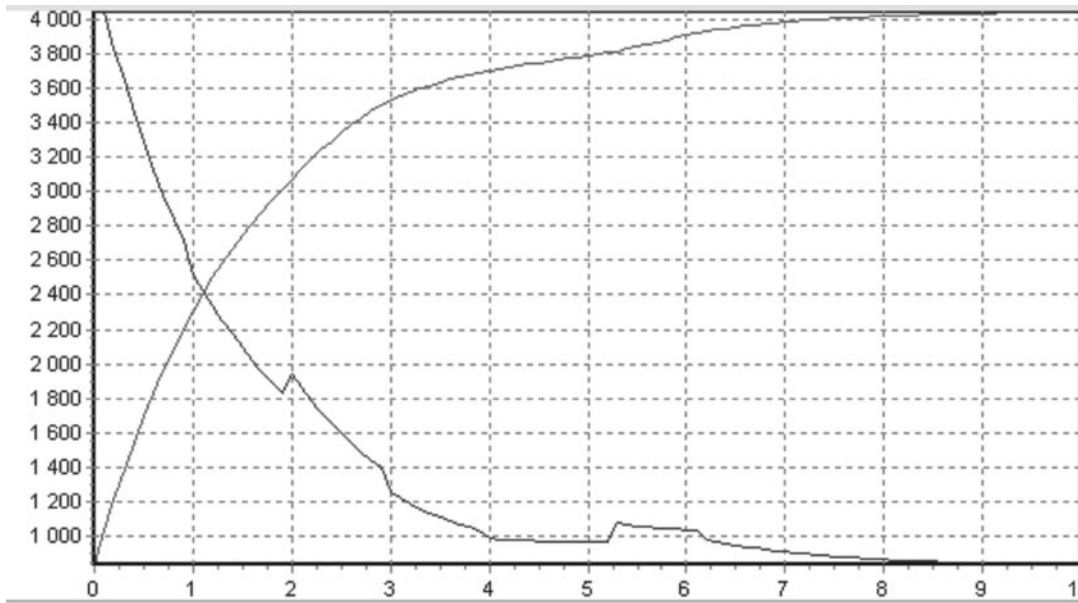
Сравнение двух вариантов интерполяции

x	$y(x)$	$y'(x)$	$(F_1'(x) - y'(x)) * 1000$	$(F_2'(x) - y'(x)) * 1000$	$(F_1(x) - y(x)) * 1000$	$(F_2(x) - y(x)) * 1000$	$(G(x) - y(x)) * 1000$	$(H(x) - y(x)) * 1000$
2,0	1,7321	0,2886	2,7998	-3,3961	0	0	0	0
2,1	1,7607	0,2839	2,5596	-2,2929	0,2691	-0,2829	0,2139	-0,0068
2,2	1,7889	0,2795	2,1811	-1,3664	0,5073	-0,4644	0,3129	0,0214
2,3	1,8166	0,2752	1,6798	-0,6000	0,7013	-0,5615	0,3224	0,0698
2,4	1,8439	0,2711	1,0696	0,0206	0,8396	-0,5893	0,2680	0,1251
2,5	1,8708	0,2672	0,36275	0,5088	0,9120	-0,5618	0,1751	0,1751
2,6	1,8974	0,2635	-0,4298	0,8763	0,9093	-0,4915	0,0687	0,2088
2,7	1,9235	0,2599	-1,2982	1,1336	0,8235	-0,3902	-0,0261	0,2166
2,8	1,9494	0,2564	-2,2338	1,2903	0,6474	-0,2682	-0,0850	0,1896
2,9	1,9748	0,2531	-3,2285	1,3551	0,3747	-0,1352	-0,0842	0,1197

Таблица 2

Исходные данные для интерполяции

0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,3	6,2	10,0
830	2310	3069	3533	3705	3817	3935	4046



Графики интерполяционной функции и ее производной

Приложение

Процедура вычисления параметров экспоненты

```
//Pascal- процедура вычисления параметров экспоненты
// y = C + B * exp (A*x)
function Exp_Interpol (var A: real; var B: real; var C: real;
  x1: real; x2: real; x3: real; // x1 < x2 < x3
  y1: real; y2: real; y3: real): integer;
var res, n: integer; f, ff, d, Amin, A0, dA, u, v, z, dif, r: real;
begin d:=0.00001;
  if not ((x1+d<x2) and (x2+d<x3) and (y1+d<y2) and (y2+d<y3)) then
    begin A:=0; B:=0; C:=0; res:=0; // нарушен порядок возрастания
    end else
  begin dif := (y3-y2) * (x2-x1) / ((y2-y1) * (x3-x2));
    if abs(dif-1) < d then
      begin // нужна линейная интерполяция
        A:=(y3-y1)/(x3-x1); B:= y1-A*x1; C:=0; res:=1;
      end else
    if x3+x1 = x2+x2 then
      begin // равномерный шаг аргумента
        z:=(2*y2 - y1 - y3); C := (y2*y2 - y1*y3) / z;
        r :=(y3-y2)/(y2-y1); A :=ln(r)/(x3-x2);
        B := (y1-C ) *exp(-A*x1); res:=2;
      end else
    begin Amin := ln(dif) / (x3-x1); A0 := 2 * Amin;
      n:=10; while n>0 do
        begin dec(n);
          u:=exp(A0*(x3-x2)); v:=exp(-A0*(x2-x1));
          F := (y2-y1)*(u-1)+ (y3-y2)*(v-1);
          FF := (y2-y1)*(x3-x2)*u - (y3-y2)*(x2-x1)*v;
          dA:=-F/FF; A0 := A0+dA;
```

```
if abs(dA/Amin) < 0.000000000000001 then break;  
end;  
A:=A0; B:=(y1-y2)/(exp(A0*x1)-exp(A0*x2));  
C:=y1-B*exp(A0*x1); res:=3;  
end; end; result:=res; end;
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юревич Е.И. Сенсорные системы в робототехнике: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. 100 с.
2. Дьяконов В.П. Mathcad 2001: спец. справочник. СПб.: Питер, 2002. 832 с.
3. Численные методы решения задач. Обработка экспериментальных данных средствами MathCAD [Электронный ресурс] / URL: <http://tib.znaimo.com.ua/docs/1100/index-26510-1.html> (Дата обращения 12.03.2015)
4. Утешев А.Ю. Интерполяция [Электронный ресурс] / URL: <http://pmpu.ru/vf4/interpolation> (Дата обращения 12.03.2015)
5. Винниченко Л.Ф. Экспоненциальные гистосплайны: предпосылки введения // Publishing house Education and Science s.r.o., конф. Европейская наука XXI века, 2009 [Электронный ресурс] / URL: http://www.rusnauka.com/14_ENXXI_2009/Matemathics/46070.doc.htm (Дата обращения 12.03.2015)
6. Стрелкова Е.В. Аппроксимация локальными L-сплайнами. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2009.
7. Шевалдина Е.В. Аппроксимация локальными экспоненциальными сплайнами с произвольными узлами // Сиб. журн. вычисл. матем. 2006. № 9:4. С. 391–402.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы: учеб. пособие. 2-е изд., испр. СПб.: БХВ-Петербург, 2013. 592 с.

REFERENCES

1. Yurevich Ye.I. *Sensornyye sistemy v robototekhnike* [Touch Systems in a Robotics]. St. Petersburg: Politekhn. un-t Publ., 2013, 100 p. (rus)
2. Dyakonov V.P. *Mathcad 2001: special'nyj spravochnik* [Mathcad 2001: Special Reference Book]. St. Petersburg: Peter Publ., 2002, 832 p. (rus)
3. *Numerical methods of the solution of tasks. Processing of experimental data by means of MathCAD.* Available: <http://tib.znaimo.com.ua/docs/1100/index-26510-1.html> (Accessed 12.03.2015). (rus)
4. Uteshev A.Yu. Interpolation. Available: <http://pmpu.ru/vf4/interpolation> (Accessed 12.03.2015). (rus)
5. Vinnichenko L.F. Exponential gistosplines: introduction prerequisites, *Proc. of the Conf. Yevropeyskaya nauka XXI veka* [European science of the XXI century], 2009. Available: http://www.rusnauka.com/14_ENXXI_2009/Matemathics/46070.doc.htm (Accessed 12.03.2015). (rus)
6. Strelkova Ye.V. *Approksimatsiya lokalnymi L-splaynami. Diss. cand.* [Approximation by local L-splines. Abstr. cand. diss.]. Yekaterinburg: Institute of mathematics and mechanics Publ., 2009. (rus)
7. Shevaldina Ye.V. Approximation by local exponential splines with any knots, *Sib. zhurn. vychisl. matem.* [Siberian J. of calculus mathematics], 2006, No. 9:4, Pp.391–402. (rus)
8. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. St. Petersburg: BHV-Petersburg Publ., 2013, 592 p. (rus)

ИЛЬИН Анатолий Степанович – старший научный сотрудник Центрального научно-исследовательского и опытно-конструкторского института робототехники и технической кибернетики, кандидат технических наук.

194064, Россия, Санкт-Петербург, Тихорецкий пр., д. 21.

E-mail: toly@rtc.ru

ILYIN Anatoliy S. State Scientific Center for Robotics and Technical Cybernetics (RTC).

194064, Tikhoretsky Ave. 21, St.Petersburg, Russia.

E-mail: toly@rtc.ru